KONVEX LEMEZEK ELRENDEZÉSEI A SÍKON

SZAKDOLGOZAT

Készítette: Reck Orsolya Márta

Matematika BSc - tanári szakirány

Témavezető: dr. Naszódi Márton, adjunktus
ELTE TTK, Geometriai Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Budapest, 2012

Tartalomjegyzék

1. Bevezető

Szakdolgozatom témájának megválasztásában elsősorban az motivált, hogy olyan témát találjak, amely tanulmányaim során nem nagyon került előtérbe. Fontosnak tartottam, hogy olyan anyagrészt mutassak be a matematika világából, amelyből kevés a magyar nyelvű szakirodalom.

Úgy gondolom, aki a matematika világában kíván elmélyedni, annak szükségszerű és fontos, hogy kipróbálja magát a kutatómunkában, problémák felderítésében, megoldásában. Ez a későbbi tanári pályán is fontos szerepet kaphat, hiszen az értelmes, érdeklődő diákok, olyan érdekes kérdésekkel, problémákkal fordulhatnak tanárukhoz, amelyet nem tartalmaz a tananyag. Ma az óriási sebességgel terjedő információk, ismeretanyagok világában fontos, hogy egy tanár kis utánajárással tudjon kielégítő választ és megoldást nyújtani érdeklődő diákjai számára.

Amikor felkerestem dr. Naszódi Márton adjunktust, aki a témavezetőm lett, egy olyan témakört vetett fel, amely felkeltette az érdeklődésemet. Így mélyedtem bele a rácsgeometria világába, s választottam szakdolgozatom anyagának.

Forrásom a Pach János és Pankaj K. Agarwal *Combinatorial geometry* című könyve volt. A könyv három nagy fejezetét olvastam el, amelyből kiválogattam a számomra legérdekesebbnek tűnő részeket.

Dolgozatomban megpróbálom körüljárni és bemutatni a témakör legfontosabb definícióit és tételeit. A könnyebb érthetőség kedvéért ábrákat készítettem, melyek jól illusztrálják a bizonyítások nehezebben értelmezhető, látható részeit.

A következő két fejezetben olyan definíciókat, állításokat mondok ki, melyek ismerete szükséges lesz a dolgozat további részeiben. A negyedik fejezet első része a Minkowski-összeghez kapcsolódó definíciókat, állításokat és azok bizonyítását tartalmazza. A fejezet további részeiben bebizonyítom Minkowski tételét az elég nagy térfogatú konvex testek origón kívüli rácspont tartalmazásáról, majd Blichfeldt Jordán mérhető halmazok térfogatára vonatkozó tételét. A fejezet végén megoldok néhány a témakörhöz kapcsolódó feladatot.
Ezt a rácselrendezés sűrűségének tárgyalása követi, ahol Fáry tételének bizonyítását ismertetem.
A hatodik fejezetben Fejes Tóth László egybevágó konvex lemezek pakolásáról, fedéséről szóló tételét ismertetem és bizonyítom. A pakolásról szóló tétel röviden azt mondja ki, ha van egy konvex lemezem, akkor meg tudom adni a konvex lemeznek egy sűrű pakolását a síkon. A fedésről szóló tétel pedig kimondja, ha van egy konvex lemezem, akkor meg tudom adni a konvex lemezzel a síknak egy kis sűrűségű fedését.

2. Konvex geometriai bevezető

Ez a fejezet a konvex geometria néhány, a dolgozatomhoz fontos definícióját tartalmazza, amelyeket a későbbiek során felhasználok.
Elsőször néhány jelölést vezetek be.

Térfogatot jelölje: Vol

Területet jelölje: $Area$

Az $\underline{a} \in \mathbb{R}^d$ hosszát jelölje $|\underline{a}| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + ... + {a_d}^2}$.

2.1. Definíció. *Egy ponthalmaz $\mathbb{R}^d$-ben* konvex, *ha bármely két pontjának összekötő szakaszát tartalmazza.*

2.2. Definíció. *A H halmaz korlátos $\mathbb{R}^d$-ben, ha van egy olyan $r \in \mathbb{R}$, hogy tetszőleges $\underline{a} \in H$ esetén $|\underline{a}| < r$.*

2.3. Definíció. *A $H = \left\{\underline{x} \in \mathbb{R}^d : \underline{n} \cdot \underline{x} = c\right\}$ halmazt, ahol $\underline{n} \in \mathbb{R}^d$ és $\underline{n} \neq \underline{0}$,* hipersíknak *nevezzük.*

2.4. Definíció. *A $\overline{H^+} = \left\{\underline{x} \in \mathbb{R}^d : \underline{n} \cdot \underline{x} \geq c\right\}$ halmazt és a $\overline{H^-} = \left\{\underline{x} \in \mathbb{R}^d : \underline{n} \cdot \underline{x} \leq c\right\}$ halmazt* zárt féltérnek *nevezzük, ahol $\mathbb{R}^d \ni \underline{n} \neq \underline{0}$ normálvektor és $c \in \mathbb{R}$.*

2.5. Definíció. *A $H^+ = \left\{\underline{x} \in \mathbb{R}^d : \underline{n} \cdot \underline{x} > c\right\}$ halmazt és a $H^- = \left\{\underline{x} \in \mathbb{R}^d : \underline{n} \cdot \underline{x} < c\right\}$ halmazt* nyílt féltérnek *nevezzük, ahol $\mathbb{R}^d \ni \underline{n} \neq \underline{0}$ normálvektor és $c \in \mathbb{R}$.*

2.6. Definíció. *Legyenek $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$ konvex halmazok. A H hipersík* elválasztja *az A-t a B-től, ha $A \subset \overline{H^+}$ és $B \subset \overline{H^-}$ vagy fordítva.*
A H hipersík szigorúan elválasztja *az A-t a B-től, ha $A \subset H^+$ és $B \subset H^-$ vagy fordítva.*

2.7. Definíció. *Legyen* $A \subset \mathbb{R}^d$ *konvex halmaz,* $H \subset \mathbb{R}^d$ *hipersík. A* H *az* A támaszhipersíkja, *ha* $H \cap A \neq \emptyset$ *és* $A \subset \overline{H^+}$ *vagy* $A \subset \overline{H^-}$.

2.8. Definíció. *Egy* $A \subset \mathbb{R}^d$ *halmaz* belseje*:* $intA = \{\underline{a} \in A : \exists r > 0 : B(\underline{a}, r) \subset A\}$.
A határa*:* $bdA = \{\underline{a} \in A : \forall r > 0 : B(\underline{a}, r) \cap A \neq \emptyset,\ B(\underline{a}, r) \backslash A \neq \emptyset\}$.
Az A *halmaz* zárt, *ha* $A \supseteq bdA$, nyílt, *ha* $A = intA$.

2.9. Definíció. *Egy* $K \subseteq \mathbb{R}^d$ *halmaz* kompakt, *ha korlátos és zárt.*

A következő két állítás a konvex geometria alapvető eszközei, melyeket használok, de nem igazolok.

2.10. Állítás. *Legyenek* K *és* L *konvex halmazok* $\mathbb{R}^d$*-ben. Ekkor, ha* $intK \cap intL = \emptyset$ *teljesül, akkor létezik hipersík, amely a két halmazt elválasztja.*

2.11. Állítás. *Legyen* C *konvex halmaz* $\mathbb{R}^d$*-ben és* $p \in bdC$*, ekkor* C*-nek létezik* p*-ben támaszhipersíkja.*

2.12. Definíció. *A* C konvex halmaz sima, *ha minden határpontjában pontosan egy támaszhipersík van.*

2.13. Definíció. *Egy* $K \subseteq \mathbb{R}^d$ *halmaz* konvex test, *ha konvex, kompakt, és belseje,* $intK$ *nem üres.*

2.14. Definíció. *Legyen* K *és* L *két konvex test.* K *és* L érintik egymást, *ha* $intK \cap intL = \emptyset$*, de* $bdK \cap bdL \neq \emptyset$ *teljesül.*

2.15. Definíció. *Egy* $S \subseteq R^d$ *halmaz* konvex burkán *a következő halmazt értjük* $convS = \bigcap \big\{K \subset \mathbb{R}^d : K \supseteq S, K konvex\big\}$.

3. Rácsgeometriai bevezető

Ez a fejezet a rácsgeometria alapvető definícióit tartalmazza, melyek felhasználásra kerülnek a későbbiekben. A fejezet végén az alap paralelepipedonok térfogatához kapcsolódóan mondok ki egy tételt és bizonyítom.

3.1. Definíció. *Adott d lineárisan független vektor* $\underline{u_1}, ..., \underline{u_d} \in \mathbb{R}^d$. *Az általuk* generált rács *a* $\Lambda\left(\underline{u_1}, ..., \underline{u_d}\right) = \left\{m_1\underline{u_1} + ... + m_d\underline{u_d} | m_1, ...m_d \in \mathbb{Z}\right\}$ *halmaz.*

3.2. Definíció. *Legyen adott egy* Λ *rács és* $\underline{u_1}, ..., \underline{u_d} \in \Lambda$. *Ekkor* $\left\{\underline{u_1}, ..., \underline{u_d}\right\}$ *a* Λ *egy* bázisa, *ha* $\Lambda = \left\{m_1\underline{u_1} + ... + m_d\underline{u_d} | m_1, ...m_d \in \mathbb{Z}\right\}$.

3.3. Definíció. *A* sztenderd egységrács $\mathbb{R}^d$*-ben:* $\mathbb{Z}^d = \{\underline{v} : v_i \in \mathbb{Z}; \forall i = 1, ..., d\}$.

3.4. Definíció. *Véges sok pont konvex burkát* $\mathbb{R}^d$*-ben* konvex politópnak *nevezzük.*

3.5. Definíció. *Véges sok rácspont konvex burkát* konvex rácspolitópnak *nevezzük.*

3.6. Definíció. *A* $P = conv\left\{\underline{v_1}, ..., \underline{v_k}\right\}$ *konvex politóp* csúcsai *azon* $\underline{v_i}$ *pontok, amelyekre igaz, hogy* $P \neq conv\left(\left\{\underline{v_1}, ..., \underline{v_k}\right\} \setminus \left\{\underline{v_i}\right\}\right)$.

3.7. Definíció. *Az olyan rácspolitópot, amely nem tartalmaz a csúcsain kívül rácspontot* elemi rácspolitópnak *nevezzük.*

3.8. Definíció. *Egy d-dimenziós rácsban a bázisvektorok által kifeszített paralelepipedont a rács egy* alap paralelepipedonjának *nevezzük.*

3.9. Tétel. *Egy rácsban mindegyik alap paralelepipedonnak ugyanakkora a térfogata.*

Legyen $\underline{v_1}, ..., \underline{v_n}$ a Λ egy bázisa. Ekkor $det\Lambda$ jelölje az alap paralelepipedon térfogatát.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $\underline{w_1}, ..., \underline{w_d}$ a Λ egy másik bázisa. Persze $\underline{v_1}, ..., \underline{v_d}$ is és $\underline{w_1}, ..., \underline{w_d}$ is $\mathbb{R}^d$ bázisa. Azaz létezik $P \in \mathbb{R}^{dxd}$ mátrix, a bázis áttérés mátrixa, amelyre

$$\begin{aligned}
\underline{w_1} &= p_{11}\underline{v_1} + ... + p_{1d}\underline{v_d} \\
\underline{w_2} &= p_{21}\underline{v_1} + ... + p_{2d}\underline{v_d} \\
&. \\
&. \\
&. \\
\underline{w_d} &= p_{d1}\underline{v_1} + ... + p_{dd}\underline{v_d}
\end{aligned}$$

Mivel w_i rácspont minden i-re és $\underline{v_1}, ..., \underline{v_d}$ a rács egy bázisa, ebből következik, hogy $p_{ij} \in \mathbb{Z}$ minden ij-re. Hasonlóan

$$\begin{aligned}
\underline{v_1} &= q_{11}\underline{w_1} + ... + q_{1d}\underline{w_d} \\
\underline{v_2} &= q_{21}\underline{w_1} + ... + q_{2d}\underline{w_d} \\
&. \\
&. \\
&. \\
\underline{v_d} &= q_{d1}\underline{w_1} + ... + q_{d}\underline{w_d}
\end{aligned}$$

megfelelő q_{ij}-kre, ahol minden ij-re $q_{ij} \in \mathbb{Z}$. Legyen $P = (p_{ij})$ és így $Q = (q_{ij})$ a két mátrix. Ekkor $Q = P^{-1}$ és $detP = \frac{1}{detQ}$. Mivel $detP$ és $detQ$ is egész, ezért $detP = \pm 1$. Másrészt $det(\underline{w_1}, ..., \underline{w_d}) = detP \cdot det(\underline{v_1}, ..., \underline{v_d})$. □

3.10. Definíció. *Ha* $det\Lambda = 1$, *akkor* Λ*-t* egységrácsnak *nevezzük.*

4. Minkowski-tétel

A fejezetben definiálom a halmazok Minkowsi-összegét, majd kimondom és bizonyítom Minkowski tételét az elég nagy térfogatú konvex testek origón kívüli rácspont tartalmazásáról . Ezt követően kimondom és bizonyítom a szorosan hozzá köthető Blichfeld tételt.

4.1. Halmazok Minkowski-összege

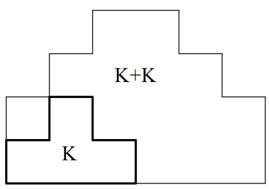
4.1. Definíció. *Az* $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$ *halmazok* Minkowszki összege*:* $A + B = \{\underline{a} + \underline{b} : \underline{a} \in A, \underline{b} \in B\}$*.*

4.2. Definíció. *Az* $A \subseteq \mathbb{R}^d$ *halmaz* skalárszorosa*:* $\lambda A = \{\lambda\underline{a} : \underline{a} \in A\}$*, ahol* $\lambda \in \mathbb{R}$*.*

4.3. Állítás. *Legyen* $K \subseteq \mathbb{R}^d$*, konvex halmaz. Ekkor* $K + K = 2K$*.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $\underline{p} \in 2K$. Ekkor $\underline{p} = 2\underline{x}$, ahol $\underline{x} \in K$. Tudjuk, hogy $\underline{p} = \underline{x} + \underline{x}$, ebből következik, hogy $\underline{p} \in K + K$.
Tegyük fel, hogy $\underline{p} \in K + K$. Azaz $\underline{p} = \underline{x} + \underline{y}$, ahol $\underline{x}, \underline{y} \in K$. Legyen $\underline{z} = \frac{\underline{x}+\underline{y}}{2}$. Mivel K konvex, ezért $\underline{z} \in K$. Persze fenn áll, $\underline{p} = 2\underline{z}$, így $\underline{p} \in 2K$. □

4.4. Megjegyzés. *Ha a feltételből elhagyjuk, hogy* K *konvex, akkor már nem igaz az állítás.*
Példa:



Az ábrán látható, hogy a K alakzat nem konvex és $K + K \neq 2K$. Az viszont teljesül, hogy $K + K$ tartalmazza $2K$-t.

4.5. Állítás. *Ha A és B konvex halmazok $\mathbb{R}^d$-ben, akkor $A + B$ is konvex.*

Bizonyítás: Legyen $\underline{x} = \underline{a_1} + \underline{b_1} \in A + B$ és $\underline{y} = \underline{a_2} + \underline{b_2} \in A + B$, $\lambda \in [1, 0]$. Ekkor $\lambda\underline{x} + (1-\lambda)\underline{y} = \lambda\underline{a_1} + \lambda\underline{b_1} + (1-\lambda)\underline{a_2} + (1-\lambda)\underline{b_2} = \lambda\underline{a_1} + (1-\lambda)\underline{a_2} + (\lambda\underline{b_1} + (1-\lambda)\underline{b_2}) \in A+B$, mert $\lambda\underline{a_1} + (1-\lambda)\underline{a_2} \in A$ és $\lambda\underline{b_1} + (1-\lambda)\underline{b_2} \in B$, ugyanis A és B konvexek.

$\square$

4.6. Állítás. *Legyen C egy konvex test és $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^d$. Tegyük fel, hogy $C + \underline{u}$ és $C + \underline{v}$ érintik egymást. Ekkor $\frac{C-C}{2} + \underline{u}$ és $\frac{C-C}{2} + \underline{v}$ is érintik egymást.*

Bizonyítás: Legyen $\underline{p} \in (C + \underline{u}) \cap (C + \underline{v})$, ekkor $\underline{p} - \underline{u} \in C$ és $\underline{p} - \underline{v} \in C$, ekkor $(\underline{p} - \underline{u}) - (\underline{p} - \underline{v}) \in C - C$, ezért $\underline{v} - \underline{u} \in C - C$ és ebből következik, hogy $\frac{\underline{v}-\underline{u}}{2} \in \frac{C-C}{2}$, és persze $\frac{\underline{v}-\underline{u}}{2} \in C - C$. Így $\underline{u} + \frac{\underline{v}-\underline{u}}{2} = \underline{v} + \frac{\underline{u}-\underline{v}}{2} = \frac{\underline{v}+\underline{u}}{2} \in \left(\frac{C-C}{2} + \underline{u}\right) \cap \left(\frac{C-C}{2} + \underline{v}\right)$.
Mivel $C + \underline{u}$ és $C + \underline{v}$ érintik egymást, ezért hipersíkkal elválaszthatóak, így létezik $\underline{n} \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ és $\alpha \in \mathbb{R}$, melyekre $\underline{n}(\underline{c} + \underline{u}) \geq \alpha$ és $\underline{n}(\underline{c} + \underline{v}) \leq \alpha$ minden $\underline{c} \in C$ pontra.
Legyen $\underline{r} \in \frac{C-C}{2} + \underline{u}$, ekkor $\underline{r} = \frac{\underline{c_1}-\underline{c_2}}{2} + \underline{u}$, valamely $\underline{c_1}, \underline{c_2} \in C$ pontokra.

Belátjuk, hogy

$\underline{n} \cdot \underline{r} = \underline{n} \cdot \underline{u} + \underline{n} \cdot \frac{\underline{c_1}-\underline{c_2}}{2} \geq \underline{n} \cdot \frac{\underline{u}+\underline{v}}{2}$.

Ehhez elegendő, hogy

$\underline{n} \cdot \frac{\underline{u}+\underline{c_1}-\underline{c_2}}{2} \geq \underline{n} \cdot \frac{\underline{v}}{2}$, azaz

$\underline{n} \cdot (\underline{u} + \underline{c_1}) \geq \underline{n} \cdot (\underline{v} + \underline{c_2})$, márpedig

$\underline{n} \cdot (\underline{u} + \underline{c_1}) \geq \alpha$ és $\underline{n} \cdot (\underline{v} + \underline{c_2}) \leq \alpha$.

Most legyen $\underline{q} \in \frac{C-C}{2} + \underline{v}$, ekkor $\underline{q} = \frac{\underline{c_1}-\underline{c_2}}{2} + \underline{v}$, valamely $\underline{c_1}, \underline{c_2} \in C$ pontokra.

Belátjuk, hogy

$\underline{n} \cdot \underline{q} = \underline{n} \cdot \underline{v} + \underline{n} \cdot \frac{\underline{c_1} - \underline{c_2}}{2} \leq \underline{n} \cdot \frac{\underline{u}+\underline{v}}{2}$.

Ehhez elegendő, hogy

$\underline{n} \cdot \frac{\underline{v}+\underline{c_1}-\underline{c_2}}{2} \leq \underline{n} \cdot \frac{\underline{u}}{2}$, azaz

$\underline{n} \cdot (\underline{v} + \underline{c_1}) \leq \underline{n} \cdot (\underline{u} + \underline{c_2})$, márpedig

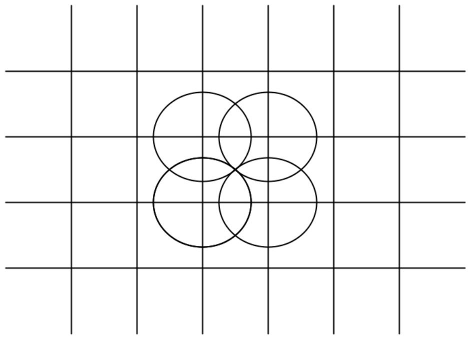
$\underline{n} \cdot (\underline{v} + \underline{c_1}) \leq \alpha$ és $\underline{n} \cdot (\underline{u} + \underline{c_2}) \geq \alpha$.

Így látjuk, hogy $\frac{C-C}{2} + \underline{u}$ a $H = \left\{\underline{x} \in \mathbb{R}^d : \underline{n} \cdot \underline{x} = c\right\}$ hipersík által határolt egyik féltérben van, $\frac{C-C}{2} + \underline{v}$ a másikban. $\square$

4.2. Minkowski tétele

4.7. Tétel. *Legyen $C \subseteq \mathbb{R}^d$ egy origóra középpontosan szimmetrikus konvex test, és Λ egy egységrács. Ha $VolC > 2^d$, akkor C tartalmaz legalább egy rácspontot, amely különbözik 0-tól.*

Bizonyítás: Legyen $\underline{u}, \underline{v} \in \Lambda$, $\underline{u} \neq \underline{v}$. Tekintsük az $\frac{1}{2}C + \underline{u} = \left\{\frac{1}{2}\underline{c} + \underline{u} \mid \underline{c} \in C\right\}$ és az $\frac{1}{2}C + \underline{v} = \left\{\frac{1}{2}\underline{c} + \underline{v} \mid \underline{c} \in C\right\}$ alakú halmazokat. Ha a kettőnek van közös pontja, p, akkor $p - \underline{u}$, $p - \underline{v} \in \frac{1}{2}$C, így $\underline{0} \neq \underline{v} - \underline{u} = (\underline{v} - p) + (p - \underline{u}) \in \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}C = C$ és $\underline{v} - \underline{u} \in \Lambda$. Tehát, elegendő találni két rácsvektort, $\underline{u}$-t, $\underline{v}$-t, melyekre $(\frac{1}{2}C + \underline{u}) \cap (\frac{1}{2}C + \underline{v}) \neq \emptyset$.



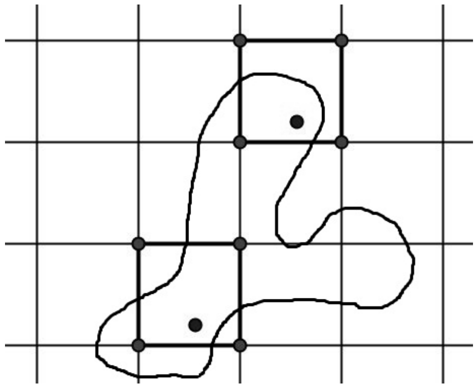
Legyen $M = \frac{1}{2}C$. Ekkor $VolM > 1$. Legyen K egy alap paralelepipedon. Mivel Λ egységrács, ezért $VolK = 1$. Tekintsük az $(M + \underline{u}) \cap K$ és $(M + \underline{v}) \cap K$ halmazokat, ahol $\underline{u}, \underline{v} \in \Lambda$. Vegyük az M eltoltjait egy K alap paralelepipedonba. Látható, hogy K által M eltoltjaiból kimetszett darabok kiadják a teljes M-et, de tudjuk, hogy $VolM > 1$ és $VolK = 1$, ezért az eltoltak metszeni fogják egymást, tehát találhatók $\underline{u}, \underline{v} \in \Lambda, \underline{u} \neq \underline{v}$ rácsvektorok, melyekre $(M + \underline{u}) \cap K$-ban is benne van egy $p \in \mathbb{R}^d$ pont és $(M + \underline{v}) \cap K$-ban is, amiből következik, hogy $(M + \underline{u}) \cap (M + \underline{v}) \neq \emptyset$. □

Megjegyezzük, hogy ha C zárt, akkor a tételben a térfogatra vonatkozó feltétel gyengíthető, elegendő $VolC \geq 2^d$.

4.3. Blichfeldt tétele

4.8. Tétel. *Adott egy Λ egységrács $\mathbb{R}^d$-ben, egy $k \in \mathbb{N}$ és $S \subseteq \mathbb{R}^d$, egy Jordan mérhető halmaz, amelyre $VolS > k$. Ekkor léteznek $z_0, z_1, ..., z_k \in S$ pontok, melyekre $z_i - z_j \in \Lambda$, minden $0 \leq i \leq j \leq k$ esetén.*

Bizonyítás: Legyen K a Λ egy alap paralelepipedonja. Tekintsük az $(S + \underline{u}) \cap K$ $(\underline{u} \in \Lambda)$ halmazokat. Tudjuk, hogy $VolK = 1$ és $VolS > k$. Ebből következik, hogy létezik olyan $\underline{p} \in K$, amelyre $\underline{p} \in (S + \underline{u_0}) \cap (S + \underline{u_1}) \cap ... \cap (S + \underline{u_k})$. Ezért $\underline{p} - \underline{u_0} = z_0, \underline{p} - \underline{u_1} = z_1, ..., \underline{p} - \underline{u_k} = z_k \in S$, és $z_i - z_j \in \Lambda$.



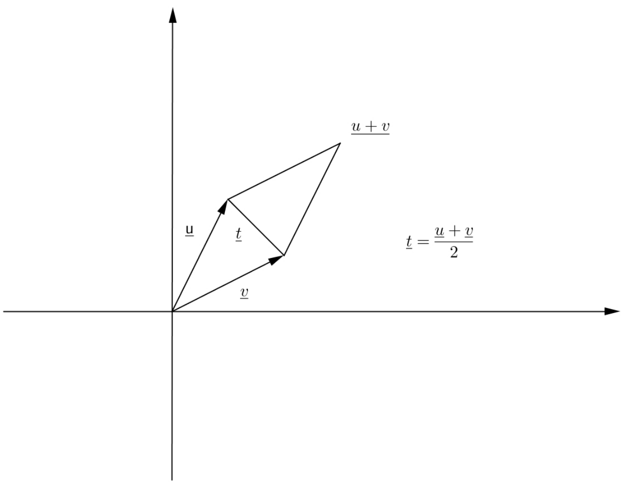
∎

4.4. Feladatok

Emlékeztetek, hogy egy *rácsháromszög elemi*, ha a csúcsain kívül nem tartalmaz rácspontot. Lásd a 3.7. definíciót.

4.9. Állítás. *Legyen* $\underline{u}, \underline{v} \in \Lambda$. *Ekkor az* $\underline{u}, \underline{v}, \underline{O}$ *háromszög elemi, akkor és csak akkor, ha* $\{\underline{u}, \underline{v}\}$ *a* Λ *rács egy bázisa.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $\{\underline{u}, \underline{v}\}$ a Λ egy bázisa. Tekintsük a $conv\,\{\underline{O}, \underline{u}, \underline{v}\}$ háromszöget, legyen $\underline{p}$ a háromszögnek egy a csúcsoktól különböző pontja. Ekkor létezik $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$, hogy $\lambda_1\underline{O} + \lambda_2\underline{u} + \lambda_3\underline{v} = \underline{p}$, ahol $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$. Így $0 < \lambda_2, \lambda_3 < 1$, ebből következik, hogy $\underline{p}$ nem lehet rácspont. Tehát $\underline{O}, \underline{u}, \underline{v}$ háromszög elemi.



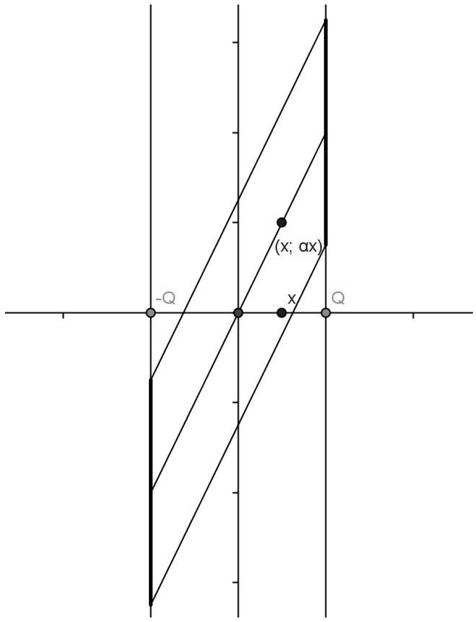
Tegyük fel, hogy $\underline{O}, \underline{u}, \underline{v}$ egy elemi háromszög. Be akarjuk látni, hogy $\{\underline{u}, \underline{v}\}$ egy bázisa a $\mathbb{Z}^2$-nek. Legyen $\underline{t} = \frac{u+v}{2}$. Ekkor $\underline{O}$-nak t-re vett középpontos tükörképe: $\underline{u} + \underline{v}$. Az $\underline{O}, \underline{u}, \underline{u+v}, \underline{v}$ P paralelogramma is elemi, mert a rács középpontosan szimmetrikus $\underline{t}$-re. A háromszög csúcsain kívül nem tartalmaz rácspontot, így a paralelogramma sem tartalmaz az $\underline{O}, \underline{u}, \underline{v}, \underline{u+v}$ csúcsoktól különböző rácspontot. Ebből következik, hogy $\{m \cdot \underline{u} + n \cdot \underline{v} + P : m, n \in \mathbb{N}\}$ a sík egy csempézését adja, ahol minden rácspont csúcs, amiből következik, hogy $\{\underline{u}, \underline{v}\}$ a Λ egy bázisa. □

A fejezet ezen részében az [1] könyv 9. oldalának 1.1-es és 1.2-es feladatait oldom meg.

4.10. Feladat. *Legyen $\Lambda = \Lambda(\underline{u_1}, ..., \underline{u_d})$ és legyen P olyan nem elfajuló paralelepipedon $\mathbb{R}^d$-ben, amelynek összes csúcsa rácspont. Tegyük fel, hogy P nem tartalmaz a csúcsaitól különböző rácspontokat. Legyen O az egyik csúcsa és $\underline{v_1}, ..., \underline{v_d}$ az O csúcsból induló élek vektorai. Ekkor $\left\{\underline{v_1}, ..., \underline{v_d}\right\}$ a Λ rács egy bázisa.*

Megoldás: A $\{P + \underline{u} : \underline{u} \in \Lambda\}$ egy csempézése lesz a térnek. Csak a csúcsok rácspontok, mivel ha a $P + \underline{u}$ tartalmazna egy csúcsaitól különböző rácspontot, $\underline{w}$, akkor $\underline{p} - \underline{w} \in P$ és nem csúcsa P-nek.

4.11. Feladat. *Mutassuk meg, hogy minden α irracionális számra és $K > 0$-ra van olyan $m, n \in \mathbb{Z}$ számpár, amelyre $|\alpha - \frac{m}{n}| \leq \frac{1}{n^2}$ és $K < n$.*



Megoldás:
Legyen $A := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq Q, |\alpha x - y| \leq \frac{1}{Q}\right\}$.
Ekkor $AreaA = 4$ függetlenül Q választásától, mert $(\frac{1}{Q} + \frac{1}{Q}) \cdot (Q + Q) = \frac{2}{Q} \cdot 2Q = 4$.

A Minkowski-tételből következik, hogy létezik $(n,m) \in \mathbb{Z}^2 \cap A$, $(n,m) \neq (0,0)$, hogy

$|\alpha \cdot n - m| \leq \frac{1}{Q}$, ahol $(n \leq Q)$

Így

$|\alpha - \frac{m}{n}| < \frac{1}{Q \cdot n} < \frac{1}{n^2}$.

Mivel α irracionális ezért, ha Q elég nagy, akkor ebből következik, hogy $n > K$.

5. Fáry tétele

A fejezet első részében definiálom a rácselrendezést, a pakolás és a fedési sűrűség fogalmakat, majd két legközelebbi rácspont távolságának vizsgálatával belátom, hogy egybevágó körök rácspakolásának sűrűsége legfeljebb $\frac{\pi}{\sqrt{12}}$.
A második részben Fáry István síkon való rácspakolás sűrűségének alsó és rácsfedés sűrűségének felső korlátjáról szóló tételét mondom ki és bizonyítom.

5.1. Definíció. *Adott egy konvex C lemez és egy Λ rács a síkon. Tekintsük C eltoltjainak a $\mathcal{C} = \{C + \underline{v} | \underline{v} \in \Lambda\}$ családját. Ezt C egy* rácselrendezésének *hívjuk.*

5.2. Definíció. *Ha egy rácselrendezés elemei páronként átfedés nélküliek, akkor* rácspakolásról *beszélünk.*

5.3. Definíció. *Ha egy rácselrendezés elemei lefedik az egész síkot, akkor* rácsfedésről *beszélünk.*

5.4. Definíció. *Adott egy C konvex lemez és egy Λ rács a síkon. A* rácselrendezés sűrűsége *legyen $\frac{Area(C)}{det\Lambda}$.*

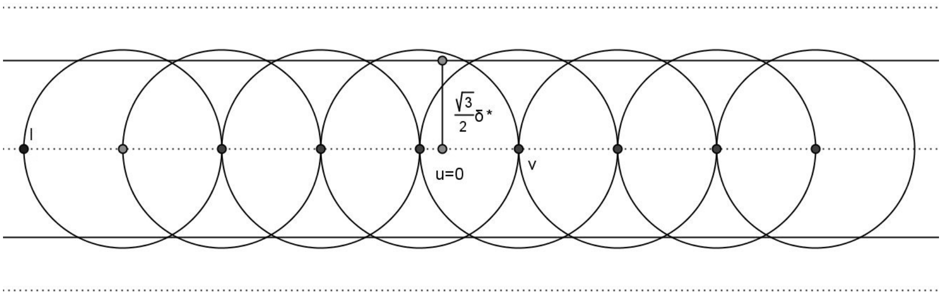
5.5. Definíció. *Adott egy C konvex lemez a síkon. C rácspakolásainak sűrűségeinek szuprémumát jelölje $\delta_L(C)$.*

5.6. Definíció. *Adott egy C konvex lemez a síkon. C rácsfedéseinek sűrűségeinek infímumát jelölje $\vartheta_L(C)$.*

Belátható, hogy ez a szuprémum és infímum felvétetik, azaz létezik olyan rács, melyhez tartozó rácspakolás sűrűsége egyenlő $\delta_L(C)$ és létezik olyan rács, melyhez tartozó rácsfedés sűrűsége egyenlő $\vartheta_L(C)$.

5.7. Tétel. *Legyen* Λ *egy egységrács* $\mathbb{R}^2$ *-ben. Ekkor létezik két rácspont, amelyek távolsága legfeljebb* $\sqrt{2/\sqrt{3}}$.

Bizonyítás: Legyen δ^* a Λ-beli pontpárok minimum távolsága. Az $\underline{u}, \underline{v} \in \Lambda$ pedig legyen egy ilyen legközelebbi pontpár. Az egyszerűség kedvéért feltehető, hogy $\underline{u} = \underline{0}$. A rácspontok köré rajzoljunk δ^* sugarú köröket. Jelölje l a $\overline{0v}$ egyenest. Ekkor a $k \cdot \underline{v}$ ($k \in \mathbb{N}$) alakú rácspontok köré rajzolt δ^* sugarú körök lefednek egy olyan sávot az l körül, amelyeknek félszélessége $\left(\sqrt{3}/2\right)\delta^*$. (Lásd az ábrán!)
Ebben a nyílt sávban a $k \cdot \underline{v}$ alakú pontokon kívül nincs rácspont. Vegyünk egy $\underline{0}$-hoz legközelebbi, a sávon kívülre eső rácspontot, $\underline{w}$-t. Ekkor az $\underline{0}, \underline{v}, \underline{w}$ rácsháromszög elemi. Az elemi rácsháromszög területére igaz, hogy $T = \frac{1}{2}$. A keresett háromszög területére fennáll $T = \frac{\delta^*}{2} \cdot m$, ahol m a magasságot jelöli. Ekkor $1 = \delta^* \cdot m \geq \delta^* \cdot \delta^* \frac{\sqrt{3}}{2}$ és amiből következik, hogy a két rácspont távolsága legfeljebb $\sqrt{2/\sqrt{3}}$. $\square$



Megjegyezzük, hogy az 5.4. definíció alapján az egybevágó r sugarú körök *rácspakolásának sűrűsége* $\pi r^2 / det\Lambda$.

5.8. Következmény. *Egybevágó körök rácspakolási sűrűsége legfeljebb* $\pi/\sqrt{12}$.

Bizonyítás: Feltehető, hogy Λ egy egységrács. A δ^* jelölje ugyanazt, amit az 5.7. tétel bizonyításában. A páronként átfedés nélküli körök sugara legfeljebb $r = \delta^*/2$. Ezért az 5.7. tétel szerint a rácspakolás sűrűsége:

$$\frac{(\delta^*/2)^2\pi}{det\Lambda} \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{4} \cdot \pi = \frac{\pi}{\sqrt{12}}$$

$\square$

5.1. Fáry-tétel

5.9. Tétel. *Adott egy konvex C lemez a síkon. Ekkor fennáll:*

$$\text{(i) } \delta_L(C) \geq \tfrac{2}{3}, \text{ és}$$

$$\text{(ii) } \vartheta_L(C) \leq \tfrac{3}{2}.$$

Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha a C háromszög.

Ebben a fejezetben ezt a tételt bizonyítom be, abban az esetben, amikor C $\underline{O}$-szimmetrikus, azaz $C = -C$.

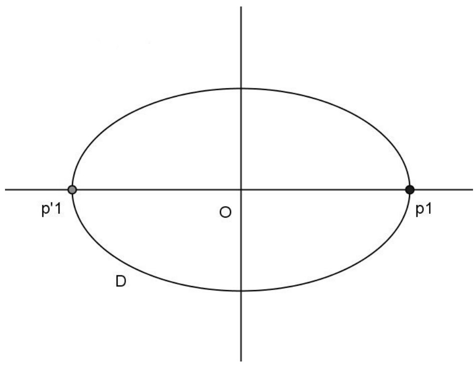
5.10. Definíció. *Legyen $C \subset \mathbb{R}^d$ tetszőleges halmaz. A $D(C) = C + (-C) = \{c - c' | c, c' \in C\}$ halmazt a C* különbség-tartományának *hívjuk.*

Természetesen, ha C konvex, akkor $D(C)$ is konvex, továbbá középpontosan szimmetrikus az origóra.

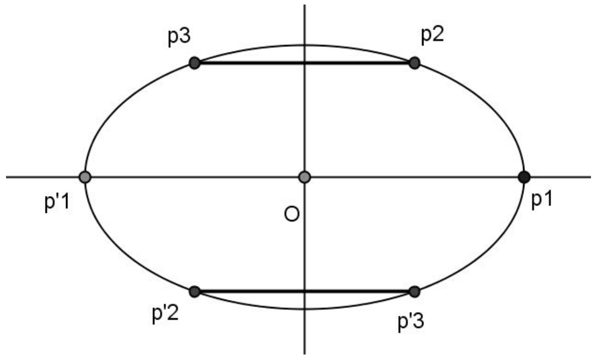
5.11. Definíció. Affin szabályos hatszögnek *nevezünk egy szabályos nem elfajuló hatszög tetszőleges affin képét, azaz egy olyan hatszöget, amely középpontosan szimmetrikus és a szemközti oldalpárjai, valamint a megfelelő átlók párhuzamosak.*

5.12. Lemma. *Bármely középpontosan szimmetrikus D konvex lemez tartalmaz egy beírt affin szabályos H hatszöget ugyanazon középponttal. Továbbá szabadon megválaszthatjuk a H egy oldalának irányát.*

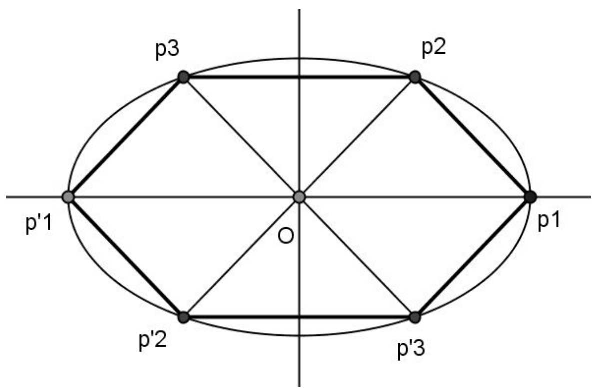
Bizonyítás: Tetszőleges $p_i \in bdD$ $(i = 1, 2, 3)$ pontra jelölje p_i' a p_i ponttal átellenes pontot. Jelöljünk ki egy p_1 tetszőleges pontot D határán.



Toljuk el $\overline{p_1p_1'}$ egyenest úgy, hogy kimessen egy olyan p_2p_3 húrt a D-ből, melyre $\overline{p_2p_3} = \frac{1}{2}\overline{p_1p_1'}$. Ekkor megkapjuk a p_2', p_3' pontokat is.



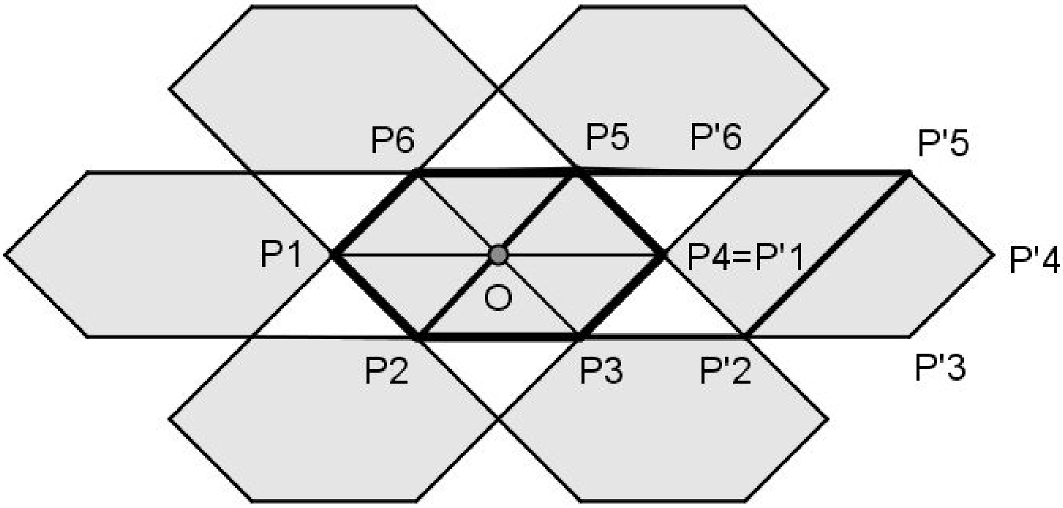
A hat pont meghatároz egy hatszöget.



Már csak azt kell belátni, hogy a hatszög affin szabályos.
Azt már tudjuk, hogy a p_2p_3 és a $p_2'p_3'$ oldalak és a p_1p_1' szakasz párhuzamosak egymással. A képen látható, hogy az O, p_1, p_2, p_3 pontok meghatároznak egy parallelogrammát, így megkapjuk, hogy $\overline{p_1p_2}$ szakasz párhuzamos $\overline{p_3O}$ szakasszal és párhuzamos $\overline{p_1'p_2'}$ szakasszal is. A O, p_2, p_3, p_1' pontok által meghatározott parallelogrammából pedig megkapjuk, hogy $\overline{p_1'p_3}$ szakasz párhuzamos $\overline{p_2O}$ szakasszal és párhuzamos $\overline{p_1p_3'}$ szakasszal. Tehát a hatszögünk tényleg affin szabályos. □

Az 5.9. tétel bizonyítása: Az 5.9. tétel (i) részének bizonyítása szimmetrikus esetre.
Legyenek $p_1, ..., p_6$ pontok egy C-be beírt affin szabályos hatszög csúcsai. A $p_1', ..., p_6'$ pontok legyenek a $p_1\vec{p}_4$ vektorral eltolt hatszög csúcsai.
Legyen Λ az a rács, melynek bázisa $p_4 - p_1$ és $p_5 - p_2$. Ekkor a $p_2p_2'p_5'p_5$ négyszög Λ egy alapparalelogrammájának egy eltoltja. Nyilvánvalóan $\Lambda + C$ a C egy rácspakolása.

Jelölje ρ ennek a rácspakolásnak a sűrűségét. Ekkor $\rho = \frac{Area(C)}{Area(p_2p'_2p'_5p_5)}$.



Daraboljuk át a paralelogrammánkat, úgy hogy a $p'_1p'_2p'_5p'_6$ négyszöget eltoljuk a $p_1p_2p_5p_6$ pontok által határolt négyszögbe. Vegyük a $p_1p_2p_3p'_2p_4p'_6p_5p_6$ nyolcszöget.

Ekkor $Area(p_2p'_2p'_5p_5) = Area(p_1p_2p_3p'_2p_4p'_6p_5p_6)$, tehát $\rho = \frac{Area(C)}{Area(p_1p_2p_3p'_2p_4p'_6p_5p_6)}$.

Bontsuk szét a nyolcszögünket három részre, így megkapjuk az eredeti hatszögünket és a $p_3p'_2p_4$ háromszöget és a $p_4p'_6p_5$ háromszöget, ekkor

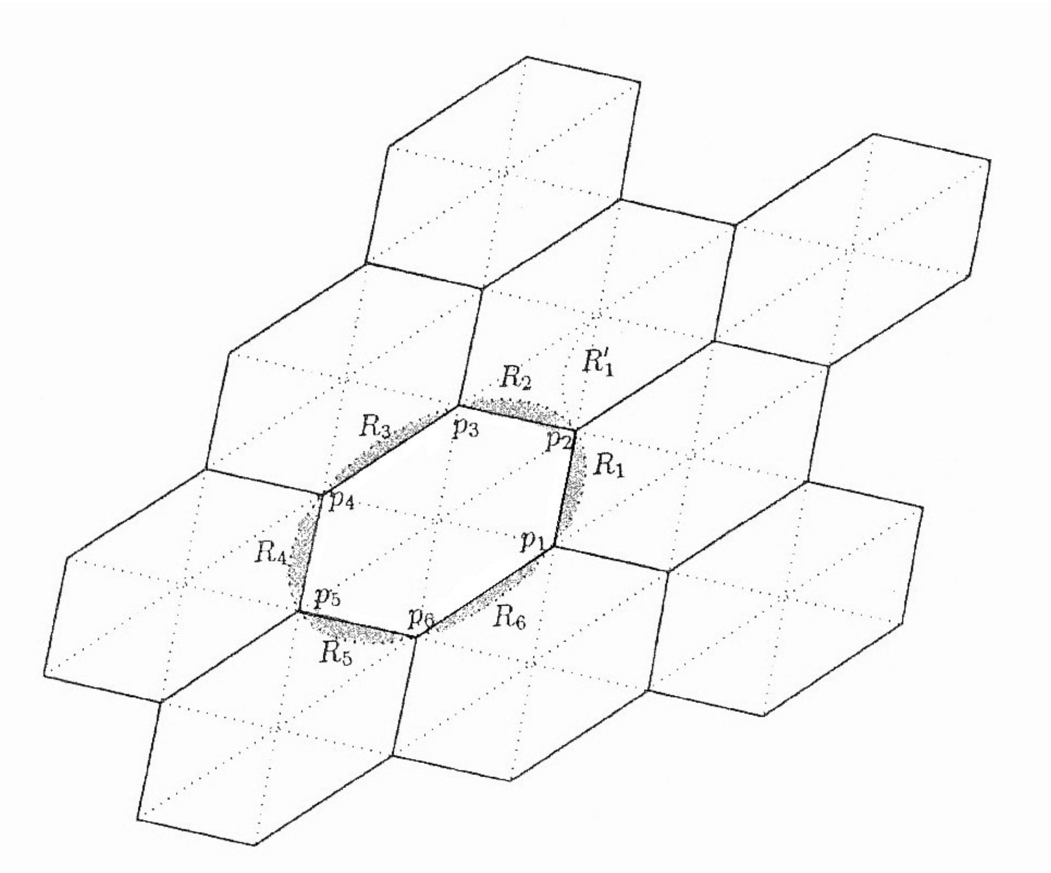
$\rho \geq \frac{Area(C)}{Area(C)+Area(p_3p'_2p_4)+Area(p_4p'_6p_5)}$.

Másrészt $Area(p_3p'_2p_4) = Area(Op_3p_4)$ és $Area(p_4p'_6p_5) = Area(Op_4p_5)$, amikből következik, hogy

$Area(p_3p'_2p_4) \leq \frac{1}{2}Area(p_1p_2p_3p_4p_5p_6)$ és

$Area(p_4p'_6p_5) \leq \frac{1}{2}Area(p_1p_2p_3p_4p_5p_6)$, ezért $Area(p_3p_2'p_4) + Area(p_4p_6'p_5) \leq \frac{1}{2}Area(C)$ és $\rho \geq \frac{2}{3}$.

Most következik a (ii) bizonyítása az 5.12. lemma segítségével. Legyen H egy C-be beírt affin reguláris hatszög. Tekintsük azt a Λ rácsot, amelyre $H + \Lambda$ a sík egy csempézése. Ekkor persze $C + \Lambda$ a sík egy rácsfedése C eltoltjaival. Jelölje ρ a sűrűségét. A $C \backslash H$ komponenseit jelölje $R_1, ..., R_6$.



Belátom, hogy

$$Area(R_1) + Area(R_2) \leq \frac{Area(H)}{6}.$$

Jelölje R_1' az R_1 p_2-re tükrözött képét. Mivel van C-nek támaszegyenese p_2-ben, így fenáll $R_1' \cap R_2 = \emptyset$ és a kettő unióját tartalmazza egy kis háromszög, amelynek a területe a H hatszög területének egyhatoda. Hasonlóan

$Area(R_i) + Area(R_{i+1}) \leq \frac{Area(H)}{6}$ minden i-re $(1 \leq i \leq 6)$;

ezért $\sum_{i=1}^{6} Area(R_i) \leq Area(H)/2$.

Ez azt jelenti, hogy $\rho = \frac{Area(C)}{Area(H)} = \frac{Area(H)+\sum_{i=1}^{6} Area(R_i)}{Area(H)} \leq \frac{3}{2}$.

$\square$

6. Fejes Tóth László tétele egybevágó konvex lemezek pakolásáról, fedéséről

A fejezet első részében a konvex lemezek elhelyezésének sűrűségének alsó és felső sűrűségét definiálom, majd Fejes Tóth László két tételét bizonyítom, amelyek Thue illetve Kershner tételeinek messzemenő általánosításai.

6.1. Definíció. *Legyen $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, ...\}$ konvex lemezek egy családja a síkon és legyen D a sík egy részhalmaza. A $\mathcal{C}$-t D egy* fedésének *nevezzük, ha $\bigcup_i C_i \supseteq D$. Másrészt, ha $\bigcup_i C_i \subseteq D$ és semelyik kettőnek nincs közös belső pontja, akkor $\mathcal{C}$-t egy D-beli* pakolásának *nevezzük.*

Ha D korlátos, Jordan-mérhető tartomány, akkor a $\mathcal{C}$ család sűrűsége D-re vonatkozóan

$$d(\mathcal{C}, D) = \frac{\sum_i Area(C_i)}{Area(D)},$$

ahol a szumma befutja azon i-ket, amelyekre $C_i \cap D \neq \emptyset$. Ha D az egész sík, akkor definiálunk egy felső és egy alsó sűrűséget:

$$\overline{d}(\mathcal{C}, \mathbb{R}^2) = \limsup_{r\to\infty} d(\mathcal{C}, r\cdot K) \text{ és}$$

$$\underline{d}(\mathcal{C}, \mathbb{R}^2) = \liminf_{r\to\infty} d(\mathcal{C}, r\cdot K),$$

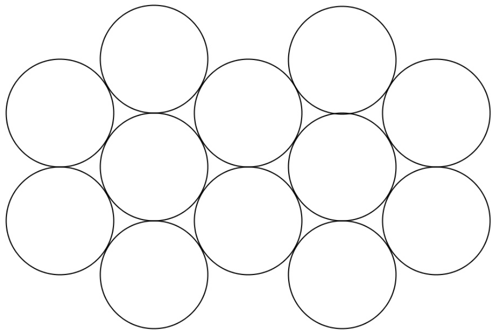
ahol K jelölje az 1 sugarú körlemezt, amelynek középpontja az origó.

Ha ez a két szám megegyezik, akkor a közös értéket nevezzük a $\mathcal{C}$ család sűrűségének *a síkon és* $d(\mathcal{C}, \mathbb{R}^2)$*-el jelöljük.*

6.2. Megjegyzés. *Az alsó és felső sűrűség definíciójában a* K *egységkör kicserélhető egy* O *középpontú szabályos hatszögre.*

A XIX. század végén Thue bebizonyította, hogy az egybevágó körökkel való pakolás sűrűsége legfeljebb $\pi/\sqrt{12}$, azaz

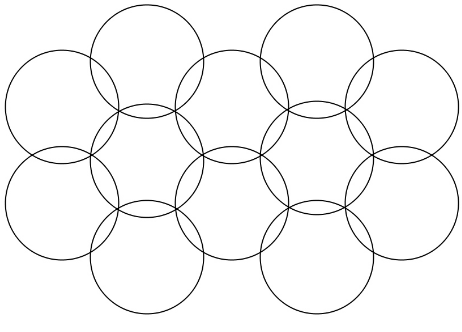
$$\overline{d}(\mathcal{C}, \mathbb{R}^2) \leq \pi/\sqrt{12}.$$



$d(C, \mathcal{R}^2)=\frac{\pi}{\sqrt{12}}$

Jóval később Kershner bebizonyította, hogy az egybevágó körökkel való fedés sűrűsége legalább $2\pi/\sqrt{27}$, azaz

$$\underline{d}(\mathcal{C}, \mathbb{R}^2) \geq 2\pi/\sqrt{27}.$$



$d(C, \mathcal{R}^2)=\frac{2\pi}{\sqrt{27}}$

Kimondom Dowker két tételét bizonyítás nélkül, melyeket a Fejes Tóth László tételeinek bizonyításában felhasználok.

6.3. Lemma. *Legyen C egy konvex lemez a síkon. Minden $s \in \mathbb{Z}^+$, $s \geq 3$ jelölje $a(s)$ a C köré írható konvex s-szögek területének minimumát. Ekkor az $a(s)$ sorozat monoton fogyó és konvex, azaz $a(s+1) \leq \frac{a(s)+a(s+2)}{2}$, minden $s \in \mathbb{Z}^+$, $s \geq 3$.*

6.4. Lemma. *Legyen C egy konvex lemez a síkon. Minden $s \in \mathbb{Z}^+$, $s \geq 3$ jelölje $a(s)$ a C-be beírt konvex s-szögek területének maximumát. Ekkor az $a(s)$ sorozat monoton növő és konkáv, azaz $a(s+1) \geq \frac{a(s)+a(s+2)}{2}$, minden $s \in \mathbb{Z}^+$.*

6.1. Fejes Tóth László tétele pakolásról

6.5. Tétel. *Legyen H egy konvex hatszög és legyen C egy konvex lemez, jelölje P_6 a C köré írt minimális területű hatszöget. Ha a C lemez n egybevágó eltoltjának egy H-beli pakolását tekintjük, akkor*

$$n \leq \frac{Area(H)}{Area(P_6)}.$$

Az Euler formula egy ismert következménye az alábbi lemma.

6.6. Lemma. *Minden n csúcsú síkgráfnak legfeljebb $3n-6$ éle van.*

6.7. Lemma. *Legyen $C_1, ..., C_n$ nemátfedő konvex lemezek rendezett halmaza a konvex H hatszögben. Ekkor találunk nemátfedő konvex sokszögeket, $R_1, ..., R_n \subseteq H$ úgy, hogy $R_i \supseteq C_i$, minden i-re, és*

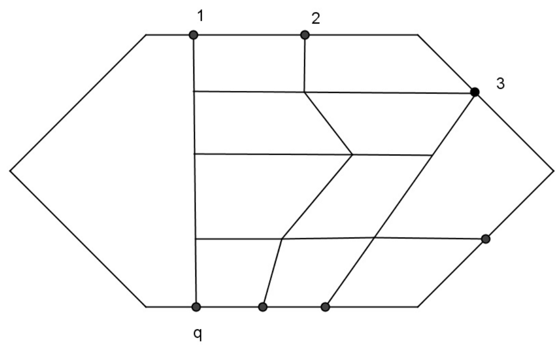
$$\sum_{i=1}^{n} s_i \leq 6n,$$

ahol s_i jelöli az R_i oldalainak számát.

A 6.7. lemma bizonyítása: Kezdjük el növelni a C_i halmazokat H-ban, úgy hogy továbbra is konvexek maradjanak és belsejeik maradjanak páronként diszjunktak. Könnyen látható, hogy amikor egyiküket sem lehet tovább növelni, akkor az összes kibővített $C_i \subseteq R_i$ halmaz konvex sokszöget alkot. Nem szükséges, hogy kitöltsék az

egész H-t. Szerkesszünk egy $n+1$ csúcsú G gráfot, melynek csúcsai megfelelnek az $R_1, ..., R_n$ tartományoknak, hozzávéve a $\overline{H} = \mathbb{R}^2 \backslash H$ halmazt . Két csúcsot összeköt egy él, akkor és csak akkor, ha a megfelelő tartományoknak van közös éle.
Ha e jelöli G éleinek a számát, és q azon tartományok számat, amelyek határosak a külső (hatszögön kívüli) tartománnyal, akkor

$$3(n+1) - 6 \geq e \geq \tfrac{1}{2}(\textstyle\sum_{i=1}^{n} s_i + q - 6).$$



A második egyenlőtlenség magyarázata következik. A képen látható példán látszik, hogy q darab osztópont van, ekkor a határoló tartományok száma q, ami azt jelenti, hogy a külső tartományt reprezentáló csúcs fokszám G-ben q. Egy tetszőleges külső tartományt nem határoló R_i-t reprezentáló csúcs fokszáma G-ben s_i, ugyanakkor, ha R_i határos a külső tartománnyal, akkor a neki megfelelő csúcs fokszáma G-ben s_i, vagy annál kisebb, annak megfelelően, hogy R_i a H hány oldalát metszi. Ebből adódik a képletbeli -6 tag. A fenti egyenlőtlenség átrendezésével kapjuk a lemmabeli egyenlőtlenséget. □

A 6.5. tétel bizonyítása: Tegyük fel, hogy $\mathcal{C} = \{C_1, ..., C_n\}$ a C lemez egybevágó eltoltjainak egy pakolása H-ban és $R_i \supseteq C_i$ jelölje a fenti sokszögeket, ahol $1 \leq i \leq n$. Továbbá legyen P_s egy a C köré írt legkisebb területű s szög. Ekkor

$$Area(H) \geq \textstyle\sum_{i=1}^{n} Area(R_i) \geq \sum_{i=1}^{n} Area(P_{s_i}).$$

Másrészt a 6.3. lemma alapján létezik egy monoton csökkenő konvex $a(x)$ függvény, hogy $a(s) = Area(P_s)$ minden egész $s \geq 3$-ra. Ezért a 6.7. lemma miatt,

$$\sum_{i=1}^{n} Area(P_{s_i}) = \sum_{i=1}^{n} a(s_i) \geq n \cdot a\left(\sum_{i=1}^{n} s_i/n\right) \geq n \cdot a(6).$$

$\square$

Másszóval a 6.5. tétel szerint a pakolás sűrűsége

$$d(\mathcal{C}, H) \leq \frac{Area(C)}{Area(P_6)}.$$

6.8. Következmény. *Adott egy pakolás C egybevágó eltoltjaival a síkban, ekkor*

$$\overline{d}(\mathcal{C}, \mathbb{R}^2) \leq \frac{Area(C)}{Area(P_6)},$$

ahol P_6 jelöli a C köré írt minimum területű hatszöget. Speciálisan, ha C kör, akkor P_6 szabályos hatszög C körül, ezért

$$d(\mathcal{C}, \mathbb{R}^2) \leq \frac{\pi}{\sqrt{12}}.$$

6.2. Fejes Tóth László tétele fedésről

6.9. Definíció. *A C_1 és C_2 konvex lemezek* keresztezik *egymást, ha $C_1 \backslash C_2$ és $C_2 \backslash C_1$ nem összefüggőek.*

6.10. Tétel. *Legyen H egy olyan konvex hatszög, amelyet fed C n darab egybevágó eltoltja, amelyek közül semelyik kettő nem keresztezi egymást. Ekkor*

$$n \geq \frac{Area(H)}{Area(p_6)},$$

ahol p_6 jelöli a C-be beírt maximális területű hatszögét.

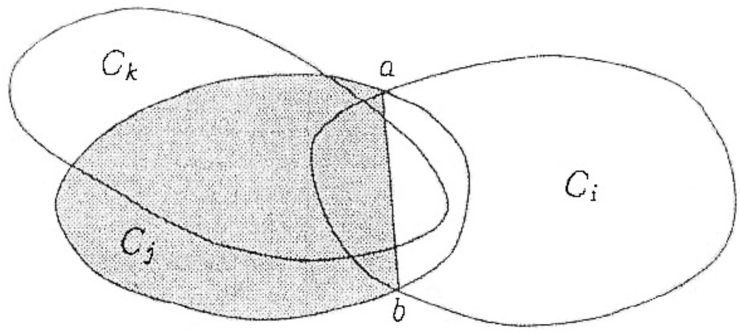
6.11. Lemma. *Legyen $C_1, ..., C_n$ nem keresztező konvex lemezek rendszere, amelyek fedik a konvex H hatszöget. Ekkor találhatunk nem átfedő konvex sokszögeket,*

$R_1, ..., R_n \subset H$ úgy, hogy $R_i \subseteq C_i$ $(1 \leq i \leq n)$, és amelyek teljesen lefedik a H-t, és

$$\sum_{i=1}^{n} s_i \leq 6n,$$

ahol s_i jelöli az R_i oldalainak számát.

A 6.11. lemma bizonyítása: Tekintsük azon C_i, C_j lemez párokat, amelyek metszik egymást. Jelölje a és b a határukon lévő metszéspontokat. Csökkentsük a C_i és a C_j lemezeket úgy, hogy a halmazok az ab szakaszig tartsanak, ekkor kapunk két új lemezt C_i'-t és C_j'-t úgy, hogy $C_i' \cup C_j' = C_i \cup C_j$. A probléma a módszerrel az lehet, hogy az új rendszerben a lemezek egy része keresztezheti egymást.



El tudjuk kerülni ezt a nehézséget azzal a megjegyzéssel, hogy ha C_j' és C_k keresztezik egymást, akkor $C_i \cap C_k \subset C_i \cap C_j$. Így ha a fenti eljárást annál a (C_i, C_j) párnál kezdjük, melyek metszete minimális területű, akkor nem kerülhetünk bajba.
Ezzel az algoritmussal előállíthatjuk az $R_1, ..., R_n$ csúcsú nem átfedő konvex sokszögeket, azzal a tulajdonsággal, hogy $\bigcup_{i=1}^{n} R_i = H$. A bizonyítás utolsó része követi A 6.7. lemma bizonyítását. Tehát szerkesszünk egy $n+1$ csúcsú síkbeli gráfot, melynek csúcsai megfelelnek az $R_1, ..., R_n$ tartományoknak, hozzávéve a $\overline{H} = \mathbb{R}^2 \backslash H$ halmazt. Két csúcsot összeköt egy él, akkor és csak akkor, ha a megfelelő tartományoknak van közös éle.
Ha e jelöli az élek számát, akkor

$$3(n+1) - 6 \geq e \geq \tfrac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} s_i + q - 6\right),$$

ahol s_i azon R_i pontok foka, amik nincsenek a határon és q az osztópontok száma. $\square$

A 6.10. tétel bizonyítása: Legyen C lemez nem keresztező, egybevágó eltoltjainak rendszere $C_1, ..., C_n$ és R_i, s_i jelöljék ugyanazt, mint a 6.7. lemmában. Továbbá legyen p_s egy a C-be beírt legnagyobb területű s-szög. Ekkor

$$Area(H) = \sum_{i=1}^{n} Area(R_i) \leq \sum_{i=1}^{n} Area(p_{si}).$$

Másrészt a 6.4. lemma szerint létezik egy monoton növő konkáv $a(x)$ függvény, hogy $a(s) = Area(P_s)$ minden egész $s \geq 3$-ra. Ezért a 6.11. lemma miatt,

$$\sum_{i=1}^{n} Area(p_{si}) = \sum_{i=1}^{n} a(s_i) \leq n \cdot a\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} s_i}{n}\right) \leq n \cdot a(6) = n \cdot Area(p_6).$$

$\square$

Más szóval a 6.10 tétel szerint a fedés sűrűsége

$$d(\mathcal{C}, H) \geq \frac{Area(C)}{Area(p_6)}.$$

6.12. Következmény. *Adott a sík egy fedése C egybevágó eltoltjaival, ekkor*

$$\underline{d}(\mathcal{C}, \mathbb{R}^2) \geq \frac{Area(C)}{Area(p_6)},$$

ahol p_6 jelöli a C köré írt legkisebb területű hatszöget. Speciálisan, ha C kör, akkor P_6 szabályos hatszög C körül, ezért

$$d(\mathcal{C}, \mathbb{R}^2) \leq \frac{2\pi}{\sqrt{27}}.$$

7. Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megköszönni dr. Naszódi Márton adjunktusnak, hogy erre az érdekes témára felhívta figyelmemet és elvállalta a konzulensi teendőket. Köszönöm, hogy a konzultációk során türelmével, tudásával és szakmai tapasztalatával nagymértékben segítette munkámat, irányított a szakdolgozat felépítésében, megalkotásában, és a néhol nehezebben megfogalmazott részeket korrigálta.

Irodalomjegyzék

[1] Pach, János; Agarwal, Pankaj K.: *Combinatoryal geometry*
Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization.
John Wiley & Sons, Inc., New York, 1995.