

Matematika a térképészetben

SZAKDOLGOZAT

Készítette: Madár Otília

Matematika BSc - tanári szakirány

Témavezető: dr. Naszódi Márton, adjunktus
ELTE TTK, Geometriai Tanszék



Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Budapest, 2012

Tartalomjegyzék

Bevezető	2
1. Definíciók, jelölések	4
2. Pont körre vonatkozó hatványa	6
3. Gömbök	9
4. Inverzió	12
5. Sztereografikus projekció	18
6. Földrajzi bevezető, alkalmazások	19
6.1. A sztereografikus projekció alkalmazása a térképészetben	20
6.2. Centrális hengervetület	24
6.3. Lambert- féle területtartó hengervetület	27
6.4. Centrális síkvetület	29
Irodalomjegyzék	34

Bevezető

"A matematika bizonyos tekintetben mindig is az összekötő kapocs szerepét játszotta a különböző tudományok, valamint a tudomány és a művészet között."

(Rényi Alfréd)

Egyetemi éveim alatt sokszor előfordult, hogy azt kérdezték tőlem, mi közük van egymáshoz a matematikának és a földrajznak. Volt amikor ez számomra is kérdéses volt, de miután végig hallgattam egy félév térképészeti bevezetőt rájöttem, igen is sok közük van egymáshoz. Így szakdolgozatom témájának választásában az motivált, hogy olyan kapcsolódási pontot találjak a matematika és a földrajz világa között, amiről nem olyan gyakran hallunk, ugyanakkor érdekes és matematikailag jól megközelíthető. Ezért döntöttem a térképészet, mint a geometria egy alkalmazási területe mellett. Vagyis a matematika valóban összekötő kapocs a különböző tudományok között. Szakdolgozatom írása nagy élmény volt számomra. Jó érzés volt megfogalmazni azokat a definíciókat, melyek leírják az egyes vetítések lényegét és mibenlétét, illetve a bizonyítások készítése közben rájönni apró összefüggésekre. Úgy vélem, ez által is megtanultam jobban gondolkodni.

Az első fejezetben kimondunk néhány definíciót, melyek szükségesek lesznek a későbbiekben előkerülő állítások és tételek bizonyításának megértéséhez. Ezt követően bevezetésre kerül a pont körre vonatkozó hatványa és a hozzá kapcsolódó állítások. Például belátjuk, hogy egy pont körre vonatkozó hatványa nem függ a szelő megválasztásától. A harmadik fejezetben hipergömbökre vonatkozóan kimondunk néhány állítást és azok következményeit. A szakdolgozat matematikai tartalmának fő része

az inverzió, amit a negyedik fejezetben tárgyalunk. Ezen fejezetben kimondjuk, majd bizonyítjuk a hipersík és hipergömb inverzére vonatkozó állítást. Az ötödik fejezetben definiálásra kerül a sztereografikus projekció, melynek térképészeti jelentőségét az utolsó fejezetben láthatjuk. A hatodik, s egyben a szakdolgozat utolsó fejezetében sor kerül a földrajzi bevezetőre, ezt követően a sztereografikus projekció térképészeti jelentőségét, a centrális hengervetület, a Lambert- féle területtartó hengervetület és a centrális síkvetület definícióját és jellemzőit tárgyaljuk. Kiszámoljuk a sztereografikus projekció és a centrális síkvetület távolságtorzítását, majd láthatunk ezekre néhány példát is.

1. Definíciók, jelölések

Ebben a fejezetben azokat az alap definíciókat mondjuk ki, melyekre az alábbiakban tárgyalt tételek és bizonyításuk megértéséhez szükségünk lehet.

1.1. Definíció. A G hipergömb azon pontok halmaza \mathbb{R}^d -ben, melyek egy adott ($r \in \mathbb{R}^+$ sugarú) távolságra vannak a p középponttól, vagyis

$$G = \{x \in \mathbb{R}^d : \|p - x\| = r\}.$$

1.2. Definíció. A gömb az euklideszi tér részhalmaza, így örököl egy távolságot. Bevezethető ugyanakkor egy gömbi távolság, amely szerint két pont távolsága a gömb középpontjától a pontokba mutató vektorok szöge.

1.3. Definíció. A $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_k \in \mathbb{R}^d$ -beli vektorok lineárisan függetlenek, ha $\lambda_1 p_1 + \dots + \lambda_k p_k = \vec{0}$ csak úgy teljesül, ha minden $\lambda_i = 0$ skalárok, ahol $i = 1, \dots, k$.

1.4. Definíció. Egy lineáris altér tetszőleges eltoltját affin altérnek nevezzük.

1.5. Definíció. Egy affin altér dimenziója a lineáris altér dimenziója. A $(d - 1)$ dimenziójú affin alteret hipersíknak nevezzük.

1.6. Definíció. Legyen $d \geq 2$, $G \subset \mathbb{R}^d$ hipergömb, melynek középpontja P , sugara r és $S \subset \mathbb{R}^d$ affin altér, melyre $1 \leq \dim S < d$. Jelölje $Q \in \mathbb{R}^d$ a P pont merőleges vetületét S -en. Ha $d(P, Q) = r$, akkor a $G \cap S = Q$. Ekkor azt mondjuk, hogy S érinti G -t a Q pontban, ha $\dim S = d - 1$, akkor S a G hipergömb Q -beli érintő hipersíkja és $T_Q G$ -vel jelöljük.

1.7. Definíció. Egy $A \subset \mathbb{R}^d$ halmaz affin burka az a tartalmazásra nézve legkisebb affin altér, amely A -t tartalmazza. Jelölése: $\langle A \rangle$

1.8. Megjegyzés. Tetszőleges halmaznak egyértelműen létezik affin burka: az összes őt tartalmazó affin altér metszete.

1.9. Definíció. Homotéciának nevezzük a P középpontú, λ arányú nagyítást vagy kicsinyítést. Jelölése: $H_{P,\lambda}$.

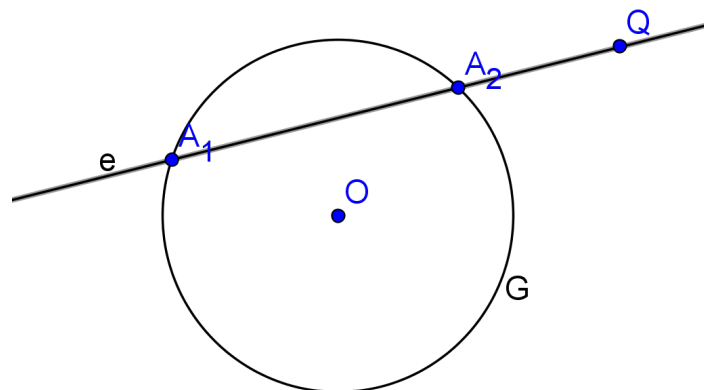
1.10. Definíció. Egy \mathbb{R}^d -beli görbén $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ folytonos leképezést értünk.

1.11. Megjegyzés. Ismert, hogy differenciálható görbéknek tetszőleges pontjában értelmezhető az érintője.

2. Pont körre vonatkozó hatványa

Ezen fejezetben tárgyaljuk a pont körre vonatkozó hatványát, illetve hozzá kapcsolódóan kimondunk néhány állítást.

2.1. Definíció. Adott egy G kör és egy Q pont. Legyen e a G kör egy szelője, mely illeszkedik a Q pontra, A_1 és A_2 pedig $e \cap G$ pontjai. A Q pont G körre vonatkozó hatványa $h_G(Q) = |QA_1| \cdot |QA_2|$. (2.1. ábra)

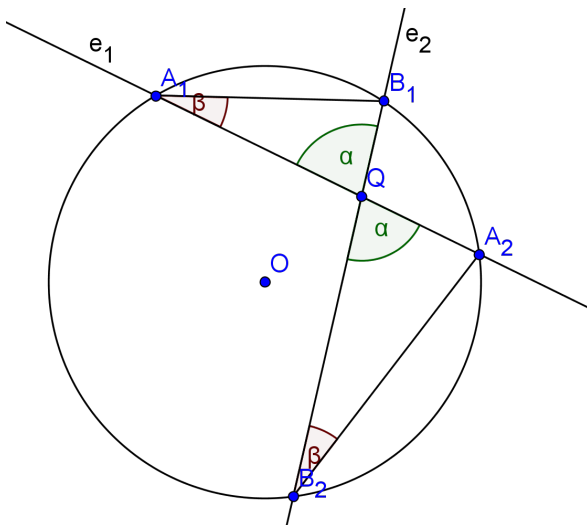


2.1. ábra. Pont körre vonatkozó hatványa

2.2. Állítás. A Q pont G körre vonatkozó hatványa nem függ a szelő megválasztásától.

Bizonyítás: Először tekintsük azt az esetet, amikor Q a G kör egy belső pontja. Legyen G -nek Q -n átmenő egyik szelője e_1 . Az A_1 és A_2 pedig $e_1 \cap G$ pontjai, illetve legyen G -nek Q -n átmenő egy másik szelője e_2 . A B_1 és B_2 pedig az $e_2 \cap G$ pontjai. Ekkor a QB_2A_2 háromszög hasonló a QA_1B_1 háromszöggel, mert Q -nál lévő szögük csúcsszögek,

így nagyságuk megegyezik, illetve a B_2 és az A_1 csúcsnál lévő szögek is megegyeznek a kerületi szögek tétele alapján. Így a háromszögek két-két oldalának aránya és az ezek által közrezárt (Q -nál lévő) szög egyenlő. Vagyis a $|QA_2| / |QB_2| = |QB_1| / |QA_1|$, amiből átrendezve kapjuk, hogy $|QA_1| \cdot |QA_2| = |QB_1| \cdot |QB_2|$. Ebből következik, hogy a pont körre vonatkozó hatványa nem függ a szelő megválasztásától. (2.2. ábra)

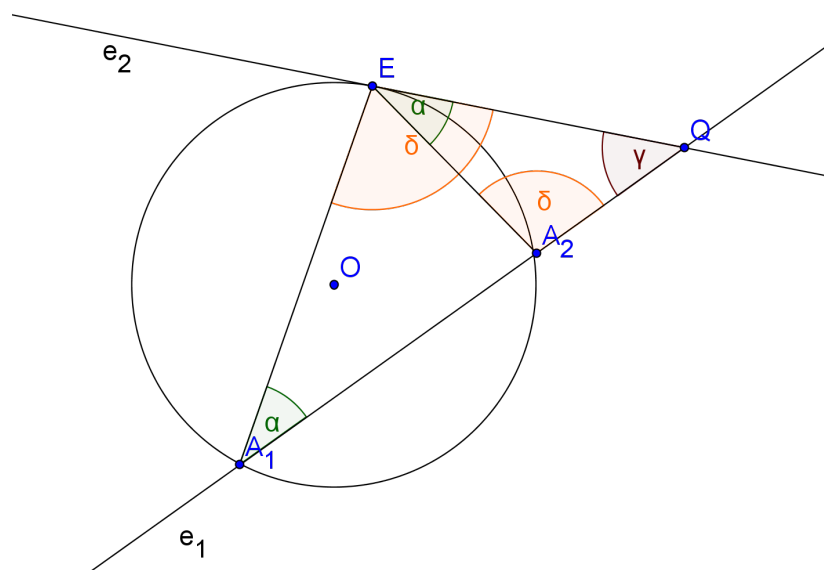


2.2. ábra. A 2.2- es állítás bizonyításának első esete

Tekintsük azt az esetet, amikor Q a G kör egy külső pontja. Legyen G -nek Q -n átmenő egyik szelője e_1 . Az A_1 és A_2 pedig $e_1 \cap G$ pontjai, ahol A_2 a Q -hoz közelebbi pont. Továbbá legyen G -nek Q -n átmenő egyik érintője e_2 , az E pedig az $e_2 \cap G$ pontja. Jelölje EA_1Q szöget α , A_1QE -t pedig γ . Tudjuk, hogy ugyanazon ívhez tartozó kerületi szögek nagysága egyenlő, vagyis $EA_1Q \sphericalangle = QE A_2 \sphericalangle = \alpha$. Továbbá $A_1QE \sphericalangle = A_2QE \sphericalangle = \gamma$. Ezért A_1EQ és EA_2Q szög is egyenlő. Így az A_1QE háromszög hasonló az EA_2Q háromszöggel, amiből következik, hogy $|QA_1| / |QE| = |QE| / |QA_2|$. Ezt átrendezve kapjuk, hogy $|QA_1| \cdot |QA_2| = |QE| \cdot |QE|$, amiből következik, hogy $E = A_1 = A_2$. Tehát a pont körre vonatkozó hatványa nem függ a szelő megválasztásától. (2.3. ábra)

□

2.3. Definíció. Kör normálegyenlete: $k(x, y) = Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$, ahol a főegyütthetők, vagyis A és $B = 1$ és a jobboldal egyenlő 0-val.



2.3. ábra. A 2.2- es állítás bizonyításának második esete

2.4. Tétel. Adott egy G kör és egy Q pont. Legyen $k(x, y)$ a G kör normálegyenlete, ekkor $h_G(Q) = k(Q)$.

Bizonyítás: Adott egy G kör és egy Q pont. Jelölje C a kör középpontját, A_1 és A_2 pedig a C -n és Q -n átmenő e szelő és a G kör metszéspontjait, ahol A_2 a Q -hoz közelebbi pont, továbbá legyen $d = d(Q, C) = |CQ|$, r pedig a kör sugara. Ekkor $h_G(Q) = |QA_1| \cdot |QA_2| = (d + r) \cdot (d - r) = d^2 - r^2 = d(Q, C)^2 - r^2$.

Legyen $\vec{q} = (q_1, q_2)$, $\vec{c} = (c_1, c_2)$ Q -ba és C -be mutató helyvektorok. Ekkor a jobb oldalt tekintve kapjuk, hogy $k(Q) = k(\vec{q}) = k(q_1, q_2) = (q_1 - c_1)^2 + (q_2 - c_2)^2 - r^2 = (\vec{q} - \vec{c})^2 - r^2 = d(Q, C)^2 - r^2$.

Tehát $h_G(Q) = k(Q)$.

□

3. Gömbök

A későbbiekben bevezetésre kerülő inverzió előkészítése képpen az alábbi fejezetben kimondunk néhány állítást és azok következményeit hipergömbökre vonatkozóan.

3.1. Definíció. A $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k \in \mathbb{R}^d$ affin összefüggők, ha léteznek $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, nem mind 0 skalárok, amelyekre $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{v}_i = \underline{0}$ és $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 0$.

3.2. Definíció. A $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ affin függetlenek, ha nem affin összefüggők.

3.3. Állítás. Ha $P_0, \dots, P_k \in \mathbb{R}^d$ pontok affin függetlenek, akkor $P_0\vec{P}_1, P_0\vec{P}_2, \dots, P_0\vec{P}_k$ vektorok lineárisan függetlenek.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $\lambda_1 P_0\vec{P}_1 + \dots + \lambda_k P_0\vec{P}_k = \underline{0}$. Szeretnénk belátni, hogy ekkor $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$. A $\underline{0} = \lambda_1 (\underline{p}_1 - \underline{p}_0) + \dots + \lambda_k (\underline{p}_k - \underline{p}_0) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{p}_i - \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i\right) \underline{p}_0$. A pontok affin függetlenségéből következik, hogy $\lambda_i = 0$ minden i -re. □

A következő lineárisalgebrai állítást használjuk, de nem bizonyítjuk.

3.4. Állítás. Legyen $1 \leq k \leq d$. Ekkor tetszőleges k \mathbb{R}^d -beli hipersíkra (azaz $(d-1)$ dimenziós affin altérre), ha a normálvektoraik lineárisan függetlenek, akkor a metszetük egy $(d-k)$ dimenziós affin altér.

3.5. Állítás. Legyen $d \geq 1$ és tegyük fel, hogy P_0, P_1, \dots, P_k affin független pontok \mathbb{R}^d -ben, ahol $k \leq d$. Ekkor van olyan hipergömb \mathbb{R}^d -ben, amely illeszkedik mindegyik P_i pontra. Az ilyen hipergömbök középpontjai egy a $\langle P_0, P_1, \dots, P_k \rangle$ affin altérhez képest merőleges kiegészítő állású $(d-k)$ -dimenziós affin alteret alkotnak \mathbb{R}^d -ben.

Bizonyítás: Vegyük P_0 és P_i pontpárhoz tartozó H_i felező merőleges hipersítok, ahol $i = 1, \dots, k$. Egy $C \in \mathbb{R}^d$ pont akkor és csak akkor lehet középpontja a P_i pontokon áthaladó hipergömbnek, ha ez a C pont egyenlő távolságra van a P_i pontoktól, vagyis mindegyik H_i -hez hozzátartozik. A H_i hipersíkok normálvektorai lineárisan függetlenek a pontrendszer affín függetlensége miatt (3.3-as állítás), így az $S = \bigcap_{i=1}^k H_i$ affín altérre $\dim S = d - k$ a 3.4-es állítás miatt. Az S -beli vektorok merőlegesek az összes $P_0\vec{P}_i$ vektorra, ezért S és $\langle P_0, P_1, \dots, P_k \rangle$ merőleges kiegészítő affín altérek. □

3.6. Következmény. *Bármely d -dimenziós \mathbb{R}^d -beli szimplexnek pontosan egy körülírt hipergömbje van, vagyis egy olyan \mathbb{R}^d -beli hipergömb, amely illeszkedik a szimplex csúcsaira.*

Bizonyítás: Adottak a szimplex csúcsai, vagyis $d+1$ affín független pont, ekkor $k = d$. A 3.5-ös állítás miatt van olyan hipergömb, mely illeszkedik mindegyik P_i pontra, sőt, az ilyen gömbök középpontjai egy $d - d = 0$ dimenziós affín altérre alkotnak. Ez egy pont, amiből következik, hogy pontosan egy ilyen gömb létezik. □

3.7. Következmény. *Legyen $E \subseteq \mathbb{R}^d$ affín altér, $\dim E = k$, ahol $1 \leq k < d$, illetve $G \subset E$ tetszőleges $(k - 1)$ -dimenziós gömb, továbbá $P \in \mathbb{R}^d \setminus E$ tetszőleges pont. Ekkor egyértelműen létezik egy k -dimenziós \tilde{G} hipergömb, melyre teljesül, hogy $G \subset \tilde{G}$ és $P \in \tilde{G}$.*

Bizonyítás: Tekintsük először a $d = 3, k = 2$ esetet. Adott egy G kör és G síkjára (E -re) nem illeszkedő P pont. Válasszuk ki A_1, A_2, A_3 pontokat a G -ből úgy, hogy azok affín függetlenek legyenek. Ekkor A_1, A_2, A_3 és a P pont- a 3.5-ös állítás miatt- meghatároz egy \tilde{G} gömböt, ami illeszkedik erre a négy pontra. Tekintsük \tilde{G} és E metszetét, ami egy G' kör. Azt kell belátni, hogy ez a G' kör megegyezik a G körrel. Tudjuk, hogy $G' \subset E$, továbbá $A_1, A_2, A_3 \in G'$, így a 3.6-os következmény miatt kapjuk, hogy $G' = G$. Ebből következik, hogy $G' = G \subset \tilde{G}$ és persze $P \in \tilde{G}$.

A fenti, létezését bizonyító gondolatmenet könnyen általánosítható tetszőleges d -re és k -ra.

Be kell látnunk még, hogy ez a \tilde{G} egyértelmű. Legyen $\tilde{E} = \text{aff}(E \cup \{P\})$, vagyis egy $k+1$ dimenziós affin altér. Ekkor \tilde{E} -ban adott $k+2$ affin független pont, melyekre a 3.6-os következmény szerint pontosan egy gömb illeszthető.

□

4. Inverzió

Bevezetjük az inverziót és megismerjük annak legalapvetőbb tulajdonságait. Ez a fejezet a dolgozat matematikai tartalmának fő része, amely felhasználásra kerül a későbbi, térképészeti témájú fejezetekben.

4.1. Definíció. (Inverzió) Legyen $d \geq 1$ és $G \subset \mathbb{R}^d$ rögzített hipergömb, melynek középpontja P , sugara r . A G hipergömbre vonatkozó inverzió az a

$$\sigma_G : \mathbb{R}^d \setminus \{P\} \rightarrow \mathbb{R}^d \setminus \{P\} \quad (4.1)$$

leképezést értjük, amelynél tetszőleges $X \neq P$ pontra

$$\sigma_G(\mathbf{x}) = \mathbf{p} + (\mathbf{x} - \mathbf{p}) \cdot \frac{r^2}{(\mathbf{x} - \mathbf{p})^2}. \quad (4.2)$$

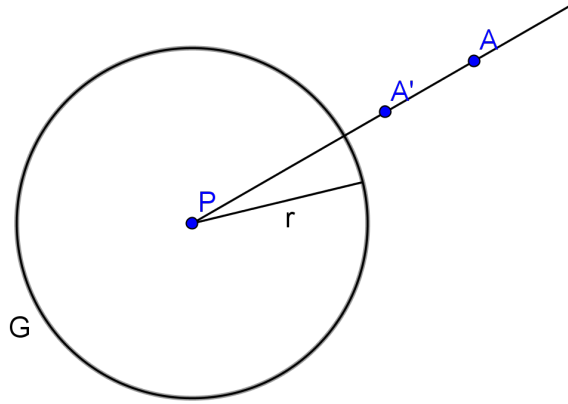
Vagyis valamely $A \neq P$ pont inverze (azaz a G hipergömbre vonatkozó inverzképe) a P kezdőpontú A -n áthaladó félegyenes azon A' pontja, melyre teljesül, hogy

$$d(P, A) \cdot d(P, A') = r^2. \quad (4.3)$$

P -t az inverzió pólusának, a G -t pedig az inverzió alapgömbjének nevezzük. (4.1. ábra)

4.2. Állítás. (Hipersík inverze) Legyen $H \subset \mathbb{R}^d$ egy hipersík. Ha $a P \in H$, akkor $\sigma_G(H \setminus \{P\}) = H \setminus \{P\}$, ha pedig $P \notin H$, akkor $\sigma_G(H) \cup \{P\}$ halmaz pedig P -n áthaladó hipergömb, melynek P -beli érintő hipersíkja párhuzamos lesz a H hipersíkkal.

Bizonyítás: Először tekintsük a $d = 2$ esetet. A $P \in H$ esetben az állítás triviális. Tegyük fel, hogy $P \notin H$. Jelölje T a P merőleges vetületét H -n. Persze $P \neq T$. Legyen T' pont a T inverzképe. Ekkor $d(P, T) \cdot d(P, T') = r^2$, illetve minden $A \in H$ pontra és



4.1. ábra. \mathbb{R}^2 -beli G -re vett inverzió

annak A' inverzképere teljesül, hogy $d(P, A) \cdot d(P, A') = r^2$. Vagyis $d(P, T) \cdot d(P, T') = r^2 = d(P, A) \cdot d(P, A')$. Ezért $d(P, A) / d(P, T) = d(P, T') / d(P, A')$. Ebből következik, hogy az APT és az $T'PA'$ háromszögek hasonlóak, mert két-két oldalhosszuk arányai megegyeznek és az ezek által közbezárt szög (P -nél lévő szög) egyenlő. Tehát az $T'PA'$ háromszögben az A' csúcsnál derékszög van, így az A' pont illeszkedik egy $[P, T']$ átmérőjű Thalész-körre. Megfordítva, e kör bármely P -től különböző B pontja előáll valamely H belső pont (ami nem más, mint $\langle P, B \rangle$ egyenes és H metszéspontja) inverzeként. Végül ennek a körnek a P -n átmenő érintője merőleges lesz a $\langle P, T \rangle$ egyenesre, vagyis párhuzamos H -val. (4.2. ábra)

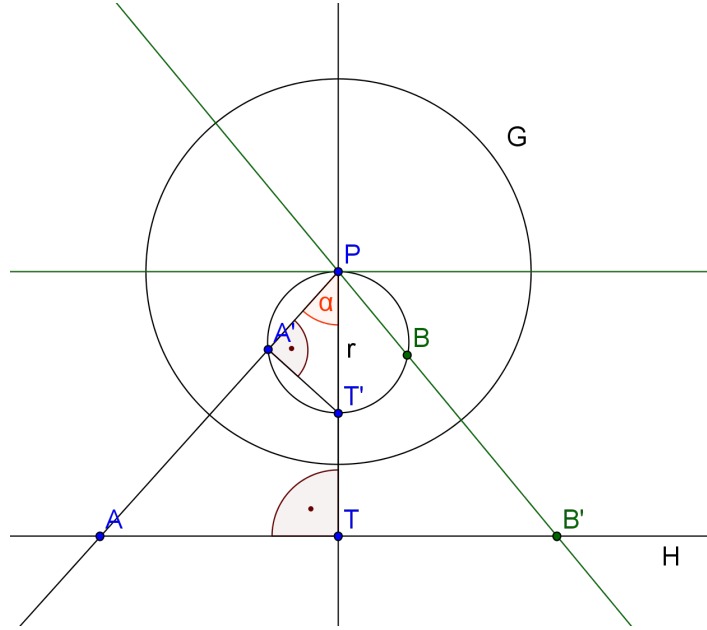
Az általános eset bizonyításához vegyük észre, hogy a G -ből és a H -ból álló rendszer forgásszimmetrikus a $\langle P, T \rangle$ egyenesre. Ezért ha megforgatjuk e körül az egyenes körül kapjuk a $d \geq 3$ esetet.

□

4.3. Állítás. *Legyen $d \geq 2$ és $i = 1, 2$ -re $G_i \subset \mathbb{R}^d$ hipergömb, melynek középpontja P_i , sugara r_i . Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek:*

$$G_1 \perp G_2 \tag{4.4}$$

$$d(P_1, P_2)^2 = r_1^2 + r_2^2; \tag{4.5}$$



4.2. ábra. Az 4.2- es állítás bizonyítása ($d = 2$ eset)

$$h_{G_2}(P_1) = r_1^2; \quad (4.6)$$

$$h_{G_1}(P_2) = r_2^2. \quad (4.7)$$

Bizonyítás: $4.4 \Rightarrow 4.5$: Legyen $G_1 \perp G_2$, ekkor tetszőleges $A \in G_1 \cap G_2$ ponttal a P_1AP_2 háromszögnek A -nál derékszöge van. Így a Pitagorasz-tételt alkalmazva kapjuk, hogy $d(P_1, P_2)^2 = r_1^2 + r_2^2$.

$4.5 \Rightarrow 4.4$: Mivel $d(P_1, P_2)^2 = r_1^2 + r_2^2$, ebből következik, hogy

$$|r_1 - r_2| < d(P_1, P_2) < r_1 + r_2.$$

Ekkor $G_1 \cap G_2$ egy a $\langle P_1, P_2 \rangle$ egyenesre merőleges hipersíkban fekvő $(d - 2)$ -dimenziós gömb. Így válasszuk az $A \in G_1 \cap G_2$ pontot és alkalmazzuk rá a Pitagorasz-tétel megfordítását. Az \vec{AP}_1 és \vec{AP}_2 vektorok merőlegesek a $T_A G_1$ és a $T_A G_2$ hipersíkokra, vagyis a két vektor ezen hipersíkok normálvektorai lesznek, ezért $G_1 \perp G_2$.

$4.5 \Rightarrow 4.6$: Adott G_1 és G_2 hipergömb. Legyen e a P_1 -ből a G_2 érintési pontjába húzott szakasz. Ekkor $r_2^2 + e^2 = d(P_1, P_2)^2$. A 4.5 állításból következik, hogy $e^2 = r_1^2$ továbbá, hogy $e = r_1$. Ezért az érintési pont eleme lesz a G_1 hipergömbnek. Vagyis

$$h_{G_2}(P_1) = r_1^2.$$

4.6 \Rightarrow 4.5: Adott G_1 és G_2 hipergömb. Legyen az $A \in G_1$ a G_2 érintési pontja és e a P_1 -ből az A érintési pontba húzott szakasz. Ekkor $e = r_1$, amiből következik, hogy $e^2 = r_1^2$ továbbá, hogy $r_2^2 + e^2 = d(P_1, P_2)^2$. Vagyis teljesül a 4.5-ös állítás.

A 4.5 \Leftrightarrow 4.7 ekvivalencia az előzőekhez hasonlóan bizonyítható.

□

4.4. Állítás. *Bármely G -től különböző $G' \subset \mathbb{R}^d$ hipergömbre a $\sigma_G(G') = G'$ akkor és csak akkor, ha $G' \perp G$.*

Bizonyítás: \Rightarrow

Adott G, G' hipergömbök és $A_1 \in G'$ -re legyen $A_2 \in G'$ a $\langle PA_1 \rangle$ egyenes és G' másik metszéspontja. Tegyük fel, hogy az $A_1 \notin G \cap G'$, ekkor $\sigma_G(A_1) = A_2$, mert $\sigma_G(A_1) \neq A_1$, de $\sigma_G(A_1) \in \langle PA_1 \rangle$ félegyenes és $\sigma_G(A_1) \in G'$, mert $\sigma_G(G') = G'$. Így $|PA_1| \cdot |PA_2| = r^2$, amiből következik, hogy $h_{G'}(P) = r^2$. A 4.3-as állítás miatt pedig következik, hogy $G \perp G'$.

\Leftarrow

Adott G, G' hipergömbök és $A_1 \in G'$ -re legyen $A_2 \in G'$ a $\langle PA_1 \rangle$ egyenes és G' másik metszéspontja, illetve jelölje E a G és G' egyik metszéspontját. Tegyük fel, hogy az $A_1 \notin G \cap G'$. Ekkor $|PA_1| \cdot |PA_2| = |PE| = r^2$, mert $G \perp G'$. Az inverzió definícióját használva pedig adódik, hogy $|PA_1| \cdot |P\sigma_G(A_1)| = r^2$. Vagyis $|PA_1| \cdot |P\sigma_G(A_1)| = r^2 = |PA_1| \cdot |PA_2|$, amiből következik, hogy $\sigma_G(A_1) = A_2$. Tehát $\sigma_G(G') = G'$.

□

4.5. Állítás. *Ha G_1 és G_2 közös P középpontú r_1 és r_2 sugarú \mathbb{R}^d -beli hipergömbök, akkor $\sigma_{G_2} \circ \sigma_{G_1} = H_{P, (r_2/r_1)^2} |(\mathbb{R}^d \setminus \{P\})$.*

Bizonyítás: Az inverzió definícióját használva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \sigma_{G_2} \circ \sigma_{G_1} &= \mathbf{p} + \left(\mathbf{p} + (\mathbf{x} - \mathbf{p}) \cdot \frac{r_1^2}{(\mathbf{x} - \mathbf{p})^2} - \mathbf{p} \right) \cdot \frac{r_2^2}{\left(\mathbf{p} + (\mathbf{x} - \mathbf{p}) \cdot \frac{r_1^2}{(\mathbf{x} - \mathbf{p})^2} - \mathbf{p} \right)^2} = \\ &= \mathbf{p} + (\mathbf{x} - \mathbf{p}) \cdot \frac{r_1^2}{(\mathbf{x} - \mathbf{p})^2} \cdot \frac{r_2^2}{\left((\mathbf{x} - \mathbf{p}) \cdot \frac{r_1^2}{(\mathbf{x} - \mathbf{p})^2} \right)^2} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{p} + \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{p}) \cdot r_1^2 \cdot r_2^2}{(\mathbf{x} - \mathbf{p})^2 \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p})^2 \cdot \frac{r_1^4}{(\mathbf{x} - \mathbf{p})^2 \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p})^2}} = \\
&= \mathbf{p} + \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p})
\end{aligned}$$

Vagyis valóban egy P középpontú, $(r_2/r_1)^2$ arányú homotéciáról van szó. □

4.6. Állítás. *Tetszőleges $\lambda \neq 0$ -ra $\sigma_G \circ H_{P,\lambda} = H_{P,1/\lambda} \circ \sigma_G$. Speciálisan σ_G felcserélhető a P középpontú középpontos tükrözéssel.*

Bizonyítás: A definícióból következik az állítás.

Nézzük először a bal oldalt:

$$\begin{aligned}
\sigma_G \circ H_{P,\lambda} &= \mathbf{p} + (\mathbf{p} + \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{p}) - \mathbf{p}) \cdot \frac{r^2}{(\mathbf{p} + \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{p}) - \mathbf{p})^2} = \\
&= \mathbf{p} + \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{p}) \cdot \frac{r^2}{(\lambda(\mathbf{x} - \mathbf{p}))^2} = \mathbf{p} + (\mathbf{x} - \mathbf{p}) \cdot \frac{r^2}{\lambda(\mathbf{x} - \mathbf{p})^2} = \\
&= \mathbf{p} + 1/\lambda \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) \cdot \frac{r^2}{(\mathbf{x} - \mathbf{p})^2}
\end{aligned}$$

Tekintsük a jobb oldalt:

$$\begin{aligned}
H_{P,1/\lambda} \circ \sigma_G &= \mathbf{p} + 1/\lambda \cdot \left(\mathbf{p} + (\mathbf{x} - \mathbf{p}) \cdot \frac{r^2}{(\mathbf{x} - \mathbf{p})^2} - \mathbf{p} \right) = \\
&= \mathbf{p} + 1/\lambda \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) \cdot \frac{r^2}{(\mathbf{x} - \mathbf{p})^2}
\end{aligned}$$

Vagyis $\sigma_G \circ H_{P,\lambda} = H_{P,1/\lambda} \circ \sigma_G$. □

4.7. Állítás. *(Hiper gömb inverze) Adott egy $G \subset \mathbb{R}^d$ hiper gömb. Legyen $G' \subset \mathbb{R}^d$ hiper gömb. Ha $P \in G'$, akkor a $(G' \setminus \{P\})$ halmaz G -re vett inverze egy hipersík, amely párhuzamos a $T_P G'$ hipersíkkal, ha pedig $P \notin G'$, akkor a G' inverze egy hiper gömb.*

Bizonyítás: A $\sigma_G \circ \sigma_G = id_{\mathbb{R}^d \setminus \{P\}}$ - ami közvetlenül következik az inverzió definíciójából - és a 4.2-es állításból következően a $P \in G'$ esetben teljesül az állítás.

Tegyük fel először, hogy a P a G' hipergömb egy külső pontja, ekkor P -nek G' -re vonatkozó hatványa nagyobb, mint 0, vagyis $h_{G'}(P) > 0$. Legyen \tilde{G} a P középpontú, $\sqrt{h_{G'}(P)}$ sugarú hipergömb, ekkor a 4.3-as állítás miatt a $G' \perp \tilde{G}$ és így a 4.4-es állítás miatt a $\sigma_{\tilde{G}}(G') = G'$. Ezért a 4.5-ös állítást felhasználva $\sigma_G(G') = \sigma_G(\sigma_{\tilde{G}}(G')) = \sigma_G \circ \sigma_{\tilde{G}}(G') = H_{P, r^2/h_{G'}(P)}(G')$ valóban egy hipergömb.

Ha pedig P belső pontja G' -nek, akkor válasszuk \tilde{G} -nak a P középpontú, $\sqrt{-h_{G'}(P)}$ sugarú hipergömböt. A P -ből G' -höz húzott szelőszakaszok ellentétes irányításúak és szorzatuk abszolút értékben pont a \tilde{G} sugarának négyzete, ezért a $\sigma_{\tilde{G}}(G') = H_{P,-1}(G')$. Ezután az előzőekhez hasonlóan, de most a 4.6-os állítást is felhasználva a $\sigma_G(G') = \sigma_G(H_{P,-1}(\sigma_{\tilde{G}}(G'))) = (H_{P,-1} \circ \sigma_G \circ \sigma_{\tilde{G}})(G') = H_{P, r^2/h_{G'}(P)}(G')$ egy hipergömb.

□

A következő állítást kimondjuk, de nem bizonyítjuk.

4.8. Állítás. *Az inverzió szögtartó, vagyis bármely két \mathbb{R}^d -beli metsző görbe szöge megegyezik az inverzképeik szögével.*

5. Sztereografikus projekció

5.1. Definíció. Tegyük fel, hogy $d \geq 2$, legyen $G \subset \mathbb{R}^d$ hipergömb, $E \in G$ tetszőleges rögzített pont, és $H \subset \mathbb{R}^d$ az a hipersík, amely E -vel átellenes D pontban érinti a G hipergömböt. A G hipergömb E pontból történő sztereografikus projekcióján azt a

$$v : (G \setminus \{E\}) \rightarrow H$$

leképezést értjük, amelyre az E , tetszőleges $A \neq E \in G$ és annak $v(A)$ képe kollineáris. A $v(A)$ pont szükségképpen az $\langle E, A \rangle$ egyenes és a H hipersík metszéspontja. Ez a metszéspont létezik, mert $H \parallel T_E G$ -vel és nyilvánvaló, hogy ez a v leképezés egy bijekció a $(G \setminus \{E\})$ halmaz és a H hipersík között.

A sztereografikus projekció egy alapvető térképészeti eszköz. Mint az alábbi állításból kiderül, nem más mint egy megfelelő gömbre vett inverzió. Így az előző fejezetekben felállított elmélet alkalmazható rá.

5.2. Állítás. A sztereografikus projekció megegyezik egy olyan G^* gömbre vett inverzióval a $(G \setminus \{E\})$ halmazra való leszűkítésével, melynek pólusa az E pont, alapgömbjének sugara pedig egyenlő a G gömb átmérőjével.

Bizonyítás: Ennél az inverzióval a pontok inverzképei valóban az E pontból induló félegyenesen találhatóak és a 4.7-es állítás miatt igaz, hogy a $(G \setminus \{E\})$ halmaz inverzképe a H sík.

□

6. Földrajzi bevezető, alkalmazások

Ebben a fejezetben bevezetünk néhány- a térképészet szempontjából fontos - alapfogalmat, definíciót. Bemutatjuk az előző fejezetekben tárgyalt sztereografikus projekció alkalmazását, illetve kiegészítjük néhány más vetülettel. A témakör földrajzi megközelítésében és annak feldolgozásában segítségünkre voltak a [2], [3], [4] könyvek.

A Földön egy pont földrajzi helyét *földrajzi szélességgel* és *földrajzi hosszúsággal* adhatjuk meg. A Földet helyettesítő gömbön legyen a forgástengellyel egybeeső átmérő egyik végpontja az *Északi*, a másik végpontja pedig a *Déli pólus*. A földgömb középpontján átmenő és erre az átmérőre merőleges sík az *Egyenlítő síkja*. Ez a gömbből az *Egyenlítőnek* nevezett főkört metszi ki. Az Egyenlítőre merőleges, a pólusokon átmenő főkörök a *hosszúsági körök* vagy délkörök, meridiánok. A kezdő hosszúsági kör a Föld felszínén önkényesen kijelölt ponton, a greenwichi obszervatóriumon (Royal Observatory, Greenwich) halad keresztül. Az Egyenlítő síkjával párhuzamos síkok pedig kimetszik a *szélességi köröket* vagy más néven *parallelköröket*, melyek különböző sugarú gömbi körök. A kezdő szélességi kör nem más, mint az Egyenlítő.

A *térkép* egy $\varphi : U \rightarrow V$ bijektív leképezés, ahol U a gömb, míg V egy felület (például egy sík vagy henger stb.) egy része. A szélességi- és hosszúsági körök U -ba eső részeinek képei V -ben megadják a térkép *fokhálózata*t.

A térképpel kapcsolatban felmerülő legalapvetőbb kérdések:

- Mennyire torzítja a szögeket?
- Mennyire torzítja a távolságokat?
- Mennyire torzítja a területeket?
- Hogy néz ki a fokhálózat, vagyis mik a szélességi- és hosszúsági körök képei?

- Mit érdemes vele ábrázolni?
- Hogyan érdemes megválasztanunk a vetítés pólusát?

A térkép készítőjének törekvése arra irányul, hogy olyan fokhálózatot készítsen, amely a távolságtartás, a szögtartás vagy a területtartás követelménye közül az egyiknek megfelel, de a másik kettőben minél kisebb torzítást érjen el, vagy pedig olyat, amelyik egyik követelménynek se felel meg ugyan, de mindháromnál csak minimális a torzítás.

A fokhálózat jellege alapján beszélhetünk valódi és képzetes vetületekről, melyeket a szélességi- és hosszúsági körök képeivel, valamint az általuk bezárt szöggel definiálhatunk az alábbi módon:

*Valódi vetület*nek nevezzük azt a vetületet, melynek fokhálózatára teljesül az alábbi három tulajdonság:

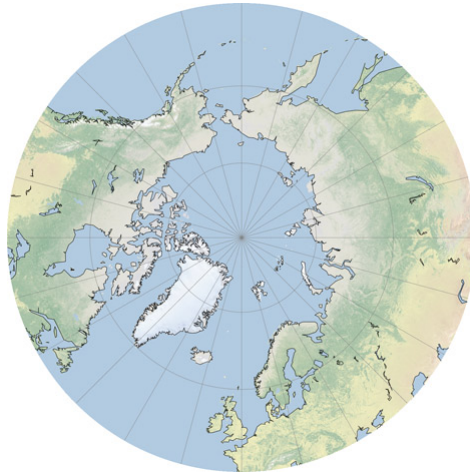
- a szélességi körök képei vagy koncentrikus körök illetve körívek, vagy párhuzamos egyenesek;
- a hosszúsági körök képei vagy egy ponton áthaladó, vagy párhuzamos egyenesek;
- a hosszúsági körök és a szélességi körök képei mindenütt merőlegesen metszik egymást;

6.1. Megjegyzés. *Bizonyos térképeknél - majd látunk rá példát - a hosszúsági és szélességi köröket elforgatva egy segéd koordinátarendszert kapunk, melyre nézve a térkép lehet valódi vetület.*

*Képzetes vetület*nek azt a vetületet nevezzük, mely nem valódi vetület, vagyis ha a fokhálózatra illetve a segédfokhálózatra a fenti három tulajdonság közül legalább az egyik nem teljesül. [5]

6.1. A sztereografikus projekció alkalmazása a térképészetben

A sztereografikus projekció definícióját lásd az 5. fejezetben.



6.1. ábra. Sztereografikus projekció

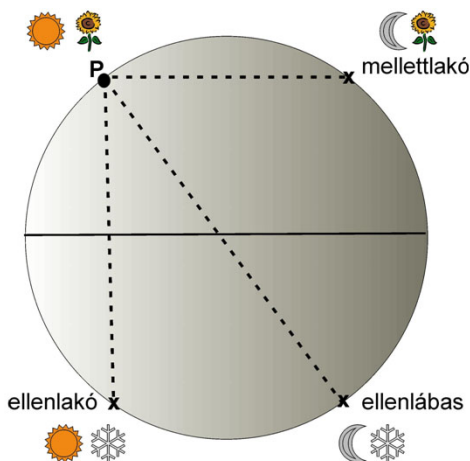
6.2. Megjegyzés. 6.1- es ábrán látható térképnél a pólus a Déli sark, illetve a kapott kép nem a teljes földgömb (minusz a pólus) képe, csak az Északi sark körüli valamekkora gömbsapké.

Ezt a projekciót kezdetben csillagászati térképek készítésére alkalmazták és már Hipparkhosz (i.e. 160 – 125) is ezt alkalmazta az égbolt ábrázolására. A Föld ábrázolására először Reinerszoon Gemma Frisius (1508 – 1555) használta. Magyarországon az 1900-as évekig geodéziai (földméréstani) vetületként használták, az egyetlen kikötés az volt, hogy a hossztorzulás nem haladhatja meg a kilométerenkénti 10 cm-t.

Válasszuk az Északi vagy a Déli pólust a vetítés pólusának, ekkor a síkra történő vetítés során a kapott fokhálózat egy *valódi vetület*, ami ebben az esetben egy olyan térképet jelent, ahol a hosszúsági körök képei egyenesek, melyek egy pontban metszik egymást, vagyis egy sugársor részei, míg a szélességi körök képei koncentrikus körök (igazolható, lásd az 4.7-es állítást). A vetítési pontot kivéve minden pontot tudok ábrázolni, tulajdonságai közé tartozik még, hogy szögtartó (lásd az 4.8-as állítást). Az Északi pólust választva vetítési pontnak a Déli pólus körüli területeket érdemes ábrázolni, mert itt még viszonylag kicsi a hossztorzulás.

Általában véve, a pólust annak függvényében érdemes megválasztanunk, hogy a Föld melyik részét szeretnénk ábrázolni. Célszerű mindig a vetítendő pont átellenes (földrajzi nyelven: ellenlábás) pontját pólusnak választani. Az *ellenlábás pont* az adott

ponthoz képest szélességi köre és hosszúsági köre szempontjából is az ellentétes félgömbön fekszik. Szélességi körének értéke megegyezik az eredeti pontéval, míg hosszúsági körének értékét megkaphatjuk, ha 180° -ból kivonjuk az eredeti pont hosszúsági körének értékét. (6.2. ábra)



6.2. ábra. Nevezetes pontok

6.3. Feladat. *Mi az ellenlábás pontja Budapestnek, ha az é.sz. $47^\circ 29'$ és k.h. $19^\circ 02'$ -nél fekszik? Az ellenlábás pontja a Csendes-óceán területén található a d.sz. $47^\circ 29'$ és ny.h. $160^\circ 98'$ -nél.*

6.4. Feladat. *Mi az ellenlábás pontja Punta Arenasnak (Chile), ha a d.sz. $53^\circ 10'$ és ny.h. $70^\circ 56'$ -nél fekszik? Az ellenlábás pontja Oroszországban a Szaján-hegységhez közel az é.sz. $53^\circ 10'$ és k.h. $100^\circ 34'$ -nél található.*

6.5. Megjegyzés. *(Sztereografikus projekció hibaszámítása)*

Tekintsünk a Déli pólus körül egy α gömbi sugarú gömbsapkát. (A gömbi távolság definícióját lásd az 1.2-es pontban.) Definíálunk egy mennyiséget, amely megadja, hogy ezen sapkán belül mekkora a sztereografikus projekció távolságtorzítása.

Legyen G az O középponttú, r sugarú gömb, a Déli pólust jelöljük D -vel, P a G egy tetszőleges pontja, továbbá D és P pont távolsága- az 1.2-es definíció szerint- pedig δ . Vegyük $[DP]$ gömbi szakasz képét, melyet jelöljünk x_1 -gyel, továbbá legyen ugyan ezen

hogy

$$\frac{1}{1,01} < \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Rightarrow \sqrt{\left(\frac{1}{1,01}\right)} < \left|\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right| \Rightarrow \alpha < 11,4212^\circ.$$

A Földön 1° -nak 111 km felel meg, ekkor $11,4212^\circ = 1267,7532$ km-t jelent. Vagyis az 1 százalékos hibahatár kb. 1268 km-t jelent.

6.7. Példa. Egy Budapest körüli akkora gömbsapkát tudunk sztereografikus projekcióval 1 százalékos távolságtorzítással ábrázolni, melynek szélén van Párizs (Franciaország).

6.8. Feladat. Mely α értékekre teljesül, hogy $1 < \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} < 1,1$?

Az $\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$ bármely α értékre nézve nagyobb lesz, mint 1.

A kérdés, hogy mikor lesz $\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} < 1,1$. Az egyenlőtlenséget átrendezve kapjuk, hogy

$$\frac{1}{1,1} < \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Rightarrow \sqrt{\left(\frac{1}{1,1}\right)} < \left|\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right| \Rightarrow \alpha < 35,0968^\circ.$$

A Földön 1° -nak 111 km felel meg, ekkor $35,0968^\circ = 3895,7448$ km-t jelent. Vagyis a 10 százalékos hibahatár kb. 3896 km-t jelent.

6.9. Példa. Egy Budapest körüli akkora gömbsapkát tudunk sztereografikus projekcióval 10 százalékos távolságtorzítással ábrázolni, melynek szélén van Kartúm (Szudán).

A sztereografikus projekciót általában félgömb vagy annál kisebb felület ábrázolására alkalmazzák.

6.2. Centrális hengervetület

6.10. Definíció. Legyen $G \subset \mathbb{R}^3$ gömbfelület, C a G középpontja, és $H \subset \mathbb{R}^3$ az a henger, mely tengelye párhuzamos az Északi és Déli pólust összekötő egyenessel és az Egyenlítő pontjaiban érinti a földgömböt. A G gömb C pontból történő centrális hengervetületén azt a

$$\varphi : (G \setminus \{E, D\}) \rightarrow H$$

leképezést értjük, melyre tetszőleges $P \in G$ és annak $\varphi(P)$ képe egy C -ből induló fél-egyenesre esik.



6.4. ábra. Centrális hengervetület

6.11. Feladat. *Fejezzük ki a φ leképezést vektorokkal!*

Legyen \vec{u} a C origóból, vagyis a Föld középpontjából induló, az Északi és Déli póluson átmenő tengellyel párhuzamos és az Északi pólus irányába mutató egységvektor, P a gömbfelület egy tetszőleges pontja, P -be mutató helyvektora \vec{p} , illetve $\varphi(\vec{p})$ a \vec{p} helyvektorú pont képének a helyvektora. A \vec{p} vektor \vec{u} -val párhuzamos komponense felírható $\vec{p}_{\parallel} = (\vec{u} \cdot \vec{p}) \cdot \vec{u}$ alakban, illetve \vec{u} -ra merőleges komponense $\vec{p}_{\perp} = \vec{p} - (\vec{u} \cdot \vec{p}) \cdot \vec{u}$ alakban. A $\varphi(\vec{p}) = \lambda \cdot \vec{p}_{\perp}$.

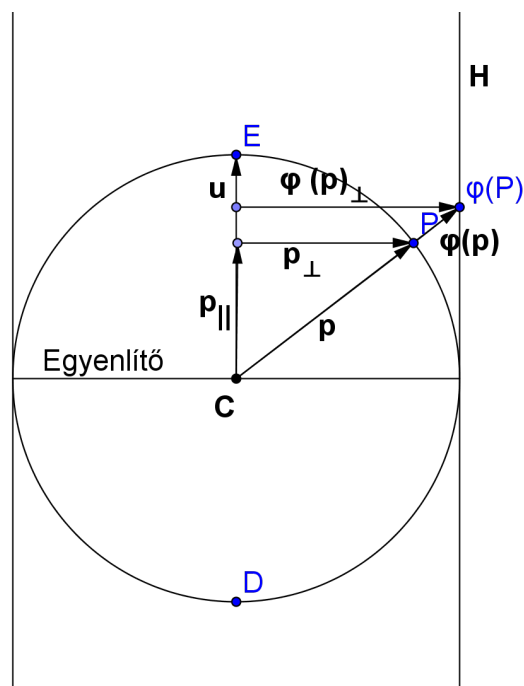
Keressük λ -át. Tudjuk, hogy $|(\lambda \vec{p}_{\perp})_{\perp}| = 1$, továbbá $(\lambda \vec{p}_{\perp})_{\perp} = \lambda (\vec{p}_{\perp})_{\perp}$, vagyis következik, hogy $\lambda = \frac{1}{|\vec{p}_{\perp}|}$.

Tehát $\varphi(\vec{p}) = \lambda \cdot \vec{p}_{\perp} = \frac{1}{|\vec{p}_{\perp}|} \cdot \vec{p}_{\perp} = \frac{\vec{p}_{\perp}}{|\vec{p}_{\perp}|}$. Vagyis ahhoz, hogy a P pont képe a hengerre essen a \vec{p} vektort $\frac{1}{|\vec{p}_{\perp}|}$ szorosára kell nagyítanom. (6.5. ábra)

6.12. Feladat. *Az előző feladatban kapott $\varphi(\vec{p})$ vektort adjuk meg koordinátákkal!*

Adott az $\vec{u} := (1, 0, 0)$ koordinátájú egységvektor és a $P := (x, y, z)$ koordinátájú pont, melynek helyvektora \vec{p} . Keressük $\varphi(\vec{p}) := (\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3)$ vektor koordinátáit.

Tudjuk, hogy $\varphi(\vec{p}) = \frac{\vec{p}_{\perp}}{|\vec{p}_{\perp}|}$. Az $\vec{u} \cdot \vec{p} = 1 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = x$, ebből következik, hogy az $x \cdot \vec{u} := (x, 0, 0)$, továbbá $\vec{p} - (x \cdot \vec{u}) := (0, y, z)$. A $\vec{p} - (x \cdot \vec{u})$ hossza egyenlő $\sqrt{y^2 + z^2}$. Tehát a $\varphi(\vec{p}) := \left(\frac{x}{\sqrt{y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2}} \right)$.



6.5. ábra. Centrális hengervetület vektorokkal

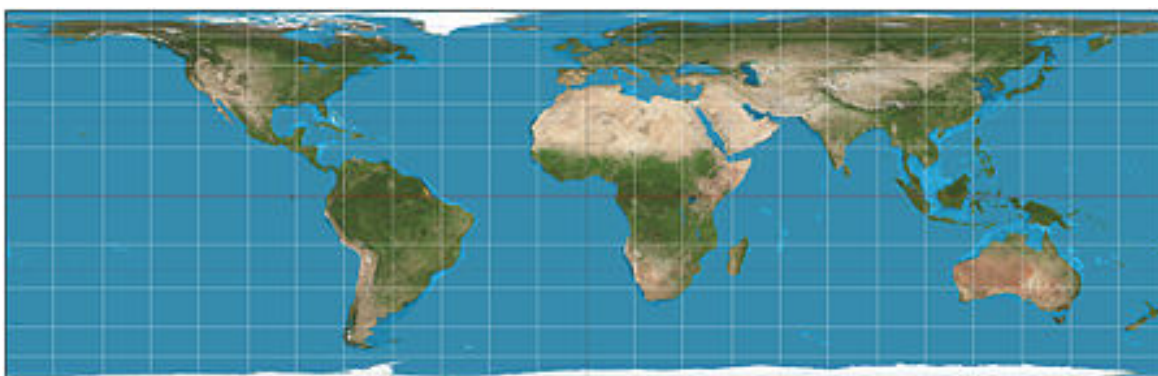
Az, hogy milyen szélességekig tudok vetíteni, függ a henger magasságától. Amikor az Északi és Déli pólust összekötő szakasz és a henger magassága megegyezik, akkor a hosszúsági kör felét tudom csak vetíteni, méghozzá a 45. szélességi körig. A torzítás mértéke pedig a pólusok felé haladva egyre nagyobb.

Ha a henger tengelye és az Északi és Déli pólust összekötő egyenes párhuzamos, továbbá végül a henger palástját egyik alkotója mentén felvágjuk, akkor a gömbnek hengerre történő vetítése során a képekre a következő állítások lesznek jellemzőek:

1. a hosszúsági körök képei párhuzamos egyenesek
2. a szélességi körök képei párhuzamos szakaszok
3. a hosszúsági és a szélességi körök képei derékszögben metszik egymást
4. fontos, hogy érintő hengernél az Egyenlítő (vagy az érintett kör) hossza megegyezik a képének a hosszával, vagyis itt hossztartó

Fontos megjegyeznünk, hogy ez a fajta vetület tetszőleges szélességi kör mentén megtartja a távolság-arányokat.

6.3. Lambert- féle területtartó hengervetület



6.6. ábra. Lambert-féle területtartó hengervetület

6.13. Definíció. Legyen $G \subset \mathbb{R}^3$ gömbfelület, C a G középpontja, és $H \subset \mathbb{R}^3$ az a henger, mely tengelye párhuzamos az Északi és Déli pólust összekötő egyenessel és az Egyenlítő pontjaiban érinti a földgömböt. A G gömb Északi és Déli pólusát összekötő tengelyéről az Egyenlítővel párhuzamos vetítő sugarrakkal történő vetületén, vagyis a Lambert- féle vetületén, azt a

$$\varphi : (G \setminus \{E, D\}) \rightarrow H$$

leképezést értjük, melyre tetszőleges $P \in G$ és annak $\varphi(P)$ képére a $\overline{P\varphi(P)}$ egyenes merőlegesen metszi az $[ED]$ szakaszt.

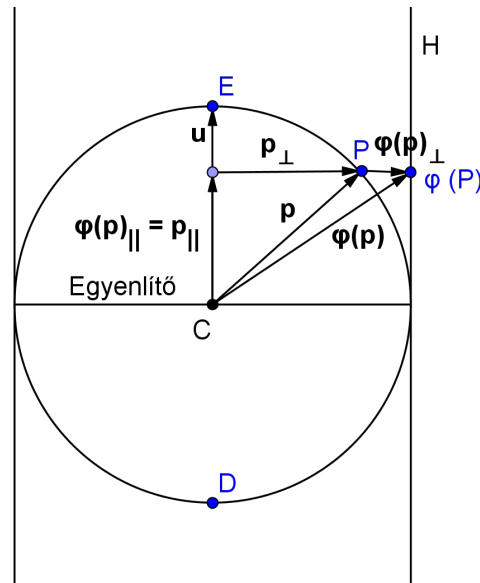
6.14. Feladat. Adjuk meg a fent említett φ leképezést vektorokkal!

Legyen \vec{u} a C origóból, vagyis a Föld középpontjából induló, az Északi és Déli póluson átmenő tengellyel párhuzamos és az Északi pólus irányába mutató egységvektor, P a gömbfelület egy tetszőleges pontja, P -be mutató helyvektora \vec{p} , illetve $\varphi(\vec{p})$ a \vec{p} helyvektorú pont képének a helyvektora. A \vec{p} vektor \vec{u} -val párhuzamos komponense megegyezik

a $\varphi(\vec{p})$ párhuzamos komponensével, vagyis $\varphi(\vec{p})_{\parallel} = \vec{p}_{\parallel} = (\vec{u} \cdot \vec{p}) \cdot \vec{u}$. Továbbá \vec{p} merőleges komponense felírható $\vec{p}_{\perp} = \vec{p} - (\vec{u} \cdot \vec{p}) \cdot \vec{u}$ alakban, illetve $\varphi(\vec{p}) = \lambda \cdot \vec{p}_{\perp}$. Tehát $\varphi(\vec{p}) = \vec{p}_{\parallel} + \lambda \cdot \vec{p}_{\perp}$ alakban adható meg.

Keressük, hogy λ mivel egyenlő. Tudjuk, hogy $|\varphi(\vec{p})_{\perp}| = |\lambda \cdot \vec{p}_{\perp}| = 1 = \lambda \cdot |\vec{p}_{\perp}|$, amiből következik, hogy $\lambda = \frac{1}{|\vec{p}_{\perp}|}$.

Tehát $\varphi(\vec{p}) = \vec{p}_{\parallel} + \frac{1}{|\vec{p}_{\perp}|} \cdot \vec{p}_{\perp} = \vec{p}_{\parallel} + \frac{\vec{p}_{\perp}}{|\vec{p}_{\perp}|} = (\vec{u} \cdot \vec{p}) \cdot \vec{u} + \frac{\vec{p} - (\vec{u} \cdot \vec{p}) \cdot \vec{u}}{|\vec{p} - (\vec{u} \cdot \vec{p}) \cdot \vec{u}|}$. (6.7. ábra)



6.7. ábra. Lambert-féle vetület vektorokkal

6.15. Feladat. Az előző feladatban kapott $\varphi(\vec{p})$ vektort adjuk meg koordinátákkal!

Adott az $\vec{u} := (1, 0, 0)$ koordinátájú egységvektor és a $P := (x, y, z)$ koordinátájú pont, melynek helyvektora \vec{p} . Keressük $\varphi(\vec{p}) := (\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3)$ vektor koordinátáit.

Tudjuk, hogy $\varphi(\vec{p}) = (\vec{u} \cdot \vec{p}) \cdot \vec{u} + \frac{\vec{p} - (\vec{u} \cdot \vec{p}) \cdot \vec{u}}{|\vec{p} - (\vec{u} \cdot \vec{p}) \cdot \vec{u}|}$. Az $\vec{u} \cdot \vec{p} = 1 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = x$, ebből következik, hogy az $x \cdot \vec{u} := (x, 0, 0)$, továbbá $\vec{p} - (x \cdot \vec{u}) := (0, y, z)$. A $\vec{p} - (x \cdot \vec{u})$ hossza egyenlő $\sqrt{y^2 + z^2}$. Tehát a $\varphi(\vec{p}) := \left(x, \frac{y}{\sqrt{y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2}} \right)$.

A vetület neve J.H. Lambert (1728-1777) német matematikus, fizikus, csillagász és térképész nevéhez fűződik. Erre a vetületre jellemző, hogy a pólusok felé a szélességi körök képei közel kerülnek egymáshoz, itt a hosszúságok és a szögek nagy torzulást

szervednek, vagyis leginkább az Egyenlítő és környékének ábrázolására alkalmazható, ráadásul az Egyenlítőn hosszúságtartó.

Ez a fajta vetület szintén valódi vetület, mert ha a henger tengelye és az Északi és Déli pólust összekötő egyenes párhuzamos, továbbá végül a henger palástját egyik alkotója mentén felvágjuk, akkor a gömbnek hengerre történő vetítése során a képekre a következő állítások lesznek jellemzőek:

1. a hosszúsági körök képei párhuzamos egyenesek
2. a szélességi körök képei párhuzamos szakaszok
3. a hosszúsági és a szélességi körök képei derékszögben metszik egymást

6.16. Megjegyzés. *Ismert, de nem bizonyítjuk, hogy ez a vetület területtartó.*

6.4. Centrális síkvetület

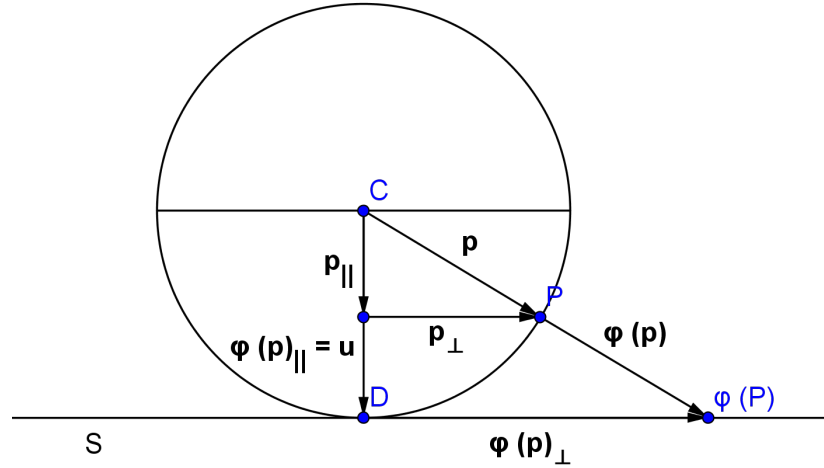
6.17. Definíció. *(Nyílt félgömb centrális projekciója)* Legyen $G \subset \mathbb{R}^3$ gömbfelület, C a G középpontja, és $S \subset \mathbb{R}^3$ a gömb egy érintősíkja. Az adott S síkkal párhuzamos és C -re illeszkedő S' sík a gömbfelületet két félgömbre osztja. A G gömb C pontból történő centrális hengervetületén azt a φ leképezést értjük, mely az $S \cap G$ pontot tartalmazó nyílt félgömböt leképezi az S síkra, továbbá teljesül, hogy $P \in G$ és annak $\varphi(P)$ képe egy C -ből induló félegyenesre esik.

6.18. Feladat. *Adjuk meg a leképezést vektorokkal!*

Legyen \vec{u} a C origóból, vagyis a Föld középpontjából induló, az Északi és Déli póluson átmenő tengellyel párhuzamos és a Déli pólus irányába mutató egységvektor, P az $S \cap G$ pontot tartalmazó nyílt félgömb egy tetszőleges pontja, P -be mutató helyvektora \vec{p} , illetve $\varphi(\vec{p})$ a \vec{p} helyvektorú pont képe a helyvektora. A \vec{p} vektor \vec{u} -val párhuzamos komponense $\vec{p}_{\parallel} = (\vec{u} \cdot \vec{p}) \cdot \vec{u}$. Továbbá \vec{p} merőleges komponense felírható $\vec{p}_{\perp} = \vec{p} - (\vec{u} \cdot \vec{p}) \cdot \vec{u}$ alakban, illetve $\varphi(\vec{p}) = \lambda \cdot \vec{p}$ olyan vektor, melynek párhuzamos komponense 1 hosszúságú. Tehát $\left| (\lambda \cdot \vec{p})_{\parallel} \right| = |(\vec{u} \cdot (\lambda \cdot \vec{p})) \cdot \vec{u}| = 1$ alakban adható meg.

Keressük, hogy λ mivel egyenlő. Tudjuk, hogy $|\vec{u} \cdot (\lambda \cdot \vec{p})| = \lambda |\vec{u} \cdot \vec{p}| = 1$, amiből következik, hogy $\lambda = \frac{1}{|\vec{u} \cdot \vec{p}|}$.

Tehát $\varphi(\vec{p}) = \frac{1}{|\vec{u} \cdot \vec{p}|} \cdot \vec{p} = \frac{\vec{p}}{|\vec{u} \cdot \vec{p}|}$. (6.8. ábra)



6.8. ábra. Centrális síkvetület vektorokkal

6.19. Feladat. Az előző feladatban kapott $\varphi(\vec{p})$ vektort adjuk meg koordinátákkal! Adott az $\vec{u} := (1, 0, 0)$ koordinátájú egységvektor és a $P := (x, y, z)$ koordinátájú pont, melynek helyvektora \vec{p} . Keressük $\varphi(\vec{p}) := (p_1, p_2, p_3)$ vektor koordinátáit.

Tudjuk, hogy $\varphi(\vec{p}) = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$. Az $|\vec{u} \cdot \vec{p}| = \sqrt{x^2} = |x|$, ebből következik, hogy $\varphi(\vec{p}) := \left(\frac{x}{\sqrt{x^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2}} \right) = \left(\frac{x}{|x|}, \frac{y}{|x|}, \frac{z}{|x|} \right)$.

6.20. Megjegyzés. (Centrális síkvetület hibaszámítása)

Tekintsünk a Déli pólus körül egy α gömbi sugarú gömbsapkát. (A gömbi távolság definícióját lásd az 1.2-es pontban.) Definiálunk egy mennyiséget, amely megadja, hogy ezen sapkán belül mekkora a centrális síkvetület távolságtorzítása.

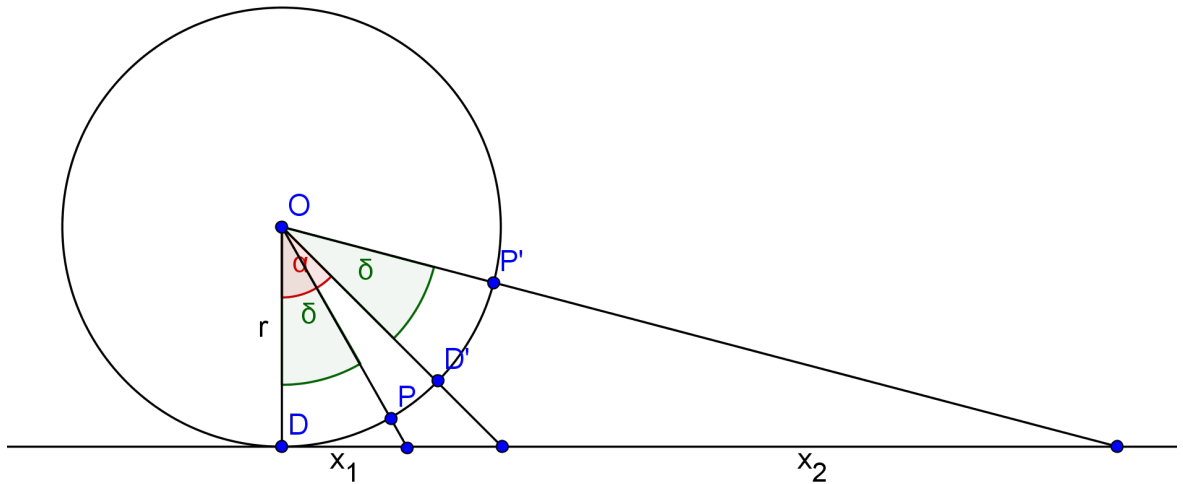
Legyen G az O középponttú, r sugarú gömb, a Déli pólust jelöljük D -vel, P a G egy tetszőleges pontja, továbbá D és P pont távolsága- az 1.2-es definíció szerint- pedig δ . Vegyük $[DP]$ gömbi szakasz képét, melyet jelöljünk x_1 -gyel, továbbá legyen ugyan ezen gömbsapkán D' és P' távolsága szintén δ . Vegyük $[D'P']$ gömbi szakasz képét, melyet jelöljünk x_2 -vel. Ekkor $x_1 = r \cdot \tan \delta$, illetve $x_2 = r \cdot [\tan(\alpha + \delta) - \tan \alpha]$. Jellemzzük az α gömbi sugarú sapka δ -hoz tartozó hossztorzulását a $t(\alpha, \delta) = \frac{x_1(\alpha, \delta)}{x_2(\alpha, \delta)}$ számmal. Kiszámolva:

$$t(\alpha, \delta) = \frac{x_1(\alpha, \delta)}{x_2(\alpha, \delta)} = \frac{\tan(\alpha + \delta) - \tan \alpha}{\tan \delta}.$$

Ezen kifejezés határértéke, ahogy $\delta \rightarrow 0$:

$$\lim t(\alpha, \delta) = \frac{\tan(\alpha + \delta) - \tan \alpha}{\tan \delta} = \frac{\tan(\alpha + \delta) - \tan \alpha}{\delta} \cdot \frac{\delta}{\tan \delta} = \tan' \alpha \cdot 1 = \frac{1}{\cos^2(\alpha)}.$$

(6.9. ábra)



6.9. ábra. Centrális síkvetület hibaszámítása

6.21. Feladat. Mely α értékekre teljesül, hogy $1 < \frac{1}{\cos^2(\alpha)} < 1,01$?

Az $\frac{1}{\cos^2(\alpha)}$ bármely α értékre nézve nagyobb lesz, mint 1.

A kérdés, hogy mikor lesz $\frac{1}{\cos^2(\alpha)} < 1,01$. Az egyenlőtlenséget átrendezve kapjuk, hogy

$$\frac{1}{1,01} < \cos^2(\alpha) \Rightarrow \sqrt{\left(\frac{1}{1,01}\right)} < |\cos(\alpha)| \Rightarrow \alpha < 5,7106^\circ.$$

A Földön 1° -nak 111 km felel meg, ekkor $5,7106^\circ = 633,8766$ km-t jelent. Vagyis az 1 százalékos hibahatár kb. 634 km-t jelent.

6.22. Példa. Egy Budapest körüli akkora gömbsapkát tudunk centrális síkvetülettel 1 százalékos távolságtorzítással ábrázolni, melynek szélén van Bukarest (Románia).

6.23. Feladat. Mely α értékekre teljesül, hogy $1 < \frac{1}{\cos^2(\alpha)} < 1,1$?

Az $\frac{1}{\cos^2(\alpha)}$ bármely α értékre nézve nagyobb lesz, mint 1.

A kérdés, hogy mikor lesz $\frac{1}{\cos^2(\alpha)} < 1,1$. Az egyenlőtlenséget átrendezve kapjuk, hogy

$$\frac{1}{1,1} < \cos^2(\alpha) \Rightarrow \sqrt{\left(\frac{1}{1,1}\right)} < |\cos(\alpha)| \Rightarrow \alpha < 17,5484^\circ.$$

A Földön 1° -nak 111 km felel meg, ekkor $17,5484^\circ = 1947,8724$ km-t jelent. Vagyis a 10 százalékos hibahatár kb. 1948 km-t jelent.

6.24. Példa. Egy Budapest körüli akkora gömbsapkát tudunk centrális síkvetülettel 10 százalékos távolságtorzítással ábrázolni, melynek szélén van Madrid (Spanyolország).

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megköszönni elsősorban dr. Naszódi Mártonnak, hogy támogatott a témaválasztásomban és irányt mutatott, amikor elakadtam. Köszönöm a sok-sok segítséget és türelmet, mellyel megtisztelt szakdolgozatom írása során.

Továbbá Paksi Lászlónak, aki segítette a szakdolgozatomhoz szükséges programokban való eligazodásomat. Végül, de nem utolsó sorban a családomnak és barátaimnak, akik mindvégig mellettem álltak.

Irodalomjegyzék

- [1] Moussong Gábor: *Inverzív geometria*- ELTE egyetemi jegyzet, Budapest, 2009.
- [2] Dr. Hazay István: *Vetülettan*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1964.
- [3] Klinghammer István; Papp-Váry Árpád: *Földünk tükre a térkép*, Gondolat Kiadó, Budapest, 1983.
- [4] Láng Sándor: *Matematikai- csillagászati földrajz és térképészet*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1953.
- [5] http://mercator.elte.hu/~gyorffy/jegyzete/MScVettan/rendszer/JEGYZE_rendszer1.htm