Folytonos függvények közelítése polinomokkal

Szakdolgozat

Paksi lászló

matematika BSc, Matematika tanári szakirány

Témavezető:

Gémes Margit, műszaki gazdasági tanár
Analízis Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
2012

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Motiváció

Ahhoz, hogy a minket körül vevő világot le tudjuk írni, hogy a benne megfigyelhető törvényszerűségeket meg tudjuk fogalmazni, elengedhetetlenek a függvények. Gyakran nem tudjuk pontosan hogyan néznek ki azok a függvények, amelyek leírják az éppen vizsgált folyamatot. Csupán méréseink és megfigyeléseink alapján tudunk információkat a keresett függvényről.

Ezért abban reménykedünk, hogy ha elegendő mérést, kísérletet hajtunk végre, akkor ezen eredményeink alapján képesek leszünk egy olyan függvényt készíteni, amely a lehető legjobban közelíti a folyamatot ténylegesen leíró függvényhez.

Átalában ezeket a függvényeket polinomokként szoktuk keresni. Ennek hátterében az áll, hogy a polinomok számos „szép" tulajdonsággal rendelkeznek, mint például folytonosak, végtelen sokszor folytonosan differenciálhatóak, stb.

Továbbá teljesítik a következő tételt, amely egyben a szakdolgzat központi gondolata is. Az elkövetkezőkben több bizonyítást is adunk majd erre a tételre, amelyeken keresztül módszert is kapunk arra, miként is kell ilyen polinomokat készíteni.

1. Tétel (Weierstrass approximációs tétele)**.** *Ha $f \in C[a,b]$, akkor minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan p polinom, amelyre*

$$|f(x) - p(x)| < \varepsilon \tag{1.1}$$

minden $x \in [a,b]$-re.

Az egyik legismertebb megoldás arra, hogy adott pontokon áthaladó polinomot készítsünk, az úgynevezett *Lagrange-féle interpolációs polinomok.*

Legyenek f értelmezve az $[a,b]$ intervallumon, továbbá legyenek

$$a \leq x_0 < x_1 < \ldots < x_n \leq b \tag{1.2}$$

adott pontok. Valamint definiáljuk $l_k(x)$-t a következő módon,

$$l_k(x) = \prod_{i=0;i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \tag{1.3}$$

Ekkor $l_0, \ldots, l_n$ olyan n-edfokú polinomok amelyekre

$$l_k(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{ha } k = j, \\ 0, & \text{ha } k \neq j, \end{cases} \tag{1.4}$$

Utóbbiból következik, hogy $f(x_k) \cdot l_k(x_k) = f(x_k)$. Könnyen meggondolható, hogy ha vesszük a következő összeget:

$$L_n(x; f) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \cdot l_k(x) \tag{1.5}$$

Akkor az így kapott polinom rendelkezni fog azzal a tulajdonsággal, hogy megegyezik f-fel minden x_i pontban. A fentebb definiált $L_n(x, f)$ polinomot nevezzük az f függvény $x_0, \ldots, x_n$ pontokhoz tartozó Lagrange-polinomjának.

Ahogy láttuk az így elkészített polinom ténylegesen megfelel az elvárásainknak, a megfelelő helyeken azt az értéket veszi fel amit kell. A kérdés csupán az, hogy az így készített $L_n(x)$ vajon minden függvény esetén jó közelítést ad-e, illetve az alappontok számának növelésével csökken-e a hiba mértéke.

Bizonyítható[1], hogy abban az esetben ha a $\{\pm k/n : 0 \leq k \leq n\}$ pontokat vesszük alappontoknak, továbbá közelítendő függvény elég sokszor differenciálható azon az intervallumon ahol a közelítést végezzük, akkor elég nagy n-re a Lagrange-polinom egyre jobban fogja közelíteni a függvényt.

Az is megmutatható, hogy abban az esetben, ha a közelítendő függvény nem differenciálható az intervallum minden belső pontjában, például az $|x|$ függvény a $[-1, 1]$ intervallumon, akkor közelítés sem lesz megfelelő. Az $|x|$ esetén az alappontok számának növelésével a Lagrange-polinom erős hullámzásba kezd, és egyátlan nem konvergál a függvényhez.

Összegezve az eddigieket, olyan eljárásokat és ezek segítségével olyan polinomokat keresünk, amelyek tetszőleges, intervallumon folytonos függvényt megfelelően közelít, továbbá az alappontok számának növelésével a függvénytől való eltérés egyre kevesebb lesz.

[1] [LTS] 11.16. Megjegyzés

2. fejezet

Közelítés töröttvonalfüggvénnyel

A [LTS] könyvben található bizonyítás lépéseit követve, először fel kell használnunk Heine tételét.

2. Tétel (Heine-tétele)**.** *Ha f folytonos az $[a, b]$ intervallumon, akkor f egyenletesen folytonos $[a, b]$-n.*

Mivel f folytonos függvény az $[a, b]$ intervallumon, akkor az egyeneltes folytonosság definíciója szerint minden rögzített $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $x, y \in [a, b]$, $|x - y| < \delta$, akkor $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Legyen $n \in \mathbb{N}$ rögzített, ekkor létezik olyan δ_n, hogy ha $|x - y| < \delta_n$, akkor $|f(x) - f(y)| < \frac{1}{2n}$. Ezt követően definiáljunk, egy δ_n-nél finomabb felosztást az $[a, b]$ intervallumon. Legyen $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_k = b$, ahol minden i esetén teljesül, hogy $|x_{i-1} - x_i| < \delta_n$.

Ezen felosztás mellett készítsünk egy g töröttvonalfüggvényt, amely teljesíti, hogy minden $[x_{i-1}, x_i]$ intervallumon lineáris, továbbá $g(x_i) = f(x_i)$. Jelöljük g meredekségét az $[x_{i-1}, x_i]$ intervallumon m_i, illetve legyen $m_0 = 0$. Megmutatjuk, hogy az így készített g függvénnyel tetszőlegesen közelíthető az f függvény. Válasszunk ki egy tetszőleges (x_i, x_{i+1}) intervallumot, melynek egy belső pontja legyen z. Akkor az $|f(z) - g(z)|$ távolság a következő képpen határozható meg:

$$\left| f(z) - \underbrace{(f(x_i) + m_{i+1} \cdot (z - x_i))}_{g(z)} \right|. \tag{2.1}$$

m_{i+1}-et helyettesítve kapjuk:

$$\left| f(z) - \underbrace{\left(f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \cdot (z - x_i) \right)}_{g(z)} \right| \tag{2.2}$$

Egyszerű átalakításokkal a következő alakhoz jutunk:

$$\left| \underbrace{f(z) - f(x_i)}_{<\frac{1}{2n}} - \underbrace{(f(x_{i+1}) - f(x_i))}_{<\frac{1}{2n}} \cdot \underbrace{\frac{z - x_i}{x_{i+1} - x_i}}_{\leq 1} \right| < \frac{1}{n}. \tag{2.3}$$

Mivel minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $\frac{1}{n} < \varepsilon$, ezért a g töröttvonalfüggvénnyel tetszőlegesen közelíthető az f függvény.

A töröttvonal tényleges elkészítéséhez felhasználjuk a [LTS] könyvben található 18.16.4-es példát. Definiáljuk a φ_i függvényeket a következő módon:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq x_{i-1} \\ (m_i - m_{i-1}) \cdot (x - x_{i-1}), & \text{ha } x \geq x_{i-1} \end{cases} \tag{2.4}$$

Ha összeadjuk a fent definiált φ_i függvényeket

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i, \tag{2.5}$$

akkor egy olyan φ töröttvonalfüggvényhez jutunk, amely teljesíti, hogy minden $[x_{i-1}, x_i]$ intervallumon a meredeksége m_i. Ezen függvény segítségével nem nehéz elkészíteni a fentebb definiált g-t, hiszen $g = \varphi + f(a)$. A következő lépésben egy olyan polinomot keresünk amely jól közelíti g-t. Ehhez először az kell, hogy megmutassuk minden φ_i függvény is közelíthető polinomokkal, az $[a, b]$ intervallumon. Rögzítsük i-t majd hozzuk φ_i-t a következő alakra:

$$\varphi_i(x) = \frac{m_i - m_{i-1}}{2} \cdot (|x - x_{i-1}| + (x - x_{i-1})) \tag{2.6}$$

Az így kapott alak ekvivalens a fentebb definiálttal. A továbbiakban használjuk a következő jelölést $a_i := \frac{m_i - m_{i-1}}{2}$. A megfelelő kifejezést helyettesítve a

$$\varphi_i(x) = a_i \cdot (|x - x_{i-1}| + (x - x_{i-1})) \tag{2.7}$$

kifejezéshez jutunk. Ezt a egyenletet tovább rendezzük, akkor a

$$\varphi_i(x) = a_i \cdot |x - x_{i-1}| + a_i \cdot (x - x_{i-1}) \tag{2.8}$$

alakot kapjuk. Ennek második tagja már polinom, azonban az első tag még nem. Tehát keresnünk kell egy olyan polinomot, amely jól közelíti az $|x|$-et a $[-1, 1]$ intervallumon, vagyis minden $\varepsilon > 0$ esetén teljesül, hogy $|p(x) - |x|| < \varepsilon$. A bizonyításhoz megoldjuk a [LTS] könyv 18.18-as feladatát, majd ennek segítségével belátjuk az egyenletes konvergenciát.

Tekintsük a következő módon megadott függvénysorozatot

$$p_0(x) \equiv 0, \tag{2.9}$$

$$p_{n+1}(x) = p_n(x) + \frac{x^2 - p_n^2(x)}{2}. \tag{2.10}$$

A függvénysorozat minden tagja polinom lesz, így ha megmutatjuk, hogy egyenletesen konvergens és határfüggvénye éppen az $|x|$, akkor egy adott $n > 0$ küszöbindextől kezdve a sorozat elemei olyan polinomok lesznek amelyek teljesítik, hogy $\forall\, m \geq n$ esetén $|p_m(x) - |x|| < \varepsilon$.

Felhasználva, hogy $x^2 = |x|^2$, a $p_n(x)$ függvénysorozat rekurzív képlete a következőképpen írható át:

$$p_{n+1}(x) = p_n(x) + \frac{|x|^2 - p_n^2(x)}{2}. \tag{2.11}$$

Ennek az átalakításnak a segítségével már könnyen igazolható a következő egyenlőség:

$$|x| - p_{n+1}(x) = (|x| - p_n(x)) \left(1 - \frac{|x| + p_n(x)}{2}\right) \tag{2.12}$$

A 2.11. egyenletben szereplő kifejezés a következő módon írható át:

$$\begin{aligned} p_{n+1}(x) &= \\ &= p_n(x) + \frac{|x|^2 - p_n^2(x)}{2} = p_n(x) + \frac{1}{2} \cdot \left(|x|^2 - p_n^2(x)\right) = \\ &= p_n(x) + \frac{1}{2}(|x| - p_n(x)) \cdot (|x| + p_n(x)) \end{aligned}$$

vagyis eredményül a

$$p_{n+1}(x) = p_n(x) + \frac{1}{2}(|x| - p_n(x)) \cdot (|x| + p_n(x)) \tag{2.13}$$

formát kapjuk, amit a

$$|x| - p_{n+1}(x) = (|x| - p_n(x)) \left(1 - \frac{|x| + p_n(x)}{2}\right)$$

kifejezésbe helyettesítve, az

$$|x| - \underbrace{p_n(x) - \frac{1}{2}(|x| - p_n(x)) \cdot (|x| + p_n(x))}_{p_{n+1}} = (|x| - p_n(x)) \left(1 - \frac{|x| + p_n(x)}{2}\right). \tag{2.14}$$

egyenletet kapjuk. A baloldalon kiemelve $|x| - p_n(x)$-et éppen a jobb oldalt kapjuk.

Ezt az eredményünket felhasználva megpróbálunk felső becslést adni a $|x| - p_n(x)$ értékére.

$$|x| - p_n(x) = (|x| - p_{n-1}(x)) \left(1 - \frac{|x| + p_{n-1}(x)}{2}\right) \tag{2.15}$$

Ha a 2.12.egyenletet alkalmazzuk minden $|x| - p_i(x)$ alakú tagra, akkor $|x| - p_n(x)$ a következő formára írható át:

$$(|x| - p_0(x)) \cdot \left(1 - \frac{|x| + p_1(x)}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{|x| + p_2(x)}{2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{|x| + p_{n-1}(x)}{2}\right) \tag{2.16}$$

Tudjuk, hogy $p_0(x) \equiv 0$, ezért a szorzat első tényezője helyett nyugodtan írhatunk $|x|$-et. Rövidebb alakra hozva a 2.16. kifejezést az alábbihoz jutunk:

$$|x| - p_n(x) = |x| \cdot \prod_{i=0}^{n-1} \left(1 - \frac{|x| + p_i(x)}{2}\right) \tag{2.17}$$

Belátjuk, ha $|x| \leq 1$, akkor az $1 - \frac{|x|+p_i(x)}{2}$ felülről becsülhető $1 - \frac{|x|}{2}$-vel. Könnyen meggondolható, hogy ehhez az kell, hogy $0 \leq p_n(x) \leq 1$ minden $x \in [-1,1]$ esetén. Ennek bizonyítására a következő segédállítást fogjuk felhasználni

3. Lemma. *Legyenek* $p \in \mathbb{R}^+$ *és* $p < 1$ *akkor*

$$0 \leq p \cdot \left(1 - \frac{p}{2}\right) < \frac{1}{2}. \tag{2.18}$$

Bizonyítás. Induljunk ki a következő állításból

$$0 < (p-1)^2 = p^2 - 2p + 1. \tag{2.19}$$

Átrendezve az egyenlőtlenséget kapjuk, hogy

$$p - \frac{p^2}{2} = p\left(1 - \frac{p}{2}\right) < \frac{1}{2} \tag{2.20}$$

Az utolsó egyenlelőtleség minden $p \in \mathbb{R}$ esetén teljesül, ha a $0 < p < 1$ feltétel is teljesül akkor a szorzat pozitív is lesz. □

Teljes indukcióval megmutatjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén teljesül, hogy

$$0 \leq p_n(x) \leq |x| \leq 1.$$

A rekurzív egyenlet könnyen átírható a következő alakba:

$$p_{n+1}(x) = \frac{x^2}{2} + p_n(x) \cdot \left(1 - \frac{p_n(x)}{2}\right).$$

Ezt a képletet használva azt kapjuk, hogy $p_1(x) = \frac{x^2}{2}$, amelynek maximuma a $[-1,1]$ intervallumon $\frac{1}{2}$. Használva a képzési szabályt, a második tag a következő módon kapható meg:

$$p_2(x) = \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{\leq \frac{1}{2}} + \underbrace{p_1(x) \cdot \left(1 - \frac{p_1(x)}{2}\right)}_{< \frac{1}{2}}. \tag{2.21}$$

Az utolsó tagra vonatkozó becsélnél felhasználtuk a 3. Lemma állítását és azt, hogy $p_1(x) \leq \frac{1}{2}$. Tehát $p_2(x) < 1$ is teljesül. Tegyük fel, hogy $p_{n-1}(x)$-re is igaz. Megmutatjuk, hogy ekkor $p_n(x) < 1$ is teljesül.

$$p_n(x) = \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{\leq \frac{1}{2}} + \underbrace{p_{n-1}(x) \cdot \left(1 - \frac{p_{n-1}(x)}{2}\right)}_{< \frac{1}{2}} < 1 \tag{2.22}$$

Vagyis bebizonyítottuk, hogy $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [-1; 1]$ esetén

$$0 \leq |x| - p_n(x) \leq |x| \cdot \left(1 - \frac{|x|}{2}\right)^n . \tag{2.23}$$

Jelölje $h_n(x)$ a következő függvénysorozatot:

$$h_n(x) = |x| \cdot \left(1 - \frac{|x|}{2}\right)^n = \begin{cases} x \cdot \left(1 - \frac{x}{2}\right)^n & \text{ha } x \in [0,1] \\ -x \cdot \left(1 - \frac{-x}{2}\right)^n & \text{ha } x \in [-1,0) \end{cases} \tag{2.24}$$

Ha meg tudjuk mutatni, hogy $h_n(x) \hookrightarrow 0$, akkor minden $\varepsilon > 0$-ra van olyan küszöbindex, hogy attól a küszöbindextől kezdve

$$|h_n(x) - 0| = |h_n(x)| < \varepsilon.$$

Vizsgáljuk először $h_n(x)$-et a $[0,1]$ intervallumon.

$$|h_n(x)| = x\left(1 - \frac{x}{2}\right)^n, \text{ ha } x \in [0,1].$$

Keressük ennek a maximumát:

$$\begin{aligned} &\left(x\left(1 - \frac{x}{2}\right)^n\right)' = \\ &= \left(1 - \frac{x}{2}\right)^n + x \cdot n \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x}{2}\right)^{n-1} = \\ &= \left(1 - \frac{x}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(1 - \left(\frac{n+1}{2}\right) \cdot x\right). \end{aligned}$$

A függvények ott lehet szélsőértéke, ahol az első derivált nulla, vagyis

$$\left(1 - \frac{x}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(1 - \left(\frac{n+1}{2}\right) \cdot x\right) = 0 \tag{2.25}$$

Könnyen észrevehető, hogy a szorzat első tényezője minden $x \in [0,1]$ esetén nagyobb, mint 0, tehát elegendő csak a második tényezőt vizsgálni.

$$\begin{aligned} 1 - \left(\frac{n+1}{2}\right) \cdot x &= 0 \\ 1 &= \left(\frac{n+1}{2}\right) \cdot x \\ \frac{2}{n+1} &= x \end{aligned}$$

Mivel ebben a pontban a derivált előjelet vált pozitívról negatívra, ezért ebben a pontban a függvénynek szélsőértéke, maximuma van. Elvégezzük $h_n(x)$ vizsgálatát a $[-1,0)$ intervallumon is. Itt a függvény a következő alakban írható fel:

$$h_n(x) = -x\left(1 - \frac{-x}{2}\right)^n .$$

Ennek a függvénynek is keressük az szélsőértékét.

$$\left(-x\left(1+\frac{x}{2}\right)^{n}\right)' =$$
$$= -\left(1+\frac{x}{2}\right)^{n} + (-x)\cdot n\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{x}{2}\right)^{n-1} =$$
$$= \left(1+\frac{x}{2}\right)^{n-1}\cdot\left(-1-\left(\frac{n+1}{2}\right)\cdot x\right).$$

Lokális szélsőérték ott lehet, ahol

$$\left(1+\frac{x}{2}\right)^{n-1}\cdot\left(-1-\left(\frac{n+1}{2}\right)\cdot x\right) = 0 \tag{2.26}$$

teljesül. Hasonlóan, mint az előbb, itt sem kell vizsgálnunk az első tagot, hiszen minden $x \in [-1, 0)$ esetén nagyobb, mint 0. A második tagot vizsgálva

$$-1-\left(\frac{n+1}{2}\right)\cdot x = 0, \tag{2.27}$$

ebből

$$x = -\frac{2}{n+1} \tag{2.28}$$

A függvénynek ebben a pontban is maximuma van, hiszen a derivált pozitívról negatívra vált, továbbá értéke megegyezik a másik maximumértékkel. Ezek alapján megállapítható, hogy

$$\max_{x\in[-1,1]} h_n(x) = \frac{2}{n+1}\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n} < \frac{2}{n+1}. \tag{2.29}$$

Ebből következik, hogy $h_n(x) < \frac{2}{n+1}$, mivel $|x| - p_n(x) < h_n(x)$ teljesül, azért igaz lesz, hogy

$$|x| - p_n(x) < \frac{2}{n+1}. \tag{2.30}$$

Ebből az állításból egyértelműen következik, hogy $p_n(x) \hookrightarrow |x|$. Hiszen $|x|$ és $p_n(x)$ is nem negatívak, továbbá $|x| > p_n(x)$, ezért $|x| - p_n(x) = ||x| - p_n(x)|$. Tehát

$$|x| - p_n(x) < h_n(x)$$
$$||x| - p_n(x)| < h_n(x)$$

Mivel minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $\frac{2}{n+1} < \varepsilon$, ezért teljesül, hogy:

$$||x| - p_n(x)| < \varepsilon. \tag{2.31}$$

Vagyis a $p_n(x)$ polinom sorozat eleget fog tenni az elvárásainknak, miszerint jól fogja közelíteni $|x|$-et a $[-1, 1]$-en. Jelölje a továbbiakban p a polinom sorozat egy olyan tagját amelyre teljesül, hogy egy rögzített $\varepsilon > 0$ esetén $|p(x) - |x|| < \varepsilon$ minden $x \in [-1, 1]$-re.

Válasszunk egy olyan r számot amelyre teljesül a következő $x_{i-1} - r < a < b < x_{i-1} + r$. Akkor a korábban meghatározott

$$\varphi_i(x) = a_i \cdot |x - x_{i-1}| + a_i \cdot (x - x_{i-1}) \tag{2.32}$$

függvényre és a

$$q_i(x) = a_i r \cdot p\left(\frac{x - x_{i-1}}{r}\right) + a_i \cdot (x - x_{i-1}) \tag{2.33}$$

polinomra teljesülni fog, hogy

$$|q_i(x) - \varphi_i(x)| < |a_i| r \cdot \varepsilon \tag{2.34}$$

minden $x \in [x_{i-1} - r, x_{i-1} + r]$-re. Miven $[a, b] \subset [x_{i-1} - r, x_{i-1} + r]$, ezért az állítás igaz lesz minden $x \in [a, b]$-re is. Képezzük a q polinomot a következő módon:

$$q := \sum_{i=1}^{n} q_i + f(a). \tag{2.35}$$

Felhasználva g definícióját a következő egyenlőtlenség írható fel:

$$|q(x) - g(x)| \leq \left| \sum_{i=1}^{n} q_i(x) - \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) \right|. \tag{2.36}$$

Felhasználva a háromszög-egyenlőtlenséget a következő állítás is igaz lesz:

$$\left| \sum_{i=1}^{n} q_i(x) - \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |q_i(x) - \varphi_i(x)|. \tag{2.37}$$

A 2.34. egyenőtlenséget vizsgálva látjuk, hogy minden i esetén egyértelműen létezik egy $|a_i|$ érték. Jelölje M az előforduló $|a_i|$ értékek maximumát, akkor teljesül, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} |q_i(x) - \varphi_i(x)| < n \cdot M \cdot r \cdot \varepsilon. \tag{2.38}$$

minden $x \in [a, b]$-re. Jelölje $k \in \mathbb{R}^+$ azt az ε-tól független konstanst, amely teljesíti a következőt:

$$n \cdot M \cdot r \leq k. \tag{2.39}$$

Mivel a q polinommal tetszőlegesen közelíthető a g töröttvonalfüggvény, és a g-vel tetszőlegesen közelíthető az f függvény, ezért teljesülnek az alábbiak:

$$|q(x) - f(x)| < \underbrace{|q(x) - g(x)|}_{<k\cdot\varepsilon} + \underbrace{|g(x) - f(x)|}_{\varepsilon} < (k+1) \cdot \varepsilon \tag{2.40}$$

minden $x \in [a, b]$-re. Vagyis a q polinommal jól közelíthető az f függvény.

3. fejezet

Bernstein-polinomok

1. Definíció (Bernstein-polinom)**.** *Legyen f értelmezve a $[0,1]$ intervallumon. Akkor az f-hez tartozó n-edik Bernstein-polinom ($n \in \mathbb{N}$) a következő alakban írható fel:*

$$B_n(f,x) = \sum_{r=0}^{n} f\left(\frac{r}{n}\right)\binom{n}{r} x^r (1-x)^{n-r} \tag{3.1}$$

A későbbiekben belátjuk, hogy $B_n(f,x)$ polinomsorozat tart f-hez, továbbá, ha feltesszük, hogy f folytonos is a $[0,1]$ intervallumon, akkor a Bernstein-polinomok sorozata egyenletesen konvergál majd az f függvényhez.

Ahogy arról olvashatunk a [3] könyvben, Bernstein a róla elnevezett polinomokat akkor fedezte fel, amikor a következő valószínűségi problémát vizsgálta. Legyen adott két esemény A és B, amelyek magukba foglalják a teljes eseményteret, továbbá legyen A bekövetkezésének valószínűsége $x \in [0,1]$, ebből egyértelműen következi, hogy B bekövetkezési valószínűsége $1-x$. Tehát annak a valószínűsége, hogy az A esemény pontosan r-szer következzen be, a következő alakban határozható meg:

$$p_{r,n}(x) = \binom{n}{r} x^r (1-x)^{n-r}. \tag{3.2}$$

Ha jobban megvizsgáljuk a fenti összefüggést, akkor láthatjuk, hogy az alábbi egyenlőség teljesülni fog, $p_{r,n}(x) = p_{n-r,n}(1-x)$. Ennek igazolásához elegendő kibontani a binomiális együtthatót.

$$\begin{aligned} p_{r,n}(x) &= \binom{n}{r} x^r (1-x)^{n-r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} x^r (1-x)^{n-r} = \\ =& \frac{n!}{(n-r)!r!} (1-x)^{n-r} x^r = \binom{n}{n-r} (1-x)^{n-r} x^r = p_{n-r,n}(1-x) \end{aligned}$$

Legyen az A esemény bekövetkezésének valószínűsége $x = 0$, ekkor annak a esélye, hogy A legalább egyszer bekövetkezzen 0, hiszen A a lehetetlen esemény. Azonban a B esemény bekövetkezési valószínűsége $(1-x) = 1$. Vagyis annak a valószínűsége, hogy B n kísérletből n-szer előfordul 1. Ezt gondolatot behelyettesítve a korábbi összefüggésbe kapjuk a következőt:

$$p_{n,n}(1) = p_{0,n}(0) = 1. \tag{3.3}$$

Az $x = 1$ eset hasonlóan bizonyítható.

Az elkövetkezőkben megmutatunk néhány olyan eredményt, amely arra motiválta Bernsteint, hogy bizonyítást adjon Weierstrass-tételére.

Vizsgáljuk tovább a $p_{r,n}$ kifejezést.

$$p'_{r,n}(x) = \binom{n}{r}\left(r \cdot x^{r-1}(1-x)^{n-r} + x^r \cdot (-1)(n-r)(1-x)^{n-r-1}\right) \tag{3.4}$$

Tudjuk, hogy ha $p_{r,n}$-nek az $z \in (0,1)$ pontban lokális szélsőértéke van, akkor ott

$$p'_{r,n}(z) = 0.$$

Hozzuk rendezettebb alakra a deriváltfüggvényt:

$$\binom{n}{r} x^{r-1}(1-x)^{n-r-1}\left(r(1-x) + x(-1)(n-r)\right) = 0 \tag{3.5}$$

Végezzük el az utolsó tényezőben a zárójelfelbontásokat és az összevonásokat, így a következő eredményt kapjuk

$$\binom{n}{r} \underbrace{x^{r-1}}_{>0} \underbrace{(1-x)^{n-r-1}}_{>0} (r - nx) = 0. \tag{3.6}$$

Tehát a derivált értéke csak akkor lehet 0, ha $x = \frac{r}{n}$. Az is könnyen megfigyelhető, hogy ebben a pontban a deriváltfüggvény előjelet vált, mégpedig pozitívról negatívra, ami pontosan azt jelenti, hogy a $p_{r,n}$ függvénynek ebben a pontban lokális maximuma van.

Ha átrendezzünk a maximumhelyre vonatkó egyenlőséget, akkor azt kapjuk, hogy $r = nx$. Legyenek x és n rögzítettek, továbbá legyen $r^* \in \mathbb{N}$ és jelölje a következőt $r^* = \lfloor nx \rceil$. Ennek segítségével meghatározhatjuk azt a $p_{r^*,n}$ függvényt, amely maximális lesz rögzített x mellett. Tekintsük a következő összeget

$$\sum_{r=0}^{n} r \binom{n}{r} x^r (1-x)^{n-r}. \tag{3.7}$$

Hajtsuk végre az alábbi átalakításokat:

$$\begin{aligned}
&\sum_{r=0}^{n} r\binom{n}{r}x^r(1-x)^{n-r} = \\
=&\sum_{r=0}^{n} r\cdot\frac{n!}{r!\cdot(n-r)!}\cdot x^r(1-x)^{n-r} = \\
=nx&\sum_{r=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(r-1)!\cdot((n-1)-(r-1))!}\cdot x^{r-1}(1-x)^{(n-1)-(r-1)} = \\
=nx&\sum_{r=1}^{n}\binom{n-1}{r-1}x^{r-1}(1-x)^{(n-1)-(r-1)} = nx.
\end{aligned}$$

Az utolsó egyenletben értéke ténylegesen 1, erről könnyen meggyőződhetünk, ha használjuk a következő helyettesítést, $s := r-1$ és $k := n-1$. Ekkor

$$\sum_{s=0}^{k}\binom{k}{s}x^s(1-x)^{k-s},$$

aminek értéke a binomiális tétel alapján éppen 1.

Ezek alapján arra következtethetünk, hogy elég nagy n-re, és rözített x esetén a

$$B_n(f,x) = \sum_{r=0}^{n} f\left(\frac{r}{n}\right)\binom{n}{r}x^r(1-x)^{n-r}$$

kifejezés értékét elsősorban az összeg azon tagjai fogják befolyásolni, amelyekben r közel van r^*-hoz[1].

A továbbiakban a Bernstein-polinomok néhány fontos tulajdoságát mutatjuk meg. Könnyen meggondolható, hogy a $[0,1]$ intervallum végpontjaiban ezek a polinomok és az eredeti függvény helyettesítési értéke megegyezik azaz

$$B_n(f,0) = f(0) \quad B_n(f,1) = f(1).$$

$$B_n(f,0) = \sum_{r=0}^{n} f\left(\frac{r}{n}\right)p_{r,n}(0). \tag{3.8}$$

Korábban láttuk, hogy minden $r \neq 0$ esetén a $p_{r,n}(0) = 0$, így az összegben az egyetlen nem nulla tag éppen

$$f\left(\frac{0}{n}\right)p_{0,n}(0) = f\left(\frac{0}{n}\right)\cdot 1 = f(0).$$

Hasonlóan igaz, hogy

$$B_n(f,1) = \sum_{r=0}^{n} f\left(\frac{r}{n}\right)p_{r,n}(1). \tag{3.9}$$

[1] A [3]-ban egy ehhez hasonló gondolatmenet szerepel.

Ebben az összegben éppen $p_{n,n}(1)$ lesz egyedül nem nulla.

Az is könnyen igazolható, hogy az $f(x) \equiv c$ konstans függvény is előállítható ezen polinomok segítségével.

$$\begin{aligned} B_n(f,x) &= \sum_{r=0}^{n} f\left(\frac{r}{n}\right)\binom{n}{r}x^r(1-x)^{n-r} = \\ &= \sum_{r=0}^{n} c\cdot\binom{n}{r}x^r(1-x)^{n-r} = \\ &= c\cdot\underbrace{\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}x^r(1-x)^{n-r}}_{=1} \end{aligned}$$

Az utolsó szumma értéke 1 köszönhetően a binomiális tételnek. Vagyis tényleg teljesül, hogy:

$$c\cdot\underbrace{\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}x^r(1-x)^{n-r}}_{=1} = c \quad \text{, azaz } B_n(c,x) = c \tag{3.10}$$

Miután megmutattuk, hogy a konstans függvényt előállítják a Bernstein-polinomok, akkor logikusan az a kérdés következik, hogy vajon hogyan viselkednek az $f(x) = x$ függvény esetén.

Legyen $f(x) = x$, akkor a hozzátartozó Bernstein-polinom a következő:

$$B_n(x,x) = \sum_{r=0}^{n}\left(\frac{r}{n}\right)\binom{n}{r}x^r\,(1-x)^{n-r} \tag{3.11}$$

Annak bizonyítására, hogy ebben az esetben is az eredeti függvényt fogják előállítani, a következő átalakításokat kell végrehajtani.

$$\begin{aligned} &\frac{r}{n}\binom{n}{r} = \frac{r}{n}\cdot\frac{n!}{r!\cdot(n-r)!} = \frac{(n-1)!}{(r-1)!\cdot(n-r)!} = \\ &= \frac{(n-1)!}{(r-1)!\cdot(n-r-1+1)!} = \frac{(n-1)!}{(r-1)!\cdot((n-1)-(r-1))!} = \\ &= \binom{n-1}{r-1}. \end{aligned}$$

Vagyis a korábbi egyenlet a következő alakba írható át:

$$B_n(x,x) = x\sum_{r=1}^{n}\binom{n-1}{r-1}x^{r-1}(1-x)^{n-r} \tag{3.12}$$

Legyen $s = r - 1$, továbbá szumma felsőhatárát kicseréljük $n-1$-re, ekkor a következő formához jutunk:

$$B_n(x,x) = x\underbrace{\sum_{s=0}^{n-1}\binom{n-1}{s}x^s(1-x)^{n-1-s}}_{=1} \tag{3.13}$$

A fenti egyeneletben a második tényező egyenlő eggyel a binomiális tétel miatt.

Az eddig látottak alapján jogosan következtethetünk, arra hogy tetszőleges lineáris függvény is előállítható a Bernstein-polinomok segítségével. Ehhez elegendő megmutatni, hogy teljesül a következő feltétel

$$B_n(\lambda f + \mu g) = \lambda B_n(f) + \mu B_n(g), \tag{3.14}$$

vagyis mikor egy függvényhez hozzárendeljük a Bernstein-polinomját, azt tekinthetjük lineáris leképezésnek.

Legyenek f, g a $[0,1]$-en értelmezett függvények, továbbá legyen λ, $\mu \in \mathbb{R}$. Ekkor:

$$\begin{aligned}
B_n(\lambda f + \mu g, x) &= \sum_{r=0}^{n} \left(\lambda f\left(\frac{r}{n}\right) + \mu g\left(\frac{r}{n}\right)\right)\binom{n}{r} x^r (1-x)^{n-r} = \\
&= \sum_{r=0}^{n} \lambda f\left(\frac{r}{n}\right)\binom{n}{r} x^r (1-x)^{n-r} + \sum_{r=0}^{n} \mu g\left(\frac{r}{n}\right)\binom{n}{r} x^r (1-x)^{n-r} = \\
&= \lambda \sum_{r=0}^{n} f\left(\frac{r}{n}\right)\binom{n}{r} x^r (1-x)^{n-r} + \mu \sum_{r=0}^{n} g\left(\frac{r}{n}\right)\binom{n}{r} x^r (1-x)^{n-r} = \\
&= \lambda B_n(f, x) + \mu B_n(g, x).
\end{aligned}$$

A linearitáson kívül további fontos tuljadonságokkal rendelkezik. Például:

4. Állítás. *Legyenek f, g a $[0,1]$ intervallumon értelmezett függvények. Ha teljesül, hogy $f(x) \leq g(x)$ minden $x \in [0,1]$ esetén akkor az alábbi is teljesülni fog minden $x \in [0,1]$ esetén:*

$$B_n(f, x) \leq B_n(g, x) \tag{3.15}$$

Bizonyítás. A állítás helyessége könnyen igazolható. Első lépésben azt kell megmutatni, hogyha valamilyen h $[0,1]$-en értelmezett függvény esetében teljesül, hogy ha $h(x) \geq 0$ minden $x \in [0,1]$-re akkor az is teljesülni fog, hogy $B_n(h, x) \geq 0$ minden $x \in [0,1]$ esetén.

Ez valóban teljesül, hiszen ha $h(x) \geq 0$ akkor nyílván teljesülni fog, hogy $h(\frac{k}{m}) \geq 0$, ahol $k \in \{0, 1, \ldots, m\}$. Ekkor viszont $B_n(h, x)$ egy nemnegatív tagokat tartalmazó összeg, vagyis $B_n(h, x) \geq 0$.

Legyen $f(x) \leq g(x)$, ekkor

$$g(x) - f(x) \geq 0 \tag{3.16}$$

Az előbbi gondolatmenet alapján, és felhasználva a linearitást kapjuk, hogy

$$0 \leq B_n(g - f, x) = B_n(g, x) - B_n(f, x) \tag{3.17}$$

Az egyenlőtlenséget átrendezve, éppen a bizonyítandó állítást kapjuk.

$$B_n(f,x) \leq B_n(g,x) \tag{3.18}$$

□

Láttuk, hogy konstans és lineáris függvényeket nem csak közelítik, hanem elő is állítják a Bernstein polinomok.

A következő lépésben azt vizsgáljuk, hogy miként viselkedik egyéb esetekben. Vizsgáljuk, hogy mit mondhatunk akkor, ha $f(x) = x^2$. Ennek megmutatásához először a következő esetet kell vizsgálnunk:

$$B_n\left(x\left(x-\frac{1}{n}\right),x\right) = \sum_{r=0}^{n} \frac{r}{n} \cdot \frac{r-1}{n} \binom{n}{r} x^r (1-x)^{n-r} \tag{3.19}$$

Mivel szumma mögött lévő kifejezés $r = 0$ és $r = 1$ esetén eredményül 0-t ad, ezért az r futóindex indítható $r = 2$-ről. Továbbá a korábban már bizonyított átalakítás alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\frac{r}{n} \cdot \frac{r-1}{n}\binom{n}{r} &= \frac{r-1}{n}\binom{n-1}{r-1} = \\
&= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{r-1}{n-1}\binom{n-1}{r-1} = \frac{n-1}{n}\binom{n-2}{r-2} = \\
&= \left(1-\frac{1}{n}\right)\binom{n-2}{r-2}.
\end{aligned}$$

Vagyis

$$B_n\left(x\left(x-\frac{1}{n}\right),x\right) = \sum_{r=2}^{n} \left(1-\frac{1}{n}\right)\binom{n-2}{r-2} x^r (1-x)^{n-r}. \tag{3.20}$$

Definiáljuk j a következő módon: $j := r - 2$. Helyettesítsünk be a fenti egyenletbe.

$$\begin{aligned}
B_n\left(x\left(x-\frac{1}{n}\right),x\right) &= \sum_{j=0}^{n-2} \left(1-\frac{1}{n}\right)\binom{n-2}{r-2} x^{j+2} (1-x)^{n-j-2} = \\
&= \left(1-\frac{1}{n}\right) x^2 \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} x^j (1-x)^{n-2-j} = \\
&= \left(1-\frac{1}{n}\right) x^2.
\end{aligned}$$

Vizsgáljuk meg ezt az esetétet egy kicsit másként is.

$$\begin{aligned}
B_n\left(x\left(x-\frac{1}{n}\right),x\right) &= B_n\left(x^2-\frac{1}{n}x,x\right) = \\
&= B_n\left(x^2,x\right) - B_n\left(\frac{1}{n}x,x\right) = \\
&= B_n\left(x^2,x\right) - \frac{1}{n}x
\end{aligned}$$

Az utolsó egyenletet átrendezve kapjuk, hogy

$$B_n\left(x^2, x\right) = B_n\left(x\left(x-\frac{1}{n}\right), x\right) + \frac{1}{n}x =$$
$$= \left(1-\frac{1}{n}\right)x^2 + \frac{1}{n}x.$$

Eredményként azt kaptuk, hogy a Bernstein-polinomok nem állíják elő az x^2 függvényt, de következő alakon

$$B_n\left(x^2, x\right) = x^2 + \frac{1}{n}x(1-x) \tag{3.21}$$

látható, hogy ha $n \to \infty$ akkor $B_n\left(x^2, x\right)$ egyenletesen tart x^2-hez.

3.1. Az approximációs tétel bizonyítása Bernstein-polinomokkal

A fenti példák jól mutatják, hogy ezek a polinomok, képesek előállítani egyes függvényeket, vagy kellően közelíteni azokat. Felhasználva ezeket a példákat és követve az [1]-ben található bizonyítás lépéseit megmutatjuk, hogy tetszőleges f $[a, b]$-on folytonos függvényt tetszőlegesen közelíthetünk.

Legyen h a $[0, 1]$-on folytonos függvény. Felhasználva a zárt intervallumon folytonos függvényekről szóló Weierstrass-tételt definiáljuk M-et a következőképpen.

$$M = max_{[0,1]}|h(x)|. \tag{3.22}$$

Akkor könnyen meggondolható, hogy minden $s, t \in [0, 1]$ esetén telejsül, hogy

$$|h(t) - h(s)| \leq 2M. \tag{3.23}$$

Továbbá Heine-tételét (2. Tétel) alkalmazva kapjuk, hogy h egyenletesen folytonos a $[0, 1]$ intervallumon. Vagyis minden $\varepsilon > 0$ esetén léltezik $\delta > 0$, hogy

$$|h(t) - h(s)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.24}$$

, ha

$$|t - s| < \delta. \tag{3.25}$$

Abban az esetben, ha $|t - s| \geq \delta$ akkor rögzített $\frac{\varepsilon}{2}$ mellett a fenti becslés nem teljesül. Ennek korrigálására hajtsuk végre a következő átalakításokat:

$$|t - s| \geq \delta \Rightarrow \frac{|t-s|}{\delta} \geq 1 \Rightarrow \frac{(t-s)^2}{\delta^2} \geq 1 \tag{3.26}$$

Ezt követően növeljük meg a 3.24. egyenlet jobb oldalát a következő kifejezéssel:

$$\frac{2M}{\delta^2}(t-s)^2. \tag{3.27}$$

Az így kapott becslés már igaz lesz minden rögzített $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ mellett tetszőleges $s, t \in [0,1]$-re.

$$|h(t) - h(s)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\delta^2}(t-s)^2 \tag{3.28}$$

Legyen s rögzített. Vizsgáljuk a fenti becslést először a $h\,(t) \geq h\,(s)$ esetben, akkor

$$h(t) - h(s) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\delta^2}(t-s)^2.$$

Vegyük mindkét oldal Bernstein-polinomját, továbbá használjuk a 4. Állítást és a Bernstein-polinomok linearitását, ekkor azt kapjuk, hogy

$$B_n(h;s) - B_n(h(s);s) \leq B_n\left(\frac{\varepsilon}{2};s\right) + \frac{2M}{\delta^2}B_n\left((t-s)^2;s\right).$$

Felhasználva, hogy ezek a polinomok előállítják a konstans függvényt (3.10. egyenlet), az alábbi alakhoz jutunk:

$$B_n(h;s) - h(s) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\delta^2}B_n\left((t-s)^2;s\right).$$

Hansolóan biznyítható, hogy ha $h\,(s) \geq h\,(t)$,akkor a

$$h(s) - h\,(t) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\delta^2}(t-s)^2$$

kifejezésen elvégezve a fenti műveleteket, az alábbihoz jutunk:

$$h\,(s) - B_n(h;s) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\delta^2}B_n\left((t-s)^2;s\right).$$

Összegezve a kapott eredményeket, azt mondhatjuk, hogy

$$|B_n(h;s) - h(s)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\delta^2}B_n\left((t-s)^2;s\right). \tag{3.29}$$

Tudjuk, hogy $(t-s)^2 = t^2 - 2ts + s^2$. Felhasználva, a Bernstein-polinomok linearitását kapjuk, hogy

$$B_n\left((t-s)^2, s\right) = B_n\left(t^2, s\right) - 2sB_n\,(t,s) + s^2B_n\,(t,s) \tag{3.30}$$

Tekintve a korábban kapott eredményeket, azaz

$$\begin{aligned}
&B_n\left(t^2, s\right) = s^2 + \frac{1}{n}s(1-s),\\
&-2sB_n\,(t,s) = -2s^2,\\
&s^2B_n\,(t,s) = s^2
\end{aligned}$$

Ezeket összegezve kapjuk, hogy

$$B_n\left((t-s)^2, s\right) = \frac{s(1-s)}{n}. \tag{3.31}$$

Az eredményt behelyettesítve az alábbi összefüggéshez jutunk.

$$|B_n(h;s) - h(s)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M \cdot s(1-s)}{n\delta^2}. \tag{3.32}$$

Könnyen beláthatjuk a két tagú számtani-mértani közép egyenlőtlenség segítségével a következő összefüggést

$$0 \leq x(1-x) \leq \frac{1}{4}. \tag{3.33}$$

Vagyis tovább folytatva a becslést kapjuk, hogy

$$|B_n(h;s) - h(s)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M \cdot s(1-s)}{n\delta^2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{4n\delta^2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{2n\delta^2}. \tag{3.34}$$

Definiáljuk ε_0-át a következő módon:

$$\varepsilon_0 := \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.35}$$

Ha el tudjuk érni, hogy

$$\frac{M}{2n\delta^2} \leq \varepsilon_0, \tag{3.36}$$

akkor megmutattuk, hogy a Bernstein-polinomokkal tetszőlegesen közelíthetünk egy a $[0, 1]$ intervallumon folytonos függvényt. A 3.36. egyenletet átrendezve kapjuk, hogy ha

$$n > \frac{M}{2\delta^2\varepsilon_0}, \tag{3.37}$$

legyen n_0 a feltételnek eleget tevő köszöbindex, akkor teljesül amit szerettünk volna, vagyis:

$$|h(s) - B_{n_0}(h, s)| < \varepsilon. \tag{3.38}$$

Felmerülhet a kérdés, hogy mégis hogyan bizonyítottuk Weierstrass-tételét, hiszen a bizonyítás és a definíciók során végig a $[0, 1]$ intervallumon dolgoztunk. Persze a válasz kézenfekvő, hiszen megfelelő függvénytranszformációkkal, egy tetszőleges $[a, b]$ intervallumon értelmezett folytonos függvényt leképezhetünk a $[0, 1]$ intervallumra.

Ebben a speciális esetben definiáljuk a $p_n(x)$ polinomot, úgy hogy

$$p_n(x) = B_n\left(f, \frac{x-a}{b-a}\right). \tag{3.39}$$

Az így előállított p_n polinom teljesíteni fogja, hogy minden $\varepsilon > 0$-ra és minden $x \in [a, b]$ esetén egy elég nagy N küszöbindextől kezdve

$$|f(x) - p_N(x)| < \varepsilon. \tag{3.40}$$

Utolsó lépésként megoldjuk a [LTS] könyv 11.2, 11.3 és 11.4-es feladatait.

11.2 Közelítsük az $f(x) = |x|$ függvényt $[-1, 1]$-ben a $B_n(f, x)$ Bernstein-polinomokkal $n = 4, 5, 6$-ra.

Legyen $g : [0, 1] \to \mathbb{R}, g(x) = |2x - 1|$. Könnyen ellenőrizhető, hogy g éppen f $[0, 1]$ intervallumra transzformált alakja.

$n = 4$-re

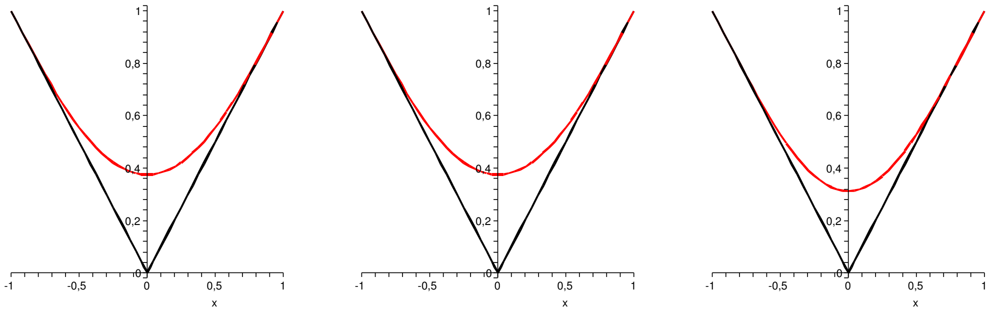
$$\begin{aligned}
g\left(\frac{0}{4}\right) \cdot \binom{4}{0} \cdot x^0 \cdot (1-x)^4 &= & 1 - 4x + 6x^2 - 4x^3 + x^4 \\
g\left(\frac{1}{4}\right) \cdot \binom{4}{1} \cdot x^1 \cdot (1-x)^3 &= & 2x - 6x^2 + 6x^3 - 2x^4 \\
g\left(\frac{2}{4}\right) \cdot \binom{4}{2} \cdot x^2 \cdot (1-x)^2 &= & 0 \\
g\left(\frac{3}{4}\right) \cdot \binom{4}{3} \cdot x^3 \cdot (1-x)^1 &= & 2x^3 - 2x^4 \\
g\left(\frac{4}{4}\right) \cdot \binom{4}{4} \cdot x^4 \cdot (1-x)^0 &= & x^4 \\
\hline
& & -2x^4 + 4x^3 - 2x + 1
\end{aligned}$$

$n = 5$-re

$$\begin{aligned}
g\left(\frac{0}{5}\right) \cdot \binom{5}{0} \cdot x^0 \cdot (1-x)^5 &= & 1 - 5x + 10x^2 - 10x^3 + 5x^4 - x^5 \\
g\left(\frac{1}{5}\right) \cdot \binom{5}{1} \cdot x^1 \cdot (1-x)^4 &= & 3x - 12x^2 + 18x^3 - 12x^4 + 3x^5 \\
g\left(\frac{2}{5}\right) \cdot \binom{5}{2} \cdot x^2 \cdot (1-x)^3 &= & 2x^2 - 6x^3 + 6x^4 - 2x^5 \\
g\left(\frac{3}{5}\right) \cdot \binom{5}{3} \cdot x^3 \cdot (1-x)^2 &= & 2x^3 - 4x^4 + 2x^5 \\
g\left(\frac{4}{5}\right) \cdot \binom{5}{4} \cdot x^4 \cdot (1-x)^1 &= & 3x^4 - 3x^5 \\
g\left(\frac{5}{5}\right) \cdot \binom{5}{5} \cdot x^5 \cdot (1-x)^0 &= & x^5 \\
\hline
& & -2x^4 + 4x^3 - 2x + 1
\end{aligned}$$

$n = 6$-re

$$
\begin{aligned}
g\left(\frac{0}{6}\right) \cdot \binom{6}{0} \cdot x^0 \cdot (1-x)^5 &= & 1 - 6x + 15x^2 - 20x^3 + 15x^4 - 6x^5 + x^6 \\
g\left(\frac{1}{6}\right) \cdot \binom{6}{1} \cdot x^1 \cdot (1-x)^5 &= & 4x - 20x^2 + 40x^3 - 40x^4 + 20x^5 - 4x^6 \\
g\left(\frac{2}{6}\right) \cdot \binom{6}{2} \cdot x^2 \cdot (1-x)^4 &= & 5x^2 - 20x^3 + 30x^4 - 20x^5 + 5x^6 \\
g\left(\frac{3}{6}\right) \cdot \binom{6}{3} \cdot x^3 \cdot (1-x)^3 &= & 0 \\
g\left(\frac{4}{6}\right) \cdot \binom{6}{4} \cdot x^4 \cdot (1-x)^2 &= & 5x^4 - 10x^5 + 5x^6 \\
g\left(\frac{5}{6}\right) \cdot \binom{6}{5} \cdot x^5 \cdot (1-x)^1 &= & 4x^5 - 4x^6 \\
g\left(\frac{6}{6}\right) \cdot \binom{6}{6} \cdot x^6 \cdot (1-x)^0 &= & x^6 \\
\hline
& & 4x^6 - 12x^5 + 10x^4 - 2x + 1
\end{aligned}
$$



3.1. ábra. Az $|x|$ függvény közelítése Bernstein-polinomokkal $n = 4, 5, 6$-ra.

11.3 Adjuk meg az $f(x) = e^{2x}$ függvény Bernstein-polinomjait $[a, b]$-ben.

$$
B_n\left(e^{2x}, \frac{x-a}{b-a}\right) = \sum_{r=1}^{n} e^{2\cdot\frac{r}{n}} \binom{n}{r} \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^r \left(1 - \frac{x-a}{b-a}\right)^{n-r} =
$$

$$
= (b-a)^n \sum_{r=0}^{n} e^{2\cdot\frac{r}{n}} \binom{n}{r} (x-a)^r (b-x)^{n-r}
$$

11.4 Adjuk meg $f(x) = \cos x$ Bernstein-polinomjait $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$-ben.

$$B_n\left(\cos x, \frac{x+\frac{\pi}{2}}{\pi}\right) = \sum_{r=1}^{n} \cos\frac{r}{n}\binom{n}{r}\left(\frac{x+\frac{\pi}{2}}{\pi}\right)^r\left(1-\frac{x+\frac{\pi}{2}}{\pi}\right)^{n-r} =$$

$$=\pi^n \sum_{r=0}^{n} \cos\frac{r}{n}\binom{n}{r}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)^r\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^{n-r}$$

4. fejezet

Csebisev-polinomok

Felhasználva a [2] könyv állítását, legyen $f(x) = x^n$, akkor létezik olyan P^*_{n-1} legfeljebb $n-1$-ed fokú polinom, amely a lehető legjobban közelíti f-et a $[-1,1]$ intervallumon. Vagyis teljesül, hogy

$$|f - P^*_{n-1}|_{[-1,1]} \leq |f - P_{n-1}|_{[-1,1]}. \tag{4.1}$$

Az így elkészített különbségfüggvény $x^n - P^*_{n-1}$, maga is egy polinom, amely n-ed fokú, továbbá főegyütthatója 1. A készítés módjából az is következik, hogy ez a függvény lesz az 1 főegyütthatójú n-ed fokú polinomok közül az amelyik a legkevésbé tér el a $g(x) \equiv 0$ függvénytől a $[-1,1]$ intervallumon. Ezért szokás a 0-*tól legkevésbé eltérő polinom*nak is nevezni.

Bizonyítható, a következő egyenlőség:

$$x^n - P^*_{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x), \quad x \in [-1,1] \tag{4.2}$$

2. Definíció. *Az n-ed fokú Csebisev-polinomot a következő alakban adhatjuk meg, és $T_n(x)$-szel jelöljük:*

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad x \in [-1,1] \tag{4.3}$$

Felmerülhet a kérdés, hogy ebből alakból miként lehet elkészíteni az n-ed fokú polinomot. Ismert a következő azonosság:

$$\cos x = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \tag{4.4}$$

továbbá tudjuk, hogy

$$e^{it} = \cos t + i \sin t. \tag{4.5}$$

Az is könnyen belátható, hogy

$$i \sin t = \sqrt{-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t - 1}. \tag{4.6}$$

Jelöle $\theta = \arccos x$. A 2. definíción alkalmazzuk a 4.4, 4.5 és 4.6 egyenleteket, ekkor azt kaptjuk, hogy:

$$
\begin{aligned}
T_n(x) &= \cos(n\theta) = \\
&= \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2} = \frac{(\cos\theta + i\sin\theta)^n + (\cos\theta - i\sin\theta)^n}{2} = \\
&= \frac{(\cos\theta + \sqrt{\cos^2\theta - 1})^n + (\cos\theta - \sqrt{\cos^2\theta - 1})^n}{2}
\end{aligned}
$$

Végül θ-t behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$
T_n(x) = \left(\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^n + \left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)^n\right). \tag{4.7}
$$

Az így kapott kifejezés tényleg polinom, hiszen a gyökjel eltűnik, ha páros kitevővel rendelkezik, ha páratlan kitevőn szerepel, akkor pedig van egy ellentétes előjelű párja, így kinullázódik.

4.1. Az approximációs tétel bizonyítása Csebisev-polinomokkal

Legyen $T_{2n+1}(x) = \cos\left((2n+1)\arccos(x)\right)$ egy $2n+1$-ed fokú Csebisev-polinom. Könnyen ellenőrizhető, hogy $T_{2n+1}(0) = 0$ azaz a polinom szorzatalakjában szerepel x szorzó tényezőként. Így nyugodtan le is oszthatunk vele. Ezt követően definiáljuk a következő $4n$-ed fokú polinomot.

$$
K_n(x) = \frac{1}{\gamma_n}\left(\frac{\cos\left((2n+1)\arccos(x)\right)}{x}\right)^2, \tag{4.8}
$$

ahol

$$
\gamma_n = \int_{-1}^{1}\left(\frac{\cos\left((2n+1)\arccos(x)\right)}{x}\right)^2 \mathrm{d}x. \tag{4.9}
$$

Ebből nyílván következik, hogy

$$
\int_{-1}^{1} K_n(x)\,\mathrm{d}x = 1. \tag{4.10}
$$

Mivel $K_n(x)$ páros függvény, ezért γ_n-et számíthatjuk a következő módon:

$$
\gamma_n = 2\int_{0}^{1}\left(\frac{\cos\left((2n+1)\arccos(x)\right)}{x}\right)^2 \mathrm{d}x. \tag{4.11}
$$

A továbbiakban arra lesz szükségünk, hogy megmutassuk, hogy $\gamma_n > n$. Ahhoz, hogy ezt megtehessük szükség van a következő egyszerű összefüggésekre:

1. $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$, ha $0 < x < \frac{\pi}{2}$

2. $\sin x < x$, ha $x > 0$

3. $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$, ha $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

Első lépésként használjuk az 1. összefüggést.

$$\gamma_n = 2\int_0^1 \left(\frac{\cos\left((2n+1)\arccos(x)\right)}{x}\right)^2 \mathrm{d}x =$$
$$= 2\int_0^1 \left(\frac{\cos\left((2n+1)\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)\right)}{x}\right)^2 \mathrm{d}x.$$

Az így kapott kifejezés számlálóját tovább alakítjuk a megfelelő trigonometrikus összefüggések segítségével.

$$\cos\left((2n+1)\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)\right) = \cos\left((2n+1)\frac{\pi}{2} - (2n+1)\arcsin x\right) =$$
$$= \cos\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)\cos\left((2n+1)\arcsin x\right) + \sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)\sin\left((2n+1)\arcsin x\right).$$

Egyszerűsítve az előző egyenlőséget azt kapjuk, hogy

$$\cos\left((2n+1)\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)\right) = (-1)^n \sin\left((2n+1)\arcsin x\right) \tag{4.12}$$

Vagyis

$$\gamma_n = 2\int_0^1 \left(\frac{(-1)^n\sin\left((2n+1)\arcsin x\right)}{x}\right)^2 \mathrm{d}x \tag{4.13}$$

A négyzetre emelés miatt a -1-szeres szorzó elhagyható. Használjuk a következő helyettesítést $\arcsin x = \frac{t}{2}$, ekkor az integrálandó kifejezés a következő alakban írható fel:

$$\gamma_n = \int_0^\pi \left(\frac{\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 \cos\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t \tag{4.14}$$

Eddig ekvivalens átalakításokat hajottunk végre, most alulról fogjuk becsülni a fenti kifejezést.

$$\int_0^\pi \left(\frac{\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 \cos\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t > \int_0^{\frac{\pi}{2n+1}} \left(\frac{\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 \cos\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t$$
$$> \int_0^{\frac{\pi}{2n+1}} \frac{\left((2n+1)\frac{t}{2}\frac{2}{\pi}\right)^2}{t^2} 4\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t = 2\frac{(2n+1)^2}{\pi^2}\frac{\pi}{2n+1} = 2\frac{2n+1}{\pi} > n$$

A második becslésnél felhasználtuk a 2. és a 3. összefüggéseket, továbbá azt a tényt, hogy $\gamma_0 = 2$ és már $n = 1$-re is

$$\frac{1}{2} < \cos\frac{t}{2} \leq 1,\ \text{ha}\ t \in \left[0, \frac{\pi}{2n+1}\right]$$

A kapott eredményt felhasználva könnyen megmutatható[1], hogy minden $\delta \in (0,1)$ esetén,

$$\int_\delta^1 K_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_\delta^1 \frac{1}{\gamma_n}\left(\frac{\cos\left((2n+1)\arccos(x)\right)}{x}\right)^2 \mathrm{d}x \le \frac{1}{n}\int_\delta^1 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x < \frac{1}{n\delta} \quad (4.15)$$

Eddigi eredményeinket felhasználva áttérhetünk a Weierstrass-tétel bizonyítására (1. tétel). Legyen g egy a $[-1,1]$ intervallumon folytonos függvény. Ekkor definiáljuk az f $[-2,2]$ intervallumon folytonos függvényt a következőképpen:

$$f(x) = \begin{cases} g(-1) & \text{, ha } \quad x \in [-2,-1] \\ g(x) & \text{, ha } \quad x \in (-1,1) \\ g(1) & \text{, ha } \quad x \in [1,2] \end{cases} \quad (4.16)$$

Ekkor Heine-tétele (2. tétel) alapján tudjuk, hogy f egyenletesen is folytonos a $[-2,2]$ intervallumon. Ekkor minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, $0 < \delta < 1$ hogy ha $x, y \in [-2,2]$ és $|x-y| < \delta$, akkor

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4.17)$$

Definiáljuk a következő legfeljebb $4n$-ed fokú polinomot ($n \in \mathbb{N}$).

$$P_n(x) = \frac{1}{3}\int_{-2}^{2} f(t) K_n\left(\frac{t-x}{3}\right) \mathrm{d}t. \quad (4.18)$$

Alkalmazzuk P_n-en a következő helyettesítést: $\mu = (t-x)/3$.

$$P_n(x) = \int_{\frac{-2-x}{3}}^{\frac{2-x}{3}} f(3\mu + x) K_n(\mu)\,\mathrm{d}\mu \quad (4.19)$$

Felhasználva a 4.10. egyenlőséget kapjuk, hogy

$$\int_{-1}^{1} f(x) K_n(\mu)\,\mathrm{d}\mu = f(x). \quad (4.20)$$

Legyen $x \in [-1,1]$, és tekintsük a következő kifejezést:

$$\left|f(x) - P_n(x)\right|,$$

a 4.20 és a 4.19 egyenleteket felhasználva, az előző kifejezés így írható fel:

$$\left|\int_{-1}^{1} f(x)\, K_n(\mu)\,\mathrm{d}\mu - \int_{\frac{-2-x}{3}}^{\frac{2-x}{3}} f(3\mu + x)\, K_n(\mu)\,\mathrm{d}\mu\right|. \quad (4.21)$$

Válasszuk úgy δ-t, hogy teljesítse a korábbi feltételt, vagyis

$$\text{ha } |x-y| < \delta \text{, akkor } |f(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (4.22)$$

illetve teljesüljön a következő két feltétel is $\delta < 2 - x$, illetve $-\delta > -2 - x$.

Felhasználva a [LTS] 12.39-es és 12.40-es tételeit, megfogalmazhatjuk a következő állítást.

[1] A [2] lépéseit követve

5. Állítás. *Ha $h(x)$ integrálható, egy $[a, b]$ intervallumon, amelyet felosztunk rész-intervallumokra az alábbi módon*

$$a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b,\ n \in \mathbb{N},$$

akkor teljesül, hogy

$$\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} h(x)\,\mathrm{d}x. \tag{4.23}$$

Ezen állítás felhasználásával a 4.21 egyenlet így írható fel:

$$\begin{aligned}|f(x) - P_n(x)| = \Bigg| &\int_{-1}^{-\frac{\delta}{3}} f(x)\,K_n(\mu)\,\mathrm{d}\mu + \int_{-\frac{\delta}{3}}^{\frac{\delta}{3}} f(x)\,K_n(\mu)\,\mathrm{d}\mu + \\ &+ \int_{\frac{\delta}{3}}^{1} f(x)\,K_n(\mu)\,\mathrm{d}\mu - \int_{\frac{-2-x}{3}}^{-\frac{\delta}{3}} f(3\mu + x)\,K_n(\mu)\,\mathrm{d}\mu - \\ &- \int_{-\frac{\delta}{3}}^{\frac{\delta}{3}} f(3\mu + x)\,K_n(\mu)\,\mathrm{d}\mu - \int_{\frac{\delta}{3}}^{\frac{2-x}{3}} f(3\mu + x)\,K_n(\mu)\,\mathrm{d}\mu\Bigg|.\end{aligned}$$

Ezt rendezve, illetve összevonva a tagokat kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}|f(x) - P_n(x)| = \Bigg| &\left(\int_{-1}^{-\frac{\delta}{3}} + \int_{\frac{\delta}{3}}^{1}\right) f(x)\,K_n(\mu)\,\mathrm{d}\mu + \\ &+ \int_{-\frac{\delta}{3}}^{\frac{\delta}{3}} f(x)\,K_n(\mu) - f(3\mu + x)\,K_n(\mu)\,\mathrm{d}\mu + \\ &+ \left(\int_{\frac{-2-x}{3}}^{-\frac{\delta}{3}} + \int_{\frac{\delta}{3}}^{\frac{2-x}{3}}\right) - f(3\mu + x)\,K_n(\mu)\,\mathrm{d}\mu\Bigg|\end{aligned}$$

Ha a tagoknak egyenként veszem az abszolút értékét, akkor egy felső becslést kapok $|f(x) - P_n(x)|$-re, vagyis

$$\begin{aligned}|f(x) - P_n(x)| \le &\left|\left(\int_{-1}^{-\frac{\delta}{3}} + \int_{\frac{\delta}{3}}^{1}\right) f(x)\,K_n(\mu)\,\mathrm{d}\mu\right| + \\ &+ \left|\int_{-\frac{\delta}{3}}^{\frac{\delta}{3}} f(x)\,K_n(\mu) - f(3\mu + x)\,K_n(\mu)\,\mathrm{d}\mu\right| + \\ &+ \left|\left(\int_{\frac{-2-x}{3}}^{-\frac{\delta}{3}} + \int_{\frac{\delta}{3}}^{\frac{2-x}{3}}\right) - f(3\mu + x)\,K_n(\mu)\,\mathrm{d}\mu\right|\end{aligned}$$

Felhasználva, hogy $K_n(\mu)$ páros függvény, illetve a [LTS] 12.38-as tételének egyik állítását, miszerint

$$\left|\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |g(x)|\,\mathrm{d}x,$$

tovább folytathatjuk a becslést. Így kapjuk a [2]-ben is szereplő alakot:

$$
\begin{aligned}
|f(x)-P_n(x)| < & \left(\int_{-1}^{-\frac{\delta}{3}} + \int_{\frac{\delta}{3}}^{1}\right) |f(x)| K_n(\mu)\,\mathrm{d}\mu + \\
& + \int_{-\frac{\delta}{3}}^{\frac{\delta}{3}} |f(x)-f(3\mu+x)| K_n(\mu)\,\mathrm{d}\mu + \\
& + \left(\int_{\frac{-2-x}{3}}^{-\frac{\delta}{3}} + \int_{\frac{\delta}{3}}^{\frac{2-x}{3}}\right) |f(3\mu+x)| K_n(\mu)\,\mathrm{d}\mu
\end{aligned}
$$

Heine-tétele alapján a jobboldali összeg második tagját felülről becsülhetjük az

$$\frac{\varepsilon}{2}\int_{-\frac{\delta}{3}}^{\frac{\delta}{3}} K_n(\mu)\,\mathrm{d}\mu \tag{4.24}$$

kifejezéssel. Ismét használva $K_n(x)$ páritását, illetve azt, hogy minden $x \in [-1,1]$ esetén nagyobb, mint nulla az is teljesül, hogy

$$\frac{\varepsilon}{2}\int_{-\frac{\delta}{3}}^{\frac{\delta}{3}} K_n(\mu)\,\mathrm{d}\mu \leq \frac{\varepsilon}{2}\int_{-1}^{1} K_n(\mu)\,\mathrm{d}\mu.$$

A maradék két tag becslésénél is felhasználjuk, hogy $K_n(\mu)$ páros függvény. Jelölje M az $|f|$ függvény maximumát a $[-2,2]$ intervallumon. Így fenti összeg első tagja felülről becsülhető a

$$2M\int_{\frac{\delta}{3}}^{1} K_n(\mu)\,\mathrm{d}\mu \tag{4.25}$$

kifejezéssel.

Az utolsó tag becslésénél azt használjuk még fel, hogy $x \in [-1,1]$. Hiszen ekkor

$$\max\left|\frac{2-x}{3}\right| = \max\left|\frac{-2-x}{3}\right| = 1.$$

Azaz a harmadik tagra is használható a

$$2M\int_{\frac{\delta}{3}}^{1} K_n(\mu)\,\mathrm{d}\mu \tag{4.26}$$

becslés.

Összegezve a eddigi eredményeket azt kaptuk, hogy

$$|f(x)-P_n(x)| \leq \underbrace{\frac{\varepsilon}{2}\int_{-1}^{1} K_n(\mu)\,\mathrm{d}\mu}_{=\frac{\varepsilon}{2}} + 2\cdot \underbrace{\left(2M\int_{\frac{\delta}{3}}^{1} K_n(\mu)\,\mathrm{d}\mu\right)}_{\leq 2M\frac{3}{n\delta}} \tag{4.27}$$

Az első tagnál a 4.10. egyenletet használtuk fel, míg a második tagnál a 4.15. egyenlőtlenséget, ennek eredményeként azt kaptuk, hogy

$$|f(x)-P_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + 4M\frac{3}{n\delta}, \tag{4.28}$$

Ha n elég nagy és $x \in [-1, 1]$, akkor teljesülni fog, hogy

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \varepsilon. \tag{4.29}$$

Ezzel bizonyítottuk az állítást a $[-1, 1]$ intervallum esetén, természetesen a megfelelő átalakításokat elvégezve az állítás igaz lesz tetszőleges $[a, b]$ intervallumra is.

Irodalomjegyzék

[LTS] Laczkovich Miklós - T. Sós Vera: *Analízis I-II.*
Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2007.

[1] Theodore J. Rivlin: *An Introdution to the Approximation of Functions.*
Blaisdell Publishing Company, 1969

[2] Vladislav K. Dzyadyk - Igor A. Shevchuk: *Theory of Uniform Approximation of Functions by Polynomials.*
Walter de Gruyter, Berlin, 2008

[3] Phillips, G.M.: *Interpolation and Approximation by Polynomials*
Springer, Hardcover, 2003