A motiválás lehetőségei az algebra tanításában

Szakdolgozat

Készítette: Sára Csenge

Matematika Bsc, tanári szakirány

Témavezető: Somfai Zsuzsa

ELTE TTK Matematikatanítási és Módszertani Központ

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Budapest, 2010

Tartalomjegyzék

1 Bevezetés

Amikor szakdolgozati témámat választottam, a következő szempontokat vettem figyelembe. Amiről írni szeretnék, olyan matematikai témakört foglaljon magába, amit szerettem tanulni az egyetemen; valamint kapcsolódjon a tanári szakirányhoz. Így esett a választásom a motiválás a matematikában címre, melyet aztán leszűkítettem az algebra témakörére.

Szakdolgozatomban arra a kérdésre keresem a válaszokat, hogy milyen módon lehet bevezetni egy -a középiskolában nem taglalt- új témakört szakköri foglalkozáson. Azért hangsúlyozom, hogy nem tanórán esik szó az új anyagrészről, mert mindvégig feltételezem, hogy olyan gyerekek motiválásáról van szó, akik érdeklődnek a matematika iránt. Ez azért nagyon fontos, mert nagyrészt a matematika eszközeivel próbálom a motiválás lehetőségeit bemutatni, és csak kisebb részben a pszichológiával. Ez utóbbi természetesen nagyon fontos, de szakdolgozatomban terjedelmi okok miatt, nincs lehetőségem bővebben kitérni rá.

Az egyetemi algebra tananyag nagyon széles skálán mozog, melynek csak egy szeletét, a komplex számok témakörét fogom körüljárni. Ezen belül is a komplex számok direkt, illetve geometriai bevezetésével foglalkozom. Utóbbit azért tartom nagyon fontosnak, mert már a középiskolában fel kell hívnunk a diákok figyelmét a matematika különböző területei közötti összefüggésekre. Jó ha látják, hogy nagyon hasznos amit tanulnak, mert ez is egyfajta motiváció lehet a számukra.

2 Motiválás

„Motiválás nélkül nincs tanulás.”[1]

„A tanulás motiválása nem más, mint egy kívánatos célállapot elérésére való késztetés, irányítás, koordinálás a tanuló tanulási tevékenységére való ösztönzése céljából.”[2] Vagyis a tanári munka legfontosabb feladata a tanulók számára a legmegfelelőbb motivációs segítség nyújtása, valamint a tudás hatékony közvetítése. Ezt különböző eszközökkel érhetik el a pedagógusok.

Először nézzük meg a tanítási órához fűződő motivációs tényezőket, melyek a tanórák szervezési formáiban rejlő motiválást jelentik, ami összefüggésben van a tanulói aktivitással. Ez alatt azt értem, hogy a tanítás megfelelő minőségével és az ebből következő eredményes tanulással lehet motiválni a tanulót. Vagyis:

- magának a tananyagnak kell aktivizáló tényezőnek lennie;
- érdemes alkalmazni a csoportmunkát és az önálló munkát, mert ezek megszervezése több lehetőséget ad a tanulók önállóságának, kezdeményezőkészségének kibontakozására, mely az alkotó aktivitás, a kreativitás kritériuma;
- mivel a gondolkodás aktivitása olyan feladatokkal kapcsolatban ébred fel a tanulókban, melyeket nem lehet az általuk addig megismert módokon megoldani - igényük lesz a feladat megoldásához vezető utak megismerésére, ezért érdemes minél több olyan feladatot feladni az órán, melyben új gondolatok mentén haladva lehet megoldani azokat;
- fontos tényező a probléma iránti érdeklődés felkeltése, melynek lényege, hogy a tanulókat a szituáció tartalmi oldala érdekelje;
- tanítási órán nagyon fontos szerepe van az optimális, a komplex értékelésnek, valamint a folyamatos visszajelzéseknek, melyek segíthetik a diákokat abban, hogy meg tudják állapítani, hol tartanak a tananyagban (optimális értékelés: nagyobb számban tartalmaz pozitív visszajelzést, de nem zárja ki a negatív visszajelzést; komplex értékelés: tudás, magatartás, személyiség értékelése együttesen);
- továbbá nagy jelentősége van a tanítási óra légkörének, a tanár-diák viszony jellegének.

[1] Réthy Endréné: Motiváció, tanulás, tanítás Miért tanulunk jól vagy rosszul?, Nemzetközi tankönyvkiadó, Budapest, 2003

[2] Réthy Endréné: Motiváció, tanulás, tanítás Miért tanulunk jól vagy rosszul?, Nemzetközi tankönyvkiadó, Budapest, 2003 (80.o.)

Ha ezek az alapvető tényezők meg vannak egy órán, akkor a tanár elérheti célját, mely nem más, mint hogy felkeltse a tanulók érdeklődését és ezt az állapotot folyamatosan ébren tudja tartani; fejlessze a folyamatos tanulás igényének kialakulását; és segítsen leküzdeni a tanulás ellen ható tényezőket. Ezek által tanár és diák közt létre jöhet aktív együttműködés, mely a közös munka hatékonyságának alapvető pillére.

Szakdolgozatom szempontjából, azonban hangsúlyosabb szerephez jut a tananyag általi ösztönzés, melynek főbb elvárásai a következők:

- a feladatok struktúrája legyen változatos, jól követhető, férjen bele az óra- és a tanterv keretébe, valamint a nehézségi fok az adott csoportnak megfelelő legyen;
- fontos a tananyag vonzerejének kiaknázása, a téma „problémásítása”, problémaszituációk tervezése;
- jelentős hangsúlyt kell fektetni a tanulandó ismeretek hasznosságának, használhatóságának tudatosítására;
- valamint az órára való felkészüléskor számba kell venni a várható tanulási-tanítási nehézségeket.

A fent említett pontokból látszik, hogy a tanároknak nagyon felkészültnek kell lenniük, mind pszichológiai-pedagógiai, mind szakmai szempontból.

Ahhoz, hogy teljes képet kapjunk a motiválás és motiváltság közti kapcsolatról, meg kell említenem azt is, hogy a tanulásra való motiválás nem csak a tanár feladata. A közös munka az, ami által létre tud jönni a hatékony tanulás. Vagyis a diáknak is ugyanolyan kemény munka ez, hiszen a tanulás egy olyan önszabályozó folyamat, melyet a tanuló saját maga határoz meg. A tanuló maga alakítja ki saját motivációs struktúráját és itt jön képbe a tanári segítség jelentősége, mert a motivációs rendszer alakításában a gyereket motiválással kell segítenie a pedagógusnak.

Pszichológiailag fontos tényező a tanítás-tanulási folyamatban a külső motiváció arányainak fokozatos eltolódása a belső motiváció felé. Ez a folyamat önszabályozó interakciókon keresztül valósul meg. Az önszabályozott tanulás lényege, hogy a tanuló önmagát motiválja, és a tanulási tevékenységet önmaga végzi. Hiszen „a belső motiváció jelentősége éppen az, amit tanul, s őszintén érdeklődik iránta.”[3]

Ezekből az információkból azt a végső következtetést vonhatjuk le, hogy a megfelelő hatékonyságú tanulás elengedhetetlen eszköze a motiválás, melyből az következik, hogy a tanulási teljesítmény és a motiváció egymással kölcsönhatásban van.

[3] Réthy Endréné Dr.: Motiváció a tanítási órán, Tankönyvkiadó, Budapest, 1978 (26.o.)

3 Komplex számok[4]

3.1 Komplex számok bevezetése középiskolában

Fontos pedagógiai követelmény, hogy az új tananyag feldolgozását megelőzze a problémából való kiindulás. Esetünkben ez a következő: egy középiskolai szakköri csoportban, a másodfokú egyenletek tárgyalásakor felmerülhet az a kérdés, hogy vajon létezik-e olyan számhalmaz, amelyben minden másodfokú egyenletnek van gyöke. Hiszen tudjuk, hogy nem minden másodfokú egyenletnek van megoldása a valós számhalmazon.

Nézzük az $x^2 = -1$ egyenletet. Tudjuk, hogy ennek a valós számok körében nincs megoldása. Ekkor azt mondhatjuk a diákoknak, hogy létezik egy olyan számhalmaz, amelyen van megoldása ennek az egyenletnek. Ez nem más, mint a valós számkör olyan bővítése, melyben a negatív számokból való négyzetgyökvonás is értelmezhető. Így építhető fel középiskolában a *komplex szám*ok halmaza.

Ha a következőkben leírt módon bevezetjük és értelmezzük az *i* számot, attól kezdve létezik negatív szám négyzetgyöke. Így már tudják a tanulók, hogy ha a komplex számok halmazán oldanak meg egy másodfokú egyenletet, annak akkor is van gyöke, ha diszkriminánsa negatív. Ennek a törekvésnek a jegyében nézzük újra az $x^2 = -1$ egyenletet. Most már megtehetjük, hogy mindkét oldalból négyzetgyököt vonunk. Ekkor az $x = \pm\sqrt{-1}$ megoldást kapjuk. A $\sqrt{-1}$ -et nevezzük el *i*-nek ($i^2 = -1$), vagyis az $x = \pm\sqrt{-1} = \pm i.$ Innentől kezdve a $\sqrt{-1} = i$ -t mindig ki tudjuk emelni, ha negatív számból vonunk gyököt.

A komplex számok halmazának felépítésekor arra törekszünk, hogy a valós számok kapcsán megismert műveleti tulajdonságok, azonosságok és összefüggések ne változzanak a bővítéssel. Tehát célunk az, hogy a bővebben értelmezett fogalom (komplex számok halmaza) minél inkább megőrizze a szűkebb fogalomrendszer (valós számok halmaza) tulajdonságait. Ezt a matematikában *permanencia elv*nek (állandósági elv) nevezik.

[4] Bárczy Barnabás: Algebra II., Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1962 (51-60.o.)
Sárközy András: Komplex számok példatár, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973
Kiss Emil: Bevezetés az algebrába, Typotex , Budapest, 2007
Algebra I. alapszint, előadás jegyzet, 2007

3.1.1 Komplex szám fogalma

A számfogalom az egész emberiség történelme során fejlődött. A XVI. században olasz matematikusok a harmadfokú egyenlet megoldásával kapcsolatban vetették fel, hogy érdemes a valós számok fogalmát tovább bővíteni.

Bombelli az 1572-ben megjelent könyvében javasolta, hogy a negatív számok négyzetgyökét is tekintsék számnak. Ezeket a számokat elnevezte *képzetes szám*oknak. A képzetes számokat („új számokat”) csak a XVIII. században értelmezte kifogástalanul Gauss. Az ő munkássága révén terjedt el a „komplex szám” fogalma.

__Definíció:__ *Az $a+bi$ alakú formális kifejezéseket **komplex szám**oknak nevezzük, ahol a és b valós számok, $i^2=-1$. Jele: $\mathbf{C}=\{a+bi \mid a,b\in R\}$.*

Másképpen fogalmazva, azokat a számokat, melyek valós és képzetes részből állnak, komplex számoknak nevezzük.

A komplex számokat általában *z, w, u* $\in$ **C**-vel jelöljük, továbbá felírhatók $z=a+bi$ alakban, ahol $a=\mathrm{Re}(z)$ a z valós része, és $b=\mathrm{Im}(z)$ a z képzetes része.

Továbbá két komplex szám akkor és csak akkor egyenlő, ha valós és képzetes részeik külön-külön megegyeznek, vagyis az $a+bi=c+di \Leftrightarrow a=c, b=d$, ahol *a, b, c, d* $\in$ **R** .

3.1.2 Műveletek komplex számokkal

__Definíció:__ *A $z=a+bi$ **komplex szám konjugáltja** a $\bar{z}=a-bi$ komplex szám. Vagyis ha két komplex szám csak képzetes részük előjelében tér el egymástól, akkor konjugált komplex számpárt alkotnak.*

__Állítás:__ Legyenek *z* és *w* tetszőleges komplex számok. Ekkor a következő tulajdonságok teljesülnek:

1. $z\mapsto \bar{z}$ *bijekció **C**-ből **C**-be*
2. $\overline{\left(\bar{z}\right)}=z$
3. $\overline{z+w}=\bar{z}+\bar{w}$
4. $\overline{z\cdot w}=\bar{z}\cdot\bar{w}$

5. $z+\bar{z}=2\cdot\mathrm{Re}(z)\ \in \boldsymbol{R}$

6. $z\cdot\bar{z}=a^2+b^2\ \in \boldsymbol{R},\ \ (z=a+bi)$

<u>Állítás:</u> Legyenek $z=a+bi$ és $w=c+di$ tetszőleges komplex számok, melyekkel a következő műveleteket végezhetők el:

1. *Összeadás:*

   $$z+w=(a+bi)+(c+di)=a+c+bi+di=(a+c)+(b+d)i=a'+b'i$$

2. *Kivonás:*

   $$z-w=(a+bi)-(c+di)=a+bi-c-di=$$
   $$=a-c+bi-di=(a-c)+(b-d)i$$

3. *Szorzás:*

   $$z\cdot w=(a+bi)(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2=ac+adi+bci-bd=$$
   $$=ac-bd+adi+bci=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

4. *Ellentett:*

   $$-z=-(a+bi)=-a-bi$$

5. *Osztás:*

   Nézzük meg részletesebben az osztást! Legyen $z=a+bi$, $w=c+di$ és $u=x+yi$.

   - *Komplex szám osztása valós számmal:*

     <u>Állítás:</u> A z komplex számot tudjuk *c* nem nulla valós számmal osztani.

     $$\frac{z}{c}=\frac{a+bi}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}i$$

     <u>Bizonyítás:</u> Az osztás definíciójából következik, hogy

     $$\frac{z}{c}=u\Rightarrow z=u\cdot c$$
     $$\frac{a+bi}{c}=u\Rightarrow a+bi=c\cdot(x+yi)=c\cdot x+c\cdot yi.$$

     Két komplex szám akkor és csak akkor egyenlő, ha képzetes és valós részeik megegyeznek, vagyis

     $$a=c\cdot x\Rightarrow\frac{a}{c}=x$$
     $$b=c\cdot y\Rightarrow\frac{b}{c}=y$$
     $$\frac{z}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\cdot i.$$

Tehát komplex számot úgy osztok valós számmal, hogy a komplex szám valós és képzetes részét is elosztom vele.

- *Komplex szám osztása komplex számmal:*

Már tudunk komplex számokat összeadni, kivonni, szorozni és valóssal osztani. Célunk tehát, hogy az eddig alkalmazott összefüggésekre támaszkodva jussunk el két komplex szám osztásáig. Vagyis a szorzás műveletét felhasználva a

$$\frac{z}{w} = z \cdot \frac{1}{w}$$

alak felírására kell törekednünk.

Csináljunk reciprokot! A reciprokkal való szorzással azt szeretnénk elérni, hogy az átalakítás végén csak valós számmal kelljen osztani.

$\frac{1}{w} = \frac{1}{c+di} = \frac{1}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} = \frac{c-di}{c^2+d^2}$, ahol $c^2 + d^2 \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

Vagyis a nevező konjugáltjával bővítettük a törtet.

$$\frac{z}{w} = z \cdot \frac{1}{w} = \frac{z}{w} \cdot \frac{\overline{w}}{\overline{w}}$$

$$\frac{z}{w} = \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2} \cdot i,$$

ahol a nevező valós szám.

Tehát komplex számot komplex számmal úgy osztunk, hogy a nevező konjugáltjával bővítjük a törtet. Így visszavezetjük az osztást a valós számmal való osztásra.

3.1.3 Komplex számok tulajdonságai

<u>Állítás:</u> Tetszőleges $z, w, u \in \boldsymbol{C}$ számokra érvényesek az alábbiak:

1. *Az összeadás kommutatív:* $z + w = w + z$
2. *Az összeadás asszociatív:* $(z+w)+u = z+(w+u)$
3. *Létezik nullelem:* $z + 0 = 0 + z = z$ *minden z esetén*
4. *Létezik ellentett: minden z-nek létezik ellentettje, azaz olyan w, melyre* $z + w = w + z = 0$
5. *A szorzás kommutatív:* $zw = wz$

6. *A szorzás asszociatív:* $(zw)u = z(wu)$
7. *Létezik egységelem: létezik* $1 \in C$*, hogy* $z \cdot 1 = 1 \cdot z = z$ *minden z esetén*
8. *Létezik inverz: minden nullától különböző z komplex számnak létezik w inverze, hogy*
   $z \cdot w = 1$, $\left(z = \dfrac{1}{w} \right)$.
9. *Disztributivitás:*
   $(z+w)u = uz + uw$
   $z(w+u) = zu + zw$

<u>Definíció:</u> *Komplex szám **abszolút értéke** a* $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$ *nemnegatív valós szám,* $z \in C$.

<u>Állítás:</u> Legyenek $z = a + bi$ és $w = c + di$ komplex számok. Ekkor z illetve w abszolút értékére a következő tulajdonságok teljesülnek:

1. $|z| \geq 0 \ \in \boldsymbol{R}$

   $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

2. $|z| = |\overline{z}|$

   $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{(a+bi)\cdot(a-bi)} = \sqrt{a^2 + b^2}$

   $|\overline{z}| = \sqrt{\overline{z} \cdot \overline{\overline{z}}} = \sqrt{\overline{z} \cdot z} = \sqrt{(a-bi)\cdot(a+bi)} = \sqrt{a^2 + b^2}$

3. $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

   $|z \cdot w| = \sqrt{z \cdot w \cdot \overline{z \cdot w}} = \sqrt{z \cdot w \cdot \overline{z} \cdot \overline{w}} = \sqrt{z \cdot \overline{z} \cdot w \cdot \overline{w}} = \sqrt{(a^2 + b^2)\cdot(c^2 + d^2)}$

   $|z| \cdot |w| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} \cdot \sqrt{w \cdot \overline{w}} = \sqrt{z \cdot \overline{z} \cdot w \cdot \overline{w}} = \sqrt{(a^2 + b^2)\cdot(c^2 + d^2)}$

4. $|z + w| \leq |z| + |w|$ *háromszög-egyenlőtlenség* (bizonyítás később)

3.2 Komplex számok áttekintése más megközelítéssel

A komplex számokat -az előző fejezetben tárgyalt módnál- sokkal szemléletesebben is bemutathatjuk az elképzelt szakköri csoportban. Ez nem más, mint a komplex számok geometriai szemléltetése, valamint a trigonometrikus alak bevezetése.

Feltételezzük, hogy a középiskolás diákok megfelelő alapismeretekkel rendelkeznek a vektorokat, a trigonometriát, és a síkgeometriát illetően, hiszen mindegyik témakör a kerettanterv része. A már meglévő ismeretekre pedig könnyebben lehet felépíteni az újat.

3.2.1 A geometriai jelentés

Azt már -az előző fejezetben tanultak alapján- tudják a tanulók, hogy a komplex számhalmaz a valós számkör bővítése. Ebből kiindulva rá tudjuk vezetni a diákokat arra, hogyan/hol ábrázoljuk a komplex számokat. Hiszen ha a valós számokat a számegyenesen, akkor feltehetjük a kérdést, hogy a komplex számokat, vajon milyen rendszerben ábrázoljuk. Ha még azt is hozzávesszük mindehhez, hogy a komplex számok valós és képzetes részből állnak, akkor a tanulók megsejthetik, hogy számpár(oka)t kell ábrázolniuk. Számpárokat pedig számsíkon ábrázolunk.

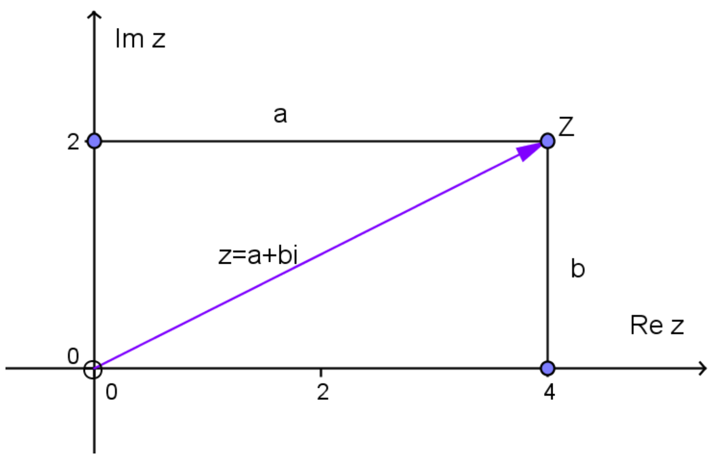
Ezen információk alapján, a komplex számsíkot a valós számegyenes bővítéseként is értelmezhetjük az „új számok” geometriai szemléltetésének bevezetésekor.

3.2.2 A komplex számsík

A komplex számsíkot másképpen *Gauss-féle számsík*nak nevezzük. Egy derékszögű koordinátarendszer segítségével ábrázoljuk a komplex számokat, melynek origója megegyezik a valós számegyenes *0* pontjával. Továbbá *x*-tengelye a valós tengelynek, *y*-tengelye pedig a képzetes tengelynek fele meg. Az *x*-tengelyen az adott komplex szám valós részét, az *y*-tengelyen ennek tisztán képzetes részét ábrázoljuk. Vagyis a $z = a + bi \in C$ számnak az $(a,b) \in R^2$ koordinátájú pontot feletetjük meg. Ez a megfeleltetés bijektív, vagyis minden komplex számnak a komplex számsík egyetlen pontja felel meg és fordítva. A komplex számok halmaza teljesen kitölti a sík pontjait. Ha a *z* komplex szám valós része *0,* akkor csak a képzetes tengelyen mozgunk, ha pedig képzetes része *0,* akkor ennek megfelelően csak a valós tengelyen.

Ha a z komplex számnak megfeleltetett pontot elnevezzük Z-nek, az origót pedig O-val jejöljük, akkor a z komplex szám egyértelműen megadható az $\overrightarrow{OZ}$ vektorral, mert a sík pontjai és a komplex számok között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés van. Hiszen a pontok egyértelműen megadják a komplex számokat, az $\overrightarrow{OZ}$ vektor pedig a Z pontba mutató helyvektor, ami egyértelműen egy komplex számnak felel meg. Egy adott komplex számot pedig egyértelműen tudunk ábrázolni a síkon. Így a Z ponthoz egy adott helyvektor tartozik $\left(\overrightarrow{OZ}\right)$.

Ezekből az következik, hogy a $z = a + bi$ komplex számot megadhatjuk a neki megfelelő Z ponttal, valamint az $\overrightarrow{OZ}$ vektorral. E kettő a geometriai megadása a komplex számoknak.

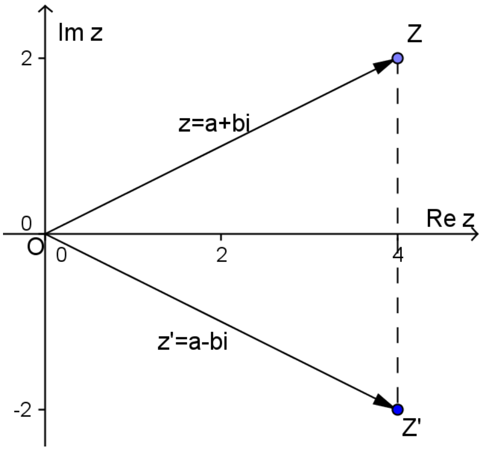


1.ábra

3.2.3 Műveletek komplex számokkal

Az előző fejezet felépítését követve, most áttekintjük a komplex számok közti műveletek geometriai jelentését.

Először nézzük meg a konjugált fogalmát. Legyen $z = a + bi$, ekkor a $\overline{z} = a - bi$. Az algebrai alakból látszik, hogy a két szám csak képzetes részükben tér el egymástól. Vagyis a z-t tükrözve a valós tengelyre, megkapjuk $\overline{z}$-t, hiszen képzetes részeik ellentettjeik egymásnak.



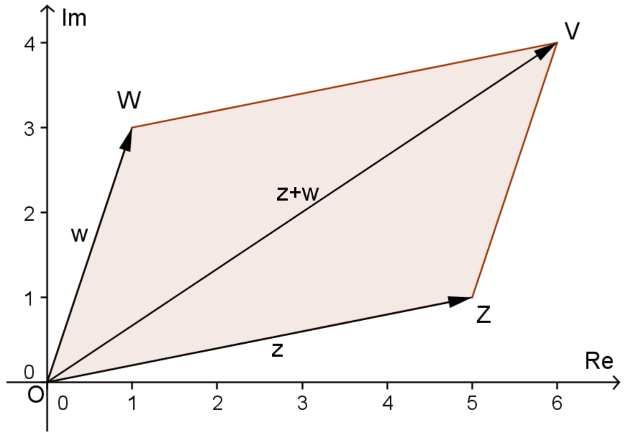
2.ábra

Vektorok összegét és különbségét a *parallelogramma-szabály* alkalmazásával számítják ki középiskolában a diákok. Ennek ismeretében a komplex számok geometriai úton történő összeadása és kivonása jól interpretálható az elképzelt szakköri csoportban. A szorzásra és az osztásra majd a trigonometrikus alak tárgyalásánál térek ki.

1. *Összeadás:*

Legyenek a z és w komplex számokhoz tartozó vektorok $\overrightarrow{OZ}$ és $\overrightarrow{OW}$, ezen vektorok vektorösszege pedig az $\overrightarrow{OV}$ vektor.

Két vektort úgy adunk össze, hogy a két O pontból kiinduló vektort kiegészítjük parallelogrammává. A két vektor összege ($\overrightarrow{OV}$) pedig nem más, mint a parallelogramma O pontból kiinduló átlójához tartozó V-be mutató vektor. Vagyis a komplex számok geometriai módon történő összeadása megegyezik a vektorösszeadással.



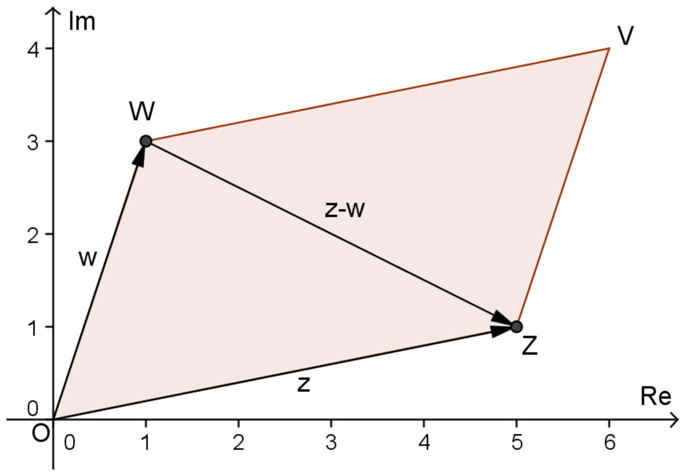
3.ábra

Azt is megfigyelhetjük, hogy az összeadás geometriai értelemben *eltolás*t jelent, mert két komplex szám összeadásakor valós részeiket, valamint képzetes részeiket adjuk össze egymással.

$$z+w=(a+bi)+(c+di)=a+c+bi+di=(a+c)+(b+d)i$$
$$\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Re}(w)=\mathrm{Re}(z+w)$$
$$\mathrm{Im}(Z)+\mathrm{Im}(w)=\mathrm{Im}(z+w)$$

2. *Kivonás:*

Az összeadáshoz hasonlóan, a kivonást is vektorokkal adjuk meg. A z komplex számhoz tartozó $\overrightarrow{OZ}$, és a w komplex számhoz tartozó $\overrightarrow{OW}$ vektorok különbsége a kiegészített parallelogramma azon átlója, mely W-ből Z-be mutat.



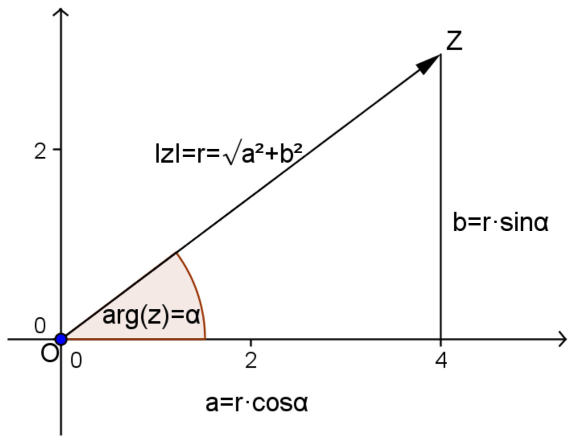
4.ábra

$$z-w=(a+bi)-(c+di)=a+bi-c-di=a-c+bi-di=(a-c)+(b-d)i$$
$$\mathrm{Re}(z)-\mathrm{Re}(w)=\mathrm{Re}(z-w)$$
$$\mathrm{Im}(z)-\mathrm{Im}(w)=\mathrm{Im}(z-w)$$

A kivonás geometriai jelentése szintén *eltolás*, hiszen ebben az esetben a két komplex szám valós részét, illetve képzete részét vonjuk ki egymásból.

3.2.4 Komplex számok trigonometrikus alakja

Látni fogjuk itt is, hogy a középiskolai ismeretek (pl.: trigonometrikus azonosságok és addíciós tételek) elegendőek ahhoz, hogy a tanulók fel tudják írni a komplex számok trigonometrikus alakját. A komplex számokat az *5. ábrá*val szemléltetve láthatóvá válik, hogy a derékszögű háromszögre vonatkozó oldalak és szögek közti összefüggések segítségével határozzuk meg a trigonometrikus alakot.



5.ábra

Jól látható az *5. ábrá*ból, hogy minden nem nulla helyvektort egyértelműen meghatároz a hossza (a végpontjának az origótól mért távolsága), valamint a valós tengellyel bezárt szöge (a tengely pozitív felétől mérve). Ez irányított szög.

Tudjuk, hogy egy vektor hossza megegyezik abszolút értékével. A vektor abszolút értékének definíciója szerint, az $\overrightarrow{OZ}$ vektor abszolút értéke egyenlő a neki megfeleltetett $(a,b) \in R^2$ koordináták négyzetösszegéből vont négyzetgyökkel. Tehát a z komplex számhoz tartozó $\overrightarrow{OZ}$ vektor hossza nem más, mint $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = r$**.** Ezen z komplex szám szögét - más néven argumentumát- pedig $\arg(z) = \alpha$ -val jelöljük.

Az *5. ábrá*ból leolvashatóak a derékszögű háromszög oldalai és szögei közti összefüggések (trigonometrikus azonosságok), mégpedig $a = r \cdot \cos\alpha$ és $b = r \cdot \sin\alpha$. [5]

<u>Definíció:</u> *A* $z = a + bi$ *trigonometrikus alakja* $z = r \cdot \cos\alpha + i \cdot r \cdot \sin\alpha = r \cdot (\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha)$.

---

[5] $\frac{a}{r} = \cos\alpha$, valamint $\frac{b}{r} = \sin\alpha$

A komplex számokkal való műveletek geometriai úton történő bemutatása során elmaradt a szorzás, és az osztás levezetése. Ezt most pótolom a trigonometrikus alak segítségével.

1. *Szorzás:*

   Állítás: Legyen a $z = r \cdot (\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha)$ és $w = s \cdot (\cos\beta + i \cdot \sin\beta)$.

   Ekkor a két szám szorzata $z \cdot w = r \cdot s \cdot (\cos(\alpha+\beta) + i \cdot \sin(\alpha+\beta))$

   Bizonyítás: $z \cdot w = (r \cdot (\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha)) \cdot (s \cdot (\cos\beta + i \cdot \sin\beta))$

   Minden tagot minden taggal megszorozva, a következőt kapjuk:

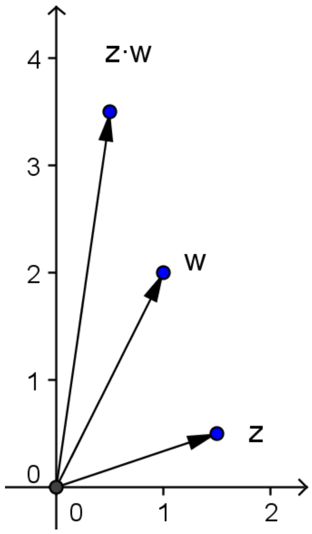
   $z \cdot w = r \cdot s \cdot (\cos\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot i \cdot \sin\beta + i \cdot \sin\alpha \cdot \cos\beta + i \cdot \sin\alpha \cdot i \cdot \sin\beta)$
   $z \cdot w = r \cdot s \cdot ((\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta) + i \cdot (\cos\alpha \cdot \sin\beta + \sin\alpha \cdot \cos\beta))$

   Az addíciós képleteket[6] kihasználva adódik, hogy

   $z \cdot w = r \cdot s \cdot (\cos(\alpha+\beta) + i \cdot \sin(\alpha+\beta))$.

   Tehát két komplex szám szorzásakor abszolút értékük összeszorzódik, szögeik pedig összeadódnak.

   Ennek geometriai vonatkozása is van. Mégpedig az, hogy a $z = r \cdot (\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha) \neq 0$ komplex számmal való szorzás az origó körüli, α szögű forgatás, és az origóból történő *r*-szeresre nyújtás, vagyis a *forgatva nyújtás*.



6.ábra

[6] Addíciós tételek: $\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta = \cos(\alpha+\beta)$, valamint $\cos\alpha \cdot \sin\beta + \sin\alpha \cdot \cos\beta = \sin(\alpha+\beta)$

2. *Osztás:*

Állítás: Legyen $z = r \cdot (\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha)$ és $w = s \cdot (\cos\beta + i \cdot \sin\beta)$ komplex számok hányadosa $\frac{z}{w} = \frac{r}{s} \cdot (\cos(\alpha - \beta) + i \cdot \sin(\alpha - \beta))$.

Bizonyítás: Tudjuk, hogy komplex számok osztásánál a nevező konjugáltjával bővítjük a törtet.

$$\frac{z}{w} = z \cdot \frac{1}{w}$$

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{w} \cdot \frac{\overline{w}}{\overline{w}}$$

A konjugált trigonometrikus alakja pedig $\overline{w} = s \cdot (\cos(-\beta) + i \cdot \sin(-\beta))$.

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{s \cdot (\cos\beta + i \cdot \sin\beta)} = \frac{1}{s} \cdot \frac{\cos(-\beta) + i \cdot \sin(-\beta)}{(\cos\beta + i \cdot \sin\beta) \cdot (\cos(-\beta) + i \cdot \sin(-\beta))}$$

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{s} \cdot (\cos(-\beta) + i \cdot \sin(-\beta))$$ [7]

Az osztás trigonometrikus alakban felírva: [8]

$$\frac{z}{w} = \frac{r \cdot (\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha)}{s \cdot (\cos\beta + i \cdot \sin\beta)} = \frac{r}{s} \cdot (\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha) \cdot (\cos(-\beta) + i \cdot \sin(-\beta)) =$$

$$= \frac{r}{s} \cdot (\cos\alpha \cdot \cos(-\beta) + i \cdot \cos\alpha \cdot \sin(-\beta) + i \cdot \sin\alpha \cdot \cos(-\beta) - \sin\alpha \cdot \sin(-\beta)) =$$

$$= \frac{r}{s} \cdot ((\cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta) + i \cdot (\sin\alpha \cdot \cos\beta - \sin\beta \cdot \cos\alpha)) = \frac{r}{s} \cdot (\cos(\alpha - \beta) + i \cdot \sin(\alpha - \beta)).$$

Tehát osztáskor a két komplex szám abszolút értékét elosztjuk, szögeiket pedig kivonjuk egymásból.

3. *Hatványozás:*

A szorzás következményeként a hatványozást is fel tudjuk írni. Egy z komplex szám *n-edik hatvány*a azt jelenti, hogy z-t n-szer vesszük szorzótényezőül.

Legyen $z = r \cdot (\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha)$, ekkor $z^n = z \cdot z \cdot z \cdot ... \cdot z = r^n \cdot (\cos n\alpha + i \cdot \sin n\alpha)$.

---

[7] $\cos\beta = \cos(-\beta)$, $\sin\beta = -\sin(-\beta)$

$(\cos\beta + i \cdot \sin\beta) \cdot (\cos(-\beta) + i \cdot \sin(-\beta)) = (\cos(-\beta) - i \cdot \sin(-\beta)) \cdot (\cos(-\beta) + i \cdot \sin(-\beta)) =$

$= \cos(-\beta)^2 + \sin(-\beta)^2 = 1$

[8] Addíciós tételek: $\cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta = \cos(\alpha - \beta)$, valamint

$\sin\alpha \cdot \cos\beta - \sin\beta \cdot \cos\alpha = \sin(\alpha - \beta)$

Ebből jól látható, hogy z abszolút értékét az n-edik kitevőre emeltük, szögét pedig megszoroztuk n-nel. Ezt *Moivre-képlet*nek nevezzük.

A hatványozás geometriai jelentése pedig egy ismételt *forgatva nyújtás*.

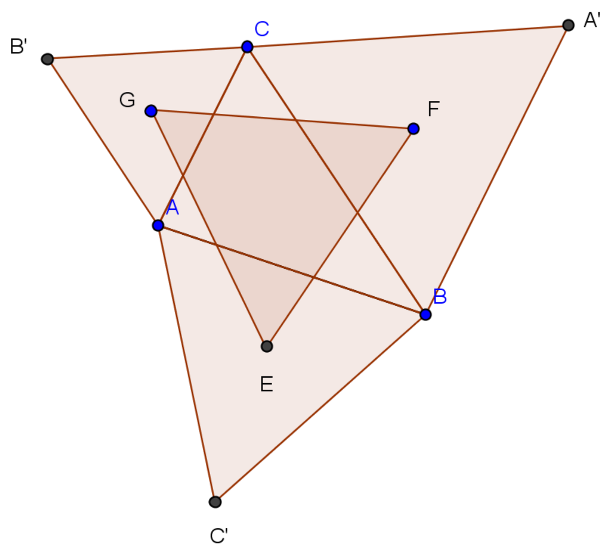
Ezen ismeretek tükrében szeretnék bemutatni egy középiskolai geometria feladatot, melyet a komplex számok segítségével is megoldok, valamint olyan egyetemi példákat, melyekkel az algebra I. gyakorlati órák során foglalkoztunk.

3.3 Feladatok

3.3.1 Egy középiskolai geometria feladat szemléltetése

1. Az *ABC* háromszög oldalaira kifelé szabályos háromszögeket szerkesztünk. Ezeket jelöljük *CBA'*, *ACB'*, és *BAC'*-vel. Igazoljuk, hogy ezen háromszögek középpontjai egy szabályos háromszög csúcsai (*E*, *F*, *G*)!

a) Középiskolai módszerrel:[9]



7.ábra

Az *ABC* háromszög oldalait jelölje *a, b, c,* szögeit pedig α, β, és γ. Azt szeretnénk belátni, hogy az *EFG* háromszög szabályos. Ennek a háromszögnek az oldalait *e, f, g* betűkkel jelöljük.

Azt tudjuk, hogy egy háromszög középpontja a súlypontja, továbbá azt is tudjuk, hogy szabályos háromszögek esetén a súlyvonalak, magasságvonalak, szögfelezők, és az oldalfelező merőlegesek megegyeznek egymással és egy pontban metszik egymást.

[9] www.trefort.elte.hu/~gerocs/ppt/geo_napoleon_en.ppt

Ezeket az ismereteket felhasználva megállapíthatjuk, hogy a *8. ábrán* zölddel jelölt szögek, mind 30°-osak, valamint a szabályos háromszögek oldalaira és súlyvonalaira felírva a *Pitagorasz tétel*t megkapjuk az *AG, GC, CF, FB, BE* és *EA* oldalakat, melyek a következők:

$\overline{AG} = \overline{GC} = \dfrac{b\sqrt{3}}{3}$, $\overline{CF} = \overline{FB} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, és $\overline{BE} = \overline{EA} = \dfrac{c\sqrt{3}}{3}$.

A bizonyítás első lépéseként írjuk fel a *GCF* háromszögre a *koszinusz tétel*t!

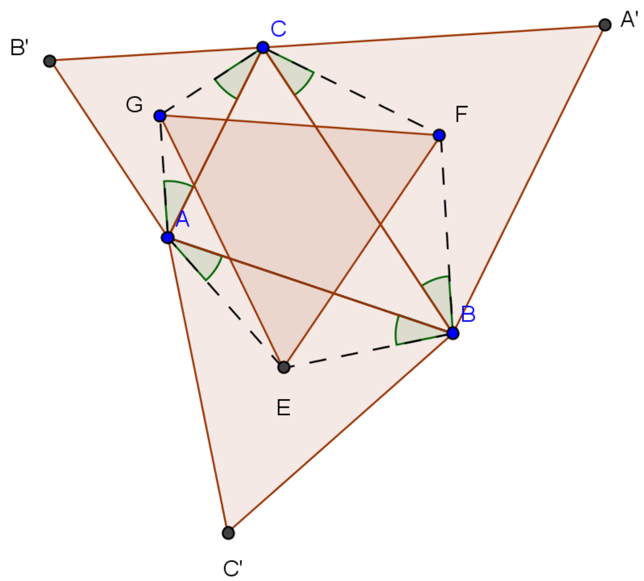
$$e^2 = \left(\frac{b\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 2\cdot\frac{b\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{3}\cdot\cos\left(30^\circ + \gamma + 30^\circ\right)$$

$$e^2 = \frac{b^2}{3} + \frac{a^2}{3} - 2\cdot\frac{ab}{3}\cdot\cos\left(60^\circ + \gamma\right)$$ [10]

$$e^2 = \frac{b^2}{3} + \frac{a^2}{3} - 2\cdot\frac{ab}{3}\cdot\left(\cos 60^\circ\cdot\cos\gamma - \sin 60^\circ\cdot\sin\gamma\right)$$

$$e^2 = \frac{b^2}{3} + \frac{a^2}{3} - 2\cdot\frac{ab}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\cos\gamma - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin\gamma\right)$$

$$e^2 = \frac{b^2}{3} + \frac{a^2}{3} - \frac{ab\cdot\cos\gamma}{3} + \frac{ab\sqrt{3}\cdot\sin\gamma}{3}$$



8.ábra

[10] $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$

Az előbbiekhez hasonlóan nézzük meg a *GAE* háromszöget!

$$f^2=\left(\frac{b\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(\frac{c\sqrt{3}}{3}\right)^2-2\cdot\frac{b\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{c\sqrt{3}}{3}\cdot\cos\left(60^\circ+\alpha\right)$$

$$f^2=\frac{b^2}{3}+\frac{c^2}{3}-2\cdot\frac{b\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{c\sqrt{3}}{3}\cdot\left(\cos 60^\circ\cdot\cos\alpha-\sin 60^\circ\cdot\sin\alpha\right)$$

$$f^2=\frac{b^2}{3}+\frac{c^2}{3}-2\cdot\frac{b\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{c\sqrt{3}}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right)$$

$$f^2=\frac{b^2}{3}+\frac{c^2}{3}-\frac{bc\cdot\cos\alpha}{3}+\frac{bc\sqrt{3}\cdot\sin\alpha}{3}$$

A kérdés pedig az, hogy az f^2 egyenlő e az e^2-tel. Vagyis igaz-e, hogy

$$\frac{b^2}{3}+\frac{a^2}{3}-\frac{ab\cdot\cos\gamma}{3}+\frac{ab\sqrt{3}\cdot\sin\gamma}{3}=\frac{b^2}{3}+\frac{c^2}{3}-\frac{bc\cdot\cos\alpha}{3}+\frac{bc\sqrt{3}\cdot\sin\alpha}{3}$$

$$a^2-ab\cdot\cos\gamma+ab\sqrt{3}\cdot\sin\gamma=c^2-bc\cdot\cos\alpha+bc\sqrt{3}\cdot\sin\alpha$$

$$ab\sqrt{3}\cdot\sin\gamma=bc\sqrt{3}\cdot\sin\alpha,$$

ami a s*zinusz tétel*ből[11] adódik.

$$a^2-ab\cdot\cos\gamma=c^2-bc\cdot\cos\alpha$$

Osszuk el mindkét oldalt *ac*-vel!

$$\frac{a}{c}-\frac{b}{c}\cdot\cos\gamma=\frac{c}{a}-\frac{b}{a}\cdot\cos\alpha$$

A *szinusz tétel* alkalmazásával a következőket kapjuk:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}-\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\cdot\cos\gamma=\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}-\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\cdot\cos\alpha$$

Szorozzuk meg mindkét oldalt $\sin\gamma\cdot\sin\alpha$-val!

$$\sin^2\alpha-\sin\beta\cdot\sin\alpha\cdot\cos\gamma=\sin^2\gamma-\sin\beta\cdot\sin\gamma\cdot\cos\alpha$$

$$\sin^2\alpha-\sin^2\gamma=\sin\beta\cdot\sin\alpha\cdot\cos\gamma-\sin\beta\cdot\sin\gamma\cdot\cos\alpha$$

$$\sin^2\alpha-\sin^2\gamma=\sin\beta\cdot\left(\sin\alpha\cdot\cos\gamma-\sin\gamma\cdot\cos\alpha\right)$$ [12]

$$\sin^2\alpha-\sin^2\gamma=\sin\beta\cdot\sin\left(\alpha-\gamma\right)$$

---

[11] $\frac{a}{c}=\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$

[12] $\sin\alpha\cos\gamma-\sin\gamma\cos\alpha=\sin\left(\alpha-\gamma\right)$

Tudjuk, hogy minden háromszögben teljesül $\sin\beta = \sin(\alpha+\gamma)$.

Ezt behelyettesítve a fenti egyenlőségbe a következőket kapjuk:

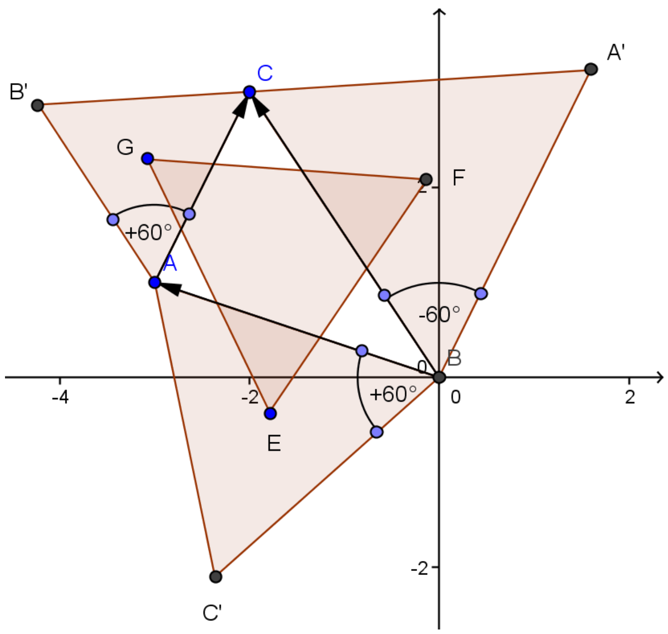
$$\sin^2\alpha - \sin^2\gamma = \sin(\alpha-\gamma)\cdot\sin(\alpha+\gamma)$$
$$\sin^2\alpha - \sin^2\gamma = (\sin\alpha\cos\gamma - \sin\gamma\cos\alpha)\cdot(\sin\alpha\cos\gamma + \sin\gamma\cos\alpha)$$
$$\sin^2\alpha - \sin^2\gamma = (\sin\alpha\cos\gamma)^2 - (\sin\gamma\cos\alpha)^2$$
$$\sin^2\alpha - \sin^2\gamma = \sin^2\alpha\cos^2\gamma - \sin^2\gamma\cos^2\alpha$$
$$\sin^2\alpha - \sin^2\gamma = \sin^2\alpha\cdot(1-\sin^2\gamma) - \sin^2\gamma\cdot(1-\sin^2\alpha)$$
$$\sin^2\alpha - \sin^2\gamma = \sin^2\alpha - \sin^2\alpha\sin^2\gamma - \sin^2\gamma + \sin^2\gamma\sin^2\alpha$$
$$\sin^2\alpha - \sin^2\gamma = \sin^2\alpha - \sin^2\gamma$$

és a lépések megfordíthatók, ezért $e = f$.

Ugyanígy belátható, hogy $e = g$ is teljesül, tehát a háromszög szabályos.

b) Komplex számokkal:

Legyen a háromszög *B* csúcsa az origó (vagyis a *0* komplex szám), a $c+di$ a *B*-ből *A*-ba, az $a+bi$ pedig a *B*-ből *C*-be mutató helyvektornak megfeleltetett komplex szám. Ezezn komplex számok segítségével ki tudjuk fejezni az *ABC* háromszög oldalaira írt szabályos háromszögek *A', B', C'* csúcsait. Majd azt kihasználva, hogy a szabályos háromszög középpontja egyenlő a csúcsainak számtani közepével, megkapjuk a szabályos háromszögek középpontjait. Végül megnézzük, hogy ezen középpontok távolsága egyenlő e.



9.ábra

Először írjuk fel az *A'* csúcsot. Ezt úgy kapjuk, hogy a *BC* oldalt elforgatjuk *B* körül -60°-kal, vagyis az $\omega_{-60^\circ} = \cos(-60^\circ) + i \cdot \sin(-60^\circ) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$-vel szorozzuk az $a + bi$-t.

$$A' = (a+bi) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) = \left(\frac{1}{2} a + \frac{\sqrt{3}}{2} b \right) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} a + \frac{1}{2} b \right) \cdot i$$

Az *A', B, C* csúcsok számtani közepét felírva megkapjuk *F*-et.

$$F = \frac{(a+bi) + \left(\frac{1}{2} a + \frac{\sqrt{3}}{2} b \right) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} a + \frac{1}{2} b \right) \cdot i}{3} = \frac{\frac{3}{2} a + \frac{\sqrt{3}}{2} b}{3} + \left(\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} a + \frac{3}{2} b}{3} \right) \cdot i$$

$$F = \left(\frac{1}{2} a + \frac{\sqrt{3}}{6} b \right) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{6} a + \frac{1}{2} b \right) \cdot i$$

Hasonlóképpen írjuk fel az *E* és *G* pontokat.

$$C' = (c+di) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) = \left(\frac{1}{2} c - \frac{\sqrt{3}}{2} d \right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} c + \frac{1}{2} d \right) \cdot i$$

$$E = \frac{(c+di) + \left(\frac{1}{2} c - \frac{\sqrt{3}}{2} d \right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} c + \frac{1}{2} d \right) \cdot i}{3} = \frac{\frac{3}{2} c - \frac{\sqrt{3}}{2} d}{3} + \left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2} c + \frac{3}{2} d}{3} \right) \cdot i$$

$$E = \left(\frac{1}{2} c - \frac{\sqrt{3}}{6} d \right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{6} c + \frac{1}{2} d \right) \cdot i$$

B' pont felírása az előző kettőnél összetettebb, hiszen az *A*-ból *C*-be mutató vektornak megfeletetett komplex szám az $a + bi$ és $c + di$ komplex számok különbségének $+60^\circ$-os elforgatottja.

$$B' = ((a+bi) - (c+di)) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) + (c+di)$$

$$B' = ((a-c) + (b-d)i) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) + (c+di)$$

$$B' = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}bi - \frac{1}{2}di + \frac{\sqrt{3}}{2}ai - \frac{\sqrt{3}}{2}ci - \frac{\sqrt{3}}{2}b + \frac{\sqrt{3}}{2}d + c - di$$

$$B' = \left(\frac{1}{2}a - \frac{\sqrt{3}}{2}b + \frac{1}{2}c + \frac{\sqrt{3}}{2}d\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{1}{2}b - \frac{\sqrt{3}}{2}c + \frac{1}{2}d\right) \cdot i$$

$$G = \frac{(a+bi)+(c+di)+\left(\frac{1}{2}a - \frac{\sqrt{3}}{2}b + \frac{1}{2}c + \frac{\sqrt{3}}{2}d\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{1}{2}b - \frac{\sqrt{3}}{2}c + \frac{1}{2}d\right) \cdot i}{3}$$

$$G = \frac{\left(\frac{3}{2}a - \frac{\sqrt{3}}{2}b + \frac{3}{2}c + \frac{\sqrt{3}}{2}d\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{3}{2}b - \frac{\sqrt{3}}{2}c + \frac{3}{2}d\right) \cdot i}{3}$$

$$G = \left(\frac{1}{2}a - \frac{\sqrt{3}}{6}b + \frac{1}{2}c + \frac{\sqrt{3}}{6}d\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{6}a + \frac{1}{2}b - \frac{\sqrt{3}}{6}c + \frac{1}{2}d\right) \cdot i$$

Az *E* és *F*, *F* és *G*, valamint *G* és *E* pontok távolsága ha egyenlő, akkor készen vagyunk. Hiszen egy háromszög akkor szabályos, ha mindhárom oldala egyenlő hosszúságú.
Két komplex szám távolsága, pedig a két szám különbségének abszolút értéke. Az abszolút érték definíciója szerint egy $z = a + bi$ alakú komplex szám abszolút értéke $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$. Jelöljük a távolságot $d(E,F)$, $d(F,G)$, valamint $d(G,E)$-vel. Ha ezen távolságok egyenlőek, akkor készen vagyunk. Vagyis $d(E,F) = d(F,G) = d(G,E)$ kell belátnunk. Az átláthatóság kedvéért elhagyom az abszolút érték definíciójában használt gyökvonást.

$$d(E,F) = \left(\frac{1}{2}c - \frac{\sqrt{3}}{6}d - \frac{1}{2}a - \frac{\sqrt{3}}{6}b\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6}c + \frac{1}{2}d + \frac{\sqrt{3}}{6}a - \frac{1}{2}b\right)^2$$

$$d(E,F) = \frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{12}d^2 + \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{12}b^2 + \frac{1}{12}c^2 + \frac{1}{4}d^2 + \frac{1}{12}a^2 + \frac{1}{4}b^2 - \frac{\sqrt{3}}{6}cd - \frac{1}{2}ac -$$

$$- \frac{\sqrt{3}}{6}bc + \frac{\sqrt{3}}{6}ad + \frac{1}{6}bd + + \frac{\sqrt{3}}{6}ab + \frac{\sqrt{3}}{6}cd + \frac{1}{6}ac - \frac{\sqrt{3}}{6}bc + \frac{\sqrt{3}}{6}ad - \frac{1}{2}bd - \frac{\sqrt{3}}{6}ab$$

$$d(E,F) = \frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{3}b^2 + \frac{1}{3}c^2 + \frac{1}{3}d^2 - \frac{1}{3}ac - \frac{\sqrt{3}}{3}bc + \frac{\sqrt{3}}{3}ad - \frac{1}{3}bd$$

$$d(E,F) = \frac{1}{3} \cdot \left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - ac - \sqrt{3}bc + \sqrt{3}ad - bd\right)$$

$$d(F,G)=\left(\frac{1}{2}a-\frac{\sqrt{3}}{6}b+\frac{1}{2}c+\frac{\sqrt{3}}{6}d-\frac{1}{2}a-\frac{\sqrt{3}}{6}b\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{6}a+\frac{1}{2}b-\frac{\sqrt{3}}{6}c+\frac{1}{2}d+\frac{\sqrt{3}}{6}a-\frac{1}{2}b\right)^2$$
$$d(F,G)=\frac{1}{3}b^2+\frac{1}{4}c^2+\frac{1}{12}d^2+\frac{1}{3}a^2+\frac{1}{12}c^2+\frac{1}{4}d^2-\frac{\sqrt{3}}{3}bc-\frac{1}{3}bd-\frac{1}{3}ac+\frac{\sqrt{3}}{3}ad$$
$$d(F,G)=\frac{1}{3}\cdot\left(a^2+b^2+c^2+d^2-ac-\sqrt{3}bc+\sqrt{3}ad-bd\right)$$

$$d(G,E)=\left(\frac{1}{2}a-\frac{\sqrt{3}}{6}b+\frac{1}{2}c+\frac{\sqrt{3}}{6}d-\frac{1}{2}c+\frac{\sqrt{3}}{6}d\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{6}a+\frac{1}{2}b-\frac{\sqrt{3}}{6}c+\frac{1}{2}d-\frac{\sqrt{3}}{6}c-\frac{1}{2}d\right)^2$$
$$d(G,E)=\frac{1}{3}a^2+\frac{1}{3}b^2+\frac{1}{3}c^2+\frac{1}{3}d^2-\frac{\sqrt{3}}{6}ab+\frac{\sqrt{3}}{3}ad-\frac{1}{3}bd+\frac{\sqrt{3}}{6}ab-\frac{1}{3}ac-\frac{\sqrt{3}}{3}bc$$
$$d(G,E)=\frac{1}{3}\cdot\left(a^2+b^2+c^2+d^2-ac-\sqrt{3}bc+\sqrt{3}ad-bd\right)$$

A fent kiszámoltakból látjuk, hogy $d(E,F)=d(F,G)=d(G,E)$. Vagyis beláttuk, hogy az *EFG* háromszög szabályos.

3.3.2 Feladatok az algebra I. gyakorlatról [13]

2. Bizonyítsuk be a komplex számok abszolút értékére vonatkozó háromszög-egyenlőtlenséget $|z+w|\le|z|+|w|$!

   a) *Komplex szám abszolút értékének definícióját felhasználva*:
   Legyenek *z* és *w* komplex számok. Azt kell belátnunk, hogy
   $|z+w|\le|z|+|w|$ teljesül.

   Mindkét oldalt négyzetre emelhetjük, hiszen *z* és *w*, valamint $z+w$ abszolút értéke nem negatív valós számok, így a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás.
   $$|z+w|^2\le(|z|+|w|)^2$$
   $$|z+w|^2\le|z|^2+2\cdot|z|\cdot|w|+|w|^2$$
   Az *abszolút érték definíciója* szerint
   $$\left(\sqrt{(z+w)\cdot\left(\overline{z+w}\right)}\right)^2\le\left(\sqrt{z\cdot\overline{z}}\right)^2+2\cdot\sqrt{z\cdot\overline{z}\cdot w\cdot\overline{w}}+\left(\sqrt{w\cdot\overline{w}}\right)^2$$
   $$(z+w)\cdot\left(\overline{z+w}\right)\le z\cdot\overline{z}+2\cdot\sqrt{z\cdot\overline{z}\cdot w\cdot\overline{w}}+w\cdot\overline{w}$$

[13] Algebra I. alapszint, gyakorlat, 2. feladatsor, 2007

A konjugálás *3. és 4. tulajdonság*ából adódik, hogy

$$(z+w)\cdot(\overline{z}+\overline{w})\leq z^2+2\cdot\sqrt{z\cdot\overline{z}\cdot w\cdot\overline{w}}+w^2$$

$$z\cdot\overline{z}+z\cdot\overline{w}+w\cdot\overline{z}+w\cdot\overline{w}\leq z^2+2\cdot\sqrt{z\cdot\overline{z}\cdot w\cdot\overline{w}}+w^2$$

Konjugálás *6. tulajdonság*ából következik, hogy

$$z^2+z\cdot\overline{w}+w\cdot\overline{z}+w^2\leq z^2+2\cdot\sqrt{z\cdot\overline{z}\cdot w\cdot\overline{w}}+w^2$$

Vonjuk ki mindkét oldalból z^2+w^2-et!

$$z\cdot\overline{w}+w\cdot\overline{z}\leq 2\cdot\sqrt{z\cdot\overline{z}\cdot w\cdot\overline{w}}$$

Legyen $z\cdot\overline{w}=x$, ekkor $\overline{x}=\overline{z}\cdot w$.

$$x+\overline{x}\leq 2\cdot\sqrt{x\cdot\overline{x}}$$

$$x+\overline{x}\leq 2\cdot|x|$$

Legyen $x=u+vi$, vagyis

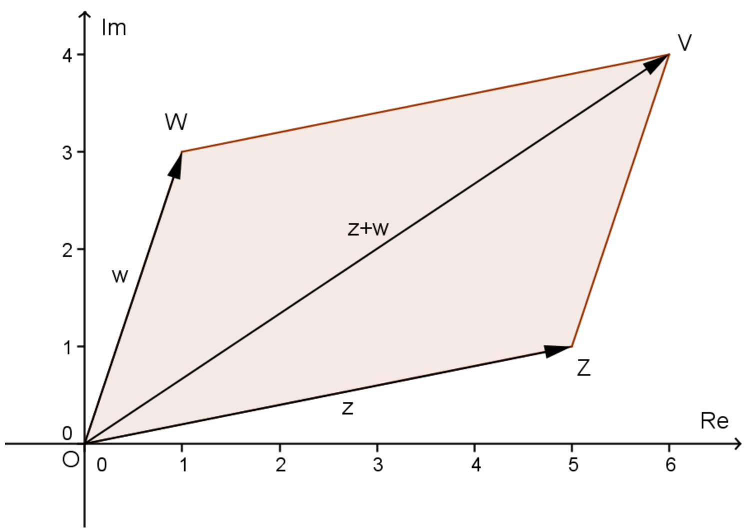
$$u+vi+u-vi\leq 2\cdot\sqrt{u^2+v^2}$$

$$2\cdot u\leq 2\cdot\sqrt{u^2+v^2}.$$

Ami pedig triviális.

b) *Geometriai magyarázat:*

Minden háromszögre teljesül, hogy bármely két oldalának összege mindig nagyobb, mint a harmadik oldal.



13.ábra

Vegyük az OZV háromszöget, ekkor a háromszög oldalai $z = \overrightarrow{OZ}$, $w = \overrightarrow{ZV}$ és $z + w = \overrightarrow{OV}$, oldalainak hossza pedig $|z|$, $|w|$ valamint $|z+w|$.

Ha a háromszög oldalaira érvényes egyenlőtlenséget felírjuk, hogy $\overrightarrow{OZ} + \overrightarrow{ZV} \geq \overrightarrow{OV}$, akkor a $|z+w| \leq |z| + |w|$ is teljesül.

Abban az esteben, ha z és w egy egyenesbe eső, egyállású vektorokkal szemléltethetők, akkor összegüket úgy ábrázoljuk, hogy w kezdőpontját eltoljuk z végpontjába. Az összegvektor ekkor a z kezdőpontjából induló w végpontjába mutató vektor.

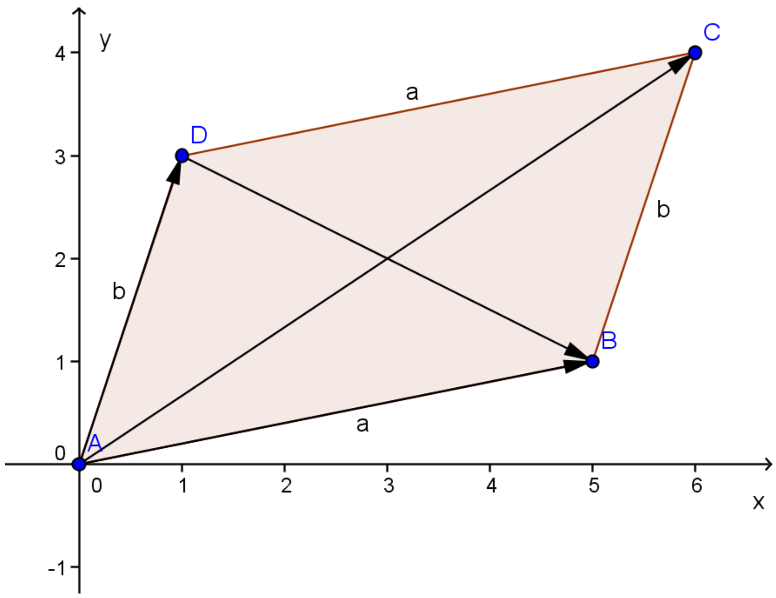
3. Bizonyítsuk be, hogy egy parallelogramma átlói hosszának négyzetösszege egyenlő a négy oldal hosszának négyzetösszegével!

a) *Vektorok segítségével:*

Legyenek a parallelogramma oldalai a (az A-ból B-be, valamint a D-ből C-be mutató vektorok) és b (az A-ból D-be, illetve a B-ből C-be mutató vektorok). Átlóit pedig jelölje e (az A-ból C-be mutató vektor) és f (a D-ből B-be mutató vektor).

Az $\overrightarrow{AB} = \underline{a}$ vektor koordinátái (a_1, a_2), hossza $|\underline{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

Az $\overrightarrow{AD} = \underline{b}$ vektor koordinátái (b_1, b_2), hossza $|\underline{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$.



14.ábra

Az oldalak hosszának négyzetösszege:

$$|\underline{a}|^2+|\underline{b}|^2+|\underline{a}|^2+|\underline{b}|^2=2\cdot\left(|\underline{a}|^2+|\underline{b}|^2\right)=2\cdot\left(\left(\sqrt{a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}}\right)^2+\left(\sqrt{b_1^{\ 2}+b_2^{\ 2}}\right)^2\right)=$$

$$=2\cdot\left(a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+b_1^{\ 2}+b_2^{\ 2}\right)$$

Az átlók hosszának négyzetösszege:

$$|\underline{a}+\underline{b}|=\sqrt{(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2}=\sqrt{a_1^{\ 2}+2a_1b_1+b_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+2a_2b_2+b_2^{\ 2}}=$$

$$|\underline{a}+\underline{b}|^2=a_1^{\ 2}+2a_1b_1+b_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+2a_2b_2+b_2^{\ 2}$$

$$|\underline{a}+\underline{b}|^2=a_1^{\ 2}+b_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+b_2^{\ 2}+2\cdot(a_1b_1+a_2b_2)$$

$$|\underline{a}-\underline{b}|=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}=\sqrt{a_1^{\ 2}-2a_1b_1+b_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}-2a_2b_2+b_2^{\ 2}}$$

$$|\underline{a}-\underline{b}|^2=a_1^{\ 2}-2a_1b_1+b_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}-2a_2b_2+b_2^{\ 2}=$$

$$|\underline{a}-\underline{b}|^2=a_1^{\ 2}+b_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+b_2^{\ 2}-2\cdot(a_1b_1+a_2b_2)$$

$$|\underline{a}+\underline{b}|^2+|\underline{a}-\underline{b}|^2=2\cdot\left(a_1^{\ 2}+b_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+b_2^{\ 2}\right)+2\cdot(a_1b_1+a_2b_2)-2\cdot(a_1b_1+a_2b_2)=$$

$$=2\cdot\left(a_1^{\ 2}+b_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+b_2^{\ 2}\right)=2\cdot\left(a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+b_1^{\ 2}+b_2^{\ 2}\right)$$

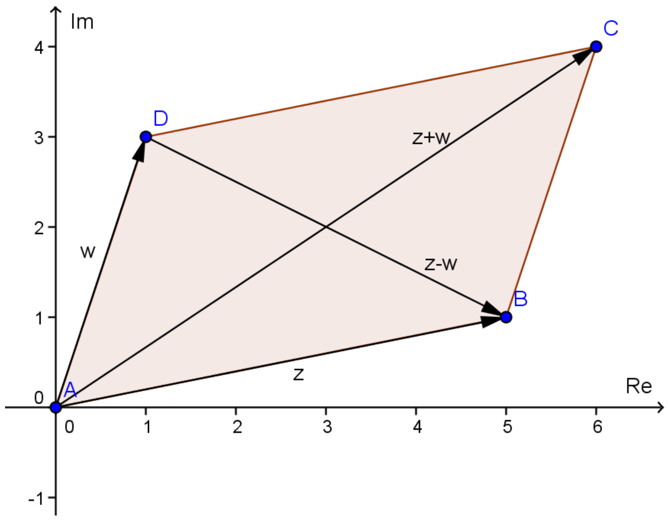
Ez megegyezik a parallelogramma oldalainak négyzetösszegével.

Tehát vektorok segítségével beláttuk, hogy a parallelogramma oldalainak négyzetösszege megegyezik átlóinak négyzetösszegével.

b) *Komplex számok segítségével:*

Első lépésként ábrázoljunk a komplex számsíkon egy parallelogrammát!

Legyenek a parallelogramma oldalai a *z* és *w*, átlói pedig a $z+w$ és $z-w$ komplex számok.



15.ábra

A z, w, valamint a $z+w$ hossza a komplex szám abszolút értékének definícióját felhasználva:

$$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$$

$$|w| = \sqrt{w \cdot \overline{w}}$$

$$|z+w| = \sqrt{(z+w)\cdot\left(\overline{z+w}\right)} = \sqrt{(z+w)\cdot\left(\overline{z}+\overline{w}\right)}$$

$$|z-w| = \sqrt{(z-w)\cdot\left(\overline{z-w}\right)} = \sqrt{(z-w)\cdot\left(\overline{z}-\overline{w}\right)}$$

Az oldalak hosszának négyzetösszege:

$$|z|^2 + |w|^2 + |z|^2 + |w|^2 = 2\cdot\left(|z|^2 + |w|^2\right) = 2\cdot\left(z\cdot\overline{z} + w\cdot\overline{w}\right)$$

Az átlók hosszának négyzetösszege:

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = (z+w)\cdot\left(\overline{z}+\overline{w}\right) + (z-w)\cdot\left(\overline{z}-\overline{w}\right) =$$
$$= z\cdot\overline{z} + z\cdot\overline{w} + w\cdot\overline{z} + w\cdot\overline{w} + z\cdot\overline{z} - z\cdot\overline{w} - w\cdot\overline{z} + w\cdot\overline{w} = 2\cdot\left(z\cdot\overline{z} + w\cdot\overline{w}\right)$$

Ez megegyezik az oldalak hosszának négyzetösszegével.

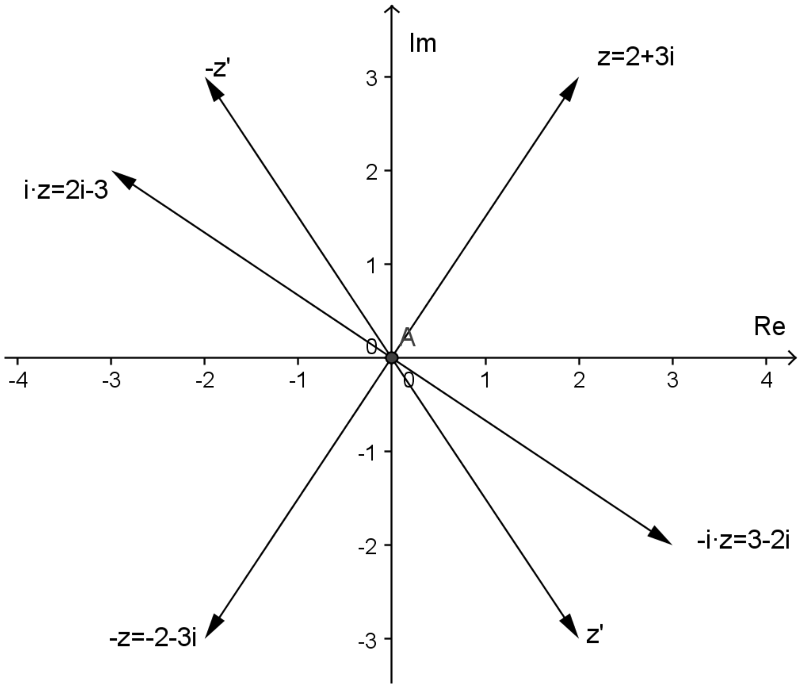
Tehát komplex számok segítségével is beláttuk, hogy a parallelogramma oldalainak négyzetösszege egyenlő átlóinak négyzetösszegével.

4. Ábrázoljuk a Gauss-számsíkon a $z = 2+3i$ komplex számot! Adjuk meg algebrai alakban és ábrázoljuk ugyanezen az ábrán a $-z, \overline{z}, -\overline{z}, iz, -iz$ számokat! Figyeljük meg, hogy az egyes vektorok milyen kapcsolatban állnak egymással![14]

- $z = 2+3i$
- $-z = -2-3i$ a z $+180°$-os elforgatottja, másképpen a z origóra való tükrözése.
- $\overline{z} = 2-3i$ a z valós tengelyre való tükrözése.[15]
- $-\overline{z} = -2+3i$ a z képzetes tengelyre vett tükörképe, vagy a $\overline{z}$-nak az origóra történő tükrözése.
- $iz = 2i-3$ a z $+90°$-os elforgatottja.
- $-iz = 3-2i$ a z $-90°$-os elforgatottja, vagy az iz origóra vett tükörképe.

[14] Bruder Györgyi és Láng Csabáné: KOMPLEX SZÁMOK, Példák és feladatok, Szerkesztette: Láng Csabáné, Lektorálta: Burcsi Péter, ELTE IK Budapest, 2008-11-26, 2. javított kiadás (34. o.)

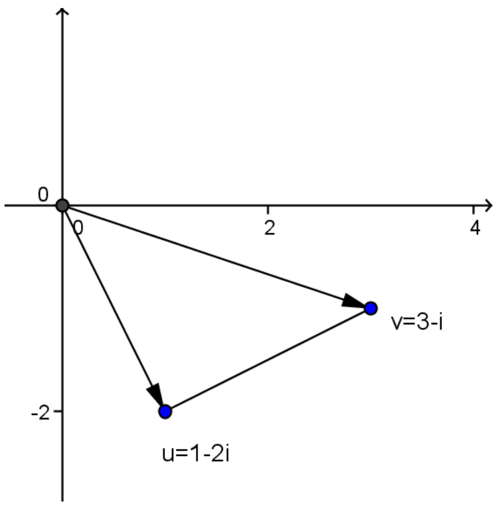
[15] Az ábrán a konjugáltakat vesszővel (') jelölöm.



16.ábra

5. Adjuk meg annak a négyzetnek a másik két csúcsát (W, Z), amelynek két csúcsát -két adott komplex szám $v = 3 - i$ ($V = (3;-1)$), és $u = 1 - 2i$ ($U = (1;-2)$) alkotja!

   A feladatban a $+90^\circ$-os forgatás az $\omega_{90^\circ} = i$-vel, valamint a -90°-os forgatás az $\omega_{-90^\circ} = -i$-vel való szorzást jelenti.

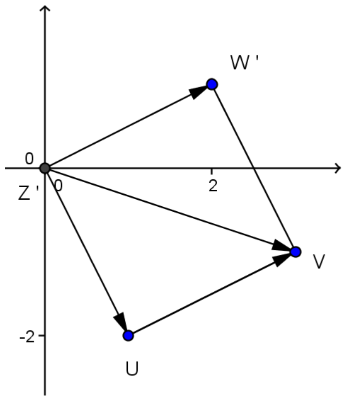


17.ábra

$$(v-u)\cdot\omega_{90^\circ}+u=((3-i)-(1-2i))\cdot i+(1-2i)=(3-i-1+2i)\cdot i+(1-2i)=$$
$$=(2+i)\cdot i+(1-2i)=2i-1+1-2i=0+0\cdot i=0=z_1$$

Vagyis a négyzet Z_1 csúcsa a *0* komplex számhoz rendelt $(0;0)$ pont.

Ezután a $\overrightarrow{ZU}$ vektort $+90^\circ$-kal elforgatva megkapjuk a négyzet W_1 csúcsát. Vagyis:
$w_1=(1-2i)\cdot i=i+2$

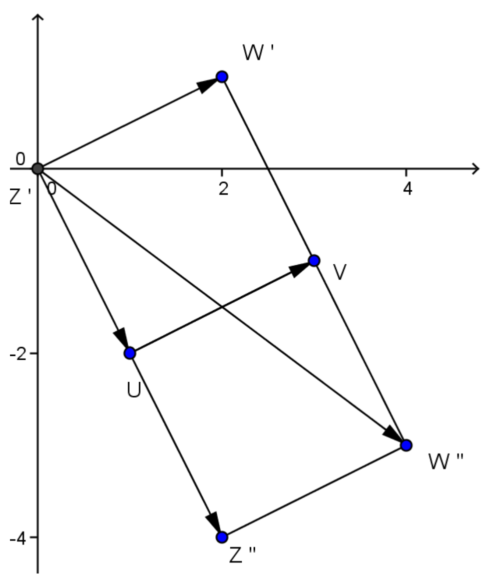


18.ábra

A másik eset, amikor az $\overrightarrow{UV}$ vektort -90°-kal forgatjuk el. Ekkor a négyzet harmadik és negyedik csúcsa a következőképpen kapható meg:

$$z_2=(v-u)\cdot\omega_{-90^\circ}+u=(2+i)\cdot(-i)+(1-2i)=-2i+1+1-2i=2-4i$$

$$w_2=z_2+w_1=2-4i+2+i=4-3i\,.$$



19.ábra

A feladatban csak a komplex számok szorzásának geometriai jelentését kellett kihasználni, mely a forgatás.

6. Egy egyenlő oldalú háromszög két csúcsa a komplex számsíkon $a = 1 + 4i$ és $b = 3 - 2i$. Számítsuk ki a harmadik csúcsot!

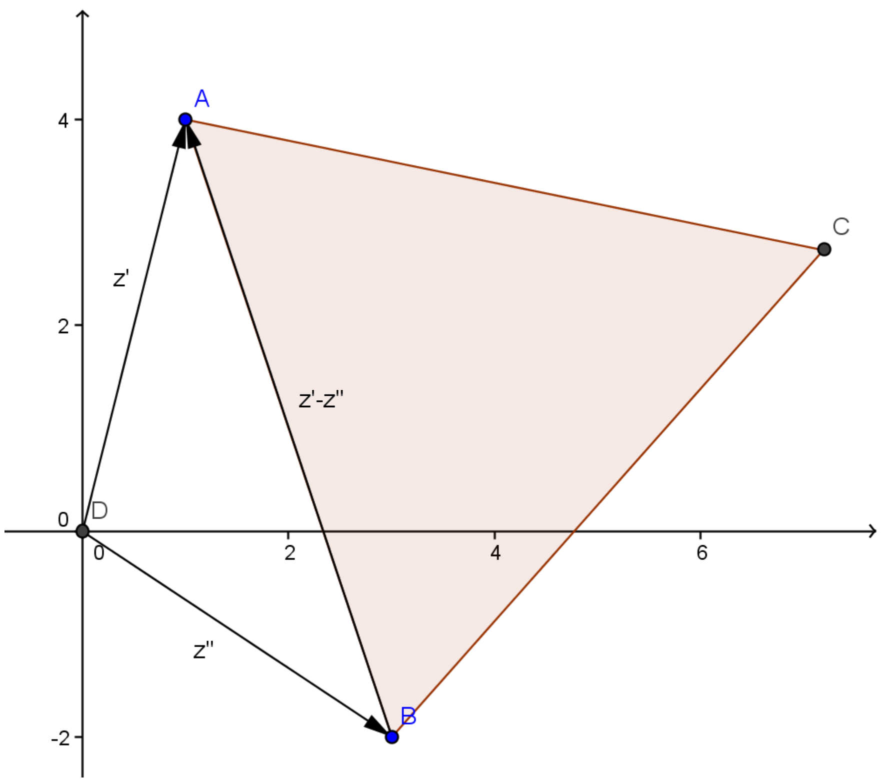
Az előző feladathoz hasonlóan, a megadott két csúcsból meg tudjuk határozni a háromszög ezen két csúcsához tartozó oldalát. Ezt $\pm 60^\circ$-kal elforgatva, megkapjuk a háromszög mindkét lehetséges harmadik oldalát.

A $\pm 60^\circ$–os forgatás pedig az $\omega_{60^\circ} = \cos 60^\circ + i \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$-vel, valamint $\omega_{-60^\circ} = \cos(-60^\circ) + i \cdot \sin(-60^\circ) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$-vel való szorzást jelenti.

Először nézzük a -60°-os forgatást!

$$c = (z_1 - z_2) \cdot \omega_{-60^\circ} + z_2 = (1 + 4i - 3 + 2i) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) + (3 - 2i) =$$

$$= (-2 + 6i) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) + (3 - 2i) = -1 + \sqrt{3}i + 3i + 3\sqrt{3} + 3 - 2i = (2 + 3\sqrt{3}) + (1 + \sqrt{3})i$$

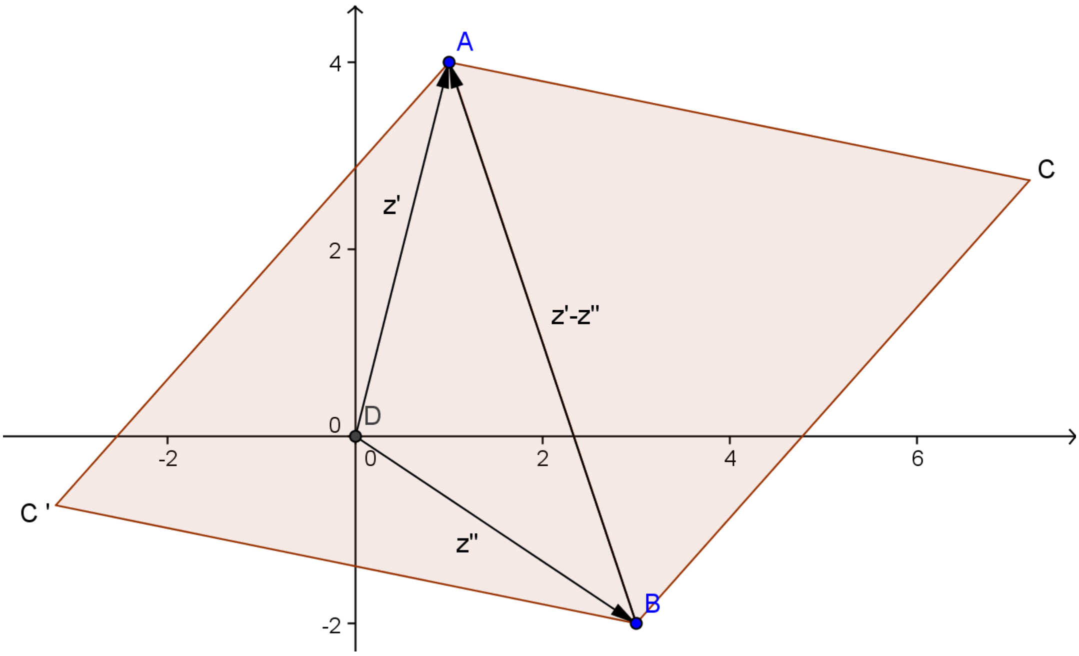


20.ábra

A $+60^\circ$-os forgatás pedig:

$$c' = (z_1 - z_2)\cdot \omega_{60^\circ} + z_2 = (1+4i-3+2i)\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+(3-2i) = (-2+6i)\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+(3-2i) =$$
$$= -1-\sqrt{3}i+3i-3\sqrt{3}+3-2i = \left(2-3\sqrt{3}\right)+\left(1-\sqrt{3}\right)i$$

Így megkaptuk mindkét lehetséges harmadik csúcsot.



21.ábra

Ezen feladatok áttekintésével a tanulók betekintést nyerhetnek a komplex számok geometriai alkalmazásába, valamint további középiskolai geometria feladatoknál a komplex számokkal való megoldást is meggondolhatják a diákok.

4 Összegzés

Több tankönyv és feladatgyűjtemény is segítséget nyújtott abban, hogyan építsem fel szakdolgozatomat. Eleinte nagyon nehéznek bizonyult a következetes, jól követhető felépítés létrehozása. Egyre több szakirodalommal megismerkedve és konzulensemnek, valamint Szabó Csaba Tanár Úrnak köszönhetően úgy érzem, sikerült átlátható rendszerbe foglalnom választott témakörömet.

A szakdolgozat készítése közben ébredtem rá arra, hogy mennyire fontos a „jó” tanári munka, amely rengeteg szakmai felkészülést és hozzáértést igényel. Saját tapasztalat híján csak feltételezni tudom, hogy a dolgozatban megfogalmazottak működőképesek lehetnek középiskolában.

5 Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megköszönni Somfai Zsuzsa Tanárnőnek, hogy tudásával és szakmai tapasztalatával segítette munkámat, főként a szakdolgozat felépítésének összeállításában, és a nehézkesen, néhol ügyetlenül megfogalmazott részek korrigálásában; valamint Szabó Csaba Tanár Úrnak szakdolgozatom átdolgozásakor nyújtott segítségét.

Végül, de nem utolsó sorban szeretném megköszönni családomnak, hogy tanulmányaim során mindvégig támogattak.

6 Irodalomjegyzék

- Algebra I. alapszint előadás jegyzet, 2007
- Algebra I. alapszint, gyakorlat, feladatsorok, 2007
- Bárczy Barnabás: Algebra II., Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1962
- Bruder Györgyi és Láng Csabáné: KOMPLEX SZÁMOK, Példák és feladatok, Szerkesztette: Láng Csabáné, Lektorálta: Burcsi Péter, ELTE IK Budapest, 2008-11-26, 2. javított kiadás (34. o.)
- *Kiss Emil:* Bevezetés az algebrába, Typotex , 2007
- *Reiman István:* A geometria határterületei, Gondolat, Budapest, 1986
- *Sárközy András:* Komplex számok példatár, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973
- *Szele Tibor:* Bevezetés az algebrába, Tankönyvkiadó, 1977
- *Dr. Molnár József:* Az algebra és az elemi függvények tanítása, Tankönyvkiadó, Budapest, 1967
- Pszichológia pedagógusoknak, Szerkesztette: *N. Kollár Katalin, Szabó Éva*, Osiris Kiadó, Budapest, 2004
- *Réthy Endréné Dr.:* Motiváció a tanítási órán, Tankönyvkiadó, Budapest, 1978
- *Réthy Endréné:* Motiváció, tanulás, tanítás, Nemzetközi Tankönyvkiadó, Budapest, 2003
- *Richard R. Skemp:* A matematikatanulás pszichológiája, Gondolat, Budapest, 1975

- www.trefort.elte.hu/~gerocs/ppt/geo_napoleon_en.ppt

Szakdolgozatomban a címsorok elején hivatkoztam azokra a szakirodalmakra, amelyeket felhasználtam, és amelyekből helyenként szó szerint idéztem. Ezeket nem jelöltem külön idézőjellel, mert a matematikailag helyes megfogalmazás elkerülhetetlenné teszi a pontos idézést.