SZAKDOLGOZAT

Megoldási módszerek versenyfeladatokhoz

Egyenlőtlenségek

Takáts Gergely

Matematika BSc. III.

Tanári szakirány

Témavezető: Dr. Kós Géza

egyetemi adjunktus

ELTE Analízis Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Budapest 2012.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

„A nagy felfedezések nagy feladatokat oldanak meg, de minden feladat megoldásához szükség van valamely kis felfedezésre.”
(Pólya György, a gondolkodás iskolája)

Jelen szakdolgozat feladatmegoldási módszerekről szól, azon belül főleg egyenlőtlenségek megoldásához használható technikákról. Célja, hogy a középiskolás diákok számára segítse a versenyekre való felkészülést, illetve hogy tanáraikat támogassa a felkészítésben. Elsősorban olyan tehetséges diákoknak szól, akik kezdő- vagy középhaladó szintű versenyzők, és szeretnének jobb feladatmegoldóvá válni. Néhány nemzetközi diákolimpiai feladatot is tárgyalni fogok, de ez a dolgozat nem diákolimpiai felkészítés céljából készült.

Témaválasztásom oka, hogy tehetséggondozással szeretnék foglalkozni. Engem is tehetséges diáknak tartottak a tanáraim, bár a feladatmegoldás technikájában nem igazán jeleskedtem. Ezért személyes indítékom is volt. Miért pont az egyenlőtlenségek témakörét választottam? Az algebrát mindig is szerettem, ennek egy szép és különleges nehézségeket rejtő területe az egyenlőtlenségek. Egy egyenlőtlenséget gyakran sokféleképpen meg lehet oldani, ezért ezek a feladatok félig nyitottak. Emiatt jó lehetőséget adnak arra is, hogy heurisztikákat alkalmazzunk.

Heurisztikus okoskodáson (továbbiakban: heurisztikán) olyan okoskodást értünk, „amely nem végleges és szigorú, hanem csak átmeneti és plauzibilis [vagyis hihető], célja a kitűzött feladat megoldása” ([1] 17. o.). A heurisztikák nagy előnye, hogy rugalmasak, emiatt egy kis kreativitással több, egymástól távoli területen is alkalmazhatók. Nem kell a matematika több tucat szakterületének sok száz törvényét megjegyezni, hanem elég néhány alapvető szabályt ismerni. Ezért a konkrét, egyenlőtlenségek megoldására vonatkozó módszerek után általánosabb heurisztikákról is szó lesz. Alkalmazásukat néhány feladaton keresztül is bemutatom.

A másik nagy előnye, ha egy diák nem csak konkrét technikákat gyakorol, hanem a heurisztikákban is járatos, hogy az utóbbi használatához mindig egy kicsivel több kreativitás szükségeltetik (ld. a Pólya-idézetet).

A matematikatanítás végső célja számomra az, hogy gondolkodó embereket neveljünk. Lesz, aki a tanítványok közül matematikus lesz, de a többség általában más szakmát választ, ahol szintén nagy hasznát veszi majd a problémamegoldó készségnek. Sokan lesznek programozók, mérnökök, cégvezetők, tanácsadók. Ha megtanítjuk őket gondolkodni, azzal már sokat tettünk a személyes sikerükért.

2. Egyenlőtlenségek megoldása

Az egyenlőtlenségek megoldása sokszor azért kifejezetten nehéz, mivel az egyenleteknél szokásos ekvivalens átalakításokkal ritkán jutunk eredményre. Ha nem ismerünk egy konkrét egyenlőtlenséget, amire a konkrét feladatot vissza tudjuk vezetni, akkor próbálkozhatunk még becsléssel. Ezzel azonban vigyázni kell, mert könnyen kaphatunk olyan becslést, ami gyengébb az eredeti állításnál, és emiatt semmire nem megyünk vele. Az itt tárgyalt módszereket használva a legritkább esetben kell becslésre hagyatkoznunk, és némi találékonysággal a középiskolai versenyfeladatok többségét sikeresen meg tudjuk oldani.

Először is azokat a matematikai ismereteket tekintjük át, amit a versenyzőnek érdemes megszereznie, mielőtt gyakorolni kezd. Utána a különböző feladatmegoldási módszereket tárgyaljuk. Végül egy-két heurisztika következik, ami megkönnyíti az elindulást akkor is, ha még nem látszik a cél.

Munkám során a legtöbb feladatot és megoldást [2] könyvből vettem. Ebben volt ugyanis a legtöbb egyenlőtlenséges feladat összegyűjtve azon művek közül, amiket be tudtam szerezni. A saját munkám abból állt, hogy a megoldásokat elemeztem, és felhasznált módszerek szerint csoportosítottam. Ezek egy része számomra ismert volt, egy másik részét már korábban láttam, de tudatosan nem alkalmaztam, és volt olyan is, ami az újdonság erejével hatott. Ez utóbbi heurisztika (ld. 5.2 utolsó három bekezdése) elég ésszerűnek tűnik, de még sehol sem találkoztam vele korábban.

Nézzük tehát a módszereket, amiket fel tudunk használni az egyenlőtlenségek megoldása során!

3. A megoldást megkönnyítő ismeretek

A következő oldalakon olyan egyenlőtlenségeket és egyéb matematikai tételeket közlünk, amik vagy szerepelnek a középiskolás tananyagban, vagy amiknek elfogadják a használatát a diákolimpián. Ezek többsége viszonylag egyszerűen bizonyítható. Itt a bizonyításukat nem közöljük, mert azok könnyen hozzáférhetők. A versenyeken a hangsúly úgysem a tételek ismeretén, hanem azok kreatív alkalmazásán van. Ezért ahol szükséges, ejtünk pár szót az említett tételek nemtriviális felhasználásáról is. Igyekeztem azokat a tételeket összegyűjteni, amiket a megoldott feladatok során fel is használunk, ezért kimaradt például a Jensen- és a Bernoulli-egyenlőtlenség is.

3.1. Négyzetszámok összege

A legegyszerűbb egyenlőtlenség, hogy tetszőleges pozitív n egészre és tetszőleges valós $x_1 ... x_n$-re

$$x_1^2 + ... + x_n^2 \geq 0$$

Egyenlőség akkor teljesül, ha $x_1 = ... = x_n = 0$. Az összes további egyenlőtlenség gyakorlatilag erre vezethető vissza. Leggyakrabban a következő két formáját használjuk:

$$(a+b)^2 \geq 0,$$
$$(a-b)^2 \geq 0.$$

Természetesen nem csak négyzetszámok összege, hanem tetszőlegesen sok nemnegatív szám összege is nemnegatív lesz. Egyenlőtlenség mindkét oldalához ugyanazt a számot adva vagy kivonva ekvivalens állítást kapunk. Ezért két egyenlőtlenséget össze is adhatunk:

$$\begin{aligned} a &\geq b, \\ c &\geq d, \\ \Rightarrow a + c &\geq b + d \end{aligned}$$

(Persze fontos, hogy az egyenlőtlenségek megfelelő oldalait adjuk össze)

Kevésbé ismert, de ugyanúgy helyes, ha egy egyenlőtlenség két oldalához adjuk hozzá egy egyenlet egy-egy oldalát. Tegyük fel, hogy a, b, c pozitív, $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, és igaz a következő két állítás:

$$\begin{aligned} 2bc \cdot \sin\alpha &< \frac{1}{\sqrt{3}}(a^2 + b^2 + c^2) \\ 2bc \cdot \cos\alpha &= b^2 + c^2 - a^2 \end{aligned}$$

Mivel minden tényező pozitív, a két kifejezést négyzetre emeljük és összeadhatjuk:

$$\begin{aligned} 4b^2c^2 &< \frac{1}{3} \cdot (a^2 + b^2 + c^2)^2 + (b^2 + c^2 - a^2)^2 = \\ & \frac{1}{3}(a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2) + \\ & +(a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 + 2b^2c^2 - 2a^2c^2) = \\ & \frac{4}{3}(a^4 + b^4 + c^4) - \frac{4}{3}a^2b^2 + \frac{8}{3}b^2c^2 - \frac{4}{3}a^2c^2. \end{aligned}$$

Mindkét oldalt beszorozzuk $\frac{3}{4}$-del:

$$3b^2c^2 < (a^4 + b^4 + c^4) - a^2b^2 + 2b^2c^2 - c^2a^2,$$

amiből adódik, hogy:

$$(a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2 > 0.$$

3.2. Az n-edik közepek közötti egyenlőtlenség

Ez az egyenlőtlenségek egyik legfontosabb csoportja. Ha $x_1, ..., x_n$ pozitív valós számok, akkor

$$\min(x_i) \leq \frac{n}{\frac{1}{x_1}+...+\frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{(x_1 \cdot \ldots \cdot x_n)} \leq \frac{x_1+...+x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2+...+x_n^2}{n}} \leq \max(x_i).$$

Az egyenlőség akkor teljesül, ha $x_1 = \ldots = x_n$.

Egy komoly versenyen a közepeket nem elég külön-külön tudni, hanem fel kell ismerni bármely kettő közötti egyenlőtlenségből kihozható egyéb formulákat. Nehéz feladatoknál gyakran előfordul, hogy a közepek nem a megszokott köntösükben, hanem némileg más formában jelennek meg:

$$\frac{(a+b)^2}{4} \geq ab$$
$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{3}$$
$$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geq 4$$
$$3abc \leq a^3+b^3+c^3$$

Az első egyenlet a számtani-mértani, a második a számtani-négyzetes, a harmadik a számtani-harmonikus, a negyedik pedig a mértani-köbös közepek közötti egyenlőtlenség átírása. Néha egész váratlan helyzetben tudjuk alkalmazni a közepeket:

$$(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \qquad (1)$$

Itt a bal oldalt egy mértani közép gyök alatti tényezőinek vesszük, ekkor a jobb oldalon a számtani közepük köbe jelenik meg. A számtani-mértani közép közötti egyenlőtlenség nagyon jól alkalmazható szorzat összegé, illetve összeg szorzattá alakítására. Ilyen átalakítást akkor érdemes végezni, ha ismerünk valamilyen összefüggést a változók között.

A közepekről még szó lesz a 4.3. fejezetnek az „1 kiemelése” részében.

3.3. A Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség

Tetszőleges $a_1, ..., a_n$, $b_1, ..., b_n$ valós számokra

$$(a_1b_1 + ... + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + ... + b_n^2).$$

3.4. A rendezési tétel

Legyenek $a_1, ..., a_n$, $b_1, ..., b_n$ pozitív valós számok. Az $a_1b_1 + ... + a_nb_n$ összeg maximális, ha a_i és b_i egyformán szigorúan monoton növő, ill. csökkenő sorozatok, és minimális, ha a_i és b_i egyike szigorúan monoton nő, a másik szigorúan monoton csökken.

Megjegyzés: ha a monotonitás szigorúságát nem követeljük meg, akkor az állítás igaz marad azzal a különbséggel, hogy az említett két szélsőértéken kívül lehetséges más minimum és maximum is.

Ez az előzőeknél talán könnyebben használható, mégis sokoldalú tétel. A nyilvánvaló felhasználási módja, ha az egyenlőtlenség két oldalán a két sorozatot ugyanúgy, ill. ellentétesen rendezzük. Az is elég nyilvánvaló, hogy ha a maximumban a_i és a_j együtthatóját felcseréljük ($a_ib_i + a_jb_j$ helyett $a_ib_j + a_jb_i$-t írunk), az eredmény kisebb lesz. Ezen kívül még számos nem triviális felhasználása is létezik az egyenlőtlenségnek. Például ciklikusan permutálhatjuk az együtthatókat. Vagy akár az összes ilyen ciklikusan permutált tagból képezett egyenlőtlenséget is összeadhatjuk, ha éppen arra van szükség.

3.5. A Nesbitt-egyenlőtlenség

Ha a, b, c tetszőleges pozitív valós számok, akkor

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}. \tag{2}$$

Ennek a két számra vett esete:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2, \tag{3}$$

általános formája pedig:

$$\frac{x_1}{s-x_1}+...+\frac{x_n}{s-x_n}\geq\frac{n}{n-1},$$

ahol $s=x_1+...+x_n$.

3.6. A háromszög-egyenlőtlenség ekvivalens formái

Legyenek $a,\ b,\ c$ egy háromszög oldalai, és legyen a háromszög nem elfajuló. A következő három állítás ekvivalens a háromszög-egyenlőtlenséggel:

1. $a>|b-c|,\ b>|c-a|,\ c>|a-b|$
2. $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)>0$
3. $a=y+z,\ b=z+x,\ c=x+y,$

ahol x, y, z pozitív számok.

Az utóbbi két formát előszeretettel használják versenyfeladatokban, ezért érdemes őket megjegyezni és felismerni. Ha olyan egyenlőtlenséget oldunk meg, amiben háromszög szerepel, jó heurisztika, hogy valószínűleg valahol fel kell használni a háromszög-egyenlőtlenséget vagy egy ekvivalens formáját.

3.7. Konvexitás, konkávitás

Ha egy egyenlőtlenségben függvények szerepelnek, vagy vissza tudjuk őket vezetni függvényekre, akkor nagyon hatékony eszköz a konvexitás-konkávitás vizsgálata.

Egy függvény konvex (konkáv) egy adott intervallumon, ha az intervallum bármely $x_1,\ x_2$ pontjára

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\geq f\Big(\frac{x_1+x_2}{2}\Big)\quad\left(\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\leq f\Big(\frac{x_1+x_2}{2}\Big)\right).$$

(Megjegyzés: szakirodalomtól függ, hogy az egyenlőséget megengedik-e vagy sem. Mi azért engedjük meg, mert – ahogy a példákból is látszik – sokkal több az olyan feladat, ami az egyenlőséget is magába foglalja. Természetesen a „szigorú” konvexitást is lehet definiálni, ekkor a második derivált vizsgálatakor a szigorú egyenlőtlenség lesz a feltétel.)

Könnyen belátható, hogy egy konvex függvénynél nem csak két pontra, hanem tetszőleges n pozitív egészre igaz, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i)}{n} \geq f\Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}\Big),$$

és konkáv függvényre ellenkező irányban igaz az egyenlőtlenség. Ez egy rendkívül hasznos tulajdonság, amit számos alkalommal fel lehet használni a feladatmegoldás során. Viszont ezen definíció alapján nehéz megállapítani, hogy egy függvény konvex-e, ezért használjuk a következő tételt:

Egy differenciálható függvény akkor és csak akkor konvex (konkáv) egy intervallumon, ha a deriváltja az adott intervallumon monoton nő (monoton csökken), tehát ha a második deriváltja ≥ 0 (≤ 0) az intervallumon (adott intervallumon monoton folytonos függvény legfeljebb nullmértékű helyen nem differenciálható). A monotonitásnak nem szükséges szigorúnak lennie (pl. konstans függvény), de ha az, akkor a konvexitás (konkávitás) definíciójában is szigorú egyenlőtlenség áll.

Ezzel már számos függvényről meg lehet mondani, hogy konvex vagy konkáv-e. Például konvex az e^x és a $\cosh x$ a valós számokon, a $\sinh x$ az $x \geq 0$ félegyenesen, a $\sin x$ a $[(2k-1)\pi, 2k\pi]$ intervallumokon. Konkáv az $\ln x$ az $x > 0$ félegyenesen, a $\sinh x$ az $x \leq 0$ félegyenesen, a $\sin x$ a $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ intervallumokon.

3.8. Weierstrass-tétel

Szélsőértékek vizsgálatánál nagyon hasznos lehet a Weierstrass-tétel:

Egy folytonos függvény tetszőleges $[a, b]$ zárt intervallumon felveszi a maximumát és a minimumát. Ez főleg akkor hasznos, ha tudjuk a függvényről, hogy monoton nő, csökken, konkáv vagy konvex, és be akarjuk látni, hogy az adott tartomány szélén lesz minimális vagy maximális az értéke.

4. Megoldási módszerek

A következőkben néhány módszert mutatunk be konkrét példákon keresztül. Ha ezeket a megfelelő sorrendben és jól alkalmazzuk, az általában elvezet a megoldásig. Persze nehéz feladatoknál így is kell általában egy vagy több jó gondolat, mert a gondolkodás semmilyen módszerrel nem helyettesíthető. A módszerek viszont segítenek, hogy a gondolatainkat könnyebben érvényre tudjuk juttatni.

4.1. Helyettesítés

Szimmetrikus helyettesítés

Ezt a módszert leginkább két esetben érdemes alkalmazni:

1. ha az új változók bevezetésével az egyenlet könnyebben kezelhető lesz,
2. vagy ha az eredeti változók között van valamilyen összefüggés, amit az új változókkal jobban ki tudunk használni.

Mi most a 2. esettel foglalkozunk.

Feladat ([2] 165. o. E9.): Legyenek a, b, c egy háromszög oldalai. Bizonyítsuk be, hogy

$$f(a,b,c) = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3} > \frac{1}{4}. \tag{4}$$

(Megjegyzés: az $f(a,b,c)$ is egyfajta helyettesítés, ami nem csak kényelmi okokat szolgál: egy versenyen időt takaríthatunk meg vele.)

Megoldás: Vezessünk be új változókat. Legyen

$$r = \frac{-a+b+c}{a+b+c}, \quad s = \frac{a-b+c}{a+b+c}, \quad t = \frac{a+b-c}{a+b+c}.$$

Az új változókra teljesül, hogy $r+s+t=1$. Ezen kívül a háromszög-egyenlőtlenség miatt mindegyik pozitív. (Ezt tehát még ki kell használnunk valahol! Tulajdonképpen azért is vezettük be az új változókat, hogy ezt megtehessük.) Igaz a következő egyenlőség:

$$\frac{a+b-c}{a+b+c}+1=\frac{2(a+b)}{a+b+c},$$

ebből következik, hogy

$$f(a,b,c)=\frac{1}{8}(1+r)(1+s)(1+t)=\frac{1}{8}(1+1+rs+st+tr+rst)>\frac{1}{4}.$$

□

Trigonometrikus helyettesítés

Akkor érdemes trigonometrikus helyettesítéssel próbálkozni, ha másodfokú vagy gyökös kifejezésekkel találkozunk, mint például $1-x^2$, x^2+1, $\sqrt{a^2+x^2}$. Mivel a szögfüggvények között kapcsolat van, azt is érdemes megvizsgálni, hogy milyen összefüggést találunk a változók között.

Feladat ([2] 177. o. E27.): Lássuk be, hogy ha a, b, c, d pozitív valós számok, akkor

$$\sqrt{ab}+\sqrt{cd}\le\sqrt{(a+d)(b+c)}.$$

Megoldás: Először is rendezzük egy oldalra a gyököket: osszunk le a jobb oldallal, majd párosítsuk a számlálókat a nevezőkkel!

$$\sqrt{\frac{a}{a+d}\cdot\frac{b}{b+c}}+\sqrt{\frac{d}{a+d}\cdot\frac{c}{b+c}}\le 1. \tag{5}$$

Most észrevehetjük, hogy

$$\left(\sqrt{\frac{a}{a+d}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{d}{a+d}}\right)^2=1.$$

Ugyanígy a másik két tényezőre. Legyen az első gyök két tényezője $\sin^2\alpha$ és $\sin^2\beta$ $(0<\alpha,\beta<\frac{\pi}{2})$! A következő egyenlőtlenséget kapjuk:

$$\begin{aligned} \sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta &\le 1 \\ \Rightarrow \cos(\alpha-\beta) &\le 1, \end{aligned}$$

amiből már következik az állítás. □

Függvények helyettesítése

Az egyik legegyszerűbb, de mégis sok esetben hatékony módszer, ha az eredeti változó helyett valamelyik függvényét helyettesítjük be. Például x helyett $x+1$-et, x^2-et, $\sqrt{x}$-et stb.

Példa: Az $(x-y)^2 \ge 0$ egyenlőtlenségből számoljuk ki a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget:

$$\begin{aligned} (x-y)^2 &\ge 0 \\ \Rightarrow x^2+y^2 &\ge 2xy \\ \Rightarrow \frac{x^2+y^2}{2} &\ge xy. \end{aligned}$$

Most helyettesítsünk be x és y helyére $\sqrt{x}$-et és $\sqrt{y}$-t:

$$\frac{x+y}{2} \ge \sqrt{xy}.$$

□

Szimmetrikus polinomok

Mivel a következő rész a szimmetriáról szól, természetesnek tűnt, hogy a szimmetrikus polinomok maradjanak utoljára. Három változóra az elemi szimmetrikus polinomok a következők:

$$u = a + b + c,$$
$$v = ab + bc + ac,$$
$$w = abc.$$

Ha adott egy n-edfokú egyenlőtlenség, ami szimmetrikus a változókra, akkor ki lehet fejezni az elemi szimmetrikus polinomok felhasználásával. Ezzel a problémát visszavezettük egy n-edfokú egyenlet megoldására, amit a szokásos megoldási módszerekkel vizsgálhatunk.

4.2. A szimmetria felhasználása

Minden olyan módszert ide sorolunk, amikor vagy igyekszünk az egyenlőtlenséget a változók szerint szimmetrikussá tenni, vagy ha már eleve szimmetrikus, akkor ezt kihasználni. Természetesen a megoldási módokat nem lehet diszjunkt osztályokba sorolni. A helyettesítés kategóriában is vannak olyan fogások, amik ide is tartozhatnának, és később is lesz még ilyen.

Tegyük hasonlóvá!

A szimmetria egyik nyilvánvaló módja, ha egy egyenlőtlenségben hasonlóvá tesszük az összes számlálót, az összes nevezőt, vagy a számlálókkal a nevezőket. Bár ez egyszerűen hangzik, a gyakorlati megvalósítása sokszor egyáltalán nem triviális. Alakítsuk át például a (2) Nesbitt-egyenlőtlenség bal oldalának tagjait külön-külön ([2] 163. o. E7.)

$$\frac{a}{b+c} = \frac{a+b+c}{b+c} - 1,$$
$$\frac{b}{a+c} = \frac{a+b+c}{a+c} - 1,$$
$$\frac{c}{a+b} = \frac{a+b+c}{a+b} - 1.$$

Ez nagyon jó nekünk, mivel így már legalább a számlálók hasonlítanak egymásra, a 3 db -1-gyel pedig már könnyen elbánunk. Ha kiemeljük az $(a+b+c)$-t, a következőt kapjuk:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}\right)-3.$$

Ez már majdnem jó, de a számláló és a nevező még mindig nem hasonlít eléggé egymásra. Ezért a következő cselhez folyamodunk:

$$\frac{1}{2}\Big((a+b)+(a+c)+(b+c)\Big)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right)-3$$

Innen pedig egy egyszerű számtani-harmonikus közepek közötti egyenlőtlenségből kijön az eredmény.

Adjuk össze!

Egy másik, kevésbé nyilvánvaló módszer a szimmetriák felhasználására, ha az összes, változók szerint szimmetrikus egyenlőtlenséget összeadjuk. Egy szép példa ennek a megoldási módnak az alkalmazására:

Feladat ([4] 28. o.): Lássuk be, hogy egyformán rendezett a_i és b_i sorozatokra

$$\sum \frac{a_i}{n} \sum \frac{b_i}{n} \le \sum \frac{a_i b_i}{n},$$

és ellentétesen rendezett sorozatokra a másik irányban érvényes az egyenlőtlenség (Csebisev).

Megoldás: legyenek a_i és b_i egyformán rendezett sorozatok. Vegyük a páronkénti összegüket! A rendezési tételnél már említettük, hogy ha tetszőlegesen permutáljuk a sorozatokat (pl. ciklikusan), az eredmény kisebb vagy egyenlő lesz, mint az eredeti összeg:

$$a_1b_1 + ... + a_nb_n \geq a_1b_2 + ... + a_nb_1$$
$$a_1b_1 + ... + a_nb_n \geq a_1b_3 + ... + a_nb_2$$
$$\vdots$$
$$a_1b_1 + ... + a_nb_n \geq a_1b_n + ... + a_nb_{n-1}$$

Adjuk most össze mindegyik egyenlőtlenséget, ekkor a jobb oldalról csak az eredeti permutáció fog hiányozni. Ezért ezt is adjuk hozzá a kapott egyenlőtlenség két oldalához:

$$a_1b_1 + ... + a_nb_n = a_1b_1 + ... + a_nb_n.$$

Kiemelés után a következőt kapjuk:

$$n(a_1b_1 + ... + a_nb_n) \geq (a_1 + ... + a_n)(b_1 + ... + b_n).$$

Tegyük szimmetrikussá az egyenlőtlenséget! Ha n-nel leosztunk, akkor mondjuk az $a_1 + ... + a_n$ alá beírhatjuk a nevezőbe:

$$(a_1b_1 + ... + a_nb_n) \geq \frac{a_1 + ... + a_n}{n}(b_1 + ... + b_n)$$

A jobb és bal oldalon van még egy-egy tényező, aminek „nincs nevezője", tehát ezeket is nyugodtan leoszthatjuk n-nel:

$$\frac{a_1b_1 + ... + a_nb_n}{n} \geq \frac{a_1 + ... + a_n}{n}\frac{b_1 + ... + b_n}{n}.$$

$\square$

Ezzel megkaptuk a Csebisev-egyenlőtlenséget abban az esetben, ha a_i és b_i egyformán rendezett. Vajon az ellentétesen rendezett formáját is meg tudjuk hasonló módon kapni? Természetesen, a kifejezések teljesen szimmetrikusak: csak a $\geq$ jelet kell $\leq$ jelre cserélni, ha most az eredeti sorozatokat ellentétesen rendeztük. Ugyanezzel a gondolatmenettel beláthatjuk tehát a másik egyenlőtlenséget is, újfent kihasználva a szimmetriát.

Homogén függvények

Kissé több eszközt igénylő, de nagyon hatékony módszer a következő. Egy függvény homogén, ha rendelkezik a következő szimmetriával: bármely $t \neq 0$ valós számra $f(tx_1, ..., tx_n) = t^k f(x_1, ..., x_n)$, ahol k tetszőleges valós szám. Ekkor f-et k-adfokú homogén függvénynek is nevezzük. Ha egy függvény homogén, akkor a változóit le tudjuk normálni (azaz leosztani ugyanazzal a számmal), hogy azok valamilyen speciális egyenlőségnek eleget tegyenek.

Itt az alapgondolat az, hogy elég az állítást egyetlen t értékre belátni, utána a képlet miatt teljesül az összes többire is. Ezért már az elején a t megfelelő megválasztásával „be tudjuk állítani” a változókat úgy, ahogy az nekünk a megoldás szempontjából kényelmes.

Persze figyelni kell arra, hogy az egyenlőtlenség mindkét oldala ugyanolyan fokú homogén egyenlet legyen! Ha az egyik oldalon konstans áll, akkor a másik oldal csak nulladfokú homogén egyenlet lehet. A $k = 0$ esetben természetesen bármilyen nemnulla számmal megszorozhatjuk az összes változót, az nem fog gondot okozni. Ha $k \neq 0$, és ez mindkét oldalra ugyanakkora, akkor a t-vel való beszorzáskor az eredetivel ekvivalens egyenlőtlenséget kapunk.

Amit mi választhatunk meg szabadon, az az, hogy milyen egyenlőség teljesüljön az x_i-kre (csak egy ilyet adhatunk meg, de abban nem kell minden változónak szerepelnie). Például az egyik szokásos normálás, amikor

$$x_1 + ... + x_n = c,$$

(a c-t általában az egyszerűség kedvéért 1-nek szoktuk választani). Egy másik lehetőség, hogy a szorzatuk legyen konstans:

$$x_1 \cdot ... \cdot x_n = 1.$$

Egy nagyon hasznos módszer, ha az egyik változót állítjuk be, a többi változónál pedig az ettől való eltérést jelöljük valamivel:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1 + a_1, \ldots, x_n = 1 + a_n.$$

Példa: Oldjuk meg normálás felhasználásával a Nesbitt-egyenlőtlenség ekvivalens alakját:

$$f(a,b,c) = (a+b+c)\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c}\right) \geq \frac{9}{2}.$$

Megoldás: Mivel

$$\begin{aligned} f(ta,tb,tc) =& (ta+tb+tc)\left(\frac{1}{ta+tb} + \frac{1}{ta+tc} + \frac{1}{tb+tc}\right) = \\ & t(a+b+c)\frac{1}{t}\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c}\right) = f(a,b,c), \end{aligned}$$

ezért ez egy nulladfokú homogén függvény (persze ezt is várjuk, mert az egyenlőtlenség másik oldalán egy konstans, $\frac{9}{2}$ áll). Tehát beszorozhatjuk úgy a változókat, hogy $a+b+c=1$ teljesüljön. Ekkor a számtani-harmonikus közepek közötti egyenlőtlenségből következik, hogy

$$f(a,b,c) = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} \geq \frac{9}{(a+b)+(a+c)+(b+c)} = \frac{9}{2(a+b+c)} = \frac{9}{2},$$

ami pontosan a bizonyítandó állítás. □

Nagyság szerinti rendezés

Egy fontos, gyakran használt módszer szimmetrikus függvényeknél a következő. Tegyük fel, hogy $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ szimmetrikus a változói szerint. Ekkor feltehetjük, hogy $x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n$, hiszen bárhogy permutáljuk a változókat, az egyenlőség továbbra is igaz marad. Ezt is alkalmazni fogjuk a következő példában.

Feladat ([2] 166. o. E10.): Bizonyítsuk be, hogy

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab(a+b) + bc(b+c) + ac(c+a). \tag{6}$$

Megoldás: Az egyenlőtlenség szimmetrikus a, b, c szerint, tehát feltehetjük, hogy $a \le b \le c$. Mivel mindkét oldal homogén harmadfokú függvény, normálhatjuk őket úgy, hogy $a = 1$ legyen. Ekkor legyen $b = 1 + x$ és $c = 1 + y$. Vegyük észre, hogy x és y nem lehet negatív! Behelyettesítve a változókat és egyszerűsítve:

$$\begin{aligned}
&1^3+(1+x)^3+(1+y)^3+3(1+x)(1+y)\ge \\
&\quad\ge(1+x)(2+x)+(1+x)(1+y)(2+x+y)+(1+y)(2+y) \\
\Leftrightarrow\ &1+(1+3x+3x^2+x^3)+(1+3y+3y^2+y^3)+(3+3x+3y+3xy)\ge \\
&\quad\ge 2+3x+x^2+(1+x+y+xy)(2+x+y)+2+3y+y^2.
\end{aligned}$$

A tényezők kifejtése és összevonása után a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned}
&x^3+y^3+3x^2+3xy+3y^2+6x+6y+6\ge \\
&\quad\ge x^2y+xy^2+2x^2+4xy+2y^2+6x+6y+6 \\
\Leftrightarrow\ &x^3+y^3+x^2+y^2\ge x^2y+xy+xy^2.
\end{aligned}$$

Rendezzünk egy oldalra, és alakítsuk szorzattá az x^2y, xy^2 tagokat:

$$x^3+y^3+x^2-xy+y^2-xy(x+y)\ge 0.$$

Az x^3 és y^3 tagokat felbontjuk szorzatra:

$$(x+y)(x^2-xy+y^2)+x^2-xy+y^2-xy(x+y)\ge 0.$$

Az első tag második tényezője megjelenik az utána következő összegben is. Nagy a késztetés, hogy azt is kiemeljük. Azonban a megmaradó $-xy(x+y)\le 0$, így nem tudnánk a bal oldalt jól becsülni. Emeljük inkább ki az utolsó tagot:

$$(x+y)(x^2-xy+y^2-xy)+x^2-xy+y^2\ge 0,$$

azaz

$$(x+y)(x-y)^2 + x^2 - xy + y^2 \geq 0.$$

A második tényező most is kísértetiesen hasonlít az utána következő összegre. Ezúttal viszont tudunk mit tenni. Kivonunk és hozzáadunk xy-t a bal oldalhoz. Így a kiemelés után a nemnegatív xy marad hátra:

$$(x+y+1)(x-y)^2 + xy \geq 0.$$

Mivel minden tényező és tag ≥ 0, ezért ez mindig teljesül. Ezzel beláttuk az állítást. □

Változók közötti kapcsolat

A szimmetriát úgy is felhasználhatjuk, ha észreveszünk valamilyen kapcsolatot az ismeretlenek között. Nem is mindig kell új változókat felvenni. Például a (2) Nesbitt-egyenlőtlenség bizonyításához vegyük észre, hogy ha a, b, c pozitív egész, akkor (a, b, c) és $\big(1/(b+c),\ 1/(c+a),\ 1/(a+b)\big)$ egyformán rendezett sorozatok. Ekkor

$$\begin{aligned} \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} &\geq \frac{b}{b+c} + \frac{c}{a+c} + \frac{a}{a+b}, \\ \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} &\geq \frac{c}{b+c} + \frac{a}{a+c} + \frac{b}{a+b}, \end{aligned} \tag{7}$$

A két egyenlőtlenséget összeadva:

$$2\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}\right) \geq 3,$$

tehát

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

(Itt szintén használtuk azt a trükköt, hogy két szimmetrikus egyenlőtlenséget adtunk össze.) A két sorozat, amit összehasonlítunk, lehet sokféle, pl. a_i és $1 - a_i$, vagy $\sin(x_i)$ és $1/\sin(x_i)$ stb.

4.3. Átalakítások

Ebben a részben néhány nemtriviális átalakítást szeretnék bemutatni.

Az „1" kiemelése

Egy gyakran használt, de explicite ritkán tanított módszer, amikor egy a számot felírunk $1 \cdot a$ formában, vagy amikor n-et felírjuk 1-esek összegeként, és behelyettesítjük egy ismert képletbe.

Példa: a Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenségnél az egyik sorozat helyébe írjunk csupa 1-est:

$$(a_1 \cdot 1 + ... + a_n \cdot 1)^2 \leq (a_1^2 + ... + a_n^2)(1^2 + ... + 1^2)$$

Vonjunk gyököt, és osszuk le mindkét oldalt n-nel:

$$\frac{a_1 + ... + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + ... + a_n^2}{n}},$$

Így megkaptuk a számtani és négyzetes közepek közötti egyenlőtlenséget.

Feladat ([2] 175. o. E23.): Lássuk be Carlson 2. egyenlőtlenségét:

$$(a_1 + ... + a_n)^2 < \frac{\pi^2}{6}\left(a_1^2 + 4a_2^2 + ... + n^2 a_n^2\right). \tag{8}$$

Megoldás: Írjuk fel a Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenséget a_i-re és 1-re:

$$(a_1 + ... + a_n)^2 = \left(a_1 c_1 \cdot \frac{1}{c_1} + ... + a_n c_n \cdot \frac{1}{c_n}\right)^2 \leq \left(a_1^2 c_1^2 + ... + a_n^2 c_n^2\right)\left(\frac{1}{c_1^2} + ... + \frac{1}{c_n^2}\right),$$

ahol a c_i-k tetszőleges nemnulla valós számok. Ha az előző egyenletbe $c_i = i$-t helyettesítünk, akkor a jobb oldal legutolsó tényezője az első n szám négyzetének reciproksösszege lesz. Ha $n \to \infty$, akkor a tényező $\to \frac{\pi^2}{6}$. Véges n esetén nyilván nem lehet egyenlőség. Tehát azt kaptuk, hogy

$$(a_1 + ... + a_n)^2 < \frac{\pi^2}{6}\left(a_1^2 + 4a_2^2 + ... + n^2 a_n^2\right),$$

ami a bizonyítandó állítás. □

Az átalakítások során sokszor hasznos, ha ismerünk néhány trükkös képletet:

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2}\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right]$$
$$a^2 + b^2 - \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2) = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$$
$$a^2 - (b-c)^2 = (a-b+c)(a+b-c).$$

Itt nem a konkrét képletek memorizálásán, hanem az elv megértésén van a hangsúly. Az első az $(a-b)^2$ kifejtésének általánosítása három változóra. Ugyanúgy igaz n db változóra is:

$$x_1^2 + ... + x_n^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - ... - x_nx_1 = \frac{1}{2}\left[(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + ... + (x_n - x_1)^2\right].$$

A második arra példa, hogyan alakíthatunk át egy kétváltozós kifejezést háromváltozóssá. A harmadik hasznos lehet olyan feladatoknál, ahol a háromszög-egyenlőtlenséget kell kihasználni. További három nagyon egyszerű, de annál hasznosabb egyenlőség:

$$(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$$
$$a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab$$
$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab.$$

Ezek segítségével bármikor át tudjuk alakítani egymásba az $(a+b)^2$, $(a-$

$b)^2$ és $a^2 + b^2$ kifejezéseket. Erre meglehetősen gyakran van szükség. Például a (6) feladatban $-xy$-t alakítottunk át $+xy$-ná, ahol az egyenlőtlenség miatt kifejezetten a pozitív alak kellett nekünk. Hasonló okokból pozitív x, y esetén az $(x + y)^2$-et sokszor érdemes átalakítani $(x - y)^2$-té, mert ez behoz egy $+4xy$-os tagot, miközben az $(x - y)^2$ továbbra is ≥ 0.

5. Heurisztikák

Ahogy a bevezetőben megemlítettük, heurisztikán olyan megoldási módszert értünk, ami nem teljesen egzakt, viszont rugalmas, ezért sok esetben jó kiindulópontot ad a megoldáshoz. Például függvényegyenletek megoldásánál a leggyakrabban használt heurisztika, hogy bizonyos egyszerű értékeket, például 0-t és 1-t helyettesítünk be, és ezekből a speciális esetekből próbálunk meg valamit kihozni. A siker nyilván nem garantált, de az esetek nagy részében értékes támpontokat ad az ilyen kezdeti vizsgálódás.

Hasonló heurisztikák az egyenlőtlenségek megoldásánál is vannak, és segíthetnek akkor is, ha egyébként nincs ötletünk az elinduláshoz. Ezek között többről már volt szó a megfelelő helyen, de most rendszerezve is szeretném összefoglalni a módszereket.

5.1. Kérdések

Az egyik legsokoldalúbb heurisztika, ha kérdéseket teszünk fel. Mit tudunk x-ről? Mik a kezdeti feltételek? Hogyan tudnánk egyszerűsíteni? Mire emlékeztet? Minél nagyobb? Minél kisebb? Milyen tételeket ismerek? Mi lenne, ha...? Pl. mi lenne $x = 0$ esetén? $x = 1$ esetén? Mi lenne, ha összeg helyett szorzatot írnánk, vagy fordítva? A kérdésfeltevés nagy előnye, hogy még a legreménytelenebbnek tűnő helyzetben is tudunk kérdést feltenni. Ezen kívül rendszerezettségre szoktatjuk magunkat, és hogy olyan szempontból is megvizsgáljunk egy kérdést, ami amúgy nem jutna eszünkbe. A kérdés gondolkodásra, az összefüggések feltárására késztet. Sok heurisztika kérdés formájában is megfogalmazható. Lássuk őket!

5.2. Hol van egyenlőség?

A legtöbb egyenlőtlenség nem szigorú, azaz létezik olyan eset, amikor egyenlőség áll fent. Ez fogódzót jelent nekünk, és ha rájövünk, hogy ez mikor teljesül, a feladat megoldása sokszor jelentősen leegyszerűsödik. Ez a vizsgálat még akkor is segíthet, ha szigorú egyenlőtlenség áll fent! Ha a becslés éles, akkor kell lennie olyan esetnek, amikor a két oldal közötti különbség tetszőleges nemnulla valósnál kisebb lehet. Ez a helyzet a (8) Carlson-egyenlőtlenségnél is. A $\pi^2/6$ elég különös szám ahhoz, hogy ne véletlenül szerepeljen itt, ezért a becslés valószínűleg éles. Ha ismerjük a négyzetszámok reciprokösszegét, akkor már találunk összefüggést a jobb oldal két tényezője között. Ha még azt is megsejtjük, hogy az $n \to \infty$ határértéknél (és $x_1 = ... = x_n$ esetén) egyenlő lesz a két oldal, akkor a Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség alkalmazása is eszünkbe juthat.

Lássuk ennek a heurisztikának egy gyakorlati alkalmazását!

Feladat ([2] 170. o. E21.): Adott egy háromszög a, b, c oldalakkal és T területtel. Lássuk be, hogy

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}T. \quad \text{(IMO 1961, Weitzenböck-tétel)} \tag{9}$$

Megoldás: Mikor lesz egyenlőség? Valószínűleg akkor, ha a háromszög oldalai egyenlők. Valóban, ekkor

$$T = \frac{\sqrt{3}c}{2} \cdot \frac{c}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot c^2,$$
$$4\sqrt{3}T = 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}c^2 = 3c^2.$$

Most már csak azt kell belátnunk, hogy más háromszög esetén a jobb oldal kisebb lesz, mint a bal. Hogyan fejezzünk ki egy szabálytalan háromszöget egy szabályos segítségével? A szimmetriák részben már volt szó arról, hogy ha az egyik változót megválasztottuk úgy, ahogy nekünk tetszik, a többi változónál már csak az ettől való eltérést kell vizsgálni. Ennek mintájára találjunk ki két változót a háromszög „szabálytalanságának" leírására! Legyen az AB szakasz fix, és mozgassuk a C pontot! Ezt a szimmetria miatt megtehetjük. A háromszög területét legkönnyebben a c oldallal és a C-ből induló magassággal tudjuk kifejezni. Ezért a két változó jelentse a szabályostól való eltérésüket! A magasságvonal egy $c/2 - x$ és $c/2 + x$ hosszúságú szakaszra osztja c-t. Az x jelöli tehát a c-vel párhuzamos eltérést. Az y pedig jelölje a rá merőlegest: a C ponthoz tartozó magasság hossza legyen $\sqrt{3}/2\, c + y$.

Ekkor

$$a^2+b^2+c^2-4\sqrt{3}T=\left[\left(\frac{c}{2}-x\right)^2+\left(y+\frac{\sqrt{3}}{2}c\right)^2\right]+$$

$$+\left[\left(\frac{c}{2}+x\right)^2+\left(y+\frac{\sqrt{3}}{2}c\right)^2\right]+c^2-2\sqrt{3}c\left(y+\frac{\sqrt{3}}{2}c\right)=2x^2+2y^2\geq 0,$$

azaz valóban teljesül az állítás, és csak akkor van egyenlőség, ha $x=y=0$, tehát ha a háromszög szabályos. □

Abból, hogy mikor teljesül az egyenlőség, azt is meg tudjuk sejteni, hogy melyik egyenlőtlenséggel lehet megoldani. Például a (4) feladatban a háromszög-egyenlőtlenséget használjuk, tehát nyilván csak akkor van egyenlőség, ha a háromszög elfajuló (ennyi azonban nem elég, az is kell, hogy az egyik oldal 0 legyen). A Nesbitt-típusú egyenlőtlenségek akkor teljesülnek egyenlőséggel, ha $x_1=...=x_n$. Ebből már sejtjük, hogy közepek közötti egyenlőtlenségre vissza lehet őket vezetni.

Érdemes tehát tudni, melyik képletnél mikor áll fent az egyenlőség, és hogy mik tartoznak egy „ekvivalenciaosztályba”. Alapvetően csak két egyenlőtlenség lóg ki a sorból: a Cauchy–Schwarz (ahol akkor egyezik meg a két oldal, ha az egyik számsorozat a másik többszöröse), és a rendezési tétel (ahol $x_iy_i+x_jy_j=x_iy_j+x_jy_i$ pontosan akkor, ha $x_i=x_j$ és $y_i=y_j$). A többinél az összes változó egybeesése szükséges.

A négyzetszámok összegénél az kell, hogy minden tag 0 legyen, a közepeknél és a konvexitásnál elég, ha mindegyik ugyanaz a tetszőleges valós szám. Helyettesítésekkel viszont át lehet vinni az egyik típusú egyenlőtlenséget a másikba. Például a (6) feladatban eredetileg akkor volt egyenlőség, ha $a=b=c$. Ezt egy $a=1$, $b=1+x$, $c=1+y$ transzformációval átvittük egy olyanba, ahol $x=y=0$ esetén teljesül. Ezt tehát már nem közepekre, hanem négyzetszámok összegére kellett visszavezetni. Ugyanígy jártunk el a (9) feladatnál is. Érdemes lenne további vizsgálatnak alávetni azt a kérdést, hogy melyik egyenlőtlenséget melyikre lehet átalakítani, és milyen módon. Erre azonban jelen szakdolgozat keretein belül nincs lehetőség.

5.3. Bontsuk fel a feladatot kisebb részekre!

Ez egy elég gyakran használt heurisztika. Két általam ismert válfaja van. Az egyiknél több párhuzamos állításra bontjuk fel az eredeti állítást. A másiknál a részek egymásra épülnek, és csak ha az egyiket beláttuk, kezdhetünk neki a másiknak. Van, ami nem tartozik tisztán egyikbe sem, például a teljes indukció. Most mindkét fajtára mutatok példát.

Feladat ([3] 24. o. 148.): Lássuk be, hogy tetszőleges $n > 2$ egészre

$$\sqrt[n]{n!} > \sqrt{n}.$$

Megoldás: Először is tüntessük el az összes gyököt, azaz emeljünk $2n$-edik hatványra! Ezután alkalmazzuk a heurisztikát, próbáljuk meg az $n!$ tényezőit párosítani, mint ahogy Gauss híres, az első n szám összegéről szóló bizonyításában is szerepel. Ezt kapjuk:

$$(n!)(n!) = [1 \cdot n][2 \cdot (n-1)]...[k \cdot (n-k+1)]...[n \cdot 1] > n^n.$$

Figyeljük meg, hogy a bal oldalon n db tényező áll, és a jobb oldalon is n-szer szoroztuk össze n-net. Ha be tudnánk látni, hogy a bal oldal minden tényezője legalább n (és valahol nagyobb), akkor megoldanánk a feladatot. Szerencsére éppen ez a helyzet. Az első tényezőre igaz, és $b > a$ esetén ha $ab \geq n$, akkor $(a+1)(b-1) \geq ab \geq n$. Az $a < b$ esetekre pedig a szimmetria miatt már következik az állítás. □

Ez arra volt példa, amikor sok párhuzamos részre bontjuk fel az állítást, most lássunk egy feladatot a másik típusból!

Feladat ([2] 177. o. E26.): adott a síkon az $n \geq 2$ db pont alkotta véges P halmaz. A sík egy e egyenesére jelölje $S(e)$ a P pontok e egyenestől vett távolságainak összegét. Legyen E azon egyenesek halmaza, amikre $S(e)$ minimális. Bizonyítsuk be, hogy létezik E-ben olyan egyenes, ami két P-beli ponton is átmegy.

Megoldás: Ez a feladat első ránézésre nagyon nehéznek tűnik. Nem látszik, hogy az állításnak teljesülnie kellene, még azt sem tudjuk, hogy van-e egyáltalán olyan egyenes, ami átmegy P-beli ponton. Ez adja nekünk az ötletet: bontsuk fel a feladatot! Először vizsgáljuk meg, hogy van-e olyan egyenes, ami legalább egy ponton átmegy, és ha találunk ilyet, akkor próbáljunk olyat keresni, ami két ponton is átmegy. Először keressünk tehát olyat, ami legalább egy ponton átmegy. Gyakori trükk, hogy találunk egy „rosszat", és azt „megjavítjuk”. Tegyük fel, hogy egy kiszemelt e egyenesre $S(e)$ minimális, de nem megy át egy ponton sem. Ez csak úgy lehetséges, ha e mindkét oldalán ugyanannyi pont van. Ha ugyanis egyik oldalon több lenne, akkor feléjük párhuzamosan eltolva az egyenest csökkenthetnénk $S(e)$ értékét. Ha pedig ugyanannyi van, akkor eltolhatjuk az egyenest addig, amíg az első pontot el nem éri, mert eközben $S(e)$ változatlan marad.

Ezzel a feladat egyik részét megoldottuk. Már csak azt kell megmutatni, hogy ha van olyan E-beli egyenes, ami átmegy egy P-beli ponton (legyen ez P_0), akkor van olyan is, ami kettőn megy át. Az előbbi eltolás mintájára most elforgatjuk az egyenest. Legyen az elforgatás szöge φ, és legyen P_k a P halmaz k-adik pontja. Jelöljük φ_k-val azt a szöget, amikor az egyenes átmegy a k. ponton ($k > 0$). Legyen $p_k = |P_k P_0|$. Ekkor φ szögnél a pont egyenestől vett távolsága:

$$d(p_k, e) = p_k \cdot sin(\varphi - \varphi_k),$$

a távolságok összege pedig

$$S(e, \varphi) = \sum_{k=1}^{n-1} p_k |sin(\varphi - \varphi_k)|.$$

Mikor lesz ez a függvény minimális? Sejtésünk szerint az egyik φ_k-ban. Valóban, ez a függvény szinuszfüggvények lineáris kombinációja. A szinuszfüggvény konkáv a $[0, \pi]$ intervallumon. Konkáv függvények lineáris kombinációja is az, tehát az $S(e, \varphi)$ függvény minden $[\varphi_k, \varphi_k + 1]$ zárt intervallumon konkáv. Ezen kívül a Weierstrass-tétel miatt az adott intervallumon felveszi a minimumát. A minimum a konkávitás miatt nem lehet az intervallum belsejében, tehát csak a határon lehet, azaz φ_k-ban vagy $\varphi_k + 1$-ben. Az $S(e, \varphi)$ tehát valamelyik φ_k-ban lesz minimális, azaz van olyan egyenes E-ben, ami két ponton megy át. □

5.4. A képzelőerő szerepe

Egy feladat – főleg egy bonyolultabb feladat – megértésében sokat segít, ha tudjuk valamilyen módon ábrázolni, megjeleníteni. Ez a megjelenítés leginkább vizuálisan történik, bár ez nem szükségszerű (a szöveges feladat, találós kérdés jó példa egy-egy probléma szöveges megjelenítésére). Ez a vizuális megjelenítés lehet egy rajz, ábra vagy a saját képzelőerőnk.

Ilyenkor tulajdonképpen az történik, hogy egy könnyen átlátható modellt alkotunk az eredeti feladatról. Egy modell nem tükrözi a teljes valóságot, sőt néha torzít is (jó példa egy geometriafeladat kézzel készített rajza). A lényeges aspektusokat viszont kiemeli. Például nehéz egy háromszög három szögfelezőjét úgy megrajzolni, hogy egy pontban messék egymást, de minket nem a konkrét elhelyezkedésük, hanem egymáshoz való viszonyuk érdekel (t.i. hogy a háromszög egy-egy csúcsából indulnak, és egy pontban metszik egymást). A rajzolás sokat segíthet abban, hogy jobban megértsünk egy első pillanatban bonyolultnak tűnő feladatot.

Egy jó ábra remek lehetőséget ad arra, hogy – ahogy Pólya György is leírja – összefüggéseket keressünk a változók között. Vagy akár arra is, hogy megsejtsünk valamit, bár egy esetleges ábrából csak óvatosan szabad komolyabb következtetéseket levonni.

Még jobb eszköz a képzelőerőnk, ha van, mert sokkal gyorsabb, mint a rajz, és részletgazdagabban tudunk vele helyzeteket megvizsgálni. A képzelőerő a legjobb eszköz arra, hogy a „mi lenne, ha..." típusú kérdéseket feltegyük és megválaszoljuk. (Akinek kevésbé fejlett a képzelőereje, az kombinálhatja rajzolással is, ha az segít.)

Persze itt is óvatosnak kell lennünk. A képzelőerőnk kevésbé fix, mint a rajz, tehát szabadon variálhatjuk például egy háromszög szögét. Viszont épp emiatt nem szabad vakon elhinnünk mindent, ami „látszik", hogy úgy van. Sejtések megfogalmazására és összefüggések felismerésére viszont kiváló eszköz.

Lássuk, hogyan alkalmazhatjuk a képzelőerőt feladatok megoldásánál!

Feladat: Adott egy egyenlőszárú háromszög, $AB = BC$. Elindul egy repülő A-ból B-be. Ugyanabban a pillanatban elindul egy másik repülő B-ből C-be. Mikor lesznek a legközelebb egymáshoz?

Megoldás: A feladat geometriai megoldása elég komplikált. Próbáljuk meg fizikafeladatként megoldani, ahogy ezt a feladat kiírása is sugallja. Legyen v_1 az egyik repülő sebességvektora, v_2 a másik repülőé. Képzeljük bele magunkat az első repülőgép helyzetébe![1]

Hogy néz ki innen a másik repülőgép pályája? Ez egy egyenes, ami jó esetben nem megy át a mi repülőgépünk pontján (ez mindig teljesül, ha a háromszög nem elfajuló). A konkrét egyenest úgy kapjuk meg, ha a B pontból egyenest húzunk a $v_2 - v_1$ szakasz irányába.

Hol lesz a legkisebb a távolsága tőlünk? Ott, ahol a két repülőgépet összekötő szakasz merőleges a pálya egyenesére. Úgy is mondhatnánk, hogy ahol a két repülőt összekötő szakasz hosszának idő szerinti deriváltja zérus, vagyis ahol a másik repülő sebessége merőleges erre a szakaszra. Ezt könnyen megkapjuk, ha vesszük a repülőgépünk P_1 pontjából a másik gép e_2 pálya-egyenesére vett merőleges talppontját. Könnyű belátni, hogy ez pont félúton lesz a kezdő- és végpont között. □

Egészítsük ki!

A képzelőerőnek számtalan felhasználási módja létezik. Itt nem tudunk mindegyikre kitérni, csak megemlítjük még egy gyakori felhasználását. Ez az, amikor az ábrát vagy a képletet kiegészítjük valamivel. Például ha az egyenlőtlenségben megjelenik a $cos^2 x$ függvény, akkor érdemes megnéznünk, hogy ki tudjuk-e hozni valahogyan a $sin^2 x$-et valamelyik másik tagból, hogy a kettő összege 1 legyen. Nagyon gyakori a módszer geometriafeladatoknál,

[1] Ez meglehetősen bevett módszer a fizikában. Albert Einstein is feltette magának a kérdést: mit lát az, aki meglovagol egy fénysugarat? Ma már tudjuk, hogy hétköznapi fogalmaink szerint ezt nem lehet megválaszolni, de a relativitáselmélet felfedezésében a kérdésnek fontos szerepe volt.

amikor például egy sokszöget átdarabolunk egy másikba, vagy amikor az ábránkat úgy egészítjük ki, hogy az jelentősen megkönnyíti a feladat megoldását. Természetesen mint minden heurisztikához, ennek az elsajátításához is sok gyakorlásra van szükség.

5.5. Felcserélések

Egy általános heurisztika, amikor a képlet egy részét „kicseréljük" más, könnyebben kezelhető dologra. A kapott egyenlőtlenség természetesen már nem lesz azonos az eredetivel, de becslésre jól tudjuk használni.

Például: van olyan többtagú összeg, ami láthatóan sokkal szerencsésebb lenne, ha a tagok között nem összeadás, hanem szorzás lenne? Esetleg fordítva? Akkor valószínűleg közepekkel jól meg tudjuk oldani a feladatot. Például ha nézzük a (3) kétváltozós Nesbitt-féle egyenlőtlenséget, akkor látszik, hogy x és $1/x$ szorzata 1. Ebből megsejthető, hogy számtani-mértani közepek közötti egyenlőtlenségekkel könnyedén kijön a megoldás. Vagy az (1) egyenlőtlenség bal oldalán sokkal jobb lenne nekünk, ha szorzat helyett összeadás szerepelne, mivel $a + b + c$ az összegük. Ez is jó megfigyelés ahhoz, hogy megsejtsük a kifejezés jobb oldalát.

Egy másik formája a felcserélésnek, ha vesszük több tört összegét, de az egyes számlálók „nem a jó" nevezővel vannak párosítva. Ez arra invitál minket, hogy a rendezési tételt alkalmazzuk. Például a (7) egyenlőtlenségeknél is azt használtuk fel, hogy a nevezőkhöz a „nem megfelelő" számlálók tartoznak, és a rendezési tétellel „kicseréltük" őket a megfelelő számlálókra. Hasonló módon a trigonometrikus helyettesítés résznél az (5) egyenlőtlenségben összesen négy tényező szerepel, de érdekes párosításban. Ha felcseréljük az a számlálójú tényezőt a c számlálójú tényezővel, akkor számtani-mértani közepek közötti egyenlőtlenséggel már kijön a megoldás. A rendezési tétel lehetővé teszi a cserét, ugyanis tekinthetjük a négy tényezőt két ellentétesen rendezett sorozatként, amit azonosan rendezetté teszünk. (Az egyik sorozatnak az a és a c, a másik sorozatnak a b és a d számlálójú tényezőket tekintjük.)

6. Felhasznált irodalom

Hivatkozások

[1] Pólya György: A gondolkodás iskolája, Akkord Kiadó, Budapest, 2000, ISBN 9789639429994

[2] Arthur Engel: Problem-Solving Strategies, Problem Books in Mathematics (Edited by K. Bencsáth, P. R. Halmos), Springer-Verlag, New York, 1998, ISBN 0387982191

[3] Szovjet és csehszlovák matematikai és olimpiai feladatok gyűjteménye, Tankönyvkiadó, Budapest, 1971

[4] Ábrahám Gábor: Nevezetes egyenlőtlenségek, Mozaik Oktatási stúdió, Szeged, 1995, ISBN 9638024712

7. Köszönetnyilvánítás

Köszönöm témavezetőmnek, Kós Gézának színvonalas szakmai segítségét és hasznos tanácsait.

Köszönöm feleségemnek, Takáts-Nyeste Annamáriának, hogy végig támogatott a szakdolgozat megírása közben.

Köszönöm szüleimnek, Takáts Tamásnak és dr. Szűts Marcellának, hogy minden erejükkel lehetővé teszik, hogy elvégezzem az egyetemet, és hogy jó tanácsaikkal segítettek a dolgozat elkészítésében.

Köszönöm Takáts Marcellának, Nyeste Ferenc Lászlónak és Tomon Istvánnak, hogy a készülő munkát elolvasták, és értékes tanácsaikkal járultak hozzá színvonalának emeléséhez.