A Geogebra használhatósága a középiskolai matematikaórán

Szakdolgozat

Készítette: Simon Tibor
Matematika BSc, tanári szakirány

Témavezető: Csikós Balázs
ELTE TTK, Geometriai Tanszék
Egyetemi docens, tanszékvezető

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Budapest, 2012

Tartalomjegyzék

Miért választottam ezt a témát? ... 3
Néhány szó a Geogebráról ... 4
Válogatott versenyfeladatok ... 5
C. 1037. ... 5
C. 1084. ... 6
C. 1089. ... 8
Segédfeladat ... 10
B. 4264. ... 13
B. 4298. ... 15
B. 4314. ... 19
Régi versenyfeladat ... 21
Ellipszis, hiperbola, parabola ... 24
Kúpszelet öt ponton keresztül ... 24
Ellipszis ... 26
Hiperbola ... 29
Parabola ... 33
Szemléltetések ... 36
Pitagorasz-tétel bizonyításához ötlet ... 36
Hangyák a rúdon ... 38
Animáció egy hétköznapi feladathoz ... 41
Forrásjegyzék: ... 44

Miért választottam ezt a témát?

Egészen fiatal korom óta környezetem nagyon kreatívnak tart. Már általános iskolában kialakult bennem a matematika szeretete. Egyre több dolog érdekelt, de nagyon sok esetben kérdéseimre nem kaptam kielégítő választ. A tanórákon nem kaptam kiemelt figyelmet, plusz feladatokkal nagyon ritkán tudtam foglalkozni. A középiskolában fakultációs csoportba jártam, hetente kettővel több óránk volt két évig, matematika versenyekre is jártam, de a versenyekre való felkészítést egyik tanárom sem akarta vállalni. Többek között a matematika iránti érdeklődés mellett csalódottságomból fakadóan is az a gondolat fogalmazódott meg bennem, hogy tanárnak jelentkezzek. Minél közelebb kerültem az érettségihez, annál könnyebben jöttem rá tételek bizonyítására önállóan és váltak a feladatok egyre könnyebbé. Ez megerősítette bennem azt a gondolatot, hogy helyem lenne ezen a pályán.

Elsős középiskolásként ismerkedtem meg a Geogebrával, innentől kezdve sokféle feladatnál, új tananyagnál használtam mind középfokú, mind felsőfokú tanulmányaim során. Nagyon sokszor gyorsan megkaptam egy-egy feladat megoldását otthon, majd az órák és gyakorlatok alkalmával a helyes eredményen kívül a megoldásig vezető utat is következetesen vázoltam. Mióta a Geogebrát használom, megfigyeltem, hogy előnyösebb helyzetben vagyok sokaknál, mert számomra nem jelent gondot egy-egy feladat elképzelése, megjelenítése, összefüggések észrevétele. Természetesen a programot szabadidőmben is gyakran használom, feladatokra és tételekre keresek könnyen lerajzolható megoldást, bizonyítást, amelyeket a kezdőlépések után bárki könnyen be tud fejezni, vagy végignézve azt valami újra jöhet rá. Mivel egyre népszerűbb a Geogebra, a kivetítők, interaktív táblák is egyre elterjedtebbek, és a számítógép-használók tábora is igen népes, úgy gondoltam, én is leírom ezzel kapcsolatos észrevételeimet, ötleteimet.

Szakdolgozatomban a Geogebra használhatóságát vizsgálom abból a szempontból, hogy mutat-e valami érdekeset, újat, szokatlant vagy meglepőt. Szakdolgozatomban három részegységet különítek el. Mutatok nehezebb feladatokat, melyek a megoldását és bizonyítását is jelentősen segíti a program. Majd az ellipszis, hiperbola és parabola részeit is megjelenítő szerkesztési feladatokról írok, melyek beleférnének a középiskola tananyagába, iskolánkban azonban nem hallottunk róluk. Végül olyan egyszerűbb feladatoknál vagy bizonyításnál használható szemléltetéseket mutatok, melyek után a tanuló úgy érezheti, kielégítő választ kapott, és talán az óra hangulatát is kicsit javítják. Szakdolgozatommal a célom egy olyan munkát kiadni kezeim közül, melyből a Geogebrát használó matematikatanárok ötleteket meríthetnek, szerethetőbbé tehetik óráikat.

Ezúton szeretném megköszönni Csikós Balázs tanár úrnak, hogy vállalta a témavezetést, a tőle kapott tanácsokat, ötleteket, észrevételeket és kritikákat, melyekkel hozzájárult munkám készítéséhez.

Néhány szó a Geogebráról

A Geogebra egyre elterjedtebb dinamikus program a matematikatanárok, és tanulók körében. Ingyenesen letölthető a geogebra.org internetes oldalról. Széles körben használható feladatok megoldására, ugyanis geometriai szerkesztéseket lehetővé tevő rajzlappal és algebrai ablakkal is rendelkezik, innen ered a neve is.

Szakdolgozatom írása alatt a Geogebra 4.0.30.0-s verziót használtam, az ennél korábbi verziókban nem biztos, hogy minden szerkesztés kivitelezhető. Minden szerkesztést alaposan részletezek, lépésenként reprodukálhatóvá téve azokat, továbbá minden feladathoz legalább egy ábrát csatolok is az ellenőrzéshez. Munkámban a Geogebra által használt jelöléseket használom, sokszor úgy írok le dolgokat, ahogy azt a programba is beírhatjuk. A szerkesztéseknél többnyire a Geogebra automatikus elnevezéseit használom, de ahol ez zavaró lehet, átnevezem őket. A szakdolgozat olvasata közben javaslom a program szimultán használatát. Munkám megértése, a feladatok elkészítése nem igényel jelentős jártasságot a program használatát illetően, de mindenképpen előny, ha az olvasó tudja, mit hol keressen, ugyanis néha bonyolultabb eszközöket alkalmaztam.

Válogatott versenyfeladatok

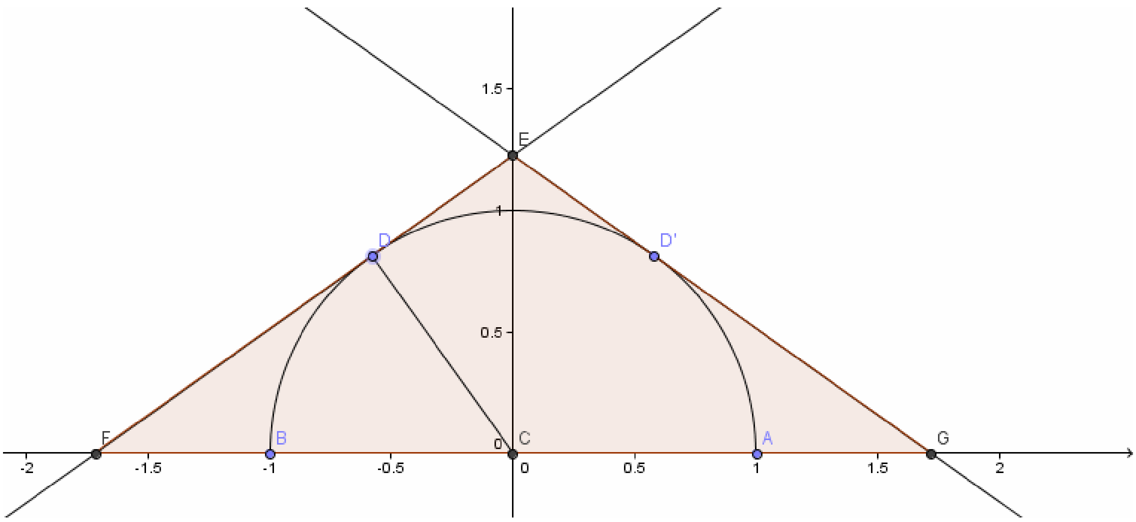
Az alábbiakban 7 olyan feladatot mutatok, ahol a Geogebra segítségével gyorsan megoldhatunk nehezebb feladatokat. Valamennyi feladat szövege után a programmal való megjelenítés lépései következnek, azt követően a feladat megoldása vagy bizonyítása, végül egy rövid összefoglaló, esetleg útmutatás órai alkalmazáshoz.

C. 1037.

Egy félkör köré írt egyenlőszárú háromszög alapja az átmérő egyenesére esik, szárai pedig érintik a félkört. Az ilyen háromszögek közül melyiknek legkisebb a területe?

A feladat megjelenítése Geogebrával:

1. Vegyük fel az A(1,0), B(-1,0) és C(0,0) pontokat.
2. Rajzoljuk meg a B-hez és A-hoz tartozó c félkörívet.
3. Vegyünk fel egy D pontot c-n, és az y-tengelyre vonatkozó D' tükörképet.
4. Húzzuk meg D-ből és D'-ből a c-hez tartozó érintőket, a-t és b-t.
5. Vegyük fel a és b metszéspontját E-t, továbbá az x-tengely metszéspontjait a-val és b-vel, F-et és G-t.
6. Rajzoljuk meg a CD szakaszt, d-t.
7. Vegyük fel az EFG háromszöget, poligon1-et.
8. Mozgassuk D-t c-n, és figyeljük meg poligon1 területét.
9. A későbbiekben vegyük fel EFC körülírt körét, h-t, ha szükséges.



1. ábra. KöMaL C. 1037. feladathoz magasságtétel

A feladat megoldása:

D-t c-n mozgatva megkaphatjuk az összes feladatnak eleget tevő háromszöget (amennyiben D nem esik a tengelyekre). A mozgatás során poligon1 területét figyelve a derékszögű egyenlőszárú háromszög területe adódik a legkisebbnek.

Bizonyítás:

Az eredeti háromszög területe megegyezik a két részháromszög EFC és EGC területének összegével. Az EFG háromszög szimmetriája miatt ezek területe egyenlő és megegyeznek az eredeti háromszög területének felével. Az EFC háromszög területe (D a c-n B-hez legyen közelebb) az EF oldalhossz és d magasság szorzatának fele, d állandó, tehát EF minimumát keressük. Az EFC derékszögű háromszögben DC az átfogóhoz tartozó magasság, a magasságtétel szerint: $\sqrt{ED \cdot DF} = d$, továbbá ED+DF=EF miatt alkalmazható a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség EF minimumának meghatározásához. Amennyiben a tanulóknak nem jut eszükbe a tétel, végezzük el a 9. lépést is (h vagyis EF Thálesz-körének megjelenítése), mellyel a két szakasz (ED és DF) mértani közepét szemléltetjük.

Összefoglalás:

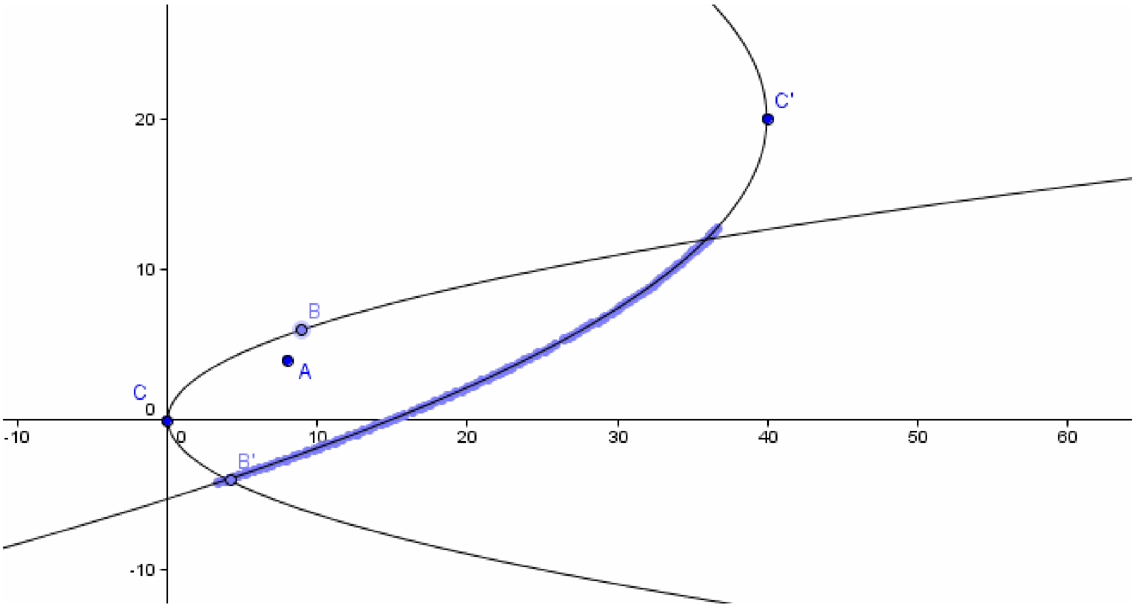
Általában a beírt körös feladatoknál először az alakzatot rajzolják meg, majd körülbelül berajzolják a beírt kört. Bár ez a feladat félkörről szól, lehet, hogy az előbbiek szerint járna el több diák. Ha ily módon közelítjük meg a feladatot, az kevésbé célravezető. Gyorsan eredményre az érintési pont vizsgálatával juthatunk.

C. 1084.

Az $y^2=4x$ egyenletű parabola húrját a $P(8;4)$ pont 1:4 arányban osztja. Adjuk meg a húr végpontjainak a koordinátáit.

A feladat megjelenítése Geogebrával:

1. Vegyük fel az A(8,4) pontot és írjuk a parancssorba: y^2=4x, ezzel felvesszük a c parabolát.
2. Vegyük fel a B pontot c-n és a C(0,0) pontot.
3. Alkalmazzunk centrális nyújtást B-re és C-re, valamint c-re A-ból -4-es aránnyal, a képpontok B' és C', valamint a c' parabola.
4. Mozgassuk B-t úgy, hogy B' a parabola egy-egy metszéspontjánál legyen, és olvassuk le B koordinátáit.



2. ábra. KöMaL C. 1084. feladathoz nyújtás

A feladat megoldása:

Centrális nyújtást alkalmazva a parabola pontjaira megkapjuk azon B' pontok képét, amikre a BAB' osztóviszony 1/4 (másképpen: amikre BB'-t A 1:4 arányban osztja). Ezen képpontok között keresünk olyan(oka)t, amely(ek) c-n is rajta van(nak). Vagyis c és c' metszéspontjait keressük. A c' parabola egyenletéhez szükségünk van a talppontjának C' koordinátáira, ami (40,20). Ezt kell beírnunk c egyenletébe a -4-es nagyítással: az $y^2 = 4x$ egyenlet változóit osszuk el -4-gyel, x helyébe x-40-et, y helyébe y-20-at írva és a nevezőkkel beszorozva: $(y-20)^2 = -4 \cdot 4(x-40)$

A zárójeleket felbontva és c' egyenletébe c-t beírva:

$$y^2 - 40y + 400 = -4 \cdot 4x + 640 = -4 \cdot y^2 + 640$$

$$5y^2 - 40y - 240 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{40 \pm \sqrt{1600 + 4800}}{10} = 4 \pm 8$$

A kapott eredményt c egyenletébe írva két képpontot kapunk: (36,12), (4,-4). A képpontok párjait megkereshetjük, ha a nyújtást elvégezzük visszafelé, A-t az origóba mozgatjuk, a koordinátákat elosztjuk -4-gyel, majd A-t a helyére mozgatjuk. A képpontok ősképei: (1,2), (9,6). A keresett húrok végpontjaikkal: [(1,2),(36,12)],[(9,6),(4,-4)].

Összefoglalás:

A feladat megoldása során minimális koordinátageometriát használni kell, de ezek egyértelműekké válnak az adott szituációban, ellenben a komal.hu oldalon közölt megoldás kiinduló ötlete is távol áll a középiskolásokra jellemző gondolkodástól, miszerint pontpárral számolunk, ahol a pontpár eleget tesz egy kényszerfeltételnek is. Ez a feladat jó lehet a tanulók vizsgálatára aszerint, hogy inkább a mechanikusan mindent kiszámoló koordinátageometriát, vagy az ötleteket igénylő síkgeometriát részesítik előnyben.

C. 1089.

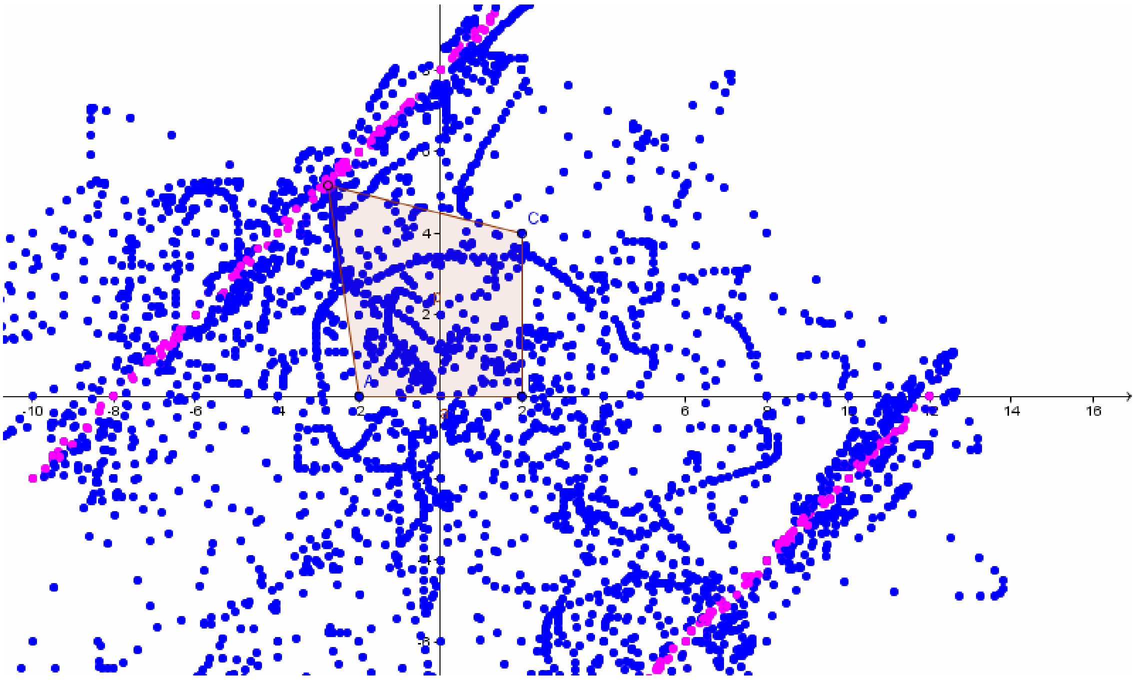
A pozitív körüljárású *ABCD* négyszög területe 20, három csúcsának koordinátái *A*(-2;0), *B*(2;0) és *C*(2;4). Mennyi az *ABCD* négyszög kerületének minimuma?

A feladat megjelenítése Geogebrával:

1. Vegyük fel az A(-2,0), B(2,0) és C(2,4) pontokat, továbbá ezektől nem túl távol egy D pontot is.
2. Vegyük fel az ABCD sokszöget, poligon1-et és a könnyebb kezelhetőség miatt nevezzük át p-re.
3. Lépjünk be a D pont tulajdonságaihoz, jelenítsük meg nyomvonalát az alap fülön. Kattintsunk át a haladó fülre és a dinamikus színeknél a piroshoz írjuk be

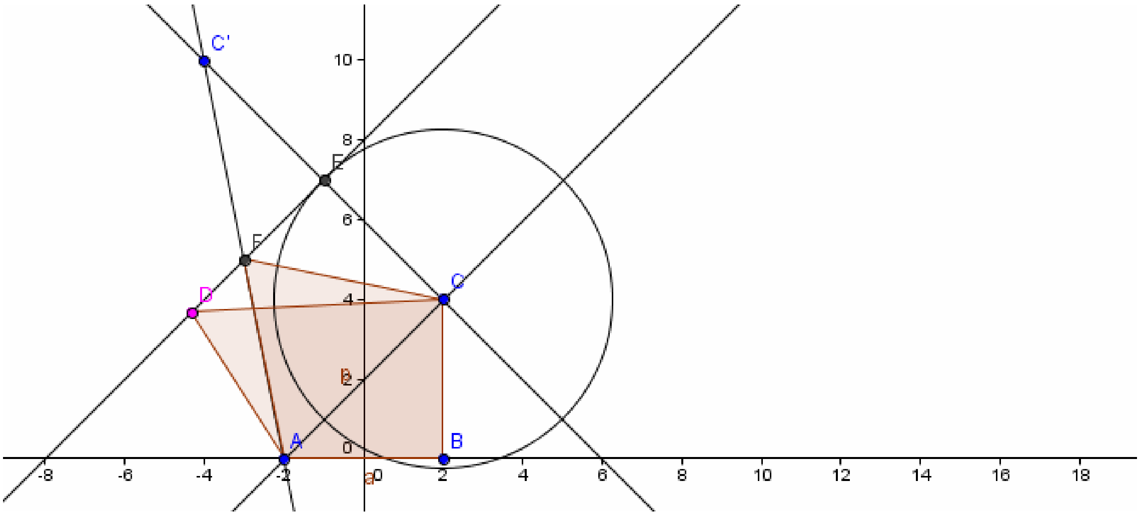
a következőt: (p-20)^2<0.1 Megjegyzés: az egyenlőtlenség jobb oldalán álló szám nullához közeli kell hogy legyen, így kapunk kiértékelhető eredményt.

4. Mozgassuk a síkon a D pontot. Mivel p az ABCD sokszög területét adja, azon pontok helyét fogjuk pirosnak látni, ahol a poligon területe körülbelül 20 egység. Ha megsejtjük a mértani helyet, érdemes a kapott alakzat környékét besatíroznunk, és további helyeken megnéznünk találunk-e ezen kívül is jó pontokat.



3. ábra. KöMaL C. 1089. feladathoz negyedik csúcs lehetséges mértani helyei

5. Vegyük fel az AB egyenest, e-t. Majd C-ből állítsunk merőlegest e-re, f-et.
6. Vegyük fel a C középpontú $3\sqrt{2}$ (a programban 3*sqrt(2)) sugarú g kört.
7. Vegyük fel f és g bal oldali (az e-nek azon oldalán levő metszéspontot, amely nem tartalmazza B-t) metszéspontját E-t, és állítsunk merőlegest belőle f-re, így megkapjuk h-t.
8. Tükrözzük C-t h-ra, majd az így kapott C'-re és A-ra rajzoljunk egyenest, i-t. Vegyük i és h metszéspontját F-et.



4. ábra. KöMaL C. 1089. feladathoz keresett pont megszerkesztése

A feladat megoldása:

Megkerestük a D ponttal annak lehetséges helyeit, ha csak a területet vesszük figyelembe. 1-4. lépések. Két egyenest kaptunk, de ezek közül a pozitív körüljárás miatt csak az egyik jó, a fentiek szerint h. 5-7. lépések. Ezek után az ACD azonos területű háromszögek közül keressük a minimális kerületűt. Mivel az AC szakasz hossza adott, az AD, DC törtvonal hosszának minimuma kell. Ez a 8. lépés. Ezután az alábbi segédfeladatot alkalmazzuk.

Segédfeladat

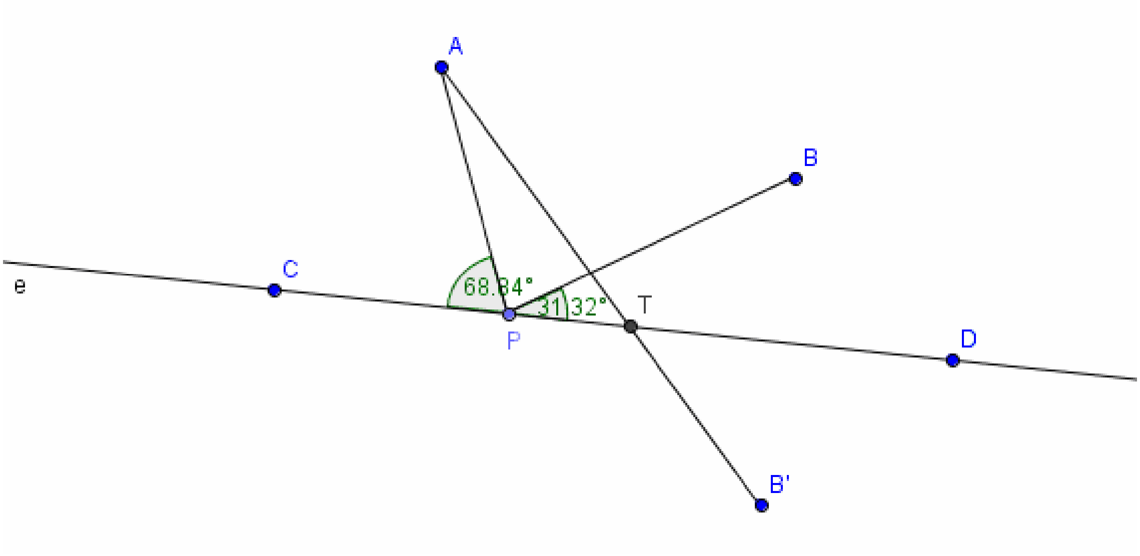
Adott a síkon egy e egyenes és az e által határolt egyik félsíkon A és B. Szerkesszük meg e-n azt a P pontot melyre az AP + PB összeg minimális.

A középiskolákban gyakran elhangzó megoldás: Tükrözzük B-t e-re, ekkor PB=PB' AP+PB=AP+PB'. Mivel A és B' különböző félsíkokon vannak, bárhogy kötjük őket össze, az összekötő vonal metszeni fogja e-t. Mivel két pont között a legrövidebb út az egyenes, az AB'-re fektetett egyenes és e metszéspontja a keresett pont.

A feladat megjelenítése Geogebrával:

1. Vegyük fel a síkon a C és D pontokat.

2. Vegyünk fel a C és D pontokon áthaladó e egyenest.
3. Vegyük fel az A és B pontokat az e egyenes által határolt egyik félsíkon úgy, hogy e-re vonatkozó merőleges vetületeik a CD szaksz belsejébe essenek úgy, hogy C-hez A merőleges vetülete legyen közelebb mint B-é.
4. Vegyük fel a P pontot e-n úgy, hogy az elválassza C-t D-től.
5. Vegyük fel az a szakaszt az A és P pontok között, továbbá a b szakaszt B és P között.
6. A parancssorban vegyük fel a c=a+b számot.
7. Mozgassuk a P pontot C és D között, közben figyeljük c változását.
8. Mozgassuk P-t úgy, hogy c értéke a legkisebb legyen.
9. Vegyük fel az $APC\angle = \alpha$ és $DPB\angle = \beta$ szögeket.
10. Mozgassuk a 3. lépésben leírtak megszegése nélkül az A és B pontokat majd keressük meg a hozzájuk tartozó minimális c-t P-vel, és nézzük meg az α és β szögek nagyságát. Párszor ismételjük meg ezt a lépést.
11. Tükrözzük B-t e-re, az így kapott B'-t és A-t kössük össze egy szakasszal, d-vel.
12. Vegyük d és e metszéspontját, T-t.



5. ábra. Segédfeladat megoldásának keresése

El szeretnénk érni, hogy a tanulók rájöjjenek arra, hogy a feladat tengelyes tükrözést igényel. Megoldás: Nyilván ha a P az A és B merőleges vetületei által határolt szakaszon kívül esnek, bármely külső pontnál biztosan közelebb van a nem távolabbi merőleges vetület, hiszen mindkét ponthoz közelebb vagyunk a háromszög-egyenlőtlenség miatt. Abban az esetben, ha A és B merőleges vetülete egybeesik, a keresett pont az előbbi ok miatt a legközelebbi. Ha az A és B vetületei nem esnek egybe, egyetlen megfigyelhető dolog marad, az egyenes és a szakaszok által bezárt szögek nagyságai, ehhez ugyanis nem kell újabb alakzatot felvenni. Mivel a Geogebrával meg tudjuk keresni közelítőleg P-t, le tudjuk olvasni azt is, hogy optimális helyzetben a szakaszok az egyenessel egyforma szöget zárnak be. Általános iskolákban tanítják fizika órán a tükrözést, így ebből a gyerekek nagy része rájön, hogy tengelyes tükrözésnél a beeső fény hajlásszöge megegyezik a visszavert fény hajlásszögével, tehát tükrözzük B-t e-re. Most már csak azt kell megmutatnunk, hogy valóban d és e metszéspontja, vagyis T a legközelebbi. Ez utóbbi nyilván igaz, hiszen két pont között a legrövidebb út az egyenes.

Visszatérve a feladathoz:

A szimmetria miatt CF=AF, a feladatnál szerencsénk van F-fel, mert koordinátái egészek, így CF hossza $\sqrt{5^2+1^2}=\sqrt{26}$, a négyszög kerülete $8+2\cdot\sqrt{26}$.

A feladat bizonyítása:

Az ABC háromszög területe 8 egység, tehát ACD területe 12 egység, ahol az egyik oldal hossza $4\sqrt{2}$, ezért az ehhez az oldalhoz tartozó magasság $3\sqrt{2}$. Az AC oldaltól a B-vel ellentétes oldalon $3\sqrt{2}$ távolságra lévő egyenesen kell keresnünk D-t. Ahogyan a segédfeladatnál megmutattam a szimmetrikus háromszög esetén a legkisebb a kerület.

Összefoglalás:

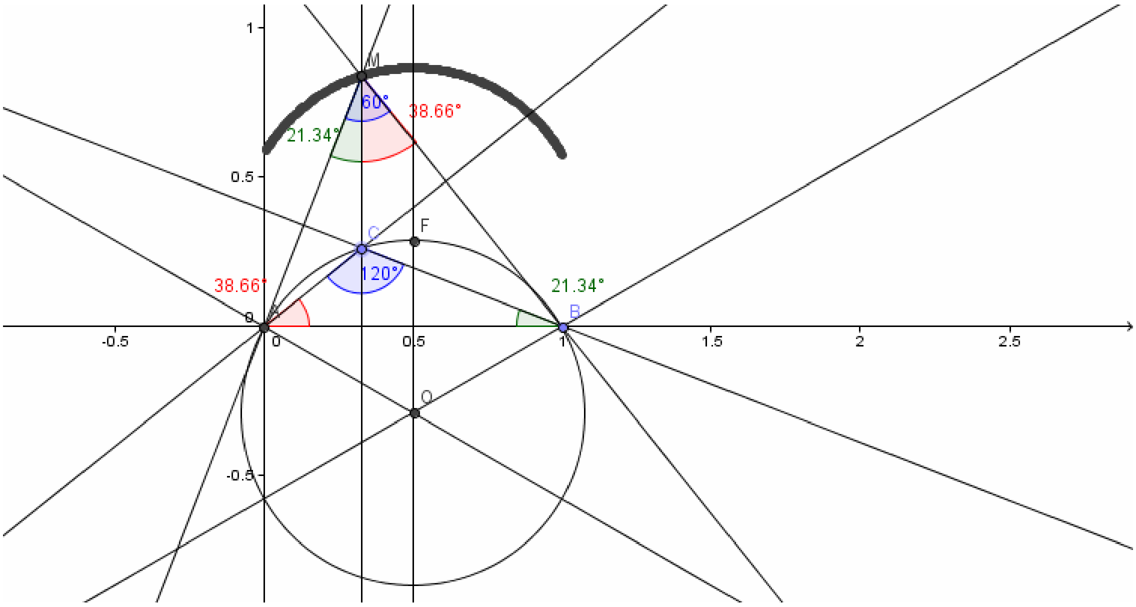
A feladat megoldásának kulcsa az volt, hogy a négyszöget háromszögekre bontottuk, majd megkerestük a legkisebb kerületűt a megfelelő területűek között. A geogebra nagy segítség lehet, ha a gyerekek még nem végeztek olyan feladatot, ahol azonos oldalú és azonos magasságú háromszögekkel kell dolgozni. A rajzlap besatírozása is minden bizonyára emeli az óra hangulatát.

B. 4264.

Az ABC háromszög C csúcsánál lévő szöge 120^o. A háromszög magasságpontja M, a körülírt körének középpontja O, a kör ACB ívének felezőpontja pedig F. Bizonyítsuk be, hogy $MF=FO$.

A feladat megjelenítése Geogebrával:

1. Vegyük fel az A(0,0) és B(1,0) pontokat.
2. A parancssorban hozzuk létre az a és b egyeneseket: y=-x/sqrt(3), y=(x-1)/sqrt(3). Vegyük fel ezek O metszéspontját is.
3. Rajzoljunk kört O középponttal A-n át, c-t, majd Vegyük fel az első síknegyedben c-n a C pontot.
4. Rajzoljunk egyenest A-n és C-n át, d-t, majd erre állítsunk merőlegest B-ből, e-t.
5. Rajzoljunk egyenest B-n és C-n át, f-et, majd állítsunk erre merőlegest A-ból, g-t.
6. Vegyük az e és g egyenesek M metszéspontját, majd rajzoljunk egyenest C-n és M-en át, h-t.
7. Vegyük az A és B szakaszfelező merőlegesét, i-t és annak első síknegyedbeli metszéspontját c-vel, F-et.
8. Kapcsoljuk be M nyomvonalát és mozgassuk az első síknegyedben C-t.
9. Vegyük az $ACB\angle = \alpha$ (színe: kék), $BAC\angle = \beta$ (színe: piros), $CMB\angle = \gamma$ (színe: piros, mérete: 60), $AMC\angle = \delta$ (mérete: 60), $CBA\angle = \varepsilon$, valamint $AMB\angle = \zeta$ (színe: kék) szögeket.
10. Ismét mozgassuk meg C-t az első síknegyedben, és figyeljük meg a szögek összefüggéseit.



6. ábra. KöMaL B. 4264. feladathoz látókörívek alkalmazása

Az állítás bizonyítása:

$BAC\angle = CMB\angle$ és $AMC\angle = CBA\angle$ Mivel merőleges szárú szögek, így $AMB\angle = 180°\text{-}120°\text{=}60°$ A C pont c-n elfoglalt helyétől függetlenül, vagyis M-ből az AB szakasz ugyanazon szög alatt látszik. A kerületi és középponti szögek tétele alapján az ABM köré rajzolt kör középpontjából AB 120°-os szögből látszik, vagyis c-n van, továbbá A-tól és B-től egyenlő távol, vagyis i-n, tehát az ABM köré rajzolt kör középpontja F. Ebből adódóan MF=AF. A kerületi és középponti szögek tétele alapján $AOB\angle = ACB\angle = 120°$, továbbá az AB ív felezőpontja F és O rajta van i-n, O és F egymás AB-re vett tükörképei, tehát $FAO\angle = 2 \cdot \dfrac{180° - 120°}{2} = 60°$. Mivel O-ból az AB ív 120° alatt látszik, a feleakkora AF ív 60° alatt, tehát FAO háromszög szabályos, vagyis FO=AF=MF.

Összefoglalás:

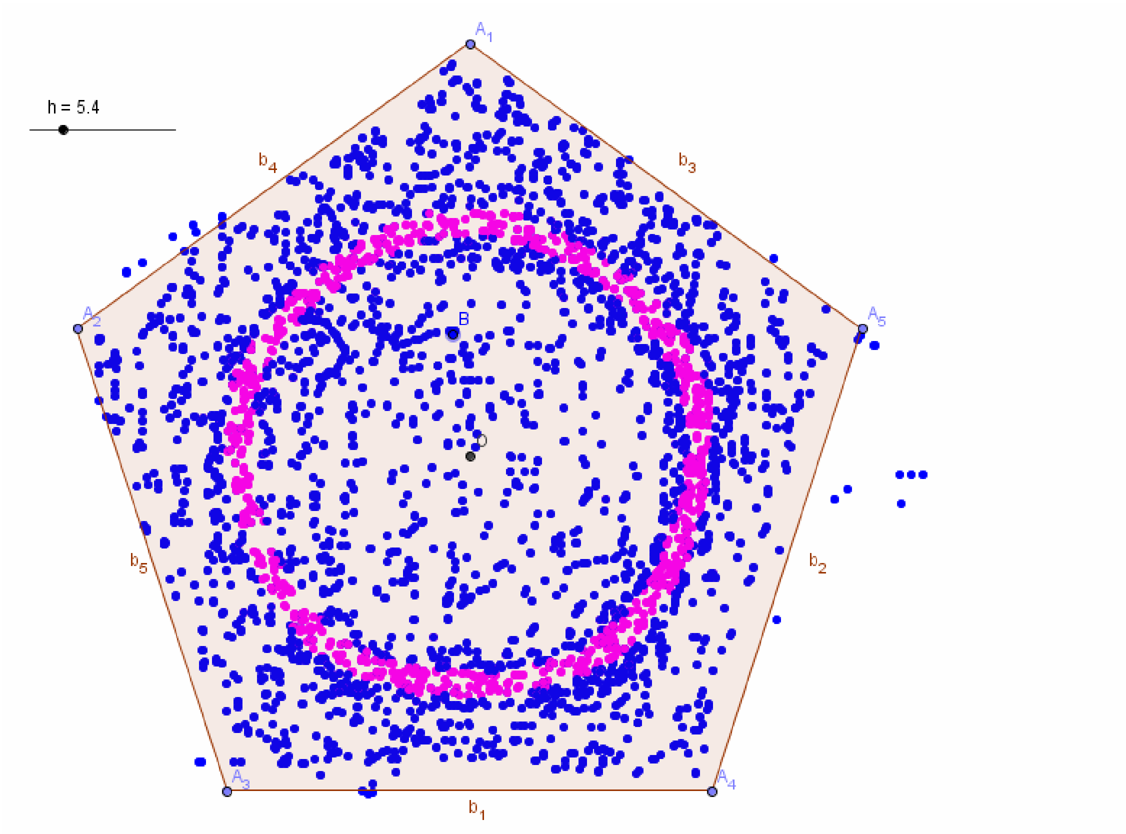
A feladat jó példa a látókörívek alkalmazására, továbbá indítója is lehet azon feladatcsokornak, melyekben a háromszög egy oldala rögzített, a harmadik csúcsból pedig ez az oldal adott szög alatt látszik, és arra vagyunk kíváncsiak, hogyan viselkedik a háromszög magasságpontja, beírt körének középpontja.

B. 4298.

Adott egy szabályos ötszög. Határozzuk meg azt a pontot, amelynek az ötszög csúcsaitól való távolságainak az összege minimális.

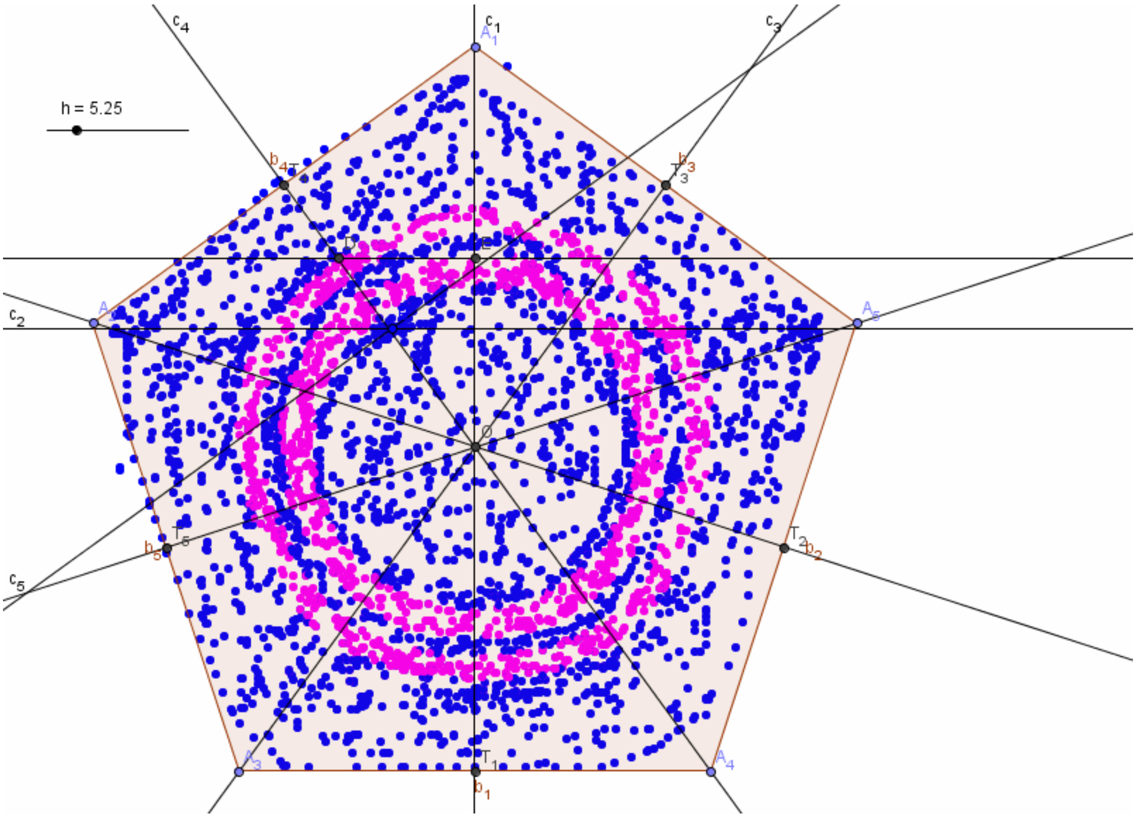
A feladat megjelenítése Geogebrával:

1. Vegyük fel az O(0,0) pontot, és az $A_1(0,1)$ pontot.
2. Pozitív körüljárással forgassuk el A_1-et 72°-kal, legyen ez a pont A_2, majd ezt ismételjük meg még háromszor, legyenek a pontok sorrendben A_3, A_4, A_5. Vegyük fel az A_i (i=1,2,3,4,5) pontok által alkotott szabályos ötszöget is b_i oldalakkal.
3. Megjegyzés: amikor alsóindexes jelöléseket használok i-vel kifejezve, amennyiben i=1 áll fenn és i-1-et kell meghatároznunk, i-1=5, valamint i=5 esetén i+1=1 (vagyis modulo 5 számolunk, de a 0 helyett 5-öt írunk).
4. Vegyünk fel az ötszögön belül egy B pontot, továbbá vegyük fel a B$A_i = a_i$ távolságokat.
5. Vegyünk fel egy h csúszkát 0.05-ös beosztással, 4-től kezdve 10-ig. Továbbá a parancssorban egy u=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5 számot, majd egy v=(u-h)^2 számot is.
6. Lépjünk be B tulajdonságaihoz, jelenítsük meg nyomvonalát az alap fülön, majd a haladó fülön a dinamikus színeknél írjuk a piroshoz v<0.01.
7. Állítsuk h-t 5.3-ra, kicsit nagyítsunk a képen. B-vel satírozzunk az ötszögön belül. Egy körgyűrűszerű alakzat rajzolódik ki előttünk. Ismételjük meg az eljárást különböző h-kra, köztük h=5.7, h=6.2, h=5-re, h=8-ra. Előfordulhat, hogy túl széles alakzatot kapunk (vagyis nagy hibával becsülünk), ekkor a dinamikus színeknél az egyenlőtlenség jobb oldalára írjunk kisebb számot.
8. Állítsunk be h=5.4-hez a piros színnél v<0.002-t (vagy nagyítástól függően egyéb számot, ami esetén a piros sáv keskenyebb).



7. ábra. KöMaL B. 4298. feladat képe 5.4-es paraméterrel

9. Vegyük fel minden A_i pontra az $A_{i+1}A_{i-1}$ szakaszfelezőket, legyenek ezek rendre c_i egyenesek. A b_i és c_i egyenes metszéspontja legyen T_i.
10. Vigyük B-t az $A_1 A_2$O háromszög belsejébe úgy, hogy O-tól a legtávolabb legyen de még piros, c_4-hez közel. Állítsunk merőlegest B-ből c_4-re, legyen ez b.
11. Mozgassuk B-t 9. szerint c_4-re. Állítsunk merőlegest B-ből c_1-re, c-t. Jegyezzük fel c egyenletét, külön egyenesként hozzuk létre a parancssorban, legyen ez d. Legyen továbbá d és c_4 metszéspontja D, valamint d és c_1 metszéspontja E.
12. A kép mozgatása nélkül állítsuk h-t 5.25-re, és satírozzunk a külső piros sávon belüli részen (2 sávot szeretnénk kapni).



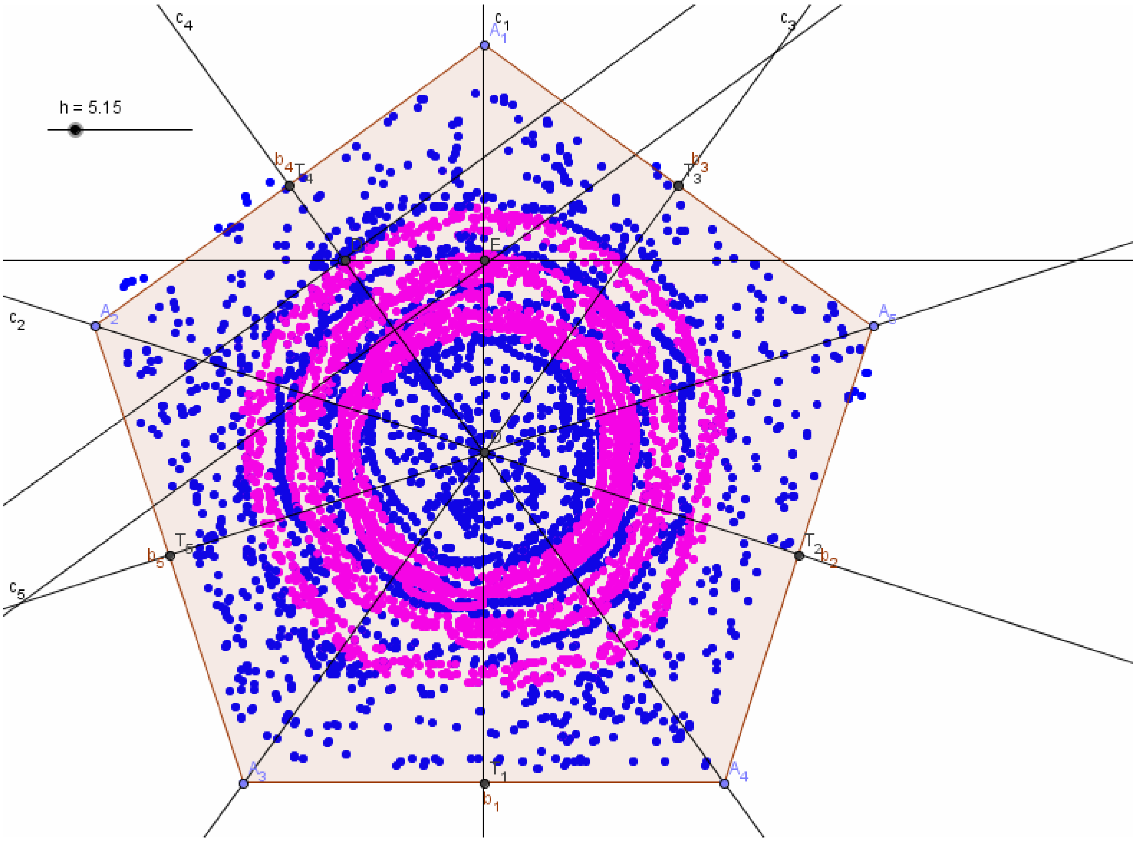
8. ábra. KöMaL B. 4298. feladat képe 5.4-es és 5.25-ös paraméterekkel

13. Állítsuk h-t 5.15-re és satírozzunk ismét. Mozgassuk B-t 9-szerint c_4-re, és jegyezzük fel b egyenletét, hozzuk létre ily módon a parancssorban e-t.
14. Mozgassuk B-t D-hez közel c_4-en, majd mozgassuk B-t tovább úgy, hogy a b egyeneshez közel maradjon D, de B ne lépjen ki az $A_1\ A_2$O háromszögből.

A feladat megoldása:

A csúcsoktól mért távolságok összege a középpontban minimális.

A fenti eljárást végigjárva az alábbit vehetjük észre: Merőleges vetítésekkel c4-re majd c1-re egyre kisebb lesz a távolságok összege.



9. ábra. KöMaL B. 4298. feladat képe 5.4-es, 5.25-ös és 5.15-ös paraméterekkel

Bizonyítás:

Legyen B az A_1A_2O egyenlőszárú háromszögben. (Amennyiben B egy másik háromszögben van, ciklikusan átbetűzzük a pont és egyenes ötösöket.) Ekkor az alappal párhuzamos B-n átmenő egyenesen a c_4 által kimetszett pont biztosan közelebb van az alap végpontjaihoz, ha B nincs c_4-en. Rögzítsük a B-n átmenő A_1A_2 egyenessel párhuzamos egyenest, és alkalmazzuk A_1A_2B-re a segédfeladatot a 10. oldalról. (Amennyiben B az A_1A_2 egyenesén van és a segédfeladat nem alkalmazható, mindazonáltal az A_1BA_2 törtvonal hossza állandó, nem tud nőni az eljárás által, mivel a pontok kollineárisak. Ekkor a segédtételt A_3A_5-re külön kell alkalmazni.) Ily módon az A_1BA_2 törtvonal hossza csökkent. Ezzel alkalmaztuk a segédfeladatot az A_3A_5B háromszögre is, mivel A_1A_2 egyenese párhuzamos A_3A_5 egyenesével. Továbbá a rögzített egyenes és c_4 merőlegessége miatt A_4-hez is közelebb került B, mivel A_4 c_4-

en van. A továbbiakban legyen a rögzített egyenes és c_4 metszéspontja B'. Szinte szóról szóra de más felállásban:

B' a T_4T_3O egyenlőszárú háromszögben van. Ekkor az alappal párhuzamos B'-n átmenő egyenesen a c_1 által kimetszett pont biztosan közelebb van, ha B' nincs c_1-en. Rögzítsük a B'-n átmenő $A_2 A_5$ egyenessel párhuzamos egyenest, és alkalmazzuk $A_2 A_5$B-re a segédfeladatot. Ily módon az A_2BA_5 törtvonal hossza csökkent. Ezzel alkalmaztuk a segédfeladatot az $A_3 A_4$B háromszögre is, mivel $A_2 A_5$ egyenese párhuzamos $A_3 A_4$ egyenesével. Továbbá a rögzített egyenes és c_1 merőlegessége miatt A_1-hez is közelebb került B, mivel A_1 c_1-en van. A továbbiakban legyen a rögzített egyenes és c_1 metszéspontja B''.

Végtelen leszállással tetszőleges B ponthoz megkaphatjuk B'-t és B''-t, ha az aktuális B''-re alkalmazzuk az eljárást. Eredményül azt kaptuk, hogy a B pontok sora egyre közelebb kerül O-hoz. Ezek után evidens, hogy O a legközelebbi pont, és hogy létezik, a bizonyítást indirekt módon is elmondhatjuk, ha feltesszük, hogy egy másik a legközelebbi pont. Amennyiben B az ötszögön kívüli pont volt, nem beszélhetünk tartalmazó szimmetrikus háromszögről, de a szárak egyeneseivel a gondolatmenet eljátszható.

Összefoglalás:

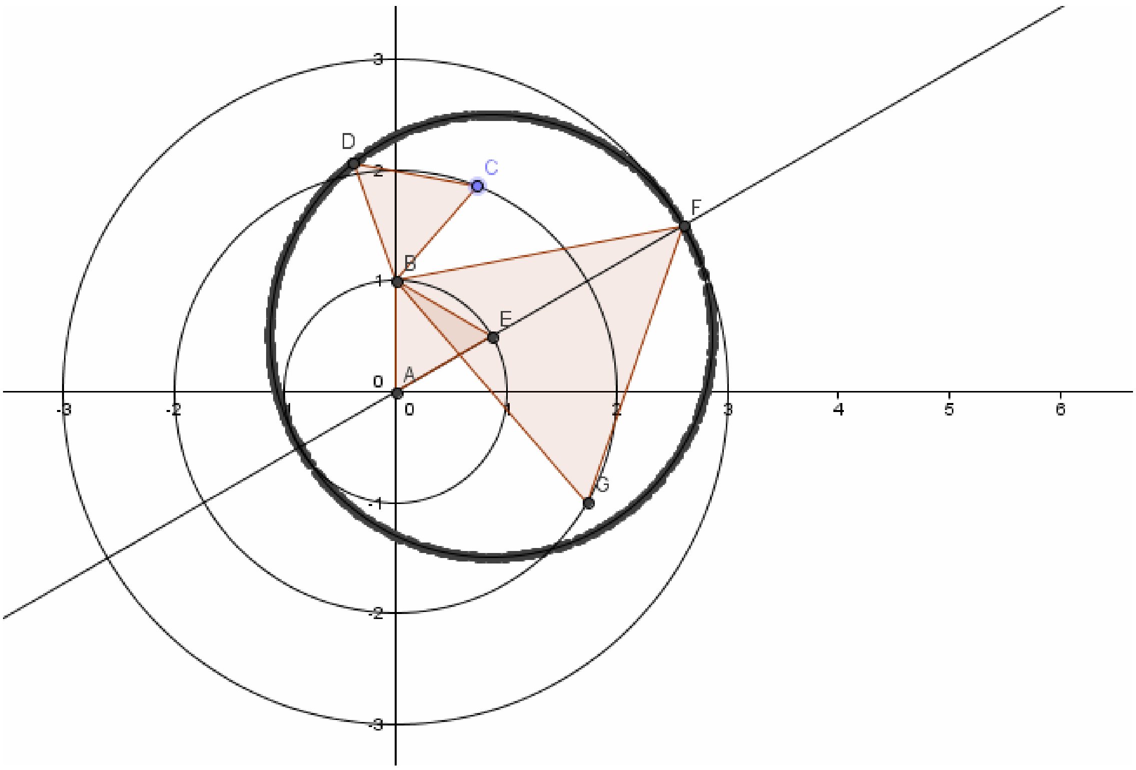
A feladat tipikus példája azon feladatoknak, ahol nehézségként tekintünk arra, hogy nem tudjuk megmondani két általános helyzetű pontban az optimalizálandó függvény értékeinek viszonyát. A Geogebra jelen esetben megmutatja, hogy ez nem is szükséges, így tulajdonképpen a korábban közölt segédfeladatot és néhol háromszög-egyenlőtlenséget igénylő feladatra redukáltuk segítségével a példát. Ezt a példát tanulságossága ellenére más okból is szakdolgozatomba választottam, a KöMaL-hoz ugyanis egy egészen más bizonyítással küldte be témavezetőm.

B. 4314.

Három koncentrikus kör sugara 1, 2, illetve 3 egység. A három körön úgy választottunk ki egy-egy pontot, hogy azok egy szabályos háromszög csúcsai legyenek. Mekkora lehet ennek a szabályos háromszögnek az oldala?

A feladat megjelenítése Geogebrával:

1. Vegyük fel az A(0,0) pontot, majd A középponttal az 1,2,3 sugarú c,d,e köröket.
2. Vegyük fel a B(0,1) pontot, valamint d-n C-t.
3. Alkalmazzuk a szabályos sokszög funkciót B-re és C-re 3-mal, a háromszög harmadik csúcsa D.
4. Alkalmazzuk a mértani hely funkciót D-re és C-re. (Vagy kapcsoljuk be D nyomvonalát és mozgassuk C-t.)
5. Alkalmazzuk a szabályos sokszög funkciót B-re és A-ra 3-mal, a harmadik csúcs E.
6. Rajzoljunk E köré 2 sugarú kört, f-et.
7. Húzzunk egyenest A-n és E-n át, legyen ez g, e és f metszéspontja legyen F.
8. Alkalmazzuk a szabályos sokszög funkciót F-re és B-re 3-mal, a harmadik csúcs legyen G.



10. ábra. KöMaL B. 4314. feladat forgatásai

A feladat megoldása:

A D-pontot a C pont B-körüli 60°-os elforgatásával kapjuk, tehát a D pont lehetséges képeihez B körül el kell forgatnunk d-t 60°-kal. Ehhez elég d-nek A középpontját elforgatni 60°-kal és innen 2 sugarú kört rajzolni. Mivel ABE szabályos háromszög, E c-n van, innen 2 sugarú kört rajzolva A-tól legfeljebb 3 egységre lesz a kapott f kör legtávolabbi pontja. Nekünk f és e metszéspontja kell, a körök középpontjai és sugarai miatt pontosan egy közös pontjuk lesz, a két kör érintési pontja, ami a középpontok egyenesén, g-n van, A-tól 3-szor akkora távolságra, mint E. Mivel E koordinátái (cos30°, sin30°), G koordinátái (3cos30°, 3sin30°)=($\frac{3\sqrt{3}}{2}$,$\frac{3}{2}$), ennek távolsága B-től: $\sqrt{\frac{27}{4}+\frac{1}{4}}=\sqrt{7}$.

Összefoglalás:

A példa azon szerkesztési feladatok egyike, ahol az alakzatok jellemző tulajdonságaiknak megfelelő geometriai transzformációt végzünk. Középiskolákban előfordulhat, hogy egy-egy ilyen feladatot először megold a táblánál a tanár. Gyakoribb azonban, hogy a forgatás témaköréhez kapcsolódó feladatként tűzik ki. Csak ezután magyarázzák meg, vagy mondják el a szerkesztés lépéseit a diákok, gyakran nincs alkalmuk vagy elég idejük gondolkodni a megoldáson. A Geogebra használatával nem kell attól tartanunk, hogy hasonló feladatnál a tanulók nem jönnek rá a kulcsfontosságú észrevételre, hiszen a készülő ábra alapján el tudják mondani a szerkesztés menetét.

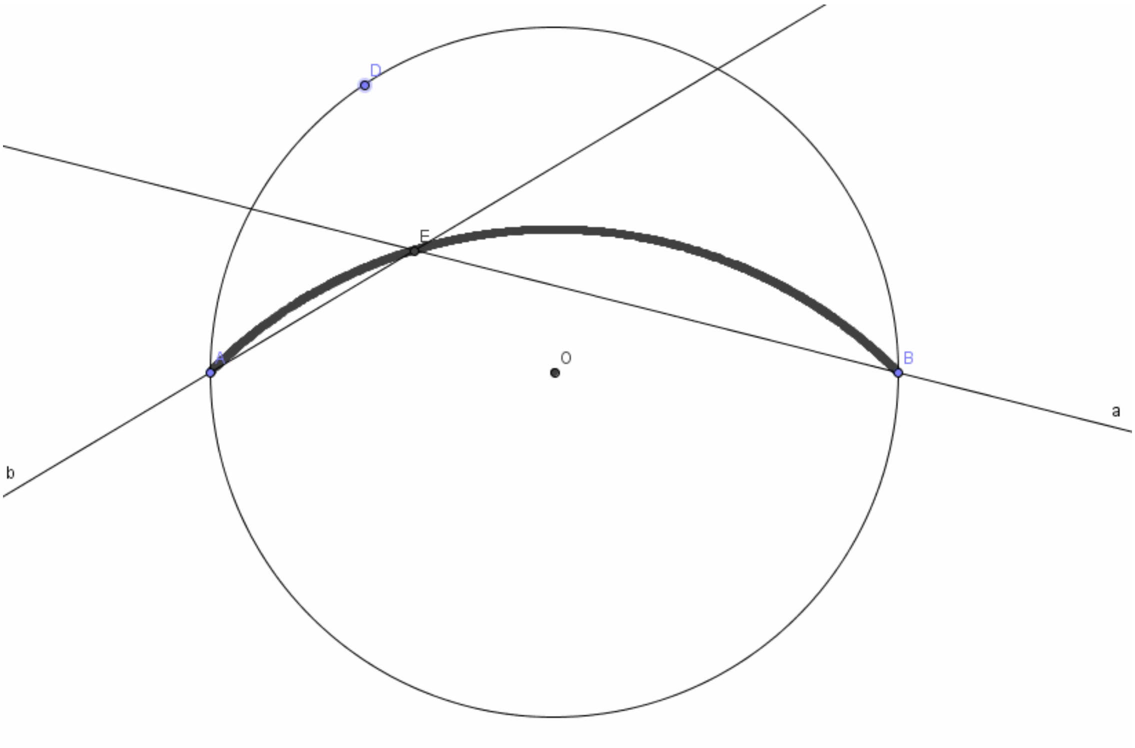
Régi versenyfeladat

Egy pozitív körüljárású ABCD húrnégyszög A és B csúcsai a körülírt kör egyazon átmérőjének végpontjai. Az ABC és ABD háromszögek beírt körei középpontjának távolsága $\sqrt{2}$. Mekkora a CD oldal hossza, ha az AB oldal hossza 2?

A feladat megjelenítése Geogebrával:

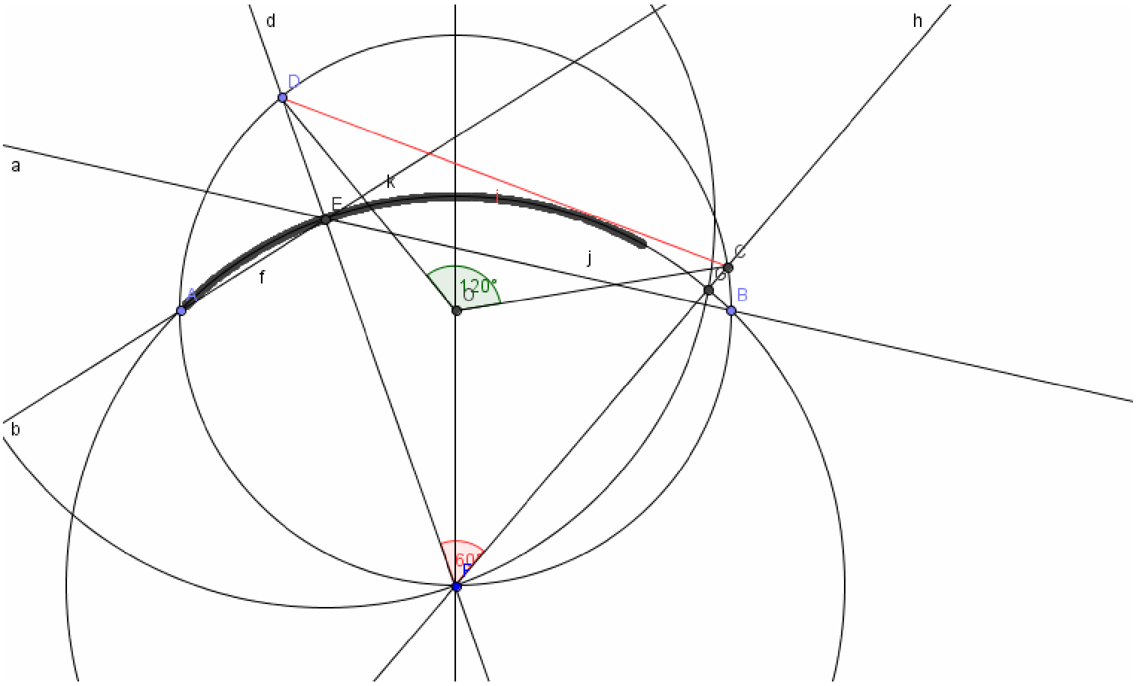
1. Vegyük fel az A(-1,0), B(1,0) és O(0,0) pontokat.
2. Rajzoljuk meg az O középpontú egységnyi sugarú c kört. A második síknegyedben c-n vegyük fel D-t.

3. Vegyük az ABD és DAB szögfelezőket, a-t és b-t, valamint metszéspontjukat, E-t, és kapcsoljuk be annak nyomvonalát.
4. Mozgassuk D-t c-n, és figyeljük meg E nyomvonalát.



11. ábra. Régi versenyfeladat, a beírt kör középpontjának függése a látókörívtől

5. Vegyük fel a D-n és E-n áthaladó d egyenest és az x=0, e egyenest.
6. Vegyük fel az F (0,-1) pontot, és az F középpontú sqrt(2) sugarú f kört.
7. Vegyük fel az E középpontú sqrt(2) sugarú g kört, és annak f-vel vett jobb oldali metszéspontját, G-t. (Megjegyzés: D a második síknegyedben van.)
8. Vegyük az F-en és G-n áthaladó h egyenest, és annak másik metszéspontját c-vel, legyen ez C.
9. Vegyük fel a GFE szöget, α-t és a CD szakaszt, i-t, mindkettő színe legyen piros.
10. Vegyük fel a COD szöget, β, valamint a CO és OD szakaszokat, j-t és k-t.
11. Ismét mozgassuk meg D-t c-n.



12. ábra. Régi versenyfeladat, a látószögek alkalmazása a szokottól eltérően

A feladat megoldása:

$DAB\angle + ABD\angle = 90°$ a feladat állítása szerint. A szögfelezők miatt $EAB\angle + ABE\angle = 45°$, vagyis $AEB\angle = 135°$ D-től függetlenül. Mivel az AB alsó ívet az e egyenes és a D-ből húzott szögfelező is felezi, az F pont e-nek és c-nek alsó metszéspontja, az E-t tartalmazó F középpontú kör sugara $\sqrt{2}$. Mivel EG=FG=EF=$\sqrt{2}$, EFG szabályos háromszög, vagyis $GFE\angle = 60°$. A D-ponthoz tartozó szögfelezőhöz hasonlóan viselkedik a keresett C-ponthoz tartozó szögfelező is, így a keresett C pont a h egyenesen van. Mivel F-ből a DC szakasz 60° alatt látszik, a kerületi és középponti szögek tétele alapján O-ból 120°-os szög alatt látszik a CD szakasz, helyzetétől függetlenül. Mivel OC=OD=1, a koszinusz-tétel alapján CD=$\sqrt{3}$.

Összefoglalás:

A példa egy másikféle tagja azon feladatcsokornak, melyekben a háromszög egy oldala rögzített, a harmadik csúcsból pedig ez az oldal adott szög alatt látszik, és arra vagyunk kíváncsiak, hogyan viselkedik a háromszög beírt körének középpontja. Továbbá a látóköríven nem a pontot mozgatja, hanem a szakaszt, ami középiskolában ritkán fordul elő. Érdemes megmutatnunk, hogy a kerületi és középponti szögek tétele alkalmazható, csupán egy O körüli forgatás kell, mely a szakaszt önmagába viszi.

Ellipszis, hiperbola, parabola

9.-es középiskolásként egy dupla óra keretei között azt a feladatot kaptuk, hogy egyenként szerkesszük meg egy-egy ellipszis, hiperbola és parabola több pontját, és körülbelül rajzoljuk is meg őket. Miután egy-egy pontpárt, pontnégyest megszerkesztettünk és elegendő instrukciót kaptunk, hozzákezdtünk. Érdekesnek találtuk többen, hogy körzővel és vonalzóval csak pontonként tudjuk őket megszerkeszteni. Ezen óra után kutakodni kezdtem, a wikipédián megtaláltam az ellipszisszerkesztés módját két gombostűvel, egy cérnával és ceruzával, pár héttel később, mikor ismét felmerült bennem a megrajzolás kérdése, rátaláltam a Geogebrára. Az akkori verzióban még csak öt ponton áthaladó kúpszelet lehetett rajzolni, valamint egyenletét megadva, valamely későbbi verziótól kezdve azonban fókuszokkal és ponttal, valamint vezéregyenessel és fókusszal is rajzoltathattunk kúpszeleteket. Ebben a fejezetben megmutatom, mi rejtőzik a szerkesztések mögött, továbbá hogyan tudjuk az egyikkel e kúpszeletek részeit megmutatni.

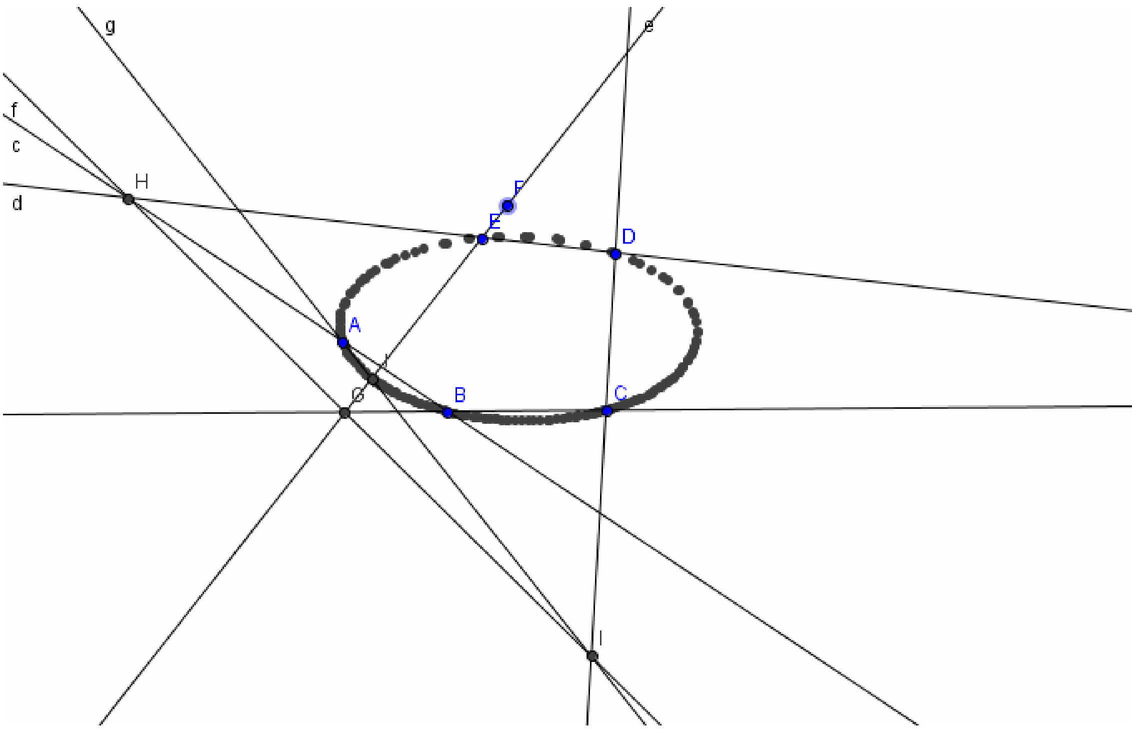
Kúpszelet öt ponton keresztül

A Pascal-tétel kimondja, hogy egy projektív kúpszeletbe írt hatszög szemközti oldalainak metszéspontjai egy egyenesre esnek, így ha csak öt pontot ismerünk ebből a hatszögből, de kiválasztunk az egyiken áthaladó oldalt, az oldalon levő másik pontot megszerkeszthetjük. Ezek után ezt az egyenest megforgatva a kúpszelet összes többi pontját megkaphatjuk. Mivel a projektív geometria nem tartozik a középiskolás tananyaghoz, ezért nem érdemes az órán többet mondani magáról a tételről vagy bizonyításáról, elég megmutatni a tételt, majd alkalmazásként a szerkesztést. A tétel bizonyítását megtekinthetjük Hajós György: A geometria alapjai című könyvének 508. oldalán. Szót ejthetünk még arról is, hogy ki lehet számolni a kúpszelet egyenletét az öt pont koordinátáiból. A számítás levezetését megtekinthetjük Deli Anikó: Másodrendű görbék a projektív síkon című 2011-es szakdolgozatának 27. oldalától (IV fejezet 2. pontja).

Annak ellenére, hogy ez a szerkesztés nem árul el semmit a kúpszelethez kapcsolódó alakzatokról (fő- és vezérköreiről, érintőiről, külső és belső pontjairól, tengelyeiről), két okból is illőnek találtam szakdolgozatomba. Egyrészt, ha az egyikféle szerkesztésről írok, érdemes a másikat is megemlíteni, hiszen bármelyik tanuló a kezébe veszi a programot, látni fogja, hogy ilyen is van. Másrészt a Geogebra tud valamit, amit a középiskolások még nem, és érdekesnek találhatják: Ha a beírt hatszög szemközti oldalaiból egyik pár párhuzamos és metszéspontjánál a nem definiált felirat jelenik meg, a program akkor is meghúzza az egyenest, ráadásul ez éppen párhuzamos lesz ezen oldalakkal, sőt még a kúpszeletünket is jól meg tudja rajzolni.

Megjelenítés a Geogebrával:

1. Vegyünk fel öt pontot, A-t, B-t, C-t, D-t, E-t úgy, hogy bármely három ne essen egy egyenesre.
2. Vegyük fel az F pontot E-től nem túl távol, továbbá a rajtuk áthaladó a egyenest.
3. Vegyük a B-n és C-n áthaladó b egyenest, továbbá a és b metszéspontját, G-t.
4. Vegyük az A és B pontokon áthaladó c egyenest, a D-n és E-n áthaladó d egyenest, továbbá ezek H metszéspontját.
5. Vegyük a C-n és D-n áthaladó e egyenest, továbbá a G-n és H-n áthaladó f egyenest, és ezek I metszéspontját.
6. Vegyük az A-n és I-n átmenő g egyenest és annak a-val való metszéspontját, J-t.
7. Kapcsoljuk be J nyomvonalát, és mozgassuk az F pontot E körül lassan.

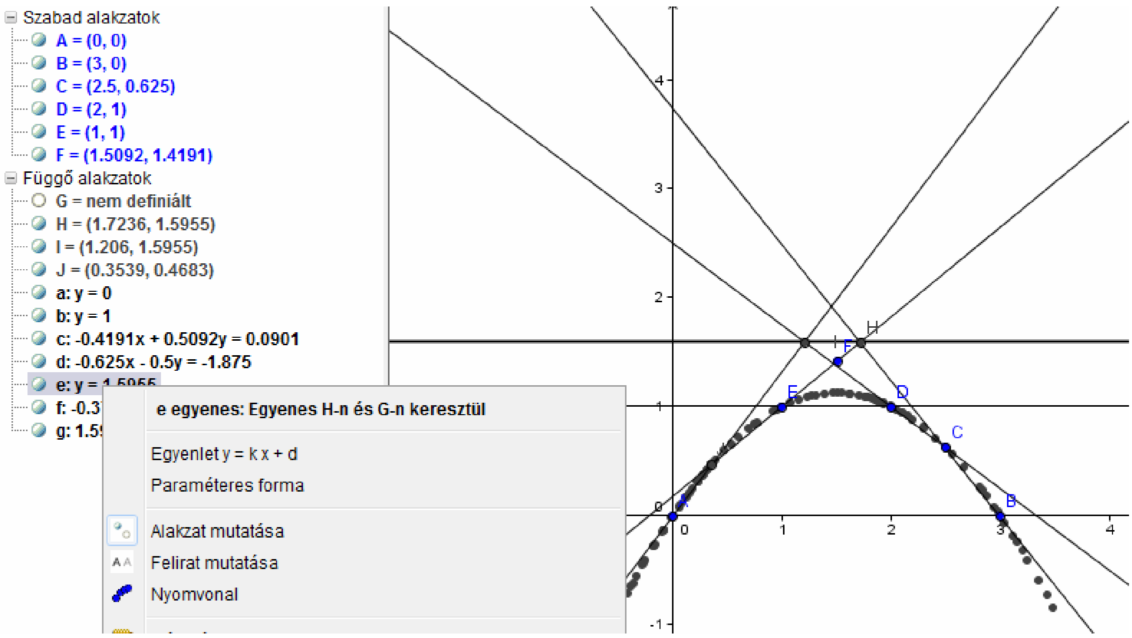


13. ábra. Kúpszelet öt ponton át a pascal-tétel használatával

A projektív geometria megemlítése előtt tegyük fel a kérdést, hogy működik-e a szerkesztés, ha c és e párhuzamos, majd mutassuk meg ezt az esetet is a geogebrával:

Az előzőleg elkészített geogebra fájlban definiáljuk újra az első lépés öt pontját, legyen az egyszerűség kedvéért A (0,0), B (3,0), D (2,1), E (1,1), C-t változtathatjuk, de ne legyen semelyik három pont egy egyenesen. Ekkor a G pont nem definiált, a rajta át húzott egyenes viszont létezik. Érdekességként megmutathatjuk még a C pont különböző helyzeteinél a kúpszeletet: legyen C (2.5,0.625), járjuk körül E-t F-fel, ekkor a kúpszelet parabola. (Megjegyzés: ha valamilyen okból kifolyólag a C pontot nem tudjuk újradefiniálni, ahogy egyszer megtörtént velem, írjuk a parancssorba a következőt: érték[C,(2.5,0.625)] és a pont a helyére kerül.)

A C pontot a c és e egyenesek között a parabolától jobbra mozgatva ellipszist kapunk képül (vagy speciális esetben (1.5,-0.5) középpontú kört), balra mozgatva, de nem átlépve a parabola másik ágát, hiperbolát kapunk.



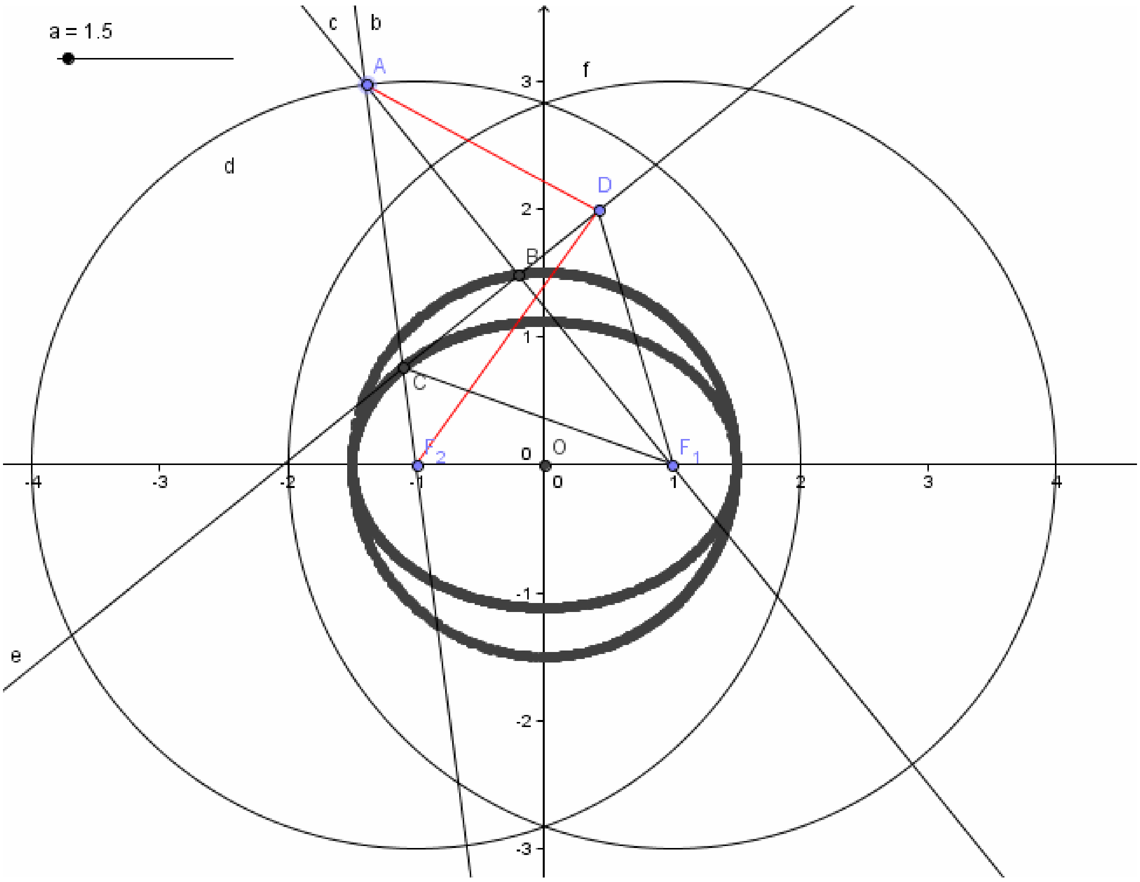
14. ábra. Kúpszelet öt ponton át párhuzamos oldal metszéspontjával, G nem definiált

Ellipszis

Definíció: Az ellipszis azon pontok halmaza a síkon, melyek két adott ponttól mért távolságainak összege egy a két pont távolságánál nagyobb állandó. A két adott pontot az ellipszis fókuszpontjainak hívjuk.

A geogebrával történő szerkesztés menete:

1. Vegyük fel az F_1 (1,0) és F_2 (-1,0) pontokat.
2. Vegyünk fel egy a csúszkát 1 minimummal, 10 maximummal, 0.1-es beosztással, értékét állítsuk 1.5-re.
3. Vegyünk fel egy F_2 középpontú 2a sugarú kört, d-t, és rajta egy A pontot.
4. Vegyük az A-n és F_2–n áthaladó egyenest, b-t, valamint az A-n és F_1–en áthaladó egyenest, c-t.
5. Vegyük A és F_1 felezőpontját, B-t, továbbá az F_1 és F_2 felezőpontját, O-t.
6. Vegyük az A-hoz és F_1–hez tartozó szakaszfelező merőlegest, e-t, és annak b-vel vett metszéspontját, C-t.
7. Kapcsoljuk be B és C nyomvonalát és vezessük végig A-t d-n.
8. Vegyünk fel egy D pontot e-n, és vegyük fel a DF_2 szakaszt, g-t, a DF_1 szakaszt, h-t, a DA szakaszt, i-t és a CF_1 szakaszt j-t. Legyen piros színű g és i.
9. Vegyük fel az F_1 középpontú 2a sugarú kört is.



15. ábra. Ellipszis és meghatározó adatai

Mit olvasunk le a 15. ábráról, és mit kérdezzünk a lépések előtt?

A 3. lépés után mondjuk el, hogy A és F_2 között valahol lennie kell egy pontnak az ellipszisből, hiszen kijjebb nem lehet a távolságösszeg nagysága miatt. Kérdezzük meg, hogyan függ a keresett pont helyzete A-tól és F_1-től. Ha megmondja valaki, hogy egyenlő távol kell lennie mindkettőtől, továbbmehetünk, ha sokáig nincs válasz, vegyünk fel egy tetszőleges pontot az egyenesen A és F_2 között, jelöljük el a távolságokat, és írassuk fel a definíciót, valamint a 3. lépés következményét a válaszért. Magától értetődően elnevezzük a szakaszfelező és a 4. lépésben felvett pontokat, és megnézzük azok viselkedését. A C pont a definíciónak megfelelően viselkedik, vagyis nyomvonala az ellipszis, a B pont viszont A-nak F_1–re vonatkozó 0.5-ös nagyítású képe a szakaszfelező miatt, tehát d felére zsugorított képe.

Az ellipszis mely meghatározó adatai szerepelnek a 15. ábrán és mit mondjunk még el?

1. Fókuszpontok: F_1, F_2.
2. Középpont: O.
3. Vezérkörök: d, f.
4. Érintők: e, ugyanis 1 közös pontja van az ellipszissel, az érintési pont C. Ennek bizonyítása: vegyünk bármely más pontot e-ről, mondjuk D-t és nézzük meg, teljesül-e a definíció rá. Nyilván nem, mert két pont között a legrövidebb út az egyenes, tehát a távolságösszeg legalább 2a minden e-beli pontra, egyedül C-nél veszi fel a minimumot. Evidens, hogy az érintő az érintési pontból a fókuszokba húzott egyeneseknek külső szögfelezője a szakaszfelező tulajdonság miatt.
5. Főkör: B nyomvonala, a szakaszfelező tulajdonság miatt evidens, hogy a fókuszokból az érintőkre állított merőlegesek talppontjai alkotják, ugyanakkor mivel felezőpont, a nyomvonal egy O középpontú a sugarú kör.
6. Bekapcsolva e nyomvonalát és A-t lassan végighúzva d-n az ellipszis belseje fehér lesz, a külső pontok feketék. Ez alátámasztja azt a definíciót, hogy: azon pontok belső pontok, melyek fókuszoktól mért távolságaira igaz, hogy 2a-nál kisebb az összegük, azok, amiknél az összeg nagyobb ennél, külső pontok.
7. Az x-tengely ellipszisbe eső szakaszát nagytengelynek, az y-tengely ellipszisbe eső szakaszát kistengelynek hívjuk.
8. Tetszőleges P külső pontra igaz, hogy van olyan e érintő, amelyen rajta van, tehát van egy olyan A, amelytől ugyanolyan távol van, mint F_2-től, ezt egy körívezéssel meg is szerkeszthetjük. Mivel F_2-belső, P pedig külső pont, az ellipszis pedig zárt, nyilván minden P-hez két A, tehát két érintő tartozik.

9. Tetszőleges irányú l egyenessel tudunk két párhuzamos érintőt szerkeszteni. F_1-ből egy m merőlegest állítunk l-re, majd m-re merőlegeseket állítunk a főkör és m metszéspontjain át. Mivel m merőleges az érintőkre és átmegy F_1-en, a metszéspont a főkörön lesz. Evidens továbbá, hogy valóban az érintők párhuzamosak l-lel ugyanis mindhárom egyenes merőleges m-re.
10. A koordinátatengelyek az ellipszis szimmetriatengelyei, az O pont az ellipszis szimmetria középpontja.

A fenti tárgyalás a definícóból vezet le mindent, annak az ötletnek a felhasználásával, hogy a fókuszt körbejárjuk, és biztosan kizárjuk a tőle 2a-nál távolabb levő pontokat. Nagy előnye, hogy az ellipszishez kapcsolódó alakzatokat megismerhetjük általa, és nem igényel az alapötleten kívül egyéb ötletet.

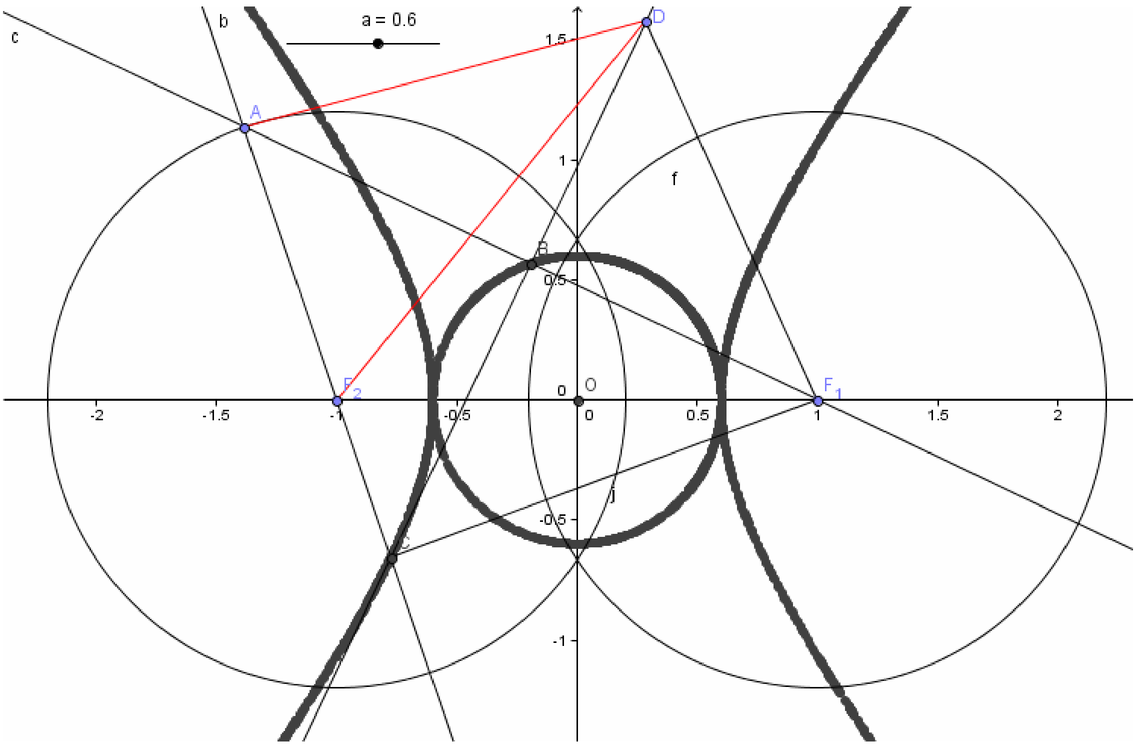
Hiperbola

Definíció: A hiperbola azon pontok halmaza a síkon, melyek két adott ponttól mért távolságai különbségének abszolút értéke egy a két pont távolságánál kisebb állandó. A két adott pontot a hiperbola fókuszpontjainak hívjuk.

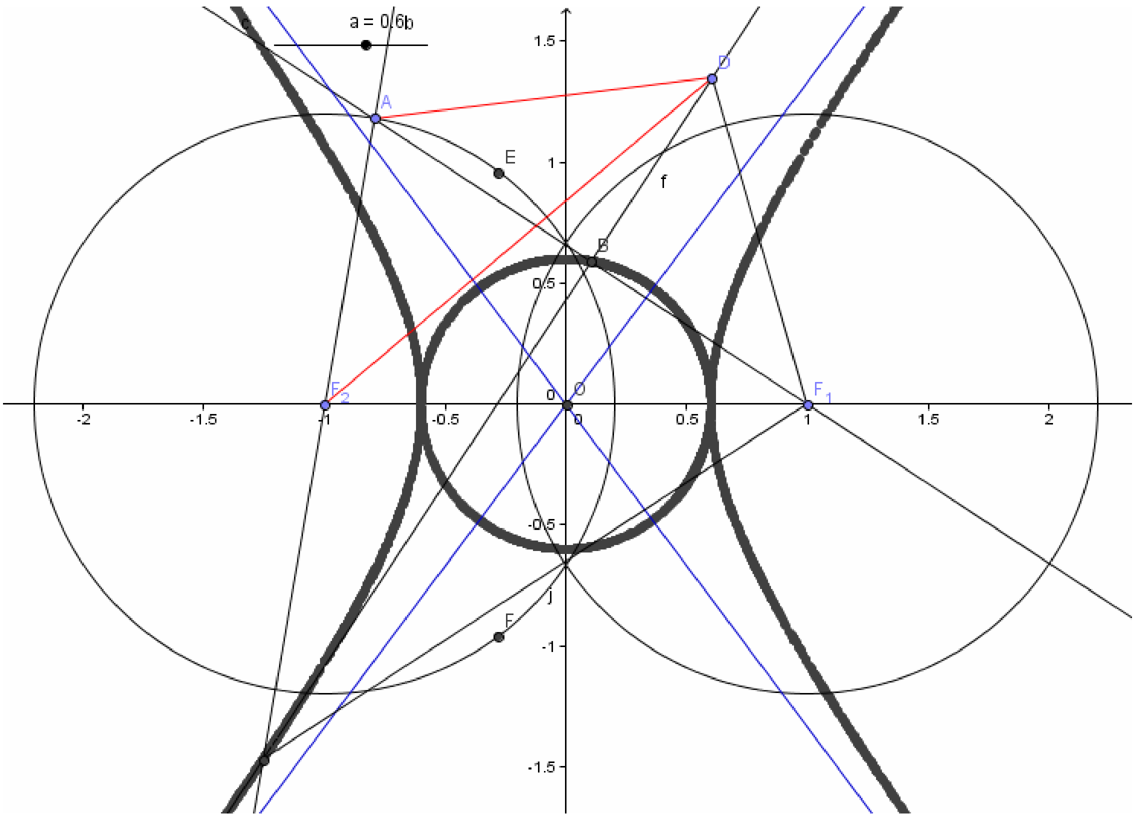
A geogebrával történő szerkesztés menete:

1. Vegyük fel az F_1 (1,0) és F_2 (-1,0) pontokat.
2. Vegyünk fel egy a csúszkát 0 minimummal, 1 maximummal, 0.01-es beosztással, értékét állítsuk 0.6-ra.
3. Vegyünk fel egy F_2 középpontú 2a sugarú kört, d-t, és rajta egy A pontot.
4. Vegyük az A-n és F_2–n áthaladó egyenest, b-t, valamint az A-n és F_1–en áthaladó egyenest, c-t.
5. Vegyük A és F_1 felezőpontját, B-t, továbbá az F_1 és F_2 felezőpontját, O-t.
6. Vegyük az A-hoz és F_1–hez tartozó szakaszfelezőt, e-t, és annak b-vel vett metszéspontját, C-t.
7. Kapcsoljuk be B és C nyomvonalát és vezessük végig A-t d-n.
8. Vegyünk fel egy D pontot e-n, és vegyük fel a DF_2 szakaszt, g-t, a DF_1 szakaszt, h-t, a DA szakaszt, i-t és a CF_1 szakaszt j-t. Legyen piros színű g és i. Vegyük fel továbbá a k=g-i+2a számot.

9. Vegyük fel az F_1 középpontú 2a sugarú kört is.



16. ábra. Hiperbola és meghatározó adatai



17. ábra. Hiperbola aszimptotái

10. Vegyük az F_1-ből d-hez húzott érintőket, l-et és m-et, továbbá ezek d-vel vett metszéspontjait E-t és F-et. A jobb átláthatóság miatt rejtsük el a két érintőt.
11. Vegyük E és F_1 szakaszfelezőjét, n-et és F és F_1 szakaszfelezőjét, p-t. Legyenek ezek kékek.

Mit olvasunk le a 17. ábráról, és mit kérdezzünk a lépések előtt?

A 3. lépés után mondjuk el, hogy A és F_2 egyenesén valahol lennie kell egy pontnak a hiperbolából. Kérdezzük meg, hogyan függ a keresett pont helyzete A-tól és F_1-től. Ha megmondja valaki, hogy egyenlő távol kell lennie mindkettőtől, továbbmehetünk, ha sokáig nincs válasz, vegyünk fel egy tetszőleges pontot az egyenesen, jelöljük el a távolságokat, és írassuk fel a definíciót, valamint a 3. lépés következményét a válaszért. Magától értetődően elnevezzük a szakaszfelező és a 4. lépésben felvett pontokat, és megnézzük azok viselkedését. A C pont a definíciónak megfelelően viselkedik, vagyis nyomvonala a hiperbola, a B pont viszont A-nak F_1–re vonatkozó 0.5-ös nagyítású képe a szakaszfelező miatt, tehát d felére zsugorított képe. Kérdezzük meg, mi történik, ha c érinti d-t. Ha nem jön meg a válasz, kérdezzünk rá a körhöz húzott érintő szerkesztésére. Miután rájöttek, hogy ekkor c-re merőleges b is és e is, vagyis utóbbi két egyenes párhuzamos, nem beszélhetünk metszéspontról. Az ezen helyzetekhez tartozó e egyeneseket aszimptotáknak nevezzük, de mondhatjuk azt is, hogy végtelen távoli pontokhoz tartozó érintők.

A hiperbola mely meghatározó adatai szerepelnek a 17. ábrán és mit mondjunk még el?

1. Fókuszpontok: F_1, F_2.
2. Középpont: O.
3. Vezérkörök: d, f.
4. Érintők: e, ugyanis 1 közös pontja van a hiperbolával, az érintési pont C, ennek bizonyítása: vegyünk bármely más pontot e-ről, mondjuk D-t és nézzük meg k segítségével, teljesül-e a definíció rá. Nyilván nem, ugyanis k-val a háromszög-egyenlőtlenséget írtuk fel az ADF_2 háromszögben, a definíció csak az elfajuló esetben igaz, egyedül C-nél veszi fel a minimumot. Evidens, hogy az érintő az érintési pontból a fókuszokba húzott egyeneseknek belső szögfelezője a szakaszfelező tulajdonság miatt.

5. Aszimptoták: Azon középponton áthaladó egyenesek, melyekre a fókuszokból állított merőlegesek a vezérköröket érintik.
6. Főkör: B nyomvonala, mivel felezőpont, a nyomvonal egy O középpontú a sugarú kör, ugyanakkor a szakaszfelező tulajdonság miatt evidens, hogy a fókuszokból az érintőkre állított merőlegesek talppontjai alkotják. Az aszimptoták miatti két rossz pont miatt nem kell aggódnunk, eljárásunkat a másik fókuszpont-vezérkör párral is elvégezhetjük.
7. Bekapcsolva e nyomvonalát és A-t lassan végighúzva d-n az hiperbola belseje fehér lesz, a külső pontok feketék. Ez alátámasztja a következő definíciót: azon pontok belső pontok, melyek fókuszoktól mért távolságai különbségének abszolút értékére igaz, hogy 2a-nál kisebb, azok, amiknél az összeg nagyobb ennél, külső pontok.
8. Az x-tengelyből a hiperbola által kimetszett szakaszát valós tengelynek hívjuk. A valós tengely végpontjából arra merőlegest állítva az így kapott egyenesből az aszimptoták a képzetes tengellyel azonos állású és azonos hosszú szakaszt metszenek ki.
9. Tetszőleges O-tól különböző P külső pontra igaz, hogy van olyan e, amelyen rajta van, tehát van egy olyan A, amelytől ugyanolyan távol van, mint F_2-től, ezt egy körívezéssel meg is szerkeszthetjük. Ha P valamely aszimptota O-tól különböző pontja, egy érintőt húzhatunk még innen, másiknak ugyanis a tartalmazó aszimptotát kapnánk. Ha P mindkét aszimptotán rajta van, vagyis egybeesik O-val, mindkét érintőnek az aszimptotákat kapnánk. Bármely más külső P-re két érintő lesz, ugyanis a hiperbola egy ága két részre osztja a síkot, és mivel a centrum külső, egy tartalmazott pont pedig belső, a körívezésnél két metszéspontot kapunk.
10. Tudunk két párhuzamos érintőt szerkeszteni tetszőleges l egyenessel, ha l meredekségének abszolút értéke nagyobb az aszimptoták meredekségének abszolút értékénél. F_1-ből merőlegest állítunk l-re, m-et, majd m-re merőlegeseket állítunk a főkör és m metszéspontjain át. Mivel m merőleges az érintőkre és átmegy F_1-en, a metszéspont a főkörön lesz. Evidens továbbá, hogy valóban az érintők párhuzamosak l-lel ugyanis mindhárom egyenes merőleges m-re.

A fenti tárgyalás a definícóból vezet le mindent, az ellipszisre adott szerkesztés mintájára. Nagy előnye, hogy a hiperbolához kapcsolódó alakzatokat megismerhetjük így, egyedül a képzetes tengely tárgyalása nem következetes a szerkesztés alapján, de ha tudjuk, hogy két tengely tartozott az ellipszishez, jogosan feltételezhetünk kettőt a hiperbolához is.
Megjegyzés: nem találtam hétköznapi eszközökkel kivitelezhető szerkesztési eljárást, így közlök egyet: Az ellipszishez hasonlóan kell egy ceruza és két gombostű, valamint cérna helyett egy jó minőségű zipzár. A zipzár szétnyíló részéhez felül egyik oldalra szúrjuk az egyik tűt, másik oldalán ennél 2a-val lejjebb, majd a ceruzát egyenesen tartva széthúzzuk a zipzárt.

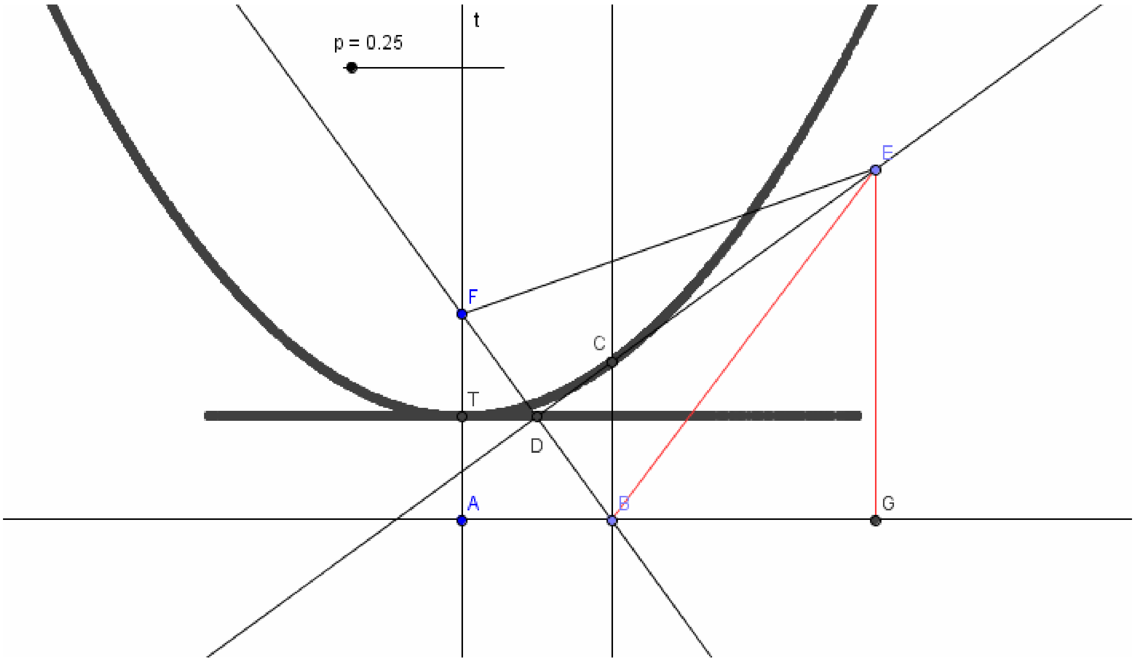
Parabola

Definíció: Azon pontok halmaza a síkon, melyek egy adott egyenestől ugyanolyan távol vannak, mint egy rajta kívüli adott ponttól.

Parabola szerkesztése geogebrával:

1. Vegyünk fel egy p csúszkát 0 minimummal, 5 maximummal, 0.05-ös beosztással, p értékét állítsuk 0.25-re.
2. Vegyük fel az A (0,-p), F (0,p) és T (0,0) pontokat.
3. Állítsunk A-n keresztül merőlegest az y tengelyre, legyen ez v.
4. Vegyünk fel egy B pontot v-n.
5. Vegyük fel a B-ből v-re állított merőlegest, a-t, továbbá az F-en és B-n áthaladó a egyenest.
6. Vegyük fel F és B szakaszfelező merőlegesét, c-t, és annak metszéspontjait a-val és b-vel, C-t és D-t.
7. Kapcsoljuk be C és D nyomvonalát, majd mozgassuk a B pontot v-n.
8. Vegyünk fel egy E pontot c-n, továbbá állítsunk merőlegest E-ből v-re, d-t.
9. Legyen d és v metszéspontja G, rejtsük el d-t, továbbá vegyük az EG szakaszt, e-t. Továbbá az EF szakaszt, f-et és a BE szakaszt, g-t. Legyen piros színű e és g.
10. A parancssorban hozzuk létre a h=f-e számot.

11. Vegyük a v-re merőleges F-en áthaladó t egyenest, és rejtsük el a koordinátatengelyeket.



18. ábra. Parabola és meghatározó adatai

Mit olvasunk le a 18. ábráról, és mit kérdezzünk a lépések előtt?

A 4. lépés után kérdezzünk rá, hogyan definiáljuk pont és egyenes távolságát. Miután megmondták, hogy merőlegest kell állítani az egyenesre, végezzük el az 5. lépést, majd kérdezzünk rá a következő lépésre. Ha megmondják, hogy B és F szakaszfelezője kell, mehetünk tovább, ha nem, elevenítsük fel a definíciót, és kérdezzünk rá azon pontok halmazára, amelyek v-től való távolságához B-re van szükségünk. Miután felvettük a C és D pontokat, a nyomvonalakból leolvashatjuk, hogy C képe a parabola, D képe a vezéregyenessel párhuzamos talpponti egyenes.

A parabola mely meghatározó adatai szerepelnek a 18. ábrán és mit mondjunk még el?

1. Fókuszpontok: F.
2. Vezéregyenes: v.
3. Talppont: O.
4. Érintők: c, ugyanis 1 közös pontja van a hiperbolával, az érintési pont C, ennek bizonyítása: vegyünk bármely más pontot c-ről, például E-t, ekkor E és v távolsága kisebb, mint E és B távolsága a pont és egyenes távolságának definíciója miatt. Evidens, hogy az érintő az érintési pontból a fókuszokba

húzott egyeneseknek belső szögfelezője a szakaszfelező tulajdonság miatt. Megjegyzés: a v-re merőleges egyenesek nem érintők, ugyanis nem lehet rajtuk érintési pont a szerkesztési eljárás miatt, a közös pont egy metszéspont.

5. Talpponti egyenes: D nyomvonala, v felére zsugorított képe F-ből a felezőpont tulajdonsága miatt. Mivel b és c merőlegesek és metszéspontjuk D, a fókuszból az érintőkre bocsátott merőlegesek talppontjai a talpponti egyenesen vannak.
6. Kapcsoljuk be c nyomvonalát és mozgassuk meg b-t, a fekete pontok a külső pontok lesznek, a fehérek a belsők. Ez alátámasztja a következő definíciót: azon pontok, melyek közelebb vannak v-hez, mint F-hez, külső pontoknak nevezzük. Az F-hez közelebbi pontok a belső pontok.
7. A t egyenest a parabola tengelyének hívjuk, ez a parabola egyetlen szimmetriatengelye.
8. Bármely P külső pontból húzhatunk érintőt, ugyanis a 6. pontban láttuk, hogy mindegyiken áthalad biztosan egy c egyenes. Mivel c minden pontjára igaz, hogy a hozzá tartozó B-től és F-től egyforma távol van, körívezzünk a PF távolsággal, és vegyük ennek a k körnek a v-vel való metszéspontjait. Mivel P külső, a fókuszpont távolabb van tőle, mint v, tehát v-nek és k-nak két metszéspontja lesz. A metszéspontok és a fókuszpont szakaszfelező merőlegesei adják a keresett érintőket.
9. Bármely t-vel nem párhuzamos l egyeneshez szerkeszthető egy vele párhuzamos érintő, állítsunk F-ből merőlegest l-re, m-et, majd vegyük m és a talpponti egyenes metszéspontját. Ebből a pontból merőlegest állítva m-re, l-lel párhuzamos érintőt kapunk.

A két másik szerkesztéshez hasonlóan itt is csak a definíciót használjuk a szerkesztéshez, és ezzel megkapjuk a parabolához kapcsolódó alakzatokat. Érdekességként megemlíthetjük, hogy az ellipszisekre és hiperbolákra is adhatunk a paraboláéhoz hasonló definíciót azzal a különbséggel, hogy a ponttól és egyenestől mért távolságok aránya konstans, vagyis a három alakzat közeli rokon, ráadásul ez utóbbit a feladatmegoldásoknál használt dinamikus színeknél látottakkal meg is nézhetik önálló feladatként.

Szemléltetések

Ebben a témakörben megmutatom, hogyan jön rá az ember a Pitagorasz-tétel bizonyítására, továbbá mutatok olyan egyszerűbb feladatokat, ahol a megoldás magától adódik a jó megjelenítés alapján, viszont nehéz vagy sokáig tart nélküle.

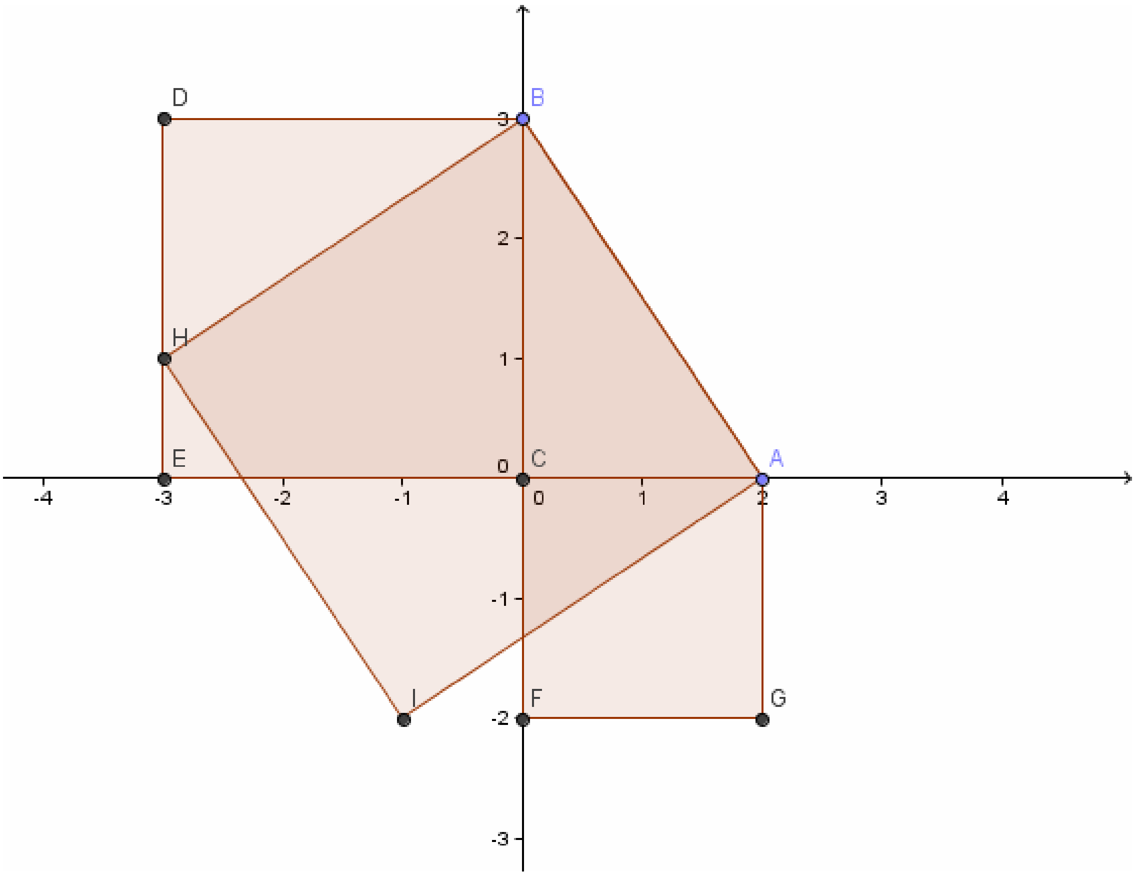
Pitagorasz-tétel bizonyításához ötlet

Tétel: Derékszögű háromszögben a befogókra rajzolt négyzetek területeinek összege megegyezik az átfogóra rajzolt négyzet területével. Másképp: ha a befogók oldalhossza a és b, átfogójának hossza c, akkor $a^2 + b^2 = c^2$.

Középiskolában a bizonyításhoz két a+b oldalú négyzetet fedtünk le kétféle képen: Egyikben a c oldalhosszú négyzet úgy, hogy minden csúcsa a nagyobb négyzet oldalára esik, azokat ciklikusan a:b arányban osztva, továbbá 4 az eredetivel egybevágó derékszögű háromszög van. A másikban az egyik átló mentén az a oldalú négyzet utána pedig a b oldalú négyzet, továbbá két téglalap, mindkettő két az eredetivel egybevágó háromszöggel lefedve, összesen további néggyel. Mivel mindkét nagy téglalap területe megegyezik, és mindkettőben ugyanazt a háromszöget négyszer használtuk, a maradék részek területei is megegyeznek.
A tétel bizonyítása után leginkább az érdekelt, hogyan jöhet rá valaki, hogy éppen a+b oldalú négyzetekre van szükségünk?

A választ a Geogebra megadja: „elrontjuk a szemléltetést”

Vegyük fel az A pontot az x tengely pozitív felén, a B pontot az y tengely pozitív felén, a C pontot az origóban. Rajzoljuk meg az ABC háromszöget. Használjuk a szabályos sokszög funkciót C-re és B-re, majd A-ra és C-re végül A-ra és B-re, mindegyiknél a pontok száma 4. Azt tapasztaljuk, hogy az átfogóra rajzolt négyzet egyik csúcsa valamely másik négyzet oldalán van mindig, továbbá a másik (a-tól ás B-től különböző) csúcs mindig a nem metszett négyzet távolabbi oldalegyenesén van. Amennyiben a befogók hossza egyenlő, mindkét négyzet egy-egy oldalán van egy-egy csúcs. Ez azt sugallja, hogy a háromszög többszöri felhasználásával továbbá a négyzetek egyszeri felhasználásával két nagyobb négyzetet le tudunk fedni.



19. ábra. Pitagorasz tételének elrontott szemléltetése

Megjegyzés: Általában az átfogóra rajzolt négyzetet kifelé rajzoljuk a szemléltetésnél. Amennyiben tesztelni szeretnénk, hogy a gyerekek rájönnek-e a bizonyításra, érdemes a beépített szabályos sokszög funkció helyett saját eszközt létrehozni, ami a két kért pont után egyből a négyzetet rajzolja ki, ezáltal gyorsabbak vagyunk, nagyobb a hiba lehetősége. Ha az első pont helyett félrekattintunk, a másodikat pedig jól, elhitethetjük, hogy mindkettő rossz volt, ezután hibánkat javítva az elsőre kattintva „véletlenül" egy rossz négyzetet kapva reménykedhetünk, hogy egy diák bemondja, hogy így is jó.

Hangyák a rúdon

A következő feladattal harmadéves egyetemistaként találkoztam, de véleményem szerint szinte bármely korosztálynak feladható:

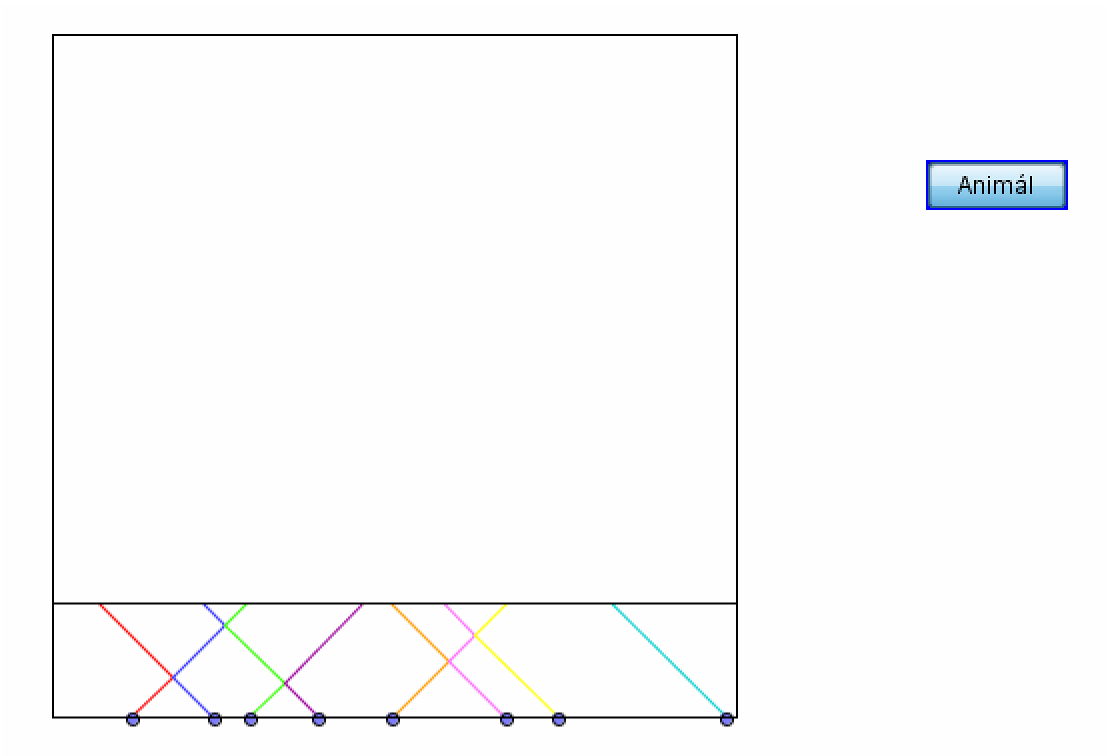
Az egy méter hosszú vékony rúdra sok hangyát szórok, a hangyák csak a méterrúd irányával párhuzamosan, annak tetején haladhatnak, egymás mellett nem férnek el. A hangyák egyszerre indulnak el valamely megengedett irányba 1 cm/s sebességgel. Mikor két hangya találkozik, mindkettő visszafordul, és rögtön megy is tovább. Ha egy hangya eléri a rúd végét, leesik. Ha a hangyák pontszerűek és azonnal fordulnak, meddig kell várnom, hogy a rúdról mind leessenek?

A feladat megoldása nem nehéz, de a gyakorlaton sokan mégis sokáig gondolkodtak, és a következőhöz hasonló kérdés merült fel: Mi van, ha egy hangya oda-vissza forog egy szakaszon, mert mindig ütközik? Mivel mind magasabb évfolyamokat jártunk, meglepett, hogy egy ilyen feladat nehézséget jelent, miközben a válaszra pár másodperc alatt rájön az ember: az ütközés érdektelen, ugyanaz történik, ha átsétálnak is egymáson, így csak a leghosszabb út megtételére ítélt hangyával kell számolnunk, mintha egyedül lenne. Nyilván a legrosszabb eset az, ha a rúd egyik végéről megy a másikra, azaz 100 másodperc alatt lesz üres a rúd.

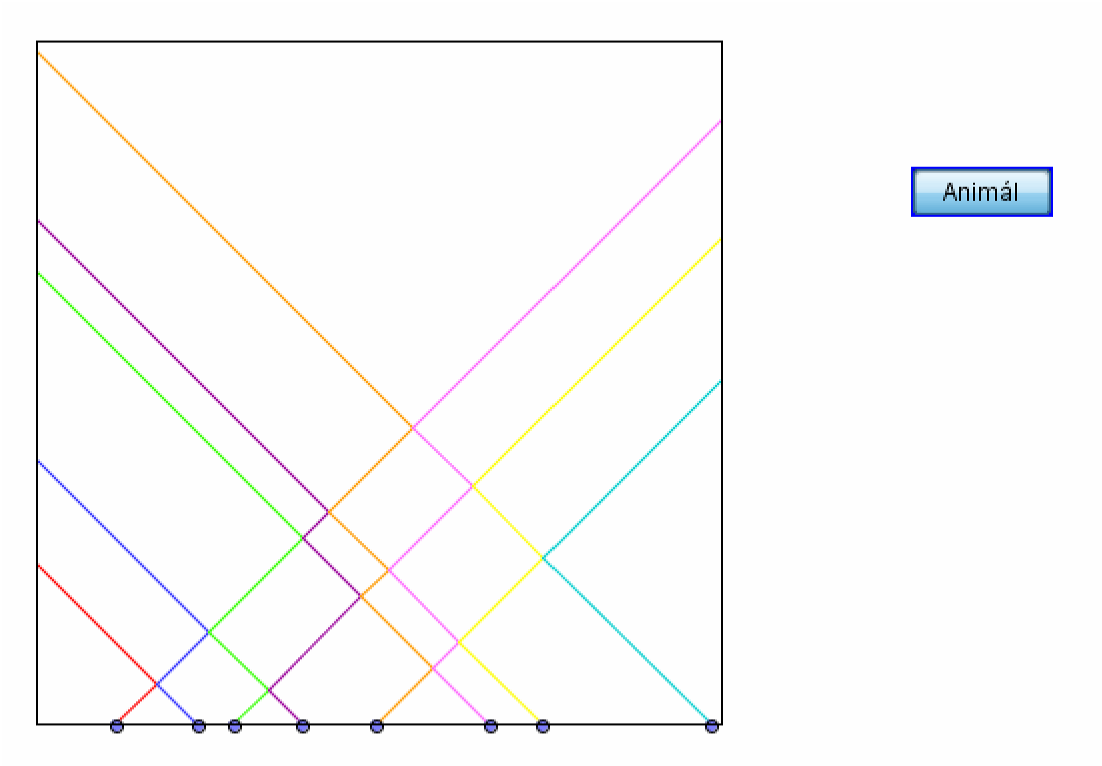
Miért nem jöttek rá sokan a megoldásra gyorsan? A feladat nehézségét a rossz szemlélet adja: Kombinatorikai feladatok során gyakran kérdéses, hogy a dolgok egyformák vagy különbözőek? Esetünkben egyformáknak gondolnánk őket, de az ütközések miatt sokan különbséget tennénk közöttük, így a hangyáink színesek. A szemlélet nehézségét adja, hogy egy dimenzióban (egyenesen) akarjuk vizsgálni a hangyák időben változó helyzetét, holott két dimenzióban (síkon) kellene, így egyik (általában az idő, de lehet, hogy mindkettő) változónk megfigyelésénél jelentősen torzítunk. Ezen torzítás feloldható a megfelelő szemléltetéssel, egy animációval, mely során a hangyák helyzetét az idő függvényében lerajzoljuk.

Az animáció elkészítése a Geogebrával:

1. A beállítások menü csúszka fülén állítsuk be az egyszeri növekvő ismétlést.
2. Hozzunk létre egy t csúszkát 0 minimummal, 1 maximummal, 0.0025-ös beosztással, 0.25-ös sebességgel.
3. Vegyük fel a következő pontokat: A (0,0), B (0,100), C (100,100), D (100,0), E (0,100*t), F (100,100*t).
4. Vegyünk fel egy egyenest A-n és C-n keresztül, a-t, és egyet B-n és D-n keresztül, b-t, továbbá a parancssorban az x=100 egyenest, c-t.
5. Vegyünk fel körülbelül 8 (lehetőleg 5-nél többet, de 12-nél kevesebbet) pontot az x tengelyen 0 és 100 között változó, de ne túl nagy vagy túl kicsi távolságokra egymástól (példát vehetünk a 21. ábra szerint).
6. Az 5. pontban felvett pontokon keresztül húzzunk párhuzamosokat egyenként vagy a-val, vagy b-vel úgy, hogy különböző magasságokban messék egymást.
7. Vegyük fel a 6. pontban felvett egyenesek első síknegyedbe eső metszéspontjait, továbbá a c-vel és y-tengellyel vett metszéspontjaikat.
8. Az 5. lépésben felvett pontoktól a 6. pontban felvett egyenesek mentén vegyünk fel különböző színű, de jól látható törött vonalakat úgy, hogy a metszéspontoknál (7. pont) irányt váltunk (cikkcakkban).
9. Rejtsünk el mindent, kivéve az 5. pontban felvett pontokat, és a 8. pontban felvett törött vonalakat.
10. Vegyünk fel egy fehér (vagy a háttér színével egyező) színű poligont a CDEF pontokkal, 100-as átlátszatlansággal, a haladó fülön 1-es réteggel.
11. Vegyük fel az ABCD fekete színű poligont 0-s átlátszatlansággal az 2. rétegben, továbbá egy fekete szakaszt E-n és F-en át ugyanebben a rétegben.
12. Hozzunk létre egy animál feliratú gombot, és a script részébe írjuk a következőt:
    Érték[t,0]
    Animál[t]
13. Indítsuk el az animációt.



20. ábra. Hangyák a rúdon animáció közben



21. ábra. Hangyák a rúdon animáció végén

Animáció egy hétköznapi feladathoz

A lentebb bemutatásra kerülő feladat nehezebb 9.-es feladatnak számít a gimnáziumban, ahol tanultam. Az esetszétválasztós és szöveges feladatokkal is több osztálytársamnak gondja volt, részben ezért, részben a feladat megoldásához szükséges idő miatt az ilyenekkel sok időnk elment. Tanítási gyakorlatom alatt egy hasonló feladatot láttam ugyanebben az iskolában, de akkor csoportokban dolgoztak a gyerekek. Sok idő elment az értelmezéssel, majd felírták a tanulók az intervallumokhoz tartozó egyenleteket, végül egyszerre megoldották a tábláknál. Mivel a teremben interaktív tábla is volt, az az ötletem támadt, hogy egy ilyen feladat nagyszerű lenne olyan példának, ahol a vizualizálás sokat segít.

Esetszétválasztós feladat: Egy medencébe 3 csapon engedhetünk vizet, és egy szivattyúval engedhetjük le. Az A csap egyedül 3, a B 5, a C 1 óra alatt töltené fel. A szivattyú másfél óra alatt üríti ki a teli medencét. Az első csap bekapcsolásától számított egy óra múlva a szivattyú bekapcsol, ha a medence nincs tele. Ha a medence két órával az első csap kinyitása után nincs tele, minden csapot megnyitnak. Ha a medence megtelik, mindent elzárnak.
Hány óráig tart az üres medence feltöltése, ha az A és B csapokat nyitjuk meg kezdetben majd az automatikára bízzuk a többit?

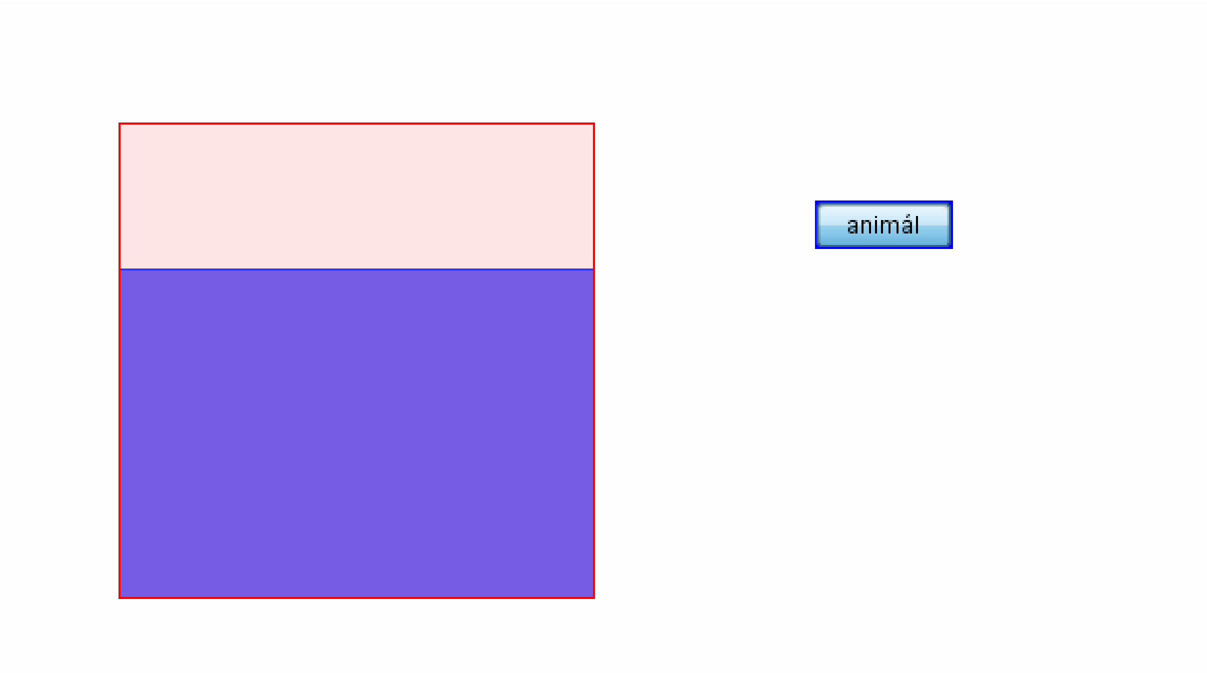
A feladat megjelenítése Geogebrával:

1. Vegyük fel az A (0,0), B (1,0), C (1,1), D (0,1) pontokat.
2. Lépjünk be a beállítások menübe és a csúszkáknál állítsuk be az ismétlésnél a következőt: növekvő (egyszeri).
3. Hozzunk létre egy t csúszkát 0 minimummal, 35/13 maximummal, 35/13000 beosztással, értékét állítsuk be 0-nak.
4. Hozzuk létre az alábbi függvényeket:
   f(x)=$\frac{1}{3}\left(x-1+|1-x|\right)$, g(x)=$\frac{x}{5}$, h(x)=$\frac{x}{3}$, j(x)=$\frac{1}{2}\left(x-2+|2-x|\right)$ és a(x)=g(x)+h(x)-f(x)+j(x)
5. Vegyük fel az E (1,a(t)) és F (0,a(t)) pontokat.

6. Vegyük fel az ABCD poligont, színe legyen piros, átlátszatlansága legyen 10.
7. Vegyük fel az ABEF poligont, színe legyen kék, átlátszatlansága legyen 75.
8. A két poligon kivételével minden alakzatot és a csúszkát rejtsük el.
9. Hozzunk létre egy animál feliratú gombot. A gomb script menüjébe írjuk az alábbit:

   Érték[t,0]

   Animál[t]
10. Indítsuk el az animációt.



22. ábra. Hétköznapi feladat animáció közben

Mit figyelünk meg az animáción?

Az első intervallumban növekszik a vízszint, de nem lesz tele, a másodikban lassan csökken, majd a harmadikban gyorsan emelkedik a vízszint.

Hogyan ösztönzi ez a gyereket, mi újat tanulhatnak így?

A feladat megoldása során három időintervallumot kellene vizsgálnunk, de az animáció egyértelműen elárulja, hogy megoldást a harmadik intervallumban találhatunk. Elsőre azt gondolhatjuk, hogy ez egy lényeges egyszerűsítés, azonban a feladatot egyáltalán nem oldotta meg helyettünk az animáció, de jelentősen módosította azt. Animáció nélkül 3 egyenletet kellene megoldanunk, és a megoldásokat összehasonlítani az értelmezési tartományokkal, most viszont be kell látni, hogy az első két időintervallumban nincs tele a medence, továbbá kiszámolni, hogy a harmadik intervallumban mikor lesz tele. Egyértelmű, hogy a harmadik intervallumbéli számolást nem kerülhetjük meg, de a gyerekeknek választási lehetőséget adunk, számolgathatnak, mintha nem is lett volna animáció, vagy valamilyen magyarázatot adnak a vízszintre. Amennyiben megmagyarázzák az első két intervallumbéli történéseket, közelebb kerülnek az analízis módszereihez például a következő frappáns válasszal:

Csaljunk, cseréljük ki a B csapot egy másik A-ra, így a medencét csak gyorsabban tölthetjük meg. Mivel a két csapunk egyenként három óra alatt töltené fel a medencét, együtt nyilván másfél óra alatt. Evidens, hogy egy óra alatt nem lesz teli medencénk, így bekapcsol a szivattyú, ami a töltési sebességgel vezeti el a vizet, tehát a víz mennyisége a következő egy órában változatlan lesz, így kénytelenek vagyunk a harmadik intervallumban számolni. Mivel csaltunk, rövidítettük a szükséges időt, ezért az eredeti csapokkal lassabban menne a folyamat, ezért elég itt is a harmadik intervallumban számolni.

Ha a feladatot a gyerekeknek egyéni munkaként adjuk fel, vagyis indoklást írhatnak a füzetbe, vagy számolgathatnak, egyénenként visszajelzést kapunk ötletességükről, magabiztosságukról, továbbá hogy inkább az analízis vagy az algebra módszereit részesítik előnyben.

Animációt sok feladat megjelenítéséhez készíthetünk a fenti minta alapján, azonban szem előtt kell tartanunk, hogy egy-egy animáció amellett, hogy kicsit feldobja a matekóra hangulatát, ki is zökkenthet néhány tanulót. Az animációkkal a gyerek aktivitását szeretnénk elérni, gondolkozásmódjukat színesíteni, képzelőerejüket fejleszteni. Jól meg kell választanunk a feladatot, amit megjelenítünk, figyelembe kell vennünk a tanulók aktivitását, tudásuk szintjét. Ha a csoport aktív és van egy animálható feladatunk, tartsuk meg inkább későbbre, máskorra ezt a feladatot. Könnyű feladatokhoz ne készítsünk animációt. Ha rendszeresen van animáció, a gyerekek hozzá szokhatnak, és a kívánt hatás helyett az ellenkezőjét kapjuk.

Forrásjegyzék:

1. Verhóczki László: Projektív geometria

   Jegyzet (Budapest, 2010.)

   http://www.cs.elte.hu/geometry/vl/ProjGeom.pdf

2. Hajós György: Bevezetés a geometriába

   Könyv (Budapest, 1999.)

3. Deli Anikó: Másodrendű görbék a projektív síkon

   Szakdolgozat (Budapest, 2011.)

   http://www.cs.elte.hu/blobs/diplomamunkak/bsc_mattan/2011/deli_aniko.pdf

4. KöMaL matematika feladatai a komal.hu oldalról

5. Bejegyzés a wikipedia-ról:

   http://hu.wikipedia.org/wiki/Ellipszis_(görbe)

   http://hu.wikipedia.org/wiki/Hiperbola

   http://hu.wikipedia.org/wiki/Parabola_(görbe)