Másodrendű görbék az általános iskolától az egyetemig

Szakdolgozat

Készítette: Mestyán Gábor András
Szak: Matematika BSc Tanári szakirány

Témavezető: Szeghy Dávid
(egyetemi tanársegéd)
Tanszék: Geometria Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
2012

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezető

Dolgozatom témaválasztásának okát egy rövid, és nem teljesen pontos idézettel foglalhatnám össze, mely egy népszerű televíziós sorozatra utal: "A másodrendű görbék mindenütt jelen vannak." Ez valóban igaz is, hiszen már az általános iskolában is találkozunk velük, noha ekkor még nem kell a diákoknak tudniuk, hogy ez valóban az. Viszont a téma, még ha nem is végig nevesítve, de matematikai tanulmányainkat végigkíséri. Mint a dolgozatomból is látszódni fog, szinte nincs olyan évfolyam vagy egyetemi félév, ahol ne bukkannának fel (ha másképp nem, kör képében).

A másik dolog, amit indokolnom kell: Miért így dolgoztam fel ezt a témát? Miért nem koncentráltam egy fajta görbére (mondjuk a körre, vagy csak a parabolára)? Vagy miért nem koncentráltam egy, a másodrendű görbék szempontjából speciális témára (pl. koordináta-geometria, projektív geometria). A válasz: mert így épül fel az anyag. Így összefüggéseiben látható, hogy a görbéknek milyen hasonló és eltérő tulajdonságai vannak. Ezen kívül a másodrendű görbék ilyetén való feldolgozásához nagy ihletet kaptam az egyik, itt a Mi egyetemünkön elvégzett gyakorlatomon.

A másodrendű görbék tehát mindenhol szerepelnek, még ha nem is használjuk így a megnevezésüket, de még a való életben is szükségünk van rájuk. Ha egy kertet akarunk felásni, akkor akaratlanul is a fordított arányosságot használjuk: ha többen csináljuk, előbb végzünk, a fordított arányosság pedig a képe révén a hiperbolához köthető. Mikor a csillagászok és tudósok kutatják az új életformákat és új civilizációkat az űrben, akkor nekik is szükségük van a másodrendű görbékre: gondoljunk csak a parabolaantennára. Emellett a fizikusok és a csillagászok egy további másodrendű görbének is igen nagy hasznát látják a bolygómozgások tanulmányozásakor: ez az ellipszis. Tehát a matematika és a másodrendű görbék nélkül ezen tudományok is igen nehezen tudnának működni.

Dolgozatomban tehát lépésről lépésre végigveszem a köz- és a felsőoktatás évfolyamait és féléveit, hogy hol, milyen formában, és milyen mélyen találkozhat egy átlagos, de a matematika irányába érdeklődő diák a másodrendű görbékkel. Az általános iskolában még csak egy szemléletes képet igyekeznek kialakítani a tanárok a másodrendű görbékről, ezért inkább példákon keresztül vezetik be a fogalmakat, a fordított arányosságra nagy hangsúlyt fektetnek, azonban még ezt sem kötik össze konkrétan a hiperbola fogalmával, mert a feladatokban nem mindig jelenik meg a görbe.

Középiskolában már előtérbe kerülnek a pontos és fontos definíciók és tételek, mert a kialakult szemléletes képre már lehet építeni. Ebben a korban a diákokban már megvan a kellő felkészültség a pontosabb, szakszerűbb fogalmak befogadására. Véleményem szerint már itt is be lehetne mutatni (főleg a koordináta-geometriai részben vagy az után), hogy vajon miért ennyire hasonlóak a görbék. Miért csak egy előjelben tér el az ellipszis és a hiperbola egyenlete, esetleg van-e közük egymáshoz. Sajnos a tananyag nagysága és az idő szűkössége miatt ezen dolgok bemutatására nincsen mód és lehetőség.

Az egyetemen a definíciók és az összefüggések pontos ismerete az elvárás és csak ez elfogadható. Nekünk tanárszakosoknak nem csak a közoktatásban leadandó törzsanyagot kell ismernünk, hanem annál többet, az anyag hátterét is muszáj értenünk, tudnunk. Ugyanis, ha jön egy okosabb gyerek, aki belekérdez a mélyebb összefüggésekbe, nem mondhatjuk neki azt, hogy nézzen utána, hanem valamit mondanunk kell, útmutatást kell adnunk, hogy merre kutakodjon.

A dolgozatomból is látszódni fog az anyag felépítése: az első fejezetben még inkább az ábrák és a kevés definíció lesz a jellemző, később egyre több lesz a definíció, és a végén eljuthat az Olvasó az összefüggés megtalálsáig: Miért ilyen hasonlóak a görbék? Ezen kívül egy kicsit túl is lépünk a tanárszakosok számára az alapképzésben kötelező anyagon, hogy én is igyekezzek fenntartani az Olvasó érdeklődését ezen csodálatos téma iránt, és önálló továbbolvasásra buzdítsam.

A dolgozat elkészítésében sokat segített, és nagy köszönettel tartozom kitartó munkájáért, amivel a legnagyobb elakadásaimon is túllendített: Szeghy Dávidnak, a Geometria tanszék oktatójának. Illetve az ötletért külön köszönet illeti Korándi Józsefet, a Matematikatanítási és Módszertani Központ oktatóját, aki az általa szervezett gyakorlattal nagy lökést adott a mű elkészültéhez.

Az előbb említett személyeken kívül szeretném megköszönni egyetemi oktatóimnak is, hogy nyilvánossá tették előadásuk jegyzetét vagy vázlatát, ezzel is hozzájárultak a dolgozatom elkészültéhez.

2. fejezet

Általános iskola

Ebben a fejezetben azok a másodrendű görbék szerepelnek, mellyekkel egy átlagos általános iskolásnak találkoznia kell, mire a 8 osztályt elvégzi. Elsőként a körrel találkozik a diák. Mivel ezen alakzat egészen a hetedik évfolyamig végigkíséri geometriai tanulmányait, ezért a fejezet első részében mi is a körrel foglalkozunk. Ezután visszatérünk hatodik osztályban, ahol a hiperbolával találkozik a diák, ami, mint a fordított arányosság függvényének képe jelenik meg. Ekkor még csak annyit mondanak neki, hogy ez a hiperbola, de az alakján kívül mással nem foglalkoznak. Az általános iskola utolsó évében megjelenik a függvényábrázolások között a másodfokú függvény is. Itt még csak annyit mondanak egy nyolcadikosnak, hogy ez egy parabola. A tulajdonságaira vonatkozó információ átadására - néhány kivételtől eltekintve, de azt is csak szemléletesen - a középiskolában kerül sor. Ott már részletesebben fog szerepelni a parabola.

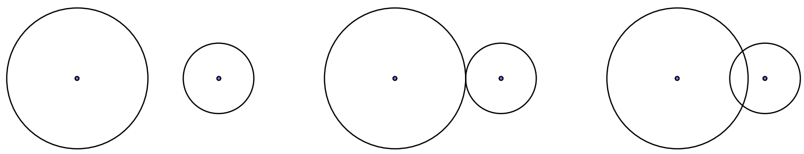
2.1. A kör

Ebben a fejezetben megismerkedünk azon alap dolgokkal, amiket egy általános iskolásnak nyolcadik végére a körről el kell sajátítania. Ekkor a körről még nem mint másodrendű görbéről beszélnek a tanárok, hanem inkább csak, mint mértani alakzatról. Most mi is ennek a fényében vizsgáljuk a kört ebben a fejezetben, másodrendű görbe mivoltáról majd a középiskolai résznél beszélünk. A tanárok az általános iskola végére kialakítanak a körről és részeiről egy szemléletes képet a diákokban. Ebben az életkorban ez teljesen megfelelő, ezen alapokra tudnak majd a középiskolai tanárok építkezni. Példának okáért említhetném, hogy különbséget tesznek érintés és metszés között. "Az érintő olyan egyenes, mely csak érinti a kört, nem metszi. Vagyis az érintőnek és a körnek csak egy közös pontja van." Ezen pontosítanak a középiskolában és az egyetemen, hogy az érintő is metszi a kört, de csak egy metszéspontjuk van. Itt már nem tesznek különbséget érintés és metszés között. Ennek megfordítása nem feltétlenül igaz: ha egy egyenesnek és egy parabolának csak egy metszéspontjuk van, az nem feltétlenül érintő, mert a parabola tengelye is ilyen egyenes. Erre a problémára később ki fogok még térni (ld. 3.14 definíció és a rákövetkező rész).

Ötödikben kezdenek a diákok - komolyabban - megismerkedni a körrel. Elsőként a kört, mint mértani helyet tanulják.

2.1. Definíció (Körvonal). *Egy adott ponttól adott távolságra lévő pontok halmaza a síkban a körvonal.*

Ezen kívül az alapfogalmak csak szemléletes, rajzon bemutatott definícióval szerepelnek (átmérő, körív, körlap, körcikk, stb.). A két kör kölcsönös helyzetéről is beszélnek ötödikben, de csak egy nagyon egyszerű feladaton keresztül mutatják be a lehetséges eseteket[1]. Feladatként azt adják, hogy adott egy szakasz változó hosszal, és rajzoljunk a végpontjaiba két kört, úgy, hogy 0, 1 vagy 2 közös pontjuk legyen. A feladatot és megoldását a következő ábra szemlélteti.



[1]Sokszínű 5. 82. old.

Ezekből már a diák könnyen megérti, hogy ha két kör metszi egymást, akkor két, ha érintik egymást, akkor egy, egyébként pedig nulla közös pontjuk (vagyis metszéspontjuk) van.

Hatodikban már ismerős alakzatként tér vissza a kör. Ekkor a diákoknak meg kell tanulniuk, hogy a kör tengelyesen szimmetrikus alakzat. A diákok ezen kívül megismerkednek a sokszögek köréírható körével. A kör húrjával és érintőjével is találkoznak. Ezen fogalmakat szemléletesen egy feladaton keresztül vezetik be: rajzoljunk egy kört, és úgy egy egyenest, hogy annak a körrel 0, 1 vagy 2 metszéspontja legyen.

Hetedik osztályban a diákok kibővítik a sokszögek köréírható köréről szóló ismereteiket. Megtudják, hogy igen speciális sokszög, a háromszög köré is lehet kört írni, sőt a háromszögbe bele is írható kör. Magáról a körről, mint alakzatról az új információ a kerületének és területének kiszámítási módja.

2.2. Állítás (A kör kerülete, területe). Egy r sugarú kör
kerülete: $K = 2r\pi$;
területe: $T = r^2\pi$

A területre vonatkozó állítást egyszerű módszerekkel be is bizonyítják[2]. A kört vágjuk fel párossok, egyenlő körcikkre. A kört daraboljuk át ezen körcikkek segítségével egy paralelogrammába (persze a paralelogramma két alapja nem lesz egyenes). Ennek a paralelogrammának a területe meg fog egyezni a kör területével, mert az egész kört felhasználtuk. A paralelogramma egyik oldala a kör kerületének a fele, a magassága pedig pont a kör sugara. Most írjuk fel ennek a paralelogrammának a területét, melyet úgy kapunk, hogy a paralelogramma egyik oldalát megszorozzuk a magassággal. Itt most:
$T = r \cdot \frac{2r\pi}{2} = r \cdot r \cdot \pi = r^2\pi$. Vagyis megkaptuk a kör területére vonatkozó összefüggést. A kör kerületéről szóló állítást általános iskolában nem bizonyítják.

Nyolcadik évfolyamon a kört már csak "segédeszközként" használják, vagyis új dolgot nem kell róla megtanulni, de például a Pitagorasz-tétel

[2] Sokszínű 7. 309-311. old.

gyakorló feladatai között[3], vagy a térgeometriai részben bizonyos kör alapú alakzatok felszínének és térfogatának számításakor szükség van rá[4], ezért lényegében a diákok az általános iskolára befejezik a körrel való ismerkedést. További tulajdonságait és a körrel kapcsolatos tételeket már a középiskolai tanároknak kell megtanítaniuk.

2.2. A hiperbola

Az első igazán új másodrendű görbe, amivel megismerkednek a kisdiákok: a hiperbola, mint a fordított arányosság képe. Ebben a fejezetben erről a görbéről igyekszek kialakítani egy szemléletes képet, épp úgy, mint azt az általános iskolában a matematikatanárok teszik. Nézzünk egy mintafeladatot arra, hogy a hiperbolát hogyan vezetik be.

2.3. Feladat. [5] *Egy út építésének földmunkáit 3 gép 8 nap alatt tudja elvégezni.*

a) *Számítsuk ki, hogy hány nap alatt végezné el ugyanezt a munkát 1; 2; 3; 5; 6; 8; 12; 16 ugyanilyen munkagép!*

b) *Milyen kapcsolat van a munkagépek száma és a munkavégzés ideje között?*

c) *Ábrázoljuk az összetartozó értékeket koordináta-rendszerben!*

A feladat megoldását kezdjük azzal, hogy megnézzük, hogy mit mond az egyenes- és mit a fordított arányosság definíciója.

2.4. Definíció (Egyenes arányosság). *Két változó mennyiséget egymással egyenesen arányosnak mondunk, ha az egyik mennyiséget (x) valahányszorosára változtatjuk, a másik mennyiség (y) is ugyanannyiszorosára változik. Ez függvénnyel leírva:* $y = a \cdot x$, *ahol* $a \neq 0$.

[3]Sokszínű 8. 142. old.
[4]Sokszínű 8. 178. old.
[5]Sokszínű 6. 237. old.

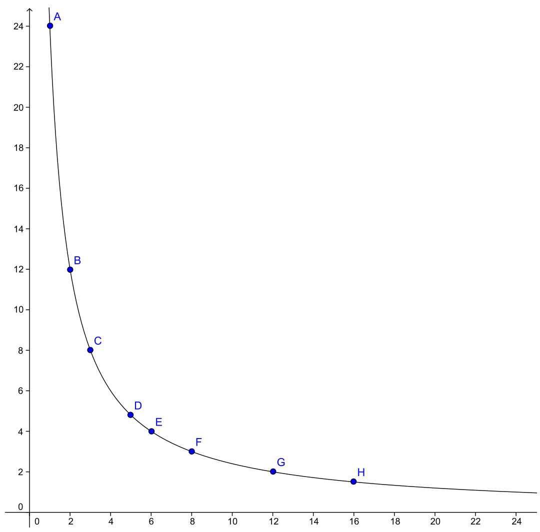
2.5. Definíció (Fordított arányosság). *Két változó mennyiséget egymással fordítottan arányosnak mondunk, ha az egyik mennyiséget (x) valahányszorosára változtatjuk, a másik mennyiség (y) reciprokszorosára változik. Függvény formájában:* $y = \dfrac{a}{x}$, *ahol* $a \neq 0$.

Az egy nagyon fontos kikötés, hogy fordított arányosság esetén a 0 nem szerepelhet az értékek között[6]. Én ezt úgy magyaráznám ebben a korban, hogy annak semmi értelme, hogy egy munkát 0 darab ember, gép, csap, stb. végezzen, mert akkor a munka sose készül el. Ezért nem értelmezzük a függvényt (és az arányosságot) a 0 helyen.

A feladat megoldását kezdjük azzal, hogy végiggondoljuk, hogy melyik fajta arányosságról beszélünk. Ha a munkagépek számát változtatjuk, akkor a szükséges idő azzal ellentétesen változik. Ha több a gép, kevesebb idő kell, és viszont. Vagyis a feladatot a fordított arányosság alapján tudjuk megoldani. Ezzel a *b*) kérdést már meg is válaszoltuk. Az *a*) kérdést egy-két gyors számítással megválaszolhatjuk.
Ha 3 gép 8 nap alatt végez az úttal, akkor 1 gép $8 \cdot 3 = 24$ nap alatt végez. Miért van ez így? Mivel fordított arányosságról beszélünk, ezért nézzük meg mit mond: ahányszorosára változik az egyik mennyiség annyiad részére változik a másik. Jelen esetben: $3 \cdot \frac{1}{3} = 1$ darab gép van, ezért a napok száma: $8 : \frac{1}{3} = 8 \cdot 3 = 24$. A többit ugyanígy kell kiszámolni. $3 \cdot \frac{2}{3} = 2$ gép $8 : \frac{2}{3} = 12$ nap alatt végez, $3 \cdot \frac{5}{3} = 5$ gép $8 : \frac{5}{3} = 4{,}8$ nap alatt végez, $3 \cdot \frac{6}{3} = 3 \cdot 2 = 6$ gép $8 : 2 = 4$ nap alatt végez, $3 \cdot \frac{8}{3} = 8$ gép $8 : \frac{8}{3} = 3$ nap alatt végez, $3 \cdot \frac{12}{3} = 3 \cdot 4 = 12$ gép $8 : 4 = 2$ nap alatt végez, $3 \cdot \frac{16}{3} = 16$ gép $8 : \frac{16}{3} = 1{,}5$ nap alatt végez. Ezeket az adatokat ábrázoljuk egy grafikonon. A *c*) részfeladatra a következő oldal tetején lévő ábra adja meg a választ. Az ábrázolásnál az x tengelyen a gépek számát, az y-on pedig a szükséges időt jelenítem meg.

Ugyan ekkor még nem minden feladatnál jelenik meg konkrétan a görbe is az ábrán (mert esetleg nem lenne értelme a racionális vagy irracionális értékeknek), de most a szemléltetés kedvéért így jelenítjük meg a függvényt.

[6]Sokszínű 6. 233. old.



Amikor olyan feladat kerül elő, hogy az ábrán a hiperbola megjelenik, akkor a diáknak a tanár csak annyit mond, hogy ez egy ún. hiperbola. A görbe tulajdonságairól ekkor még szó sem esik, mert ekkor nem a pontos definíciók, hanem csak egy szemléletes kép kialakítása a feladat a hiperboláról. A tulajdonságait részletesen majd 9. és 11. osztályban kell tanítani, ahol a szemléletes kép már nem lesz elég, hanem pontos defnícióknak és tulajdonságoknak kell a hiprbolához kapcsolódniuk. Viszont 8. osztályban kiegészítő anyagként szerepel a hiperbola, és néhány tulajdonsága. Ezeket főleg matematika tagozatos vagy jobban haladó csoportoknak akár már ott elő lehet vezetni[7] Hatodik osztályban más másodrendű görbe nincsen, egészen nyolcadikig nem is fordul elő másik.

2.3. A másodfokú függvény

Nyolcadik osztályban a függvényábrázolási feladatok között szerepel egy nagyon érdekes példa. Ebben a másodfokú függvénnyel, és annak képével, a parabolával ismerkedhet meg a diák. A témakör előtt már megismerkednek a hatványozással, valamint a kéttagú összeg, a kéttagú különbség négyzetével

[7]Sokszínű 8. 270-272

is. Ugyanakkor nyolcadikban a diákok még csak ismerkednek a másodfokú függvénnyel, mert csak egyszerű függvényábrázolásokkal találkoznak.

2.6. Feladat. *Ábrázoljuk a következő függvényeket koordináta-rendszerben!*

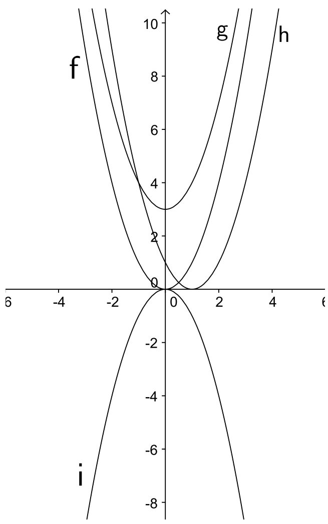
a) $f(x) = x^2$

b) $g(x) = x^2 + 3$

c) $h(x) = (x-1)^2$

d) $i(x) = -x^2$

A feladat megoldása értéktáblázattal (ami nyolcadik osztályban még megengedett) könnyű. A következő ábra mutatja, hogy a függvények hogyan néznek ki.



Az általános iskolásnak ekkor a másodfokú függvényről még csak néhány alapvető tulajdonságot kell tudnia[8] (a nevén kívül, hogy parabola; értékkészlet, tengelymetszet, menet, szélsőérték). Viszont ezen tulajdonságokat úgy kell ismernie, hogy tudja, hogy ezek nem minden parabolára érvényesek

[8]Sokszínű 8. 265-268. old.

ugyanúgy. Például a lefele nyíló parabola esetén ne mondja azt, hogy a függvény értékkészlete a pozitív számok halmaza, vagy egy olyanhoz, melynek nincs tengelymetszete, ne keressen tengelymetszetet. A parabola (illetve a másodfokú függvény) további tulajdonságait (hogy bizonyos speciális parabolák (vagyis az $y = 2px^2$) paritását tekintve páros, ha az origóban van a csúcsa; hogy mi az, hogy fókuszpont, vezéregyenes; stb.) majd csak középiskolában kell megismernie.

Mivel az alaptulajdonságok (értékkészlet, tengelymetszet (bizonyos speciális esetekben), menet, szélsőérték (bizonyos esetekben) az ábrákról leolvashatók, így ezek részletezésébe itt nem megyünk bele.

2.4. Összefoglalás

Ötödik osztályban találkoznak a diákok először komolyabban másodrendű görbével, mikor megismerkednek a körrel. **Hatodik** évfolyamban találkoznak elsőként a hiperbolával, de ekkor még csak érdekességként hangzik el a neve, mert inkább a fordított arányosság megtanítása a lényeg, mint a hiperbola megismertetése. **Hatodikban** és **hetedikben** tovább bővítik ismereteiket a körről. **Nyolcadikban** a parabola szerepel másodrendű görbeként a tananyagban (valamint kiegészítő anyagként a hiperbola).A kör egészen kilencedikig nem kerül elő, csak segédeszközként. A személyes véleményem, amivel a matematika iránti érdeklődés ébren tartható, hogy, mivel nyolcadikban már tanulnak a diákok hatványozni, érdemes nekik elmondani, hogy ezek a görbék ún. "másodrendű görbék". El is lehet magyarázni, főleg a parabolánál még könnyű is, hogy azért hívjuk így őket, mert a leíró egyenletben van másodfokú tag. De elvárni tőlük, hogy ezt vissza is tudják mondani, hiba lenne. Ilyenkor még csak érdekességként szabad elhangzania ennek.

A másodrendű görbék "negyedik" fajtája, az ellipszis nem kerül elő általánosban. Ezzel a másodrendű görbével a diákok először 11.-ben fognak találkozni, így tulajdonságait is csak ott tanulják.

3. fejezet

Középiskola

Ebben a fejezetben kicsit tovább lépünk a másodrendű görbék világában. Megismerkedünk a görbék néhány további tulajdonságával, a körnek újabb tulajdonságaival (középponti és kerületi szögek, körív hossza, stb.) és szerencsénk lesz találkozni a negyedik másodrendű görbével is, az ellipszissel. Az általános iskolában a diákok **ötödikben** találkoztak "először" a körrel, **hatodikban** először a hiperbolával és **nyolcadikban** először a parabolával. **Kilencedikben**, mikor újra előkerülnek a már említett görbék, akkor kicsit más sorrendben találkoznak velük ismét: elsőként a parabola, utána a hiperbola és végül a kör. Ezért változtattam meg én is a sorrendet.

3.1. A másodfokú függvény mélyebb tulajdonságai

Kilencedikben tér vissza a másodfokú függvény a függvényábrázolási feladatok között, egy egész fejezet keretében[1]. Ekkor már elvárás, hogy a diák tudja, hogy a függvény képe a parabola. Azt is tudnia kell, hogy mit jelent, hogy ez egy páros függvény, ugyanis a páros függvény definícióját az $f(x) = x^2$ függvényen át vezetik be.

[1]Sokszínű 9. 90-94.old.

3.1. Definíció. *Azokat a függvényeket, amelyeknél az értelmezési tartomány minden elemére $f(-x) = f(x)$ teljesül, páros függvényeknek nevezzük.*

Tizedik osztályban fog a parabola újra előkerülni. Ekkor is a másodfokú függvény képeként szerepel, valamint a vázlatos képét segítségül fogjuk hívni a másodfokú egyenlőtlenségek megoldásánál. Ekkor megismerik a diákok a másodfokú függvény általános hozzárendelési szabályát, valamint az ábrázolásának egy jó módszerét:

3.2. Definíció. *A másodfokú függvény hozzárendelési szabálya általános esetben:*
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c,$ *ahol* $a \in \mathbb{R}, a \neq 0, b; c \in \mathbb{R}$

Célszerű a másodfokú függvények hozzárendelési szabályát teljes négyzet alakra hozni: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = a(x-u)^2 + v$, ahol $a \in \mathbb{R}, a \neq 0, u; v \in \mathbb{R}$. A normál parabolát ekkor a-szorosára nyújtjuk, és a csúcspont a $C(u; v)$ pontba kerül.

Ekkor átismétlik a zérushely fogalmát[2], amit már kilencedikben már definiálták[3]. Azért most kell ismételni, mert a másodfokú egyenlet (de főleg az egyenlőtlenség) megoldásánál fontos lesz tudni, hogy az ábrázolt parabolának hol vannak (ha egyáltalán vannak) zérushelyei. Eddig elég volt az, hogy ha a függvény ábrájáról megközelítő pontossággal meg tudták mondani, hogy hol a zérushely. De az egyenlőtlenségek grafikus megoldásánál fontos, hogy pontos ábrát készítsünk.

3.3. Definíció (Zérushely). *Azt az x valós számot, ahol $f(x) = 0$, a függvény zérushelyének nevezzük.*

Ezután megtanítjuk a diákoknak, hogy a másodfokú függvénynek legfeljebb 2 darab zérushelye lehet, a parabola elhelyezkedésétől függően. Ezt egy egyszerű, vázlatos ábrával könnyen bemutathatjuk, ez nem igényel különösebb feladatot, a függvények tanítása során éppen eleget gyakorolják a pontos

[2]Sokszínű 10. 60. old.
[3]Sokszínű 9. 81. old.

függvényábrázolást. A másodfokú egyenlőtlenségek megoldásának ábrázolásakor sem kell pontos függvénygrafikon, csak a zérushelyek számát illetően legyen pontos.

3.2. A törtfüggvény, mint hiperbola

Kilencedikben a diákok a parabola után a hiperbolával is újra találkoznak[4]. A hiperbola első megjelenítésekor vissza lehet utalni a 6-os tananyagra, hogy ez nem olyan nagy újdonság, mint amilyennek elsőre gondolnánk. Hiszen a fordított arányosságnak is ez volt a képe, csak akkor még nem mindig tudtuk a görbét kirajzolni. Az első függvény, amit törtfüggvényként ismerni kell (a pontos ábrájával együtt) az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvény. Ezen a függvényen keresztül be lehet vezetni a törtfüggvény alapvető tulajdonságait. Elsőként megállapítjuk, hogy a törtfüggvény paritására nézve páratlan.

3.4. Definíció. *Azokat a függvényeket, amelyeknél az értelmezési tartomány minden elemére $f(-x) = -f(x)$ teljesül, páratlan függvényeknek nevezzük.*

Azt, hogy mikor csökken vagy növekszik egy függvény, már régebbről tudjuk (ez 8. osztályban tananyag[5]), tehát itt csak meg kell állapítani a monotonitást: mindkét lehetséges intervallumban csökken. A szélsőérték fogalma is már általánosban szerepel, így itt csak meg kell állapítani, hogy nincsen szélsőérték. Az értékkészlet (és az értelmezési tartomány is) az ábráról könnyen leolvasható: mindkettő a valós számok halmaza, a nullát kivéve. A konvexitás definíciója itt csak szemléletesen szerepel: "ha tudok egyenest húzni úgy a görbe két pontja között, hogy az a görbe felett legyen végig, akkor konvex függvényről beszélünk". Ezen függvénynek a konvexitását csak a pozitív ágra vizsgáljuk[6].

A hiperbola, mint másodrendű görbe tulajdonságairól itt nem esik szó. Azok majd a későbbiekben kerülnek elő.

[4] Sokszínű 9. 98-104. old.

[5] Sokszínű 8. 255-258. old.

[6] Sokszínű 9. 99. old.

Ezután a görbét a legkülönbözőbb módon transzformálják a feladatok, egyre inkább eltávolítva a görbét a fordított arányosságnál tanult képétől. Kilencedikben már az is cél lehet, hogy egy alakzat ne csak egyetlen függvényhez kapcsolódjon, hanem többhöz is, de a függvényhez ismerjük az elnevezését is. (pl. a fordított arányosságról beszélve tudnia kell a diáknak, hogy a képe egy hiperbola, de ha kérdezik, hogy tud-e még olyan függvényt mondani, aminek a képe hiperbola, akkor ugorjon be a törtfüggvény). Már ebben az évfolyamban fontos megjegyezni, hogy egy függvény típusnak nem csak egy képe van. A racionális törtfüggvénynek épp úgy egyenlete az $f(x) = \frac{1}{x}$, mint például a $g(x) = \frac{12}{x+1}$, vagy a $h(x) = \frac{a}{x} + b$.

3.3. A kör a középiskolában

A középiskolai évek alatt a kör sokkal nagyobb hangsúlyt kap, mint általánosban. Ezt jelzi az is, hogy jelentősen több tétel és definíció kapcsolódik hozzá, és az idő előrehaladtával egyre több információt kell megjegyezni róla. Végre pontosan is megismerkedik a diák a kör különböző részeinek a definícióival és a hozzájuk kapcsolódó tételekkel (mi az hogy kör, mi az érintő, milyen kapcsolat van a kör egy-egy érintője és szelője hossza között, stb.)

Elsőként a diák (nagyon helyesen) megismerkedik a körvonal, zárt körlap, nyílt körlap pontos fogalmával[7].

3.5. Definíció. *Azon pontok halmaza a síkon, amelyek a sík egy adott O pontjától adott r távolságra vannak, egy kör(vonal). Jelekkel:* $\left\{P \middle| |OP| = r\right\}$. *(Kilencedikben ezt a fajta jelölést a tankönyv nem használja)*
Azon pontok halmaza a síkon, amelyek a sík egy adott O pontjától adott r távolságnál nem nagyobb távolságra vannak, az O középpontú, r sugarú zárt körlap. Jelekkel: $\left\{P \middle| |OP| \leq r\right\}$
Azon pontok halmaza a síkon, amelyek a sík egy adott O pontjától adott r távolságnál kisebb távolságra vannak, az O középpontú, r sugarú nyílt körlap. Jelekkel: $\left\{P \middle| |OP| < r\right\}$

[7] Sokszínű 9. 134. old.

Ezután következik az érintő pontos definíciója és két fontos tétel, amit az érintőről tudni kell.

3.6. Definíció (Érintő). *A kör érintője a kör síkjának olyan egyenese, melynek pontosan egy közös pontja van a körrel.*

3.7. Tétel. *A kör minden pontjába pontosan egy érintő húzható.*
Az érintési pontba húzott sugár merőleges az érintőre.

3.8. Megjegyzés. A tétel bizonyítása középiskolában nem szerepel.

A körök kölcsönös helyzetére, amit általánosban csak egy egyszerű feladaton keresztül mutattak be, most már csak megjegyzésként hivatkoznak[8].

3.9. Megjegyzés (Körök kölcsönös helyzete). Egy síkban elhelyezkedő két körnek 0, 1 vagy 2 közös pontja lehet; ha egy közös pontjuk van, akkor a két kör érinti egymást.

A kört geometriai alakzatként a középiskola első két évfolyamán rengeteg dologra használják. Ezek a tulajdonságok, illetve tételek nekünk, akik a kört, mint másodrendű görbét vizsgálják, új információt nem hordoznak, ezért ezek csak említés szintjén szerepelnek itt. A körnek ezen kívül rengeteg új tulajdonságát is megismerik a diákok. Elsőként kibővítik a sokszögek köré és a sokszögekbe írt körökről[9] szóló tudást azzal, hogy megtanítják az érintő- és húrnégyszög[10] fogalmát. A Thalesz-tétel és bizonyítása[11] is a kör segítségével kerül bemutatásra. A kör szimmetriájáról is tanulnak. A körben lévő speciális szögek (középponti-, kerületi szögek) is szóba kerülnek, illetve az ezekhez kapcsolódó tételek is szerepelnek a tananyagban[12]. Ehhez kapcsolódva vezetik be a például a körív fogalmát is precízen. A kört úgy is használják a középiskolában, mint egy olyan alakzat, melynek bizonyos pontjaiból egy szakasz adott szögben látszik (ez lesz a látókörív). A kör speciális

[8]feladat: Sokszínű 5. 82. old.; megjegyzés: Sokszínű 9. 135. old.
[9]Sokszínű 9. 137-140. old.
[10]Érintősokszög: Sokszínű 9. 145-146. old.; Húrnégyszög: Sokszínű 10. 117-121. old.
[11]Sokszínű 9. 141-143. old.
[12]Sokszínű 10. 109.-116. old.

részeinek nagysága (körcikk, körgyűrű, stb.)[13] is része az anyagnak, némelyik csak érettségi előtt; ezek főleg a térgeometria szempontjából érdekesek.

Kilencdikben, tizedikben (és tizenkettedikben) a körről ezt kell megtanulni. Viszont a tizedik év végén a körrel, mint mértani hellyel befejezik az ismerkedést. **Tizenegyedikben** visszatér, de akkor már a koordináta-geometria témakörében, ahol már valódi másodrendű görbeként vizsgáljuk, nem csak úgy, mint geometriai alakzat.

3.4. Koordináta-geometria

A **tizenegyedik** évfolyamon tanítandó geometria anyagot teljes egészében a koordináta-geometria öleli fel. Viszont itt az "igazi" geometriát már csak segédeszközként használjuk, az alakzatok inkább lesznek koordinátákból, számokból, egyenletekből álló absztrakt alakzatok, mint igazi képek. De természetesen nem szabad úgy nekiállni a koordináta-geometriát tanulni és tanítani, hogy nem tudjuk elképzelni, illetve lerajzolni a feladott feladatot. Ez nagyon sokszor nem csak hogy segít, hanem egyenesen ez vezet rá a megoldás menetére minket. Ezért mondhatjuk, hogy a geometria itt inkább segédeszköz, mint önálló, új ismereteket nyújtó tudományág.

3.4.1. A kör

A kör[14] lesz következő fejezetünk témája. Megismerkedünk a kör egyenletével és néhány egyéb érdekesség is kiderül róla. A kör, mint alakzat, természetesen a koordináta-geometriában is ugyanaz, mint a "normál" geometriában. A síkban (és ezért a koordináta-rendszerben is) meg lehet adni egy kört a középpontjával és a sugarával.

A két pont távolságára vonatkozó képlet alapján a kör egyenlete könnyen meghatározható.

[13] Sokszínű 12. 87-91. old.
[14] Sokszínű 11. 225-243. old.

A két pont távolsága alapján a $P(x;y)$ pont akkor és csakis akkor illeszkedik a k körre, ha $|KP| = \sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2} = r$, ahol $K(u;v)$ a kör középpontja és $r \in \mathbb{R}$ a sugár. Mindkét oldalt négyzetre emelve kapjuk a kör egyenletét: $(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$.

3.10. Definíció (A kör egyenlete). *A $P(x;y)$ pont akkor és csakis akkor illeszkedik a $K(u;v)$ középpontú, r sugarú körre, ha az x és y koordináták kielégítik a következő egyenletet: $(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$. Ezt rendezve és a négyzetre emeléseket elvégezve kapjuk a kör egyenletének általános alakját:* $x^2 + y^2 - 2ux - 2vy + u^2 + v^2 - r^2 = 0$.

3.11. Megjegyzés. Ha a kör középpontja az origó, akkor az egyenlet: $x^2 + y^2 = r^2$ alakúra egyszerűsödik.

Természetesen az alakzatok kölcsönös helyzetéről itt sem szabad megfeledkezni. A következő állítás meghatározza nekünk, hogy a koordinátageometriában hogyan kaphatjuk meg a két alakzat metszéspontjának koordinátáit: két alakzat közös pontját a két alakzat egyenletéből álló egyenletrendszer megoldásai adják, ugyanis a közös pontok koordinátái mindkét egyenletet kielégítik, tehát mindkét alakzaton rajta lesznek.

A kölcsönös helyzetről szóló rész vizsgálata közben egy újabb érdekességre bukkanhatunk. A két körnek két metszéspontja lehet legfeljebb, és a két pont egyértelműen meghatároz egy egyenest. Mikor a megoldás során a két kör egyenletét kivonjuk egymásból, akkor egy kétismeretlenes lineáris egyenletet kapunk. Ezekből a következő állítás vezethető le:

3.12. Állítás. Ez az egyenlet a két kör közös szelő egyenesének az egyenlete.

Itt felmerülhet kérdésként, hogy mi a helyzet akkor, ha két, egymást nem metsző kör egyenletét vonjuk ki egymásból. Hiszen ekkor is egy lineáris egyenletet kapunk, tehát valamiféle egyenest kellene kapnunk. Ez az egyenes lesz majd a két kör hatványvonala, mely majd az egyetemen fog előkerülni részletesen, ezért részletezni is csak ott fogjuk (ld. 4.5 definíció). Itt a hatványvonal és a hatványpont irányába tovább lehetne lépni, mert az ehhez szükséges tudásunk megvan, de az nagyon messzire vezetne a koordináta-geometriától. De érdekességként, fakultációkon elhangozhat, hogy mit értünk pont körre vonatkozó hatványán, illetve, hogy mit értünk két kör hatványvonalán.

3.4.2. A parabola

Ebben a részben a parabolával[15] ismerkedünk meg még közelebbről, mint eddig. Az eddigi fejezetekben sok szó esett már a paraboláról, mint a másodfokú függvény képéről. Most nem csak, hogy részletesen megismerkedünk a parabola fogalmával, de végül a másodfokú függvénnyel való kapcsolatára is adunk egy új magyarázatot.

Lássuk elsőként a parabola pontos definícióját.

3.13. Definíció (A parabola). *A parabola azon pontok halmaza a síkon, amelyeknek a sík egy d egyenesétől (vezéregyenes) és egy d-re nem illeszkedő F pontjától (fókuszpont) vett távolsága egyenlő.*

3.14. Definíció. *A parabola érintője olyan egyenes, melynek a parabolával egyetlen közös pontja van, de az egyenes nem párhuzamos a parabola tengelyével.*

Mivel ez a definíció nem teljesen egyértelmű, ezért megadnak egy másik definíciót is, ami egyértelműsíti az előzőt. (Be lehet bizonyítani, hogy a két definíció ekvivalens.)

3.15. Definíció. *A parabola érintője olyan egyenes, melynek a parabolával egyetlen közös pontja van, és a parabola összes többi pontja az egyenes által meghatározott egyik félsíkban van.*

A parabola elég speciális másodrendű görbe abból a szempontból, hogy a helyzetétől és állásától függően más és más az egyenlete. Ezt bizonyítja az alábbi definíció is, mutatva, hogy hányféleképpen lehet felírni a parabola egyenletét.

[15] Sokszínű 11. 244-252. old.

3.16. Definíció (A parabola egyenletei). *(A jelölések magyarázata: F: fókuszpont, d: vezéregyenes, t: tengely, T: tengelypont, p: paraméter)*

1. *$t: y = 0$, $T = (0,0)$; $F = (0, \frac{p}{2})$; $\frac{p}{2} > 0$; $d: y = -\frac{p}{2}$ akkor $y = \frac{1}{2p}x^2$. Ez a parabola tengelyponti egyenlete.*

2. *$t: y = 0$, $F = (0, -\frac{p}{2})$, akkor $y = -\frac{1}{2p}x^2$*

3. *$t: x = 0$, $F = (\frac{p}{2}, 0)$, akkor $x = \frac{1}{2p}y^2$*

4. *$t: x = 0$, $F = (-\frac{p}{2}, 0)$, akkor $x = -\frac{1}{2p}y^2$*

5. *Ha a $T(u,v)$ és $F(u, v + \frac{p}{2})$, $d: y = v - \frac{p}{2}$, akkor az $y - v = \frac{1}{2p}(x-u)^2$ egyenlet a p paraméterű, $T(u,v)$ tengelypontú, y tengellyel párhuzamos tengelyű, "felfele nyíló" parabola egyenlete, melynek F a fókusza és d a vezéregyenese.*

Már említettük (ld. 2.3-as fejezet bevezetője), hogy a másodfokú függvény képe parabola. A következő tételek magyarázatot adnak rá, hogy miért.

3.17. Tétel. *Minden, a valós számokon értelmezett másodfokú függvény grafikonja olyan parabola, melynek tengelye párhuzamos az y tengellyel.*

Az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a > 0$ másodfokú függvény grafikonja az y tengellyel párhuzamos tengelyű, $T(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a})$ tengelypontú, $\frac{1}{2a}$ paraméterű parabola.

3.18. Tétel (Az előző tétel megfordítása). *Bármely, az y tengellyel párhuzamos tengelyű parabolához pontosan egy, a valós számokon értelmezett másodfokú függvény tartozik, amelynek a grafikonja az említett parabola.*

3.19. Megjegyzés. Az előző két tétel bizonyítása megtalálható a Sokszínű matematika 11.-ben[16]

3.20. Tétel (Az előző két tétel együtt kimondva). *Jelölések: M: a valós számokon értelmezett másodfokú függvények. P: y tengellyel párhuzamos tengelyű parabolák.*

[16]Sokszínű 11. 251. old.

Tétel: Az M és P halmazok elemei kölcsönösen egyértelmű módon megfeleltethetők egymásnak, azaz minden M-beli függvényhez pontosan egy P-beli parabola tartozik, amely a tekintett függvény grafikonja; és fordítva, minden P-beli parabolához pontosan egy darab M-beli függvény van, amelynek grafikonja a tekintett parabola.

3.4.3. Az ellipszis

A következőekben egy "új" másodrendű görbével ismerkedünk meg, ez az ellipszis[17]. Itt elsőként a definícióval találkozik a diák, és nem az alakjával és speciális egyenletével, mint a parabolánál, mikor még csak a másodfokú függvény képét párosítjuk hozzá. Mivel nagyon új görbéről van szó, ezért itt még csak nagyon keveset kell tudniuk a diákoknak az ellipszisről (a középszintű érettségihez ráadásul az ellipszisről és a hiperboláról koordináta-geometriai szempontból semmit nem kell tudni).

3.21. Definíció (Az ellipszis). *Az ellipszis azon pontok halmaza a síkon, amelyeknek a sík két adott F_1, F_2 pontjától (fókuszpontok) vett távolságösszege, melyet jelöljön $2a$, állandó, ahol $|F_1F_2| < 2a$.*

3.22. Megjegyzés.

1. Az F_1F_2 szakasz O felezőpontja az ellipszis középpontja.
2. Az ellipszis tengelyesen szimmetrikus az F_1F_2 egyenesre és az F_1F_2 felezőmerőlegesére is.
3. Az ellipszis ezért középpontosan is szimmetrikus az O középpontra.
4. Az ellipszis F_1F_2 egyenesre illeszkedő A és B pontjainak távolsága a definíció következményeként $2a$; ez az ellipszis nagytengelye.
5. A nagytengely O-ra illeszkedő felező merőlegesének az ellipszishez tartozó C és D pontjai által meghatározott szakasz az ellipszis kistengelye, hossza $2b$.

[17]Sokszínű 11. 253-255. old.

6. Az F_1P és F_2P a P ponthoz tartozó vezérsugarak.
   Jelölésük: $|F_1P| = r_1$ és $|F_2P| = r_2$.

Ezután az ellipszis egyenletét vezetjük be, ezt speciálisan arra az esetre nézve, ha az ellipszis középpontja az origó, és a nagytengelyének egyenese az x-tengely.

3.23. Definíció (Az ellipszis egyenlete). *Ha $O = (0, 0)$, akkor az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ egyenletet az ellipszis középponti egyenletének nevezzük adott $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$, $a^2 = c^2 + b^2$ adatok esetén.*

3.4.4. A hiperbola

A hiperbola[18], mely következő fejezetünk tárgya, már szintén többször szerepelt: előfordult, mint a fordított arányosság képe, a törtfüggvény grafikonja. Ezúttal koordináta-geometriai szemmel vizsgálgatjuk. Végre megismerkedik a diák a hiperbola pontos definíciójával, és végül az origó központú hiperbola egyenletével is.

3.24. Definíció (A hiperbola). *A hiperbola azon pontok halmaza a síkon, amelyeknek a sík két adott F_1F_2 pontjától (fókuszpont) vett távolságkülönbségének abszolútértéke állandó. A két adott pont a hiperbola fókuszpontjai és rájuk az $|F_1F_2| > 2a$ összefüggés teljesül.*

3.25. Megjegyzés.

1. Az F_1F_2 szakasz O felezőpontja a hiperbola középpontja.
2. A hiperbola tetszőleges P pontját a fókuszpontokkal összekötő szakaszok a P vezérsugarai: $|F_1P| = r_1$, $|F_2P| = r_2$.
3. Az adott $|r_1 - r_2|$ távolság jelölése $2a$.
4. Az F_1F_2 egyenesnek a hiperbolához tartozó A és B pontjaira teljesül, hogy $AB = 2a$, ez a hiperbola valós tengelye.

[18] Sokszínű 11. 256. old.

5. A hiperbola tengelyesen szimmetrikus az F_1F_2 egyenesre és az F_1F_2 egyenesre merőleges, O-ra illeszkedő egyenesre is; ezért a hiperbola is szimmetrikus középpontosan.

6. Az F_1F_2 felezőmerőlegese a képzetes tengely.

3.26. Definíció (A hiperbola egyenlete). *Ha $O(0,0)$ és a valós tengely egyenese az x-tengely, akkor az $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ egyenletet a hiperbola középponti egyenletének nevezzük, ahol adottak: $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$, $c \in \mathbb{R}$, $a^2 = c^2 + b^2$, és a fél valós tengely hossza a.*

3.4.5. A másodrendű görbék, mint kúpszeletek

A kúpszelet olyan síkgörbe, mely egy egyenes körkúp és sík metszeteként jön létre. Mind a négy másodrendű görbe (kör, ellipszis, hiperbola, parabola) előállítható, mint kúpszelet, ahol a sík a kúpot nem a csúcsában metszi. Ez nem tételként (vagy állításként) van kimondva[19], de egy ábrával "bizonyítva" van, hogy tényleg előállnak. Ezen "állítás" megerősítésre kerül az egyetemen, akkor már rendes állításként szerepel.

1. A kör: vegyük a síkot a forgáskúp tengelyére merőlegesen.

2. Az ellipszis: vegyük a síkot úgy, hogy a forgáskúp tengelyére ne legyen merőleges és az alkotókkal ne legyen párhuzamos, valamint a metszősík és a tengely szöge legyen a kúp nyílásszögének a felénél nagyobb. Ha a metszősík merőleges lenne a tengelyre, akkor visszakapnánk a kört. Ebből is látszik, hogy a kör az ellipszis speciális esete.

3. A parabola: vegyük a síkot úgy, hogy a metszősík és a tengely szöge legyen egyenlő a kúp félnyílásszögével.

4. A hiperbola: a metszősík és a tengely hajlásszöge legyen a kúp félnyílásszögénél kisebb.

[19]Sokszínű 11. 257. old.

Másodrendű görbéből igazából nem csak ez a négy van, hanem van további öt is (pl. két párhuzamos egyenes, stb.; ezeket ld. a következő fejezetben). Ezeket azonban középiskolában nem tanítják (véleményem szerint helyesen, mert a diáknak elég azt megjegyeznie, hogy az egyenes egyenlete elsőfokú, a tanított görbéké másodfokú.) Bevezethetnénk az egyenesre a másodfokú egyenletet, mert megérthető lenne, hogy ha egy egyenespárunk van, akkor a két egyenes egyenletének a szorzata adja meg az egyenespár leíró egyenletét és az másodfokú lesz, de ezzel a többséget csak összezavarnánk, hogy egyenesek vannak, mégis másodfokú az egyenletük, pedig ez a fejezet amúgy se könnyű. Viszont egy ábrával ezeket is meg lehetne mutatni egy érdeklődőbb, nyitottabb csoport számára, mert az ábrán nem olyan nehéz megérteni. Ha a metsző sík, mely a kúp csúcsán megy át, és a kúp tengelyének hajlásszögét változtatom, akkor a metszet lehet két egyenespár, ha a hajlásszög a félnyílásszögnél kisebb; egy egybeeső egyenespár, ha a hajlásszög és a félnyílásszög egyenlő; és egyetlen pont, ha a hajlásszög nagyobb a félnyílásszögnél. Ennek ellenére ezeket nem mutatják meg, ezért ezek tárgyalását én is későbbre halasztom. Az egyetemi részben, mikor a koordináta-geometria ismétléséről lesz szó, kitérek a speciális másodrendű görbékre is.

3.5. Összefoglalás

A középiskolában már sokkal fontosabb lesz, hogy a diák a megtanult dolgok hátterét is értse, ne csak alkalmazni tudja azokat. Ezért sokkal több a pontos definíció és tétel. Végre megjelenik a negyedik másodrendű görbe is, az ellipszis, és a többinek mélyebb tulajdonságaival is megismerkednek a tanulók. A koordináta-geometriai részben már érzékelhető, hogy a négy másodrendű görbe valami módon összefügg. Nem csak azért, mert mind másodfokú, hanem azért is, mert például az ellipszis és a hiperbola leíró egyenlete közel azonos. Ez a kör és az ellipszis viszonyában még jobban látható: az ellipszis kis-, és nagytengelyének hosszát is 1-nek választva kapjuk a kör egyenletét. Tehát a két alakzat egyenlete nagyon közel áll egymáshoz, a kör az ellipszis egy speciális esete. Ez (és még sok más is) előre vetíti azt, amit az Egyetemen tanítanak meg geometriából, hogy ez a kapcsolat nem is véletlen, mert projektív szempontból a négy kúpszelet (kör, ellipszis, hiperbola, parabola) egy és ugyanaz.

4. fejezet

Másodrendű görbék az egyetemen

A következő fejezetben a másodrendű görbék azon tulajdonságai fognak előkerülni, melyek az egyetemi tananyagban szerepelnek. A fejezet végén az egyetemi anyagon túlmutató ismeretek is szerepelnek. A már korábban leírt definíciók és tételek, hacsak nem különösen fontos, hogy újra szerepeljenek, nem jelennek meg újra. Az előzőekben áttkeintett 12 év után, az egyetemi anyagra térünk. Itt már pontos definíciókat tanítanak, és a ponttatlan definíciókból akadó félreértésekre is igyekeznek rávilágítani. Ezen részben választ kapunk a nagy kérdésre: miért hasonlítanak ennyire a másodrendű görbék egymásra?

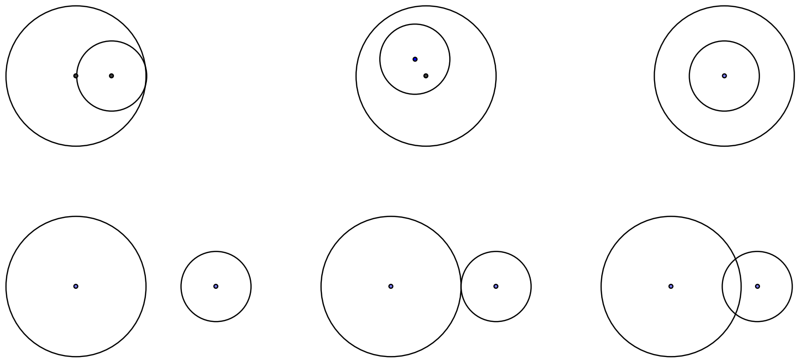
Elsőként természetesen a frissen érettségizett hallgatóknak szükségük van arra, hogy áttekintsék, hogy mit tanultak az elmúlt 12 évben, mit mondtak el jól, és mit kevésbé jól?

4.1. Ismétlés: a kör

Ebben az alfejezetben a fő hangsúly az ismétlésen van. Fontos, hogy a másodrendű görbékről megtanult dolgok újra a helyükre kerüljenek. A vonatkozó rész természetesen a legalapvetőbb másodrendű görbével indul, a körrel. Újra megtudjuk, hogy mit nevezünk körnek, hogyan definiáljuk a belső és külső pontot, és a kör és egyenes kölcsönös helyzetéről is van pontos definíció, illetve az érintő is ejtenek szót:

4.1. Megjegyzés. Ha az e egyenes és a kör O középpontjának távolsága d, akkor az e egyenes és a kör közös pontjainak száma 0, 1 vagy 2, attól függően, hogy $d > r$, $d = r$ vagy $d < r$. Az e egyenest a kör érintőjének nevezzük, ha az e egyenesnek és a körnek pontosan egy metszéspontja van.

Megtudjuk azt is, hogy két kör egy síkban egymáshoz képest hatféleképpen helyezkedhet el. Ez a hat helyzet a következő:



A kör további tanulmányozása során ismét szóba kerülnek az érintők. Ennek során megismerjük azon tételeket, melyek szerint a kör tetszőleges pontjába húzható érintő, az érintő merőleges az érintési pontba húzott sugárra; minden külső pontból két érintő húzható a körhöz és ezen két érintőszakasz hossza megegyezik. Ezen tételek némelyike szerepelt korábban (ha nem is ilyen pontosan, de utalnak rá). A kör egyéb részeiről is megtanítanak új információkat. A középponti- és kerületi szögek is előkerülnek ismét. A kettő egymáshoz való viszonyáról szóló tétel is visszatér (vagyis, hogy az ugyanazon ívhez tartozó kerületi szög feleakkora az ívhez tartozó középponti szöghöz képest). A látókörívet is újra definiálják.

Az első "új" dolog, a "Pont körre vonatkozó hatványa"-ról szóló tétel. Ez és a további tételek a későbbiekben lesznek nagyon hasznosak, de mivel az ismétlésben ide kerültek, ezért most itt fogjuk tárgyalni ezt a részt. A "Pont körre vonatkozó hatványa"-ról szóló tétel az "Érintő- és szelőszakaszok tétele"-re utal vissza. Azon tétel alapján az érintőszakasz és a szelőszakasz hosszát úgy számíthatjuk ki, ha az érintési pontot E-vel a szelő két végpontját A-val és B-vel, a külső pontot pedig P-vel jelöljük, hogy $PE = \sqrt{PA \cdot PB}$. Ezek alapján már kimondhatjuk a Pont körre vonatkozó hatványáról szóló tételt.

4.2. Tétel. *Az előjeles távolságoknál számított $PA \cdot PB$ szorzatot a P pont körre vonatkozó hatványának nevezzük.*

Egy félévvel később ez a témakör újból előkerül, új ismereteket adva, most az összefüggések miatt folytassuk a hatványpontokról és hatványvonalakról szóló témakör tárgyalást itt.

Az előző tételre épül a következő definíció.

4.3. Definíció. *Adott egy O középpontú, r sugarú kör. A P pont hatványa $PO^2 - r^2$.*

4.4. Következmény. A $PO^2 - r^2$ értéke lehet

1. pozitív, ha P nincs rajta a körlemezen;

2. nulla, ha P rajta van a körvonalon;

3. negatív, ha P a körlemezen van, de nem a körvonalon.

Két kör esetén már vizsgálhatjuk ezt is, hogy hol leszenk (milyen geometriai alakzaton) azok a pontok, melyeknek a két körre vonatkoztatott hatványuk megegyezik. Ez egy egyenes lesz, melyet a két kör hatványvonalának nevezünk. A következő tétel a hatványvonal két körhöz való helyzetéről beszél.

4.5. Tétel (Két kör hatványvonala). *Ha $O_1 \neq O_2$, akkor azon pontok mértani helye, melyek hatványa az O_1 középpontú, r_1 sugarú és az O_2 középpontú, r_2 sugarú körre megegyezik, az egy az O_1O_2 egyenesre merőleges egyenes.*

Bizonyítás. Ld.: ifj. Böröczky Károly Geometria 2 Tanár c. előadásának neten található jegyzete, 35. oldal.

Ennek a tételnek kibővített változata, ha nem két, hanem három körről beszélünk, a következő:

4.6. Következmény. Ha O_1, O_2, O_3 nem kollineáris, akkor pontosan egy olyan pont van, melynek a hatványa az O_i középpontú, r_i sugarú körre megegyezik. (i=1,2,3)

Az állítás bizonyítása egyszerű. Vegyük fel a három kört, és szerkesszük meg az első kettőnek a hatványvonalát. Majd a második és harmadik körre vonatkozó hatványvonalat is megszerkesztjük. Mivel az O_i pontok nem kollineárisak, ezért a két hatványvonal nem lesz párhuzamos. Így metszéspontjuk egy olyan pont lesz, amelynek hatványa mindhárom körre egyenlő lesz. Az egyértelműség bizonyítása: Ha P olyan pont, melyre a három körre vonatkoztatott hatvány megegyezik, akkor ennek rajta kell lennie az első kettő, illetve a második és a harmadik körök hatványvonalán is a hatványvonal definíciója miatt.

Természetesen a kör területére vonatkozó összefüggés sem maradhat ki az ismétlésből.

A háromszögek ismétlésekor előkerül az ún. Feuerbach-kör. Ez a speciális kör középiskolában csak említés szintjén kerül elő, ha egyáltalán előkerül.

4.2. Ismétlés: másodrendű görbék a koordinátarendszerben

Az ismétlés során a koordináta-geometria és a másodrendű görbék is ismét előkerülnek. Mint már utaltunk rá, a középiskolában csak a négy valódi görbével ismeretetik meg a diákot. Mostmár ideje, hogy a diák megismerkedjen az olyan görbékkel is, amelyek másodrendűek, de az alakjuk miatt nem gondolnánk, hogy másodrendűek.

Elsőként tekintsük át sorban azon tételeket és definíciókat, melyeket a paraboláról, az ellipszisről és a hiperboláról ismerni kell. A tananyag szerint a rend mindháromnál ugyan az: elsőként a pontos definíciók, és utána a középponti egyenletek. Ami újként hat, hogy azokkal az egyenletekkel is meg kell ismerkedniük a hallgatóknak, mikor a görbe középpontja egy általános pont, nem az origó.

1. A parabola: Ha a csúcspont koordinátái: $C(u, v)$, tengelye párhuzamos az x tengellyel: $(y - v)^2 = 2p(x - u)^2$
2. Az ellipszis és a hiperbola együtt: Ha a középpont $C(u, v)$, és a fókuszokat összekötő egyenes párhuzamos az x tengellyel: $\frac{(x-u)^2}{a^2} \pm \frac{(y-v)^2}{b^2} = 1$ (Megj.: Ha "+", akkor ellipszis; ha "-", akkor hiperbola)

4.2.1. Kúpszeletek, másodrendű görbék

Elsőként ismerkedjünk meg azzal, hogy mit nevezünk általánosan másodrendű görbének.

4.7. Definíció (Másodrendű görbe). *Az $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ típusú egyenlettel megadott alakzatokat másodrendű görbéknek nevezzük, ha $a \neq 0$ vagy $b \neq 0$ vagy $c \neq 0$.*

Ezzel összefüggésben kimondhatjuk a következő tételt is.

4.8. Tétel. *A kúpszeletek másodrendű görbék.*

Ennek a tételnek a megfordítása is igaz, és számunkra inkább ez a fontos.

4.9. Tétel. *Minden másodrendű görbe a következők egyike: ellipszis, kör, üres halmaz, pont, parabola, egyenes, párhuzamos egyenespár, hiperbola, metsző egyenespár.*

Bizonyítás. A tétel bizonyítását ld. később

Hogy ezek mindegyike elő is áll, azt a következő példa mutatja.

4.10. Példa. $a > 0, b > 0, c > 0, c_1 \neq 0, c_2 \neq 0, p \neq 0$

1. Kör: $x^2 + y^2 = 1$
2. Ellipszis: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
3. Parabola: $y^2 = 2px$
4. Hiperbola: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
5. Egyenes: $x^2 = 0$
6. Metsző egyenespár: $x^2 - c^2y^2 = 0$
7. Párhuzamos egyenespár: $x^2 - c^2 = 0$
8. Pont: $c_1^2x^2 + c_2^2y^2 = 0$
9. Üres halmaz: $c_1^2x^2 + c_2^2y^2 + 1 = 0$

Természetesen ezek nem feltétlenül egy adott másodrendű görbe legegyszerűbb egyenletei. Például az egyenes egyenletét a legritkább esetben adjuk meg másodfokúként, de ha most nem így tennénk, akkor nem lenne igaz a tétel.

Az első félévben zajló ismétlés a másodrendű görbék és a geometria szempontjából ezzel ér véget [1]. A következő részekben már a másodrendű görbék közötti kapcsolatra kerül a hangsúly. A középiskolában már láttuk, hogy a másodrendű görbék nem is olyan különbözőek, mint azt elsőre gondolnánk (kinek jutna eszébe, hogy egy ellipszis és egy parabola hasonlíthat egymásra). A fejezet végére kiderül, hogy a két alakzat bizony sokkal közelebb áll egymáshoz, mint gondolnánk.

[1] ld. Kiss György netes jegyzetében

4.3. Affinitás

Ebben a fejezetben egy geometriai transzformációval fogunk megismerkedni, az affinitással. Azt már tudjuk, hogy a körök egymáshoz hasonlóak, sőt, vannak köztük egybevágóak is. Most az lesz a cél, hogy belássuk, hogy nem csak két kör "ugyanaz", hanem affin értelemben a kör ugyanaz, mint az ellipszis.

Elsőként ismerkedjünk meg magával az affinitás fogalmával.

4.11. Definíció (Az affinitás). *A sík egy önmagára vett bijektív transzformációja affinitás, ha tartja az egyeneseket, azaz ha bármelyik l egyenest bijektíven és folytonosan képez le valamely l' egyenesre.*

Az affinitás gyakran használt tulajdonságait a következő lemma foglalja össze.

4.12. Lemma. *Ha ϕ a sík egy affinitása, akkor*

1. *ϕ injektív,*
2. *ha A, B, C, D egy paralelogramma csúcsai ilyen sorrendben, akkor ez teljesül a $\phi(A), \phi(B), \phi(C), \phi(D)$ pontokra is,*
3. *párhuzamos egyenesek képe párhuzamos egyenes.*

A kör és ellipszis közötti, már említett kapcsolatot a következő tétel is megerősíti.

4.13. Tétel. *Kör affin képe ellipszis, ellipszis affin képe ellipszis.*

Bizonyítás. Ld. ifj. Böröczky Károly Geometria 2 Tanár című, interneten megtalálható jegyzetében 33. oldalon.

4.4. Projektív geometria

Ebben a fejezetben elérkezünk a fő kérdés megválaszolásához: Véletlen-e, hogy a négy (nem elfajuló) másodrendű görbe mind alakjában mind egyenletében ennyire hasonlít egymásra, vagy van valami közük is egymáshoz. A témával kapcsolatban már több megfigyelést tettünk az előzőekben, pl. kör affin képe ellipszis, egy általános egyenletből minden görbe kihozható, stb.; de a projektív geometria végre választ ad a már kialakult sejtésünkre: a négy görbe valami módon összefügg. De ennél sokkal egyszerűbb oka van annak, hogy a projektív geometria tudományága létrejött. Azért foglalkozom ezzel a témakörrel részletesen, mert a másodrendű görbékre vonatkozó azon tétel bizonyításához szükséges, hogy minden másodrendű görbe előállítható egy általános másodfokú egyenletből. Ehhez azonban mélyebben meg kell értenünk a projektív geometriát, és így jutunk el a nagy kérdés megválaszolásához is.

4.4.1. A projektív geometria bevezetése

Ebben a részben a projektív geometria bevezetéséről lesz szó, milyen alapvető tulajdonságai vannak a projektív geometriának, illetve, hogy a projektív síkot hogyan lehet beleilleszteni az euklideszi térbe.

A projekció szó vetítést jelent. A térbeli alakzatok síkon történő ábrázolásához kézenfekvő vagy a párhuzamos vagy a középpontos vetítés módszerét alkalmazni. Az emberi szem által a térbeli tárgyakról alkotott kép a centrális vetületnek felel meg. Ily módon főként a festészet és az építészet számára már évszázadokkal ezelőtt szükségesnek mutatkozott a centrális vetítés törvényszerűségeinek feltárása. A centrális vetítés összefüggéseinek tanulmányozása egy matematikai elmélet, a projektív geometria, kialakulásához vezetett.

A középpontos vetítés során egy nagy problémába ütközünk. Ha párhuzamosan vetítünk, akkor két sík pontjai között létre tudunk hozni egy bijektív megfeleltetést (minden pontnak lesz pontosan egy képe); de középpontos vetítésnél ez nem lehetséges. Miért? Már nagyon régen rájöttek az emberek, hogy "a párhuzamosok a végtelenben találkoznak". Ezt használja ki a projektív geometria: adjunk a párhuzamos egyeneseknek egy közös metszéspontot. Legyen ez a pont egy végtelen távoli pont (más nevén ideális pont), ahol a párhuzamos egyenesek metszik egymást. Legyen adva egy S sík és egy $T \notin S$ pont (tartópont, ami a vetítési centrum "szerepét játsza"). A sík egy P pontjához rendeljük hozzá a $\overline{PT}$ egyenest, és egy T-re illeszkedő e egyeneshez rendeljük hozzá az $e \cap S$ pontot. Ez a hozzárendelés nem kölcsönösen egyértelmű. Ha egy T-re illeszkedő e egyenes metszi a síkot, akkor valóban $e \cap S$ az az egyetlen síkbeli pont, akihez e-t rendeltük, azonban az S síkkal párhuzamos T-re illeszkedő egyenesekhez nem tartozik pont és őket nem rendeltük hozzá S beli pontokhoz sem. Ha most veszünk egy $f \subset S$ egyenest és megnézzük hogy a $\overline{P_n T}$ egyenes mit csinál, ha a $P_n \in f,\ n = 1, 2...$ pont sorozat kifut az f egyenes mentén a "végtelenbe" (azaz precízen a P_n pontsorozatnak nincsen torlódási pontja f-en), akkor $\lim_{n\to\infty} \overline{P_n T}$ éppen a T-re illeszkedő f-vel párhuzamos egyenes lesz. Ez magyarázza, hogy az f egyenest le kell zárni egy ideális ponttal, melyet a T-re illeszkedő f-fel párhuzamos egyenes reprezentál. Mivel, ha $f, g \subset S$ párhuzamos egyenesek, akkor az ő ideális pontjukat ugyanaz a T-re illeszkedő, velük párhuzamos egyenes reprezentálja, ezért párhuzamos egyenesekhez ugyanazt az ideális pontot fogjuk rendelni. Egy T-re illeszkedő egyenest pedig egy irányvektorával fogunk megadni (ez a vektor nem egyértelmű, hiszen ha $\mathbf{v}$ egy egyenes irányvektora, akkor minden $\mathbf{v} \cdot \lambda$ ($\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$) is irányvektora lesz ugyanannak az egyenesnek). Hasonlóan, ha adott egy $f \subset S$ egyenes, akkor hozzá az f-re és T-re illeszkedő $S_{f,T}$ síkot rendeljük, és egy T re illeszkedő F síkhoz pedig az $F \cap S$ egyenest. Megint nem lesz ez a hozzárendelés kölcsönösen egyértelmű, hiszen a T-re illeszkedő S-vel párhuzamos síkhoz nem tartozik egyenes, Viszont ebben a síkban van az S sík összes ideális pontját reprezentáló T-re illeszkedő egyenes, azaz ez a sík felfogható úgy, mint az ideális pontok egyenesének a reprezentása. Egy egyeneshez rendelt T-re illeszkedő síkot a sík normálvektorával írhatunk le (ami megint csak nemnulla számszorzótól eltekintve egyértelmű.)

A következő tétel az előbbieket foglalja össze röviden.

4.14. Tétel. *A projektív síkon az illeszkedésre vonatkozóan igazak az alábbi kijelentések.*

1. *Két ponthoz egy és csak egy egyenes illeszkedik.*

2. *Bármely két különböző egyenesnek pontosan egy metszéspontja van.*

4.4.2. Homogén koordináták

Ez a rész a projektív sík, és a benne lévő alakzatok koordinátázásának problémájára fog rávilágítani. Megadja a választ arra a kérdésre, hogy a különböző alakzatoknak hogyan lehet a homogén koordinátás egyenletét felírni, illetve az Euklideszi-síkbeli egyenletéből a homogén egyenletét levezetni.

Látjuk, hogy a vektorok segítségével történő leírásban két vektor ugyanazt a pontot, vagy egyenest reprezetálja, ha a két vektor párhuzamos, azaz egy nem 0 számszorosa az egyik a másiknak. Ezért vezessük be a következő ekvivalenciarelációkat:

$$\mathbf{v} \sim \mathbf{w}, \text{ ha létezik olyan } \lambda \neq 0 \text{ szám, melyre } \mathbf{v} = \lambda \mathbf{w}.$$

Egy $\mathbf{v}$ vektor ekvivalencia osztályát jelölje $[\mathbf{v}]$. Ezeket az ekvivalencia osztályokat fogjuk mi homogén koordinátáknak nevezni. Ha úgy gondolunk egy $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ vektorra, hogy ő egy egyenest reprezentál ami T-re illeszkedik, azaz az S sík projektív lezárásának egy pontját, akkor a $[\mathbf{v}]$ jelölést fogjuk használni. Ha úgy gondolunk rá hogy $\mathbf{v}$ egy T-re illeszkedő sík normálvektora, ami egy egyenest reprezentál az S sík projektív lezárásán, akkor a $[\mathbf{v}]^e$ jelölést fogjuk használni. Jelölje $\bar{S}$ az S sík projektív lezárását.

Könnyen belátható, hogy ha $[\mathbf{v}]\,,\; [\mathbf{w}] \in \bar{S}$, akkor a $\overline{[\mathbf{v}]\,[\mathbf{w}]}$egyenest a $[\mathbf{v} \times \mathbf{w}]^e$ reprezentálja, illetve fordítva, ha $[\mathbf{v}]^e\,,\; [\mathbf{w}]^e \subset \bar{S}$, akkor a $[\mathbf{v}]^e \cap [\mathbf{w}]^e$ pontot a $[\mathbf{v} \times \mathbf{w}]$ reprezentálja.

Bizonyítás. A bizonyításhoz elsőként tudnunk kell, hogy vektoriális szorzásnál a szorzatként kapott vektor merőleges mindkét eredeti vektorra. A projektív síkban a két pontot jelölje V, W, ezeket egy-egy egyenes reprezentálja. Ezeknek az egyeneseknek az irányvektorát nevezzük $\mathbf{v}$-nek és $\mathbf{w}$-nek. A két pontot összekötő egyenest az a sík reprezentálja, amely tartalmazza a T tartópontot és a két pontot is. Ez az S sík párhuzamos a $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ irányvektorokkal. Így a sík normálvektora merőleges a két egyenes irányvektorára. Ezért a sík normálvektora, $\mathbf{n_S}$ párhuzamos a $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ vektorral, ami nem egyenlő $\mathbf{0}$-val, mert a két egyenes irányvektora nem párhuzamos egymással, mert két különböző pontot reprezentálnak. Vagyis a két pont összekötő egyenesét valóban

a $[\mathbf{v} \times \mathbf{w}]^e$ vektor reprezentálja.
Most lássuk az állítás másik felének a bizonyítását! A két, projektív síkbeli egyenest azok az S_1 és S_2 síkok reprezentálják, melyek tartalmazzák a T tartópontot és a $\bar{S}$ síkot e_1 illetve e_2 egyenesekben metszik. Ezért a $[\mathbf{v}]^e$-t az S_1 sík $\mathbf{n_1}$ normálvektora reprezentálja, a $[\mathbf{w}]^e$-t pedig az $\mathbf{n_2}$ reprezentálja. A két egyenes metszéspontját nevezzük el M-nek, ezt a $\overline{TM}$ egyenes irányvektora reprezentálja. (M lehet ideális pont is.) A $\overline{TM}$ egyenest reprezentáló vektorok mindegyike olyan, ami párhuzamos az S_1, illetve olyan, ami párhuzamos az S_2 síkkal is. Vagyis a $\overline{TM}$ egyenest reprezentáló vektorok merőlegesek az $\mathbf{n_1}$ és az $\mathbf{n_2}$ vektorra is. A $\overline{TM}$ egyenes tehát párhuzamos az $\mathbf{n_1} \times \mathbf{n_2} \neq \mathbf{0}$ vektorral. (Azért nem nulla, mert a két normálvektor nem párhuzamos egymással és egyik sem nulla.) Tehát a két egyenes metszéspontját valóban az őket reprezentáló síkok normálvektorára merőleges vektor (vagyis normálvektoruk vektoriális szorzata) reprezentálja.

Válasszuk meg az S sík és a T pont helyzetét úgy, hogy könnyebben számolhassunk majd a reprezentáns vektorokkal. A kanonikus x, y, z Descartes féle koordináta rendszerben, legyen $S \overset{def}{=} \{z = 1\}$ és $T = (0, 0, 0)$. Ekkor az S síkot, könnyen azonosíthatjuk az x, y koordináta síkkal az $(x, y, 1) \leftrightarrow (x, y)$ megfeleltetés segítségével. Ebből adódóan a közönséges x, y sík egy pontjához $(x, y) \leftrightarrow (x, y, 1) \leftrightarrow [x, y, 1]$ homogén koordináta rendelhető hozzá. Azaz a két hozzárendelést komponálva, a közönséges síkbeli pontokhoz, egyenesekhez, a közönséges tér origóra illeszkedő egyeneseit, síkjait rendeljük hozzá.

Ha vesszük az x, y sík egy $f : ax+by+c = 0$, egyenesét (ahol $a^2+b^2 > 0$), akkor $(x_0, y_0) \in f \Leftrightarrow ax_0 + by_0 + c = 0$ és az S síkon az (x_0, y_0) pontnak az $(x_0, y_0, 1)$ felel meg. Ha most vesszük az $F : ax+by+cz = 0$ síkot, akkor $S \cap F$ egy egyenes lesz és $(x_0, y_0, 1) \in S \cap F \Leftrightarrow ax_0 + by_0 + c \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow (x_0, y_0) \in f$. Továbbá az F sík illeszkedik az origóra, azaz ez lesz f reprezentánsa. Az F sík normálvektora (a, b, c). Azaz egy x, y közönséges síkbeli $f : ax+by+c = 0$ egyenesnek az $[a, b, c]^e$ homogén koordináta felel meg. Könnyen látható, hogy a $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ vektorral párhuzamos egyenesek ideális pontjának $[v_x, v_y, 0]$ lesz a homogén koordinátája és az ideális egyenesé, pedig $[0, 0, 1]^e$.

Ha most tekintünk egy $\mathcal{E} \overset{def}{=} \{(x, y) \mid E(x, y) = 0\}$ egyenlettel adott alakzatot az x, y síkon, akkor egy $[x, y, z]$ közönséges pontot reprezentáló homogén koordináta (azaz $z \neq 0$) egy alakzathoz tartozó pont homogén koordinátája, ha $[x, y, z] \sim \left[\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1\right] \leftrightarrow \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1\right) \leftrightarrow \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) \in \mathcal{E} \Leftrightarrow \mathcal{E}\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0$. Azaz egy alakzathoz tartozó egyenletből kaphatunk egy olyan egyenletet, amit a homogén koordinátáknak kell kielégítenie ahhoz, hogy az általuk reprezentált pont, az alakzathoz tartozzon. Az eljárás x és y helyett $\frac{x}{z}$ és $\frac{y}{z}$ -t kell az alakzat egyenletébe írni. pl. $x^2 + y^2 = 1 \to \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2} = 1$ ha ezt szebb alakra hozzuk, és felszorzunk annyi z^2-tel, hogy ne legyen z-vel való osztás, akkor az $x^2 + y^2 = z^2$ egyenletet kaptuk, de itt a felszorzás miatt új megoldásokat is hozzávettünk, mégpedig pont olyan megoldásokat, ahol $z = 0$. Azaz ideális pontokkal bővítettük a megoldáshalmazt. Ez azért van, mert az alakzat projektív lezárásának egyenletét kaptuk meg így, azaz az alakzat, ideális egyenesre eső torlódási pontjait, is hozzávettük az alakzathoz.

Könnyen látható, ha $\mathcal{E}(x, y) = 0$ egy másodfokú egyenlet, akkor a homogén koordinátás egyenlet, (ahol már felszoroztunk, annyi z-vel, hogy senki ne legyen leosztva z-vel) egy homogén másodfokú egyenlet lesz (azaz minden tagban az x, y, z változók multiplicitással vett száma épp 2).

4.4.3. Kanonikus alak

Az alábbi részben visszatérünk arra, amit már korábban (4.2.1 alfejezet) emlegettünk, hogy minden másodrendű görbe előállítható egy általános másodfokú egyenletből. A tétel bizonyításához azonban szükség van a következő lemmára. A tétel bizonyítása során már a projektív geometria eszközeit is használjuk, ezért szerepel itt ez a bizonyítás. A bizonyítás során szükségünk lesz néhány lineáris algebrai állításra is.

4.15. Lemma. *Ha A egy önadjungált (valós) mátrix ($A^T = A$), akkor a sajátértékei valósak és található egy olyan sajátvektorokból álló bázis, amelyben a bázisvektorok ortogonálisak egymásra. Ebből következik az is, hogy a sajátvektorokból álló bázisban felírva a mátrixot, az diagonális alakú lesz. A* *sajátvektorok ortogonalitása miatt egy ortogonális transzformációval, diagonális alakra hozható az A mátrix.*

Bizonyítás. ld.: Freud Róbert: Lineáris algebra, 246. oldal.

A lemma ismeretében mostmár nekikezdhetünk a 4.2.1 alfejezetben említett tétel bizonyításának.

Bizonyítás. Vegyünk egy $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$ alakú $\mathcal{M}$ másodrendű görbét. Vegyük ennek a projektív lezárását $\overline{\mathcal{M}}$, ami $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 = 0$ alakú. Képezzük az

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}, \ A_{33} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

öndjungált mátrixokat. Ekkor a másodrendű görbe projektív lezárásának egyenlete

$$\mathbf{x}A\mathbf{x}^T = 0,$$

ahol $\mathbf{x} = (x, y, z)$.

A tétel bizonyításához szükésgünk lesz néhány, a következőekben megállapításra kerülő dologra is. Legyen B egy 3×3-as, nem elfajuló mátrix, azaz $\det B \neq 0$. Ez felfogható, mint egy $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ leképezés, ami az origón átmenő egyenesekhez egyeneseket, az origóra illeszkedő síkokhoz síkokat rendel. Azaz ez a projektív sík egy egyenestartó, bijektív transzformációját adja. Mi lesz ennél a transzformációnál a $\overline{\mathcal{M}}$ másodrendű görbe képének leíró mátrixa?

Ha $[\mathbf{v}]$ egy pont homogén reprezentánsa, emlékezzünk, hogy ez egy sorvektor, akkor $(B\mathbf{v}^T)^T$ e pont képéhez tartozó homogén koordináták egy reprezentánsát adja meg. Azaz egy $[\mathbf{w}]$ pont ősét a $[(B^{-1}\mathbf{w}^T)]^T$ adja. Így egy $[\mathbf{w}]$ pont rajta van a $\overline{\mathcal{M}}$ másodrendű görbe képén, ha a $[\mathbf{w}]$ pont őse rajta van az eredeti másodrendű görbénken, azaz $(B^{-1}\mathbf{w}^T)^T A(B^{-1}\mathbf{w}^T) = 0$, tehát $[\mathbf{w}]$ rajta van az $\hat{A} := (B^{-1})^T A(B^{-1})$ 3×3-as mátrix által reprezentált másodrendű görbén. Vajon ez tényleg $\overline{\mathcal{M}}$ képének a leíró mátrixa? Ahhoz az kellene, hogy ez a mátrix szimmetrikus is legyen. És ez tényleg az, hiszen $\hat{A}^T = ((B^{-1})^T A(B^{-1}))^T = (B^{-1})^T A^T(B^{-1}) = (B^{-1})^T A(B^{-1})$.

Szükségünk lesz még arra, hogy ha $\mathbf{v}$ az A mátrix egy 0 sajátértékhez tartozó sajátvektora, azaz $A\mathbf{v} = 0\mathbf{v} = \mathbf{0}$, akkor $B\mathbf{v}^T$ sajátvektora lesz az $\hat{A}$ mátrixnak, hiszen $\widehat{A}B\mathbf{v}^T = B^{-1^T}AB^{-1}B\mathbf{v}^T = \lambda B^{-1^T}A\mathbf{v}^T = 0$.

Először vizsgáljuk meg mit mondhatunk, ha $\det A = 0$. Mivel A valós és önadjungált, így a 4.15 lemma miatt 3 valós sajátértéke van. A sajátértékeket a $\det(A - \lambda I) = 0$ egyenlet megoldásai adják. Mivel $\lambda = 0$ értékre $\det(A - \lambda I) = \det A = 0$, így a 0 sajátérték lesz, ami lehet egyszeres, kétszeres vagy háromszoros sajátérték. Ha $\mathbf{v}$ egy sajátvektor a 0 sajátértékhez, azaz $A\mathbf{v}^T = 0$, akkor $\mathbf{v}A\mathbf{v}^T = 0$, azaz a $\mathbf{v}$ homogén koordináta által reprezentált pont $[\mathbf{v}]$ rajta van a másodrendű görbe projektív lezárásán $\overline{\mathcal{M}}$-en.

1. Ha a 0 *háromszoros sajátérték*, akkor a lemma miatt A ortogonális alakja az azonosan 0 mátrix azaz A maga is az azonosan 0 mátrix kell legyen, de ekkor nem egy másodrendű görbét határoz meg, azaz ez az eset nem lehet, mert kikötés volt, hogy a másodfokú tagok együtthatói nem mind nullák, de ez ebben az esetben nem teljesül.

2. Ha a 0 *kétszeres sajátérték*, akkor van egy kétdimenziós S sajátaltere, azaz minden $\mathbf{v} \in S, \mathbf{v} \neq 0$ vektor a 0 sajátértékhez tartozó sajátvektor és így $[\mathbf{v}] \in \overline{\mathcal{M}}$. Viszon S egy egyenest reprezentál, ami ezek szerint $\overline{\mathcal{M}}$ része. Ennek az egyenesnek az egyenlete legyen $ax + by + cz = 0$. Viszont ekkor ez az egyenlet "osztja" $\overline{\mathcal{M}}$ egyenletét, azaz $\overline{\mathcal{M}}$ egyenlete $(ax + by + cz)\left(\widehat{a}x + \widehat{b}y + \widehat{c}z\right) = 0$ alakú. Ha ezek közül az egyik az ideális egyenes azaz pl. az $\widehat{a}x + \widehat{b}y + \widehat{c}z = 0$ egyenletben $\widehat{a} = \widehat{b} = 0$, akkor $\overline{\mathcal{M}}$ egyenlete $(ax + by + cz)\,\widehat{c} = 0$. Viszont ekkor $\mathcal{M}$ egyenlete nem lenne másodfokú. Azaz mindkét egyenes valós lehet csak. Ekkor ez a két egyenes vagy egybeesik, vagy párhuzamos, vagy egy metsző egyenespárt ad. Ekkor nyilvánvaló, hogy egybevágósági traszformációval ez az $x^2 = 0$, vagy $x^2 - c^2y^2 = 0$ alakra hozható, ahol az utóbbi $(x - cy)(x + cy) = 0$ alakú, azaz az $x + cy = 0$ és $x - cy = 0$ egyenesek metszete. Ha a két egyenes párhuzamos, akkor egybevágósági transzformációkkal (forgatás és eltolás) elérhető, hogy a két egyenes az

y tengellyel párhuzamos legyen, és $x + c = 0$, illetve $x - c = 0$ alakra hozhatók. A két egyenletet összeszorozva kiderül, hogy a párhuzamos egyenesek egyenlete is másodfokú: $x^2 - c^2 = 0$ alakú lesz.

3. Ha a 0 *egyszeres sajátérték*, akkor legyen $\mathbf{v}$ a hozzá tartozó sajátvektor. Ha a $\mathbf{p}$ egy olyan vektor, amely által reprezentált $[\mathbf{p}] \in \overline{\mathcal{M}}$, azaz $\mathbf{p}A\mathbf{p}^T = 0$, akkor $\alpha\mathbf{p} + \beta\mathbf{v} \in \overline{\mathcal{M}}$ hiszen

   $$(\alpha\mathbf{p} + \beta\mathbf{v})\, A\, (\alpha\mathbf{p} + \beta\mathbf{v})^T = \alpha^{\mathbf{2}}\mathbf{p}A\mathbf{p}^T + 2\alpha\beta\mathbf{p}A\mathbf{v}^T + \beta^{\mathbf{2}}\mathbf{v}\mathbf{A}\mathbf{v}^T = 0+0+0,$$

   ahol kihasználásra került, hogy egy szám egyenlő a transzponáltjával, így $\mathbf{v}A\mathbf{p}^T = \left(\mathbf{v}A\mathbf{p}^T\right)^T = \mathbf{p}A^T\mathbf{v}^T = \mathbf{p}A\mathbf{v}^T$, mivel $A^T = A$. Ezek szerint vagy csak 1 pontból áll $\overline{\mathcal{M}}$ vagy ha van egy másik pontja is, akkor van egy egyenese is, ekkor megismételhetjük az előző pontban leírtakat. Tehát elég megnézni azt az esetet, ha $[\mathbf{v}] = \overline{\mathcal{M}}$. Nézzük meg azt az esetet, ha $[\mathbf{v}]$ ideális pont, azaz $\mathbf{v} = (v_x, v_y, 0)$ alakú, ekkor $\mathcal{M}$ az üres halmaz lesz, hiszen a projektív lezárásban $\overline{\mathcal{M}}$-ban csak egyetlen pont van az is ideális. Tegyük fel, hogy az egységhosszú sajátvektorokat válaszjuk mindig. Ekkor egy z tengely körüli elforgatással (az xy sík origója körüli elforgatásnak felel ez meg) az új bázisban felírva A-t, melyet jelöljön $\widehat{A}$, továbbra is $\det \widehat{A} = 0$ és egyszeres sajátérték a 0, de a hozzá tartozó sajátvektorról feltehetjük, hogy $\widehat{\mathbf{v}} = (1, 0, 0)$ alakú (azaz beforgattuk az eredeti sajátvektort, a pozitív x tengely irányába). Ekkor $\widehat{A\mathbf{v}^T} = \mathbf{0}$ miatt $\widehat{a}_{11} = \widehat{a}_{12} = \widehat{a}_{13} = 0$. Így ebben a bázisban $\mathcal{M}$ egyenlete $\widehat{a}_{22}\widehat{y}^2 + 2\widehat{a}_{23}\widehat{y} + \widehat{a}_{33} = 0$, ahol $\widehat{x}$, $\widehat{y}$ az elforgatással korábban kapott koordináta rendszer. Mivel ennek az egyenletnek nincs megoldása, így $\widehat{a}_{33} \neq 0$, hiszen $(\widehat{x}, \widehat{y}) = (0, 0)$ nem megoldás. Feltehető, hogy $\widehat{a}_{33} > 0$, különben -1-gyel végigszorozzuk az egyenletet, sőt $\widehat{a}_{33}$-mal ekkor le is oszthatunk, azaz $\widehat{a}_{33} = 1$ is feltehető. Ekkor azonban $\widehat{a}_{22} \geq 0$, különben lenne megoldása az egyenletnek. Hasonló meggondolás miatt, ha $\widehat{a}_{22} = 0$, akkor $\widehat{a}_{23} = 0$ különben a $\left(0, -\frac{\widehat{a}_{33}}{2\widehat{a}_{23}}\right)$ megoldaná az egyenletet, ráadásul lineáris lenne és nem másodfokú. Ha $\widehat{a}_{22} \neq 0$, akkor $\widehat{y}$ tengellyel párhuzamos eltolással, a lineáris $\widehat{y}$ tag eltüntethető lesz. Összefoglalva az egyenletünk

$$c_2^2 y^2 + 1 = 0; c_2 > 0 \text{ alakra hozható.}$$

Most vizsgáljuk azt az esetet, ha a $\mathbf{v}$ közönséges pontot határoz meg és az $\mathcal{M}$ másodrendű görbe egyetlen pontból áll. A koordinátarendszer eltolásával elérhető, hogy ez az egyetlen pont az origó legyen. Az eltolt másodrendű görbe A mátrixára teljesül, hogy: $[0,0,1]A[0,0,1]^T = 0$, amiből $a_{33} = 0$. Ekkor a görbe egyenlete a következőképpen néz ki: $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y = 0$. Mivel a $[0,0,1]$ sajátvektor is, ezért a másodrendű görbe mátrixa úgy fog kinézni, hogy

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

vagyis az egyenlet: $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy = 0$. A bázist forgassuk el az xy síkban az A_{33}-hoz tartozó sajátvektorok irányába, így a mátrix diagonizálható lesz, és úgy fog kinézni, hogy:

$$M = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

vagyis az egyenlet a $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = 0$ alakra egyszerűsödik. Ezek után olyan λ_1, λ_2 együtthatókat keresünk, hogy csak a $(0,0)$ pont legyen megoldás. (Ekkor a másodrendű görbe valóban egyetlen pontból fog állni, és ezt az alakzatot leírtuk egy másodfokú egyenlettel.)

Ha valamelyik együttható (pl. λ_1) 0, akkor az egyenlet a $\lambda_2 y^2 = 0$ alakra egyszerűsödik, de ennek végtelen sok megoldása van, mert a teljes x tengely megoldás lesz.

A másikra ugyanez elmondható, ezért egyik együttható sem lehet nulla, sőt azonos előjelűek kell legyenek. Ha nem, akkor legyen λ_2 negatív. Ekkor az egyenlet $a^2x^2 - b^2y^2 = 0 \Rightarrow (ax + by)(ax - by) = 0$ alakú lesz, ami viszont kettő egyenesnek az egyenlete, azaz nem csak a $(0,0)$ lenne megoldás. Tehát legyenek azonos előjelűek, ekkor feltehetjük, hogy mindkettő pozitív (ha mindkettő negatív, akkor szorozzuk meg az egész egyenletet -1-gyel.) Ekkor az egyenlet: $a^2x^2 + b^2y^2 = 0$ alakú lesz. Ez nem bomlik fel két elsőfokú polinom szorzatára a valós számtest felett, ezért ez jónak tűnik. Az egyenlet átalakítható $x^2 + c^2y^2 = 0$ alakra. Ennek az egyenletnek (az együtthatók el nem tűnése miatt) csak a $(0,0)$ pont lesz megoldása.

Most vizsgáljuk azt az esetet, amikor $\det A \neq 0$. Ha egy eltolást hajtunk végre, azaz $x = x' + c,\ y = y' + d$ helyettesítést, vagyis eltoljuk az origót a (c,d) pontba, akkor az eredeti egyenletünk $a_{11}(x')^2 + a_{22}(y')^2 + 2a_{12}x'y' + {}$ $+ (2a_{11}c + 2a_{12}d + 2a_{13})\,x' + (2a_{12}c + 2a_{22}d + 2a_{23})\,y' + konst. = 0$ alakú lesz. Ha a lineáris tagokat szeretnénk eltüntetni, akkor a $2a_{11}c + 2a_{12}d + 2a_{13} = 0$ és $2a_{12}c + 2a_{22}d + 2a_{23} = 0$ egyenleteket kell megoldanunk amiket 2-vel leosztva, éppen az

$$A_{33} \cdot \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{13} \\ -a_{23} \end{bmatrix}$$

egyenletet kapjuk. Ha $a_{13} = a_{23} = 0$ akkor az eredeti egyenletben nincs lineáris tag. Ekkor nem kell az eltolást végrehajtani, hanem rögtön vizsgálhatjuk az együtthatókat, hogy melyik(ek) nullá(k). Ha a_{13} vagy a_{23} valamelyike nem 0, akkor pontosan akkor megoldható az egyenlet, ha $\det A_{33} \neq 0$.

- Tegyük fel először, hogy a lineáris tag eltüntethető, akkor a lineáris tagok eltüntetése után kapott egyenlethez tartozó mátrix

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

  alakú. Ekkor, $\det A = a_{33} \cdot \det A_{33}$ miatt $a_{33} \neq 0$, és látjuk, hogy $\det A_{33} \neq 0$ is adódik. Mivel A_{33} önadjungált és valós, így a lemma miatt a sajátvektorai egymásra merőlegesek, és az origó körüli α szögű forgatással, melynek 2×2-es mátrixát jelölje ϕ_α, elérhető, hogy ezek éppen a koordináta tengelyekkel párhuzamosak legyenek. Ekkor azonban a másodrendű görbe mátrixa

$$\begin{bmatrix} \phi_{-\alpha}^T & \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{-\alpha} & \\ & 1 \end{bmatrix}$$

alakú lesz. Azaz

$$\begin{bmatrix} \phi_{-\alpha}^T A_{33} \phi_{-\alpha} & \\ & a_{33} \end{bmatrix}$$

alakú, ahol a 2×2-es felső blokk diagonális lesz, hiszen pont beforgattuk a sajátvektorokat a tengely irányába. Így ebben a bázisban

$$\begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

alakú, azaz $c_1\widehat{x}^2 + c_2\widehat{y}^2 + a_{33} = 0$ alakú lesz. Itt $a_{33} \neq 0$ miatt feltehető, hogy $a_{33} = -1$, mert leoszthatunk $-a_{33}$-mal. Azaz a következő egyenleteket kapjuk:

$$\frac{\widehat{x}^2}{a^2} + \frac{\widehat{y}^2}{b^2} = 1,\ a, b > 0 \text{ ellipszis;}$$
$$-\frac{\widehat{x}^2}{a^2} - \frac{\widehat{y}^2}{b^2} = 1,\ a, b > 0 \text{ képzetes ellipszis (üres halmaz);}$$
$$\frac{\widehat{x}^2}{a^2} - \frac{\widehat{y}^2}{b^2} = 1, \text{ vagy } -\frac{\widehat{x}^2}{a^2} + \frac{\widehat{y}^2}{b^2} = 1,\ a, b > 0 \text{ hiperbola.}$$

- Ha a lineáris tag nem tűnik el, akkor $\det A_{33} = 0$. Azaz van 0 sajátértéke A_{33}-nak. Ha a 0 kétszeres sajátérték, akkor A_{33} a 0 mátrix, de ekkor $\det A = 0$ lenne, ami ellentmondás. Azaz A_{33}-nak pontosan egyszeres sajátértéke a 0. Hasonlóan az előző részhez a sajátvektorok merőlegesek és a beforgatás után az új bázisban a másodrendű görbe mátrixa

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \widehat{a}_{13} \\ 0 & \widehat{a}_{22} & \widehat{a}_{23} \\ \widehat{a}_{13} & \widehat{a}_{23} & \widehat{a}_{33} \end{bmatrix}$$

alakú. Azaz $\widehat{a}_{22}\widehat{y}^2+2\widehat{a}_{13}\widehat{x}+2\widehat{a}_{23}\widehat{y}+\widehat{a}_{33}=0$. Mivel $\det A=-\widehat{a}_{22}\widehat{a}_{13}^2\neq 0$, így $\widehat{a}_{22}\neq 0$ és $\widehat{a}_{13}\neq 0$. Így $\widehat{y}$ lineáris tagja egy eltolással megszüntethető és $\widehat{a}_{22}\left(y'\right)^2+2\widehat{a}_{13}\widehat{x}+a'_{33}=0$ adódik, ahol $\widehat{x}=x'-\frac{a'_{33}}{2\widehat{a}_{13}}$ eltolás után a másodrendű görbénk az új koordináta rendszerben $\widehat{a}_{22}\left(y'\right)^2+2\widehat{a}_{13}x'=0$ alakú lesz. Amit $\widehat{a}_{22}$-vel leosztva $\left(y'\right)^2=2px',\ p\neq 0$ alakú lesz.

4.4.4. A kúpszeletek projektív egyenlősége

Ebben a részben elérkezünk végre oda, ahova elindultunk. Mi köze van egymáshoz a körnek, az ellipszisnek, a parabolának és a hiperbolának? A kérdést már egy ideje kerülgetjük, de konkrét választ még sose kaptunk. Azt tudjuk a koordináta-geometriából, hogy az ellipszis és a hiperbola nagyon hasonlít az egyenletében. Tudjuk koordináta-geometriából, hogy a kör egy speciális ellipszis. Az egyetem óta tudjuk, hogy a másodrendű görbék alapja ugyanaz az egyenlet. A projektív geometria pedig választ ad nekünk arra, hogy a négy nem elfajuló másodrendű görbe projektív szempontból ugyanaz. Ezen megállapításunkat igazolja a következő rész.

4.16. Tétel. *Bármely kúpszelet projektív képe ugyancsak kúpszelet.*

Bizonyítás. A kúpszelet homogén egyenlete nem elfajuló másodrendű egyenlet. Egy projektív transzformációt a homogén koordináták lineáris függvényeivel adunk meg, így az új görbe egyenlete is másodrendű és nem elfajuló lesz. Nem elfajuló másodrendű görbékről viszont már láttuk (a kanonikus alakról szóló részben), hogy kúpszeletek.

4.17. Tétel (Főtengelytétel három változóban). *Egy* $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ *ortonormált bázisban tekintsük az* $\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2+\delta xy+\epsilon xz+\omega yz$ *kifejezést az* (x,y,z) *pont függvényeként, ahol az együtthatók valamelyike nem nulla. Ekkor létezik olyan* $\mathbf{i}',\mathbf{j}',\mathbf{k}'$ *ortonormált bázis, melyben* $x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}=x'\mathbf{i}'+y'\mathbf{j}'+z'\mathbf{k}'$ *esetén* $\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2+\delta xy+\epsilon xz+\omega yz=\alpha' x'^2+\beta' y'^2+\gamma' z'^2$.

Bizonyítás. A bizonyítás megtalálható ifj. Böröczky Károly Geometria 3 Tanár című, interneten fellelhető jegyzetében a 25. oldalon.

4.18. Tétel. *Bármely kúpszelet az $\mathbb{R}^2$-beli egységkörvonal projektív képe.*

4.19. Megjegyzés. Másszóval bármely két kúpszelet egymás projektív képe.

A bizonyítás során fel fogjuk használni, hogy két projektív transzformáció kompozíciója is projektív transzformáció.

4.20. Definíció (Projektív transzformáció). *A projektív sík önmagára vett bijektív leképezését projektív transzformációnak nevezzük, ha bármelyik kollineáris ponthármas képe szintén kollineáris ponthármas.*

Bizonyítás. Azonosítsuk $\mathbb{R}^2$-t az $\mathbb{R}^3$-beli $\Sigma = \{(x, y, 1) : x, y \in \mathbb{R}\}$ síkkal, és tekintsük benne a Γ kúpszeletet, amely egy nem elfajuló másodrendű görbe a projektív síkon. A három változós főtengelytétel miatt található olyan $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ ortonormált bázis, melyben a Γ homogén egyenlete $\alpha' x'^2 + \beta' y'^2 + \gamma' z'^2 = 0$, ahol α', β', γ' egyike sem nulla. Ha α', β', γ' együtthatóknak mind ugyan az előjele, akkor a baloldal vagy mindig pozitív, vagy mindig negatív tetszőleges $x', y', z' \in \mathbb{R}^3 \backslash (0, 0, 0)$ esetén, így a kúpszeletnek nem volna pontja. Tehát az α', β', γ' együtthatók közül kettő azonos előjelű. A koordinátatengelyek cseréjével elérhető, hogy $\alpha', \beta' > 0$ és $\gamma' < 0$, tehát $|\gamma'|$-kel való osztás után az egyenlet $\dfrac{x'^2}{a^2} + \dfrac{y'^2}{b^2} - z'^2 = 0$ alakba írható, ahol $a, b > 0$. Vagyis a $\Sigma' = x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + \mathbf{k}' : x', y' \in \mathbb{R}^2$ síkban a Γ homogén egyenlete az$\dfrac{x'^2}{a^2} + \dfrac{y'^2}{b^2} - 1 = 0$ ellipszist határozza meg, azaz $\mathbb{R}^3$ origóján és a Γ görbei pontjain átmenő egyenesek által meghatározott "kúp" metszete Σ'-vel egy ellipszis lesz. Tehát először alkalmazunk egy, a Σ-beli egységkörvonalat a Σ-beli $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ egyenletű Γ_0 ellipszisbe vivő affinitást, másodszor alkalmazzuk az $\mathbb{R}^3$ egy egybevágóságát, mely a Σ-beli Γ_0 ellipszist a Σ'-beli Γ-nak megfelelő $\dfrac{x'^2}{a^2} + \dfrac{y'^2}{b^2} = 1$ egyenletű ellipszisbe viszi, végül pedig alkalmazzuk a Σ'-t Σ-ba képező középpontos vetítést a $\mathbb{R}$ origójából. Így a kompozíció egy az egységkörvonalat Γ-ba vivő projektív transzformáció.

Az előző tételt kicsit összefoglalva: a parabola olyan ellipszis, melyhez a parabola tengelyének ideális pontját is hozzávettük. A hiperbola olyan ellipszis, amelyhez a hiperbola két asszimptotájának ideális pontjait vettük hozzá. Ezt úgy is fogalmazhatnánk, hogy a három kúpszelet között annyi a különbség, hogy az ellipszinek és az ideális egyesnek nulla; a parabolának és az ideális egyenesnek 1; a hiperbolának és az ideális egyenesnek 2 metszéspontja van. Most, hogy már nem kell külön-külön megnevezni a kúpszeletet, hanem általánosságban tudunk róla beszélni, elég bizonyos dolgokat körökre belátni, mert projektív transzformációval egymásba vihetők a kúpszeletek. A projektív transzformációnak fontos tulajdonsága, mely a definícióból is következik, hogy érintőt érintőbe visz; illetve, hogy illeszkedés tartó. Éppen ezért lesz elég, hogy bizonyos állítások bizonyítását csak körre nézzük meg. A kör ugyanis projektív transzformációval átvihető bármelyik kúpszeletbe, és a kör érintői a kúpszelet érintőibe mennek át. Az érintők metszéspontjai pedig továbbra is metszéspontok maradnak.

A következő két tétel a kúpszeletek egy-egy érdekes tulajdonságára mutat rá. Azért szerepelnek itt, hogy lássunk példát arra, hogy a kúpszeleteknek vannak olyan tulajdonságai, melyek a fajtájuktól függetlenek, és ezen állítások bizonyítását így elég körre megadni.

4.21. Tétel (Brianchon-tétel). *Legyenek az* $1, 2, 3, 4, 5, 6$ *egyenesek egy kúpszelet érintői, valamint legyen* Q_{ij} *az* i *és* j *egyenes metszéspontja minden* $i \neq j$ *esetén. Ekkor a* $Q_{12}Q_{45}, Q_{23}Q_{56}, Q_{34}Q_{61}$ *egyenesek egy ponton mennek át.*

4.22. Tétel (Pascal-tétel). *Legyenek az* $1, 2, 3, 4, 5, 6$ *egy kúpszelet pontjai, valamint legyen* e_{ij} *az* i *és* j *pontok egyenese minden* $i \neq j$ *esetén. Ekkor az* $e_{12} \cap e_{45}, e_{23} \cap e_{56}, e_{34} \cap e_{61}$ *pontok egy egyenesre illeszkednek.*

4.23. Megjegyzés. A tételek bizonyítása megtalálható a Hajós-könyv 508. (Pascal) és 501. (Brianchon) oldalán.

4.5. Összefoglalás

Az egyetemi évek alatt a hallgató eljut odáig, hogy a négy (nem elfajuló), de a képzeleteiben különféle másodrendű görbét összekapcsolja, és végül már egyféle, általános kúpszeletnek tekinti. Először ott merül fel a hasonlóságuk, mikor kiderül, hogy mindegyik egy általános másodfokú egyenletből kihozható. Aztán ott is el kell gondolkodni, mikor kiderül, hogy az ellipszis és a kör affinitással egymásba vihetők (illetve a parabolák egymásba, és a hiperbolák egymásba vihetők). Végül a valódi igazság ott derül ki, mikor bebizonyítjuk a projektív geometriában, hogy a négy kúpszelet mindegyike visszavezethető az ellipszisre.

5. fejezet

Kör- és kúpszeletsorok

A következő fejezetben kicsit továbblépünk a tanárszakosoknak kötelező egyetemi tananyagon, hogy a köröket és kúpszeletek összefüggéseiben is vizsgálhassuk. A körsorokról szóló rész tételei és definíciói, illetve további érdekességek a körsorokról megtalálható Hajós György: Bevezetés a geometriába című könyvében. A kúpszeletekről szóló rész tételei és definíciói, illetve a témakör bővebb kifejtése megtalálható a következő helyen: http://abrgeom.uw.hu/segedanyagok/kiegteljes.pdf

5.1. Körsorok

Ebben a köröket egymáshoz való viszonyukban vizsgáljuk. Olyan alakzatokat fogunk vizsgálni, amelyeknek az egyenlete tetszőleges λ_1, λ_2 valós számokkal, mint együtthatókkal $\lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2 = 0$ alakban írhatók. Ezeket az alakzatok összességét fogjuk körsornak nevezni. A körsor elemei közé tartozik, az őt meghatározó két kör, vagy egy kör és egy egyenes is. A körsorok témakörét néhány feladaton keresztül kívánom bevezetni.

Elsőként emlékezzünk arra, hogy egy $O(O_x, O_y)$ középpontú, r sugarú körnek hogyan írjuk fel az egyenletét: $(x - O_x)^2 + (y - O_y)^2 - r^2 = 0$
A bal oldalt kétváltozós függvényként kezelve, nevezzük el $k(x, y)$-nak. Vagyis a kör olyan pontokból áll, melyekre $\{(x, y)|k(x, y) \equiv 0\}$ teljesül. Egy tet-

szőleges $P(x, y)$ pontnak a kör $O(O_x, O_y)$ pontjától vett távolságának négyzetéből kivonva a kör sugarának négyzetét megkapjuk a P pontból húzott érintő hosszát (Pitagorasz-tétel).

Egy $P(x, y)$ pontról könnyen eldönthető, hogy a körhöz képest hogyan helyezkedik el. Ha a pont koordinátáit belehelyettesítjük a $k(x, y)$ függvénybe, és az érték

- (1.) pozitív, akkor a P külső pont
- (2.) nulla, akkor a P a körön van rajta
- (3.) negatív, akkor a P belső pont.

5.1. Feladat. *Mikor metszi kér kör egymást merőlegesen?*

A definíció alapján két kör akkor metszi egymást merőlegesen, ha a metszéspontba (M) húzott érintők merőlegesek egymásra. Viszont ha az érintők merőlegesek egymásra, akkor az érintők átmennek a másik kör középontján (vagyis k_1-hez húzott e_1 érintő átmegy az O_2-n, és fordítva). A definíció alapján $k_1 \perp k_2 \Leftrightarrow MO_1 \perp MO_2 \Leftrightarrow MO_2$ az O_2 pontból a k_1 körhöz húzott érintőszakasz. Mivel az MO_2 távolság megegyezik az r_2-vel, a Pitagorasz-tétel alapján a következő összefüggést kapjuk: $r_2^2 = k_1(O_2)$, ahol $k_1(O_2)$ jelöli az O_2 pont k_1 körre vonatkoztatott hatványát. Tehát két kör akkor merőleges egymásra, ha a második kör középpontjának koordinátáit belehelyettesítve az első kör egyenletébe, a második kör sugarának négyzetét kapjuk eredményül.

5.2. Feladat. *Most vegyünk két kört, és vonjuk ki az egyenleteiket egymásból. Így egy egyenes egyenletét kapjuk meg (kivéve, ha a két kör koncentrikus, mert akkor kiesik a lineáris tag), ez lesz a hatványvonal egyenlete. Legyen az O a hatványvonal egy olyan pontja, mely a körökön kívül van, azaz belőle húzható érintő. Ha az érintő szakasz R hosszával rajzolunk egy kört, akkor ez az O középpontú, R sugarú K kör merőlegesen metszi mindkét kört (mert a középpontot beírva a körök egyenletébe, éppen a sugarakat fogjuk kapni).*

Következtetés: a hatványvonalon bárhogy választunk egy olyan O pontot, mely a körökön kívül helyezkedik el, abból húzva a két körhöz egy-egy érintőt, *és az érintési pontokon keresztül felvéve az O középpontú kört, az eredeti köröket merőlegesen metszi az új kör.*

5.3. Feladat. *Tekintsük a két kör egyenletét, és vegyük a lineáris kombinációjukat úgy, hogy a súlyok összege 1 legyen. Kérdés: Milyen alakzatot fog adni az $\alpha k_1 + (1-\alpha)k_2 = 0$ egyenlet?*

A kifejezést felbontva a következő alakhoz jutunk:
$\alpha(x^2 + y^2 + ...) + (1-\alpha)(x^2 + y^2 + ...) = 0$, *vagyis formálisan egy kör egyenletét fogjuk kapni, hiszen $x^2 + y^2 + \cdots = 0$ alakú lesz a kifejezés. Most a képzetes köröket is körnek tekintjük, vagyis ha olyan kör egyenletéhez jutunk, amelyben a sugár négyzete negatív, azt is körnek számítjuk. Ha most felírjuk az összegből keletkezett kör egyenletét, akkor a következő egyenletet kapjuk:*
$(x - (\alpha O_x + (1-\alpha)P_x))^2 + (y - (\alpha O_y + (1-\alpha)P_y))^2 - C = 0$, *ahol $C \in \mathbb{R}$ és $\sqrt{C}$ az új kör sugara. Ennek a körnek a középpontjába mutató vektort megkaphatjuk úgy, hogy vesszük az $\alpha\mathbf{O} + (1-\alpha)\mathbf{P}$ vektort, és ez az OP egyenes egy pontjába mutat. Vagyis az összegből keletkezett kör középpontja rajta van a két eredeti kör középpontját összekötő egyenesen.*

5.4. Feladat. *Vegyünk két kört (k_1, k_2), és a hatványvonalukat (h). A h-n vegyünk egy P pontot, mely a körökön kívül helyezkedik el, és abból rajzoljunk egy kört (K) úgy, hogy k_1-et és k_2-t is merőlegesen messe. A merőlegesség miatt, és a kettővel ezelőtti feladatból tudjuk, hogy ez azt jelenti, hogy $k_1(P) = R^2$, illetve $k_2(P) = R^2$, ahol R a P pontból a k_1 és k_2 körökhöz húzott érintőszakasz.*
Most tekintsük a $k' : \alpha k_1 + (1-\alpha)k_2 = 0$ kört, ha ez kör. Ez pontosan akkor merőleges K-ra, ha $k'(P) = R^2$. Lássuk be, hogy merőleges lesz!

$\alpha k_1(P) + (1-\alpha)k_2(P) = \alpha R^2 + (1-\alpha)R^2 = R^2$. *Tehát az összegkör valóban merőleges lesz a $K(P, R)$-re.*

5.5. Feladat. *Ebben a feladatban vegyünk két kört (k_1, k_2), és vegyünk két másik kört (K_1, K_2), amik merőlegesek az előző körökre. Vegyük mindkét körpárnak a lineáris kombinációját: $\alpha k_1 + (1-\alpha)k_2$, illetve $\beta K_1 + (1-\beta K_2)$ alakban. Az előző feladat alapján tudjuk, hogy $\alpha k_1 + (1-\alpha)k_2 \perp K_1$, illetve $\alpha k_1 + (1-\alpha)k_2 \perp K_2$, valamint, hogy $\alpha k_1 + (1-\alpha)k_2 \perp \beta K_1 + (1-\beta K_2)$.*

A következtetés: a k_i körsor bármely eleme merőleges a K_j körsor bármely elemére. ($i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, k$)

Az egymásra merőleges körsörök annyira fontosak, hogy külön nevet is kaptak:

5.6. Definíció. *A két, egymásra merőleges körsort egymáshoz konjugált körsoroknak nevezzük.*

Az eddigi feladatokban, ha két kör egyenletének lineáris kombinációjáról volt szó, a két súly összege mindig 1 volt. Most vizsgáljuk meg azt, hogy mi van akkor, ha a két súly összege más, nem 1.

5.7. Feladat. *Tekintsük az $\alpha k_1 + \beta k_2 = 0$ egyenletet, ahol $\alpha + \beta \neq 0$. Ekkor leoszthatjuk az egyenlet mindkét oldalát $\alpha+\beta$-val, és így az $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}k_1 + \frac{\beta}{\alpha+\beta}k_2 = 0$ egyenlethez jutunk, ami a körsor egy elemének egyenletét adja, hiszen a súlyok összege 1.*

Probléma akkor van, ha $\alpha = -\beta$. Ekkor a két kör lineáris kombinációja úgy néz ki, hogy: $\alpha k_1 - \alpha k_2 = 0$. Ezt leosztva α-val (amely nem lehet nulla, mert különben nem lenne értelme a feltevésnek) a $k_1 - k_2 = 0$ egyenlethez jutunk, melyről tudjuk, hogy a hatványvonal egyenlete.

Ebből levonhatjuk következményként azt, hogy a hatványvonal, ami egy egyenes (de tekinthető egy végtelen sugarú körnek is) szintén része a körsornak. Itt felmerülhet a kérdés, hogy van-e a körsorban még egy egyenes? A kérdésre a választ a következő tétel, és bizonyítása adja meg.

5.8. Tétel. *A körsor elemei között két egyenes nem lehet.*

Bizonyítás. Ha az $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ értékpárok a körsor két egymástól különböző egyenesét adnák, akkor ezekre egyrészt
$\alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2 = L_1$
$\beta_1 k_1 + \beta_2 k_2 = L_2$
teljesülne, ahol L_1, L_2 valamilyen lineáris kifejezések, másrészt az α, β számpárokból képzett 2×2-es mátrix determinánsa nem nulla volna, hiszen az

$\alpha_1 : \beta_1 = \alpha_2 : \beta_2$ aránypárból az is következne, hogy a két egyenlet egymás konstansszorosa. Vagyis $L_1 = L_2 = 0$ volna, azaz ugyanarról az egyenesről beszélnénk. Mivel a determináns nem nulla, ezért az egyenletrendszerből k_1 és k_2 kifejezhető, s ezért mindkettő L_1 és L_2 számszorosainak összege, tehát lineáris kifejezés. Ez azonban lehetetlen, mert k_1 és k_2 egyszerre nem lehet egyenes.

Az utolsó feladatból levonható következményként egy másik tétel is.

5.9. Tétel. *Ha a körsor két eleme olyan kör, amelyeknek van hatványvonala, akkor ez a hatványvonal is eleme a körsornak.*

Bizonyítás. Legyen $k_1 = 0$ és $k_2 = 0$ a két kör egyenlete. Mivel a körsort ez a két kör is meghatározza, a körsor definíciója folytán a $k_1 - k_2 = 0$ egyenletű hatványvonal is a körsorhoz tartozik.

Összegzés képpen elmondható tehát, hogy a k_1 és k_2 körök által meghatározott körsor elemeinek egyenlete $\alpha k_1 + \beta k_2 = 0$ alakú, ahol $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$. Ezen kívül a körsorba egy darab egyenes tartozik bele, ez a két kör hatványvonala.

5.2. Kúpszeletsorok

A projektív geometriáról szóló részben bebizonyítottuk már, hogy a körök és a kúpszeletek projektív szempontból megegyeznek (ld. a 4.18 számú tételt és a hozzátartozó bizonyítást). Most felmerülhet kérdésként akkor, hogy a kúpszeletekkel is lehet-e olyan szép dolgokat csinálni, mint a körsoroknál. Például, mikor merőleges egymásra két kúpszeletsor; mi lesz, ha összeadjuk két kúpszelet egyenletét, stb.

Vegyünk a síkban négy pontot, melyeket jelöljön A, B, C és D, úgy, hogy semelyik három ne legyen kollineáris. Ezen a négy ponton át fel tudunk venni két kúpszeletet (G_1, G_2) úgy, hogy csak ez a négy valós pont legyen a közös pontjuk. Ha felveszünk egy ötödik pontot, melyet jelöljön P, a síkon, mely az előzőektől különböző, akkor pontosan egy olyan kúpszelet lesz, mely mind az öt ponton át fog menni. A tétel, mely ugyanezt állítja megtalálható a

Hajós-könyv 499-500. oldalán. A P pont helyzetének változtatásával egész kúpszelet sorozatokat kapunk, melyek mindegyike tartalmazza a négy eredeti pontot, de a sík bármely pontjára csak egy kúpszelet illeszkedik.

Mint a körsoroknál, itt is adjuk össze két kúpszelet egyenletét, lássuk így mit kapunk.

5.10. Definíció. *Legyen* $G_1 : a_{ik}x_ix_k = 0$ *és* $G_2 : b_{ik}x_ix_k = 0$ *két különböző kúpszelet homogén koordinátákkal adott egyenlete. Ebben az esetben az* $\alpha a_{ik}x_ix_k + \beta b_{ik}x_ix_k = 0$ *egyenlet is egy kúpszeletet határoz meg, ahol* α *és* β *valós paraméterek. Az így meghatározott kúpszeletek összességét nevezzük a* G_1 *és* G_2 *által indukált kúpszeletsornak.*

Most már tudjuk a kúpszeletsor definícióját. Vizsgáljuk azt, hogy ha a kúpszeletsorban az alapkúpszeletek helyett két másikat választok ki, akkor azok is ugyanazt a kúpszeletsort állítják-e elő? A következő tétel megadja a választ a kérdésünkre.

5.11. Tétel. *A kúpszeletsort bármely két eleme indukálja.*

Bizonyítás. Legyen K_1 és K_2 az indukált kúpszeletsor két különböző eleme úgy, hogy
$K_1 : \alpha_1 G_1 + \beta_1 G_2$
$K_2 : \alpha_2 G_1 + \beta_2 G_2$
Ekkor $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \neq 0$. A K_1 és K_2 görbék által indukált kúpszeletsornak $\gamma K_1 + \delta K_2 = 0$ egy tetszőleges eleme, amely a következő alakban is írható:
$\gamma(\alpha_1 G_1 + \beta_1 G_2) + \delta(\alpha_2 G_1 + \beta_2 G_2) = (\gamma\alpha_1 + \delta\alpha_2)G_1 + (\gamma\beta_1 + \delta\beta_2)G_2 = 0.$
Ez azt jelenti, hogy az előbbi kúpszelet a G_1 és G_2 által kúpszeletsornak az a $\lambda G_1 + \mu G_2 = 0$ tagja, ahol $\lambda = \gamma\alpha_1 + \delta\alpha_2$ és $\mu = \gamma\beta_1 + \delta\beta_2$. Ezen összefüggések ismeretében, ha G_1, G_2-höz megadjuk a λ, μ számpárt, akkor kiszámítható a K_1, K_2-höz tartozó γ, δ számpár és fordítva. Ebből pedig már következik, hogy a G_i és K_i által indukált kúpszeletsor megegyezik. (i=1,2)

A fejezet bevezetőjében megállapítottuk, hogy a sík azon négy pontján át, melyben a két indukáló kúpszelet metszi egymást, minden kúpszelet a sorból át fog menni. A következő tétel ezt az állítást erősíti meg.

5.12. Tétel. *A G_1 és G_2 kúpszeletek közös pontján az általuk indukált kúpszeletsor minden eleme átmegy.*

Bizonyítás. Mivel a közös pontokra teljesül, hogy $a_{ik}x_ix_k = 0$ és $b_{ik}x_ix_k = 0$, ezért a lineáris kombinációjukra is igaz, hogy $\alpha a_{ik}x_ix_k + \beta b_{ik}x_ix_k = 0$.

Ezt a négy pontot, mivel ilyen fontos szerepet töltenek be, el kell nevezni: ők lesznek a kúpszeletsor alappontjai.

Megállapítottuk a bevezetőben azt is, hogy az alappontokat leszámítva a többi ponton csak egy kúpszelet megy át. A következő tétel is ezt mondja ki.

5.13. Tétel. *Az alappontoktól eltekintve az $\alpha G_1 + \beta G_2 = 0$ kúpszeletsor elemei egyrétűen befedik a projektív síkot, azaz a projektív sík minden, alappontoktól különböző pontján a kúpszeletsornak pontosan egy tagja halad át.*

Bizonyítás. Legyen a $P(x_i)$ olyan pont, mely nem közös pontja a G_1 és G_2 kúpszeleteknek. Ekkor az x_i koordinátákat behelyettesítve $\gamma = a_{ik}x_ix_k$ és $\delta = b_{ik}x_ix_k$. γ és δ közül legfeljebb csak az egyik lehet nulla. Ekkor az a Q kúpszelet, melyre teljesül, hogy $\alpha\gamma + \beta\delta = 0$, áthalad a P ponton.

1. Ha $\gamma = 0$, akkor $\delta \neq 0$ és következik, hogy $\beta = 0$. Ekkor a $Q = G_1$ áthalad a P ponton.

2. Ha $\delta = 0$, akkor $\gamma \neq 0$ és következik, hogy $\alpha = 0$. Ekkor a $Q = G_2$ áthalad a P ponton.

3. Ha $\gamma \neq 0$ és $\delta \neq 0$ akkor $\beta = 0$. Ekkor $\alpha\gamma + \beta\delta = 0$-ból $\lambda \neq 0$ és $\mu \neq 0$ miatt a $\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{\gamma}{\delta}$ egyenlőséggel definiált $Q = \alpha G_1 + \beta G_2$ áthalad a P ponton.

Mivel 5 pont egyértelműen meghatároz egy kúpszeletet, így csak a fenti kúpszelet halad át a P ponton, ezért lesz egyrétegű a fedés.

Természetesen még itt is lehetne tovább lépni, de ennek a dolgozatnak ez nem célja már. A további lépések során meg lehetne vizsgálni, hogy milyen speciális alakzatok lehetnek egy kúpszeletsorban. Lehet-e valamilyen speciális elhelyezkedésű kúpszeletsort generálni, stb. Ezzel a kis ismertetővel a kúpszeletsoroknak (és a körsoroknak is) épp csak a felszínét vizsgáltuk meg.

6. fejezet

Összefoglalás

A dolgozatom fő célja az volt, hogy bemutassam, hogy egy átlagos magyar diák, akinek az érdeklődését már általános és középiskolában felkeltik a matematika és a másodrendű görbék irányába, meddig tud eljutni. Igyekeztem megmutatni, hogy milyen iskolai szakaszokban mennyi és milyen mélységű tudással rendelkeznek a diákok a témát illetően. Bizonyos helyeken igyekeztem rávilágítani arra is, hogy milyen információkat hallgatnak el jó vagy rossz okkal; illetve hogy hol lehetne esetleg többet bemutatni, mint ami az adott anyagban szerepel. Természetesen ezen megjegyzések csak az én szubjektív véleményemet tükrözik, a megjegyzésekkel nem kívánom a köz- és a felsőoktatást leszólni. Ahogy haladtam előre az oktatás szintjein, úgy igyekeztem én is ragaszkodni az elvárásokhoz. Az általános iskolában inkább elnagyolva, feladatokon keresztül mutatják be a különböző fogalmakat, hogy a diákok egy szemléletes képpel felvértezve léphessenek tovább. A középiskolában és főleg az egyetemen már a matematikailag pontos definíciók az elfogadhatók, itt már kevesebb a feladaton át bevezetett új fogalom. Az egyetemi részen túllépve igyekeztem megmutatni, hogy azzal, hogy a projektív geometria bebizonyította, hogy a kúpszeletek projektív szempontból egyenlőek, nem értünk a témakör végére. A köröket és kúpszeleteket egymáshoz viszonyítva is lehet vizsgálni. A dolgozat utolsó fejezete ezen vizsgálódásból nyújtott egy kis ízelítőt.

Remélem, hogy dolgozatommal sikerült a Kedves Olvasót végigvezetnem a másodrendű görbék világába vezető út elején. De ez az útnak még csak nagyon az eleje, hiszen innen még sok-sok további felfedezni való van a másodrendű görbék között, melyekre ennek a dolgozatnak a keretei már nem terjednek ki.

Irodalomjegyzék

[1] Csordás Mihály - Konfár László - Kothencz Jánosné - Kozmáné Jakab Ágnes - Pintér Klára - Vincze Istvánné: Sokszínű matematika 5., Mozaik Kiadó, Szeged 2009.

[2] Csordás Mihály - Konfár László - Kothencz Jánosné - Kozmáné Jakab Ágnes - Pintér Klára - Vincze Istvánné: Sokszínű matematika 6., Mozaik Kiadó, Szeged, 2011.

[3] Jakab Tamás - Kosztolányi József - Pintér Klára - Vincze István: Sokszínű matematika 7., Mozaik Kiadó, Szeged, 2010.

[4] Jakab Tamás - Kothencz Jánosné - Kozmáné Jakab Ágnes - Pintér Klára - Vincze István: Sokszínű matematika 8., Mozaik Kiadó, Szeged, 2011.

[5] Kosztolányi József - Kovács István - Pintér Klára - Urbán János - Vincze István: Sokszínű matematika 9., Mozaik Kiadó, Szeged, 2010.

[6] Kosztolányi József - Kovács István - Pintér Klára - Urbán János - Vincze István: Sokszínű matematika 10., Mozaik Kiadó, Szeged, 2010.

[7] Kosztolányi József - Kovács István - Pintér Klára - Urbán János - Vincze István: Sokszínű matematika 11., Mozaik Kiadó, Szeged, 2010.

[8] Kosztolányi József - Kovács István - Pintér Klára - Urbán János - Vincze István: Sokszínű matematika 12., Mozaik Kiadó, Szeged, 2010.

[9] Hajós György: Bevezetés a geometriába, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1999.

[10] Kiss György Geometria 1 Alapszint című előadásainak, Kiss György által készített vázlata:
http://www.cs.elte.hu/geometry/kissgy/geobsc.html
(2007-08 2. félév)

[11] ifj. Böröczky Károly Geometria 2 Tanár című előadásának, ifj. Böröczky Károly által készített jegyzete:
http://www.renyi.hu/~carlos/geo2tjegy.pdf
(2008-09 1. félév)

[12] ifj. Böröczky Károly Geometria 3 Tanár című előadásának, ifj. Böröczky Károly által készített jegyzete:
http://www.renyi.hu/~carlos/geo3tjegy.pdf
(2008-09 2. félév)

[13] Verhóczki László Geometria 4 Tanár című előadásához, Verhóczki László által készített jegyzete:
http://www.cs.elte.hu/geometry/vl/ProjGeom.pdf
(2010-11 1. félév)

[14] http://abrgeom.uw.hu/segedanyagok/kiegteljes.pdf

[15] http://zeus.nyf.hu/~kovacsz/projektiv.pdf

[16] http://www.wikipedia.hu