

EÖTVÖS LÓRÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

A nagy gráfok elmélete és tanításának lehetősége középiskolai szakkörben

SZAKDOLGOZAT

Bodor Andrea

Matematika BSc
Tanári szakirány

Témavezető:

Munkácsy Katalin

Főiskolai docens

Matematikatanítási és Módszertani Központ



Budapest, 2013

NYILATKOZAT

Név: Bodor Andrea

ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematika BSc

ETR azonosító: BOAEBRT. ELTE

Szakdolgozat címe: A nagy gráfok elmélete és tanításának lehetősége középiskolai szakkörben

A szakdolgozat szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló munkám eredménye, saját szellemi termékem, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2013. június 04.

a hallgató aláírása

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Munkácsy Katalinnak, aki építő tanácsaival a szakdolgozatom elkészítésében mindenben a segítségemre volt. Köszönöm **Bodor Károlynak** és **Meskó Andrásnak**, akik mindvégig mellettem álltak. Továbbá az Édesanyámnak és Tóth Andrásnak valamint Meskó Ferencnének, Meskó Ferencnek és Dengel Zoltánnak, vagyis azoknak, akik a végletekig bíztak bennem és támogatásuk nélkül nem készülhetett volna el a szakdolgozatom.

Tartalomjegyzék

Bevezetés	5
1. óra	7
A Gráfok bevezetése	7
2. óra	12
A Gráfok néhány további fontos tulajdonságai	12
3. óra	17
A Königsbergi hidak problémája	17
4. óra	20
A gráf, mint fa	20
5. óra	25
A síkba rajzolható gráfok	25
6. óra	28
Többszörös összefüggőség	28
7. óra	31
Bevezetés a hálózattudományba	31
Az Erdős-Rényi véletlen gráf modell	33
8. óra	35
Gilbert modell (1960)	35
A Granovetter – modell	37
A Kis világok	38
A hat lépés távolság	39
9. óra	41
Kevin Bacon játék	41
Erdős számok	42
Watts és Strogatz modell	42
10. óra	44
Barabási-Albert modell	44
A preferenciális kapcsolódás, azaz a gazdag még gazdagabb lesz	45
A Skálafüggetlen hálózatok	45
11. óra	47
Lovász László nagy gráfokra vonatkozó összefoglalásának egy bemutató részlete ..	47
A Pólya urna	49
12. óra	52
A skálafüggetlen gráfok gyenge pontja	52
Összefoglalás	54
Irodalomjegyzék	55

Bevezetés

Azért választottam szakdolgozatom témájaként a nagy gráfokat, mert a téma alapvetően érdekelt. Azt fogom vizsgálni, hogy egy középiskolai 12 órás szakkör keretében hogyan lehet a nagy gráfok elméletét bevezetni és a tanulókkal megismertetni. Szakdolgozatom a nagy gráfok elméletének megalapozására és a nagy gráfok elméletébe való betekintésre ad lehetőséget. Úgy gondolom középiskolai szakkör keretében érdemes velük foglalkozni annál is inkább, mert a középiskolai tanórák kerete erre nem ad lehetőséget. A nagy gráfok és a véletlen gráfok elmélete, a hálózatkutatás alapja, ami egy egészen új tudományág. Azért tartottam fontosnak ezt a témakört választani, mert a gráfok és a velük modellezhető hálózatok olyan komplex rendszerek, amelyek mindannyiunk életében jelen vannak. Fontosnak tartom, hogy a tanulók ezt korán megsejtsék és a szakkör arra ad lehetőséget, hogy fel is ismerjék a világ komplexitását.

Sokan a középiskola elvégzése után nem fognak felsőfokú matematikával foglalkozni így ez a szakkör nekik is lehetőséget nyújthat arra, hogy bepillantást nyerjenek a komplex rendszerek felépítésébe és megtanulhatják, hogy hogyan gondolkodjanak összetetten. Tehát a cél a deduktív gondolkodás fejlesztése és a komplex gondolkodás kialakítása, megalapozása, amely hasznos az élet minden területén. A középiskola szűk tananyagára építve, de ugyanakkor pontosan ennek okán, a szakkör felépítése a legkisebb szinten kezdi a gráfok bemutatását, tekintve, hogy a szakkörre bármely diák jelentkezhet, azaz akár ismétlés (mely csak az első két óra anyaga) a célja, akár további információk megszerzése a témakörben. Az alapokat bemutató és elmélyítő órák után az összefüggéseket vizsgáló órák következnek.

Ezt követően lesznek a tanulók csak olyan tudás birtokában, hogy nekiláthassanak megérteni a hálózatok témakörét. Ezután az Erdős-Rényi véletlen gráfokról lesz szó, mely mélységét tekintve nagy, de úgy gondolom, hogy a megismertetés és a megértés egyaránt cél. Ha az Erdős-Rényi véletlen gráfok vizsgálható tulajdonságait megértik a diákok, akkor már sokkal könnyebb lesz a számukra a további ismeretanyag elsajátítása. A szakköri órák során törekedni szeretnék a szemléletességre, a példákra és a témakör érdekességeinek kiemelésére, hiszen a matematika szeretete egy-egy témakör megismerésével és megkedvelésével is kezdődhet. A további órákon a diákok megismerhetik a különböző hálózatalméleti

modelleket, amelyeket azonban csak vázlatosan tanulmányozunk, mert ezek háttérösszefüggései már jóval mélyebb és sokrétűbb matematikai tudást igényelnek, mint amellyel rendelkeznek. A szakdolgozat teljes terjedelmében igyekeztem a diákoknak a csomóponti kérdések megtervezését, melyek ugyan valójában nem tervezhetőek, de irányadónak megfelelőek lehetnek.

1. óra

A Gráfok bevezetése

A [6] könyvből a 133-136. oldalakon és a [7] könyvben a 21-23. oldalakon található definíciókat és tételeket használtam és a szükséges didaktikai vonatkozásoknak megfelelően készítettem el saját ábráimat.

A matematikai definíciókat és tételeket úgy a legkönnyebb elsajátítani, ha a megismerésük alkalmával rögtön példát, avagy szemléltetőeszközt ajánlunk a gyerekek figyelmébe. A gráfok bevezetésénél ennek megfelelően egy feladattal kezdem a szakkört. Azonban e feladat a dolgozatban szereplő feladatokkal együtt, csak arra szolgál, hogy az adott témakört bemutassa, a megértéshez további hasonló feladatok megoldása szükséges.

Feladat:

Próbáljuk meg bebizonyítani, hogy egy 27 fős csoportban, mindig akad olyan, akinek a jelenlévők között páros számú ismerőse van. (Természetesen azt feltesszük, hogy az ismeretség kölcsönös, azaz legalább a tegeződő viszony megvan két ember között.)

Ekkor lehetnek olyan meghívottak a vendégek között, akik nem ismerik egymást. Az is lehetséges, hogy van olyan, aki senkit sem ismer, persze ha ilyen vendég van a társaságban, akkor a feladatban megfogalmazott állítás igaz. Az ő ismerőseinek a száma páros, hiszen 0. (A 0 páros szám.) Kísérletképpen tekintsünk egy 26 fős társaságot. Ez nem jó, hiszen ha mindenki ismer mindenkit, akkor 25 ismerőse van mindenkinek. Ennek megfelelően minden vendég esetén az ismerősök száma páratlan.

Kérdéseim a tanulókhöz:

- Lehetséges, hogy nem jó egyetlen páros szám sem?

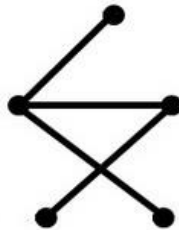
Próbáljuk meg akkor belátni, a következő állítást. Ha egy találkozón páratlan számú vendég van jelen, akkor közülük legalább egynek (az összejövetelel megjelenőknek) páros számú ismerőse van.

Tekintsünk kisebb számú csoportot például 5 főre.

Kérdéseim a tanulókhöz:

- Hogyan érdemes szemléltetni azt, hogy ki kit ismer?

Tekintsük, most az 5 fős társaság ismeretségeit. A társaság tagjait jelöljük pontokkal, a közöttük lévő kölcsönös ismeretségeket pedig éllel. Ekkor a következő 1. ábrát kapjuk.



1. ábra
Az 5 fős csoport ismeretségi gráfja

Az ilyen típusú rajzokat nevezzük gráfoknak. Azaz a gráfok tulajdonképpen két halmazból állnak. $G(V, E)$ -vel jelöljük. Az egyik halmaz a csúcsok halmaza $V(G)$ a másik halmaz pedig az élek halmaza $E(G)$. A fenti gráf esetében a csúcsok száma: 5, az élek száma: 4.

Definíció: Egy gráf egy rendezett pár, $G=(V, E)$, ahol V egy nem üres halmaz, E pedig ebből a halmazból képezhető párok egy halmaza. V elemeit pontoknak vagy csúcsoknak, E elemeit élnek nevezük. Ha egy G gráfról beszélünk, akkor $V(G)$ –vel, illetve $E(G)$ –vel jelöljük a gráf pontjainak illetve éleinek a halmazát, míg a pontok, illetve élek számát $v(G)$ –vel, illetve $e(G)$ –vel jelöljük.

Definíció: Ha az $e \in E$ él a $\{v_1, v_2\}$ párnak felel meg, akkor ez a két pont e végpontja.

Kérdéseim a tanulókhöz:

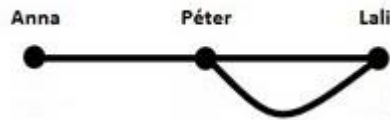
- Számít-e, hogy az élek egyenes vagy görbe vonalak?

Nincs jelentősége, tetszés szerint húzhatjuk meg két pont között az éleket.

- Előfordulhat-e, hogy két pontot több él is összeköt?

Előfordulhat, ebben az esetben párhuzamos vagy többszörös élről beszélünk.

Példa: Jelöljenek a pontok szintén személyeket és az élek most jelentsék egy adott napon a találkozások számát. (2. ábra)



2. ábra
Egy napon belüli találkozások

Lali és Péter a fenti, 2. ábra alapján tehát egy adott napon kétszer is találkoztak.

Kérdéseim a tanulókhoz:

- Lehetséges az, hogy egy él kezdő és végpontja, ugyanaz a csúcs?

Igen, az ilyenek éleket hurokéleknek nevezünk. Általában azonban olyan gráfokról van szó, amikor a többszörös, illetve a hurokéleket nem engedjük meg, ilyenkor azt mondjuk, hogy egyszerű gráfról beszélünk.

Definíció: Ha két különböző nem hurokélnak a végpontjai azonosak, a két élet párhuzamos vagy többszörös élnek nevezünk. (3. ábra)



3. ábra
Párhuzamos vagy többszörös él ábrázolása

Definíció: Ha $v_1=v_2$, akkor e hurokél. (4. ábra)



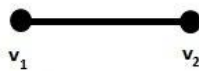
4. ábra
1 pontból induló 3 hurokél ábrázolása

Definíció: Azokat a gráfokat, amelyekben nincsenek hurokélek és többszörös élek, egyszerű gráfnak nevezünk.

Ha v_1 és v_2 össze vannak kötve éllel (e_1) és v_2 és v_3 között is fut él (e_2), akkor azt mondjuk, hogy e_1 és e_2 szomszédos élek. Ha v_1 és v_2 között él vezet akkor v_1 és v_2 szomszédos pontok.

Definíció: Ha $e, f \in E$ végpontjai $\{v_1, v_2\}$, illetve $\{w_1, w_2\}$, és $\{v_1, v_2\} \cap \{w_1, w_2\} \neq \emptyset$, akkor e, f szomszédos élek.

Definíció: A v_1 , és v_2 szomszédos pontok, ha $\{v_1, v_2\} \in E$. (5. ábra)



5. ábra
Szomszédos pontok

Általában a csúcsok és az élek számát követően a gráf egy másik fontos tulajdonságát szoktuk megvizsgálni. Mégpedig a csúcsok fokszámát. A fokszám az egy csúcsba érkező élek számát jelenti. Azaz például egy baráti társaságban, ha Kati ismeri Andrászt és Pétert, akkor Kati ismeretségeinek a száma 2. Vagyis ha a baráti társaságot felrajzoljuk gráf formában, akkor a Kati nevéhez tartozó pontnak 2 lesz a fokszáma.

Definíció: Egy gráf valamely pontjából kiinduló élek számát az illető pont fokszámának nevezzük.

Kérdéseim a tanulókhöz:

- Egy olyan pontnak, amelynek csak egy hurok éle van, mennyi a fokszáma?

A fokszám ebben az esetben 2, mert nem azt nézzük, hogy az élek hova futnak be, hanem azt, hogy hány él indul ki a gráf egy adott pontjából.

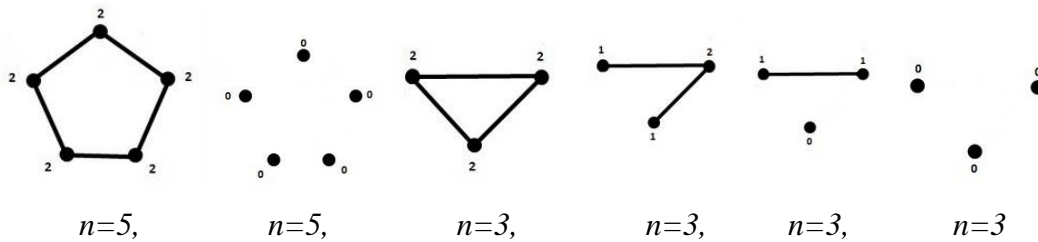
Ha a gráf minden pontjának fokszáma azonos, akkor a gráfot reguláris gráfnak nevezzük, illetve ha egy gráfban van olyan pont, amelynek a fokszáma 0, akkor ezt a pontot izolált pontnak fogjuk nevezni.

Definíció: Ha egy gráf minden pontjának foka k , akkor k -reguláris gráfnak nevezzük.

Definíció: Egy pont izolált pont, ha nincs vele szomszédos másik pont, vagyis nem illeszkedik egyetlen élre sem.

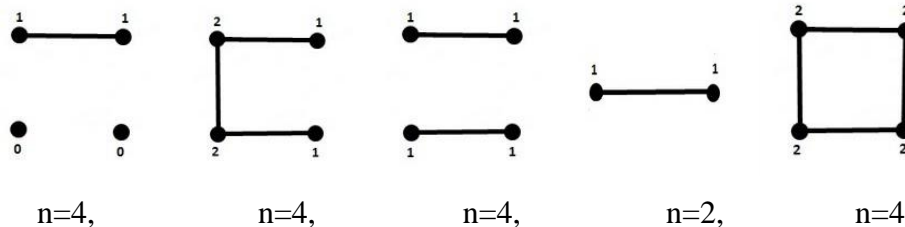
Az első feladatot tehát most már a gráfok nyelvén is megfogalmazhatjuk. Ha egy gráf pontjainak a száma páratlan, akkor van legalább egy páros fokszámú pontja.

Próbáljuk ki és írjunk fel néhány páratlan csúcs számú gráfot. (6. ábra)



6. ábra
Páratlan csúcsszámú gráfok, fokszámokkal ellátva

A próbálgatások alapján feltűnhet, hogy a páratlan csúcs számú gráfok esetében a páros fokszámú csúcsok száma is páratlan. Most próbáljuk ki azt, hogy ha a gráf csúcsai páros számúak (7. ábra).



7. ábra
Páros csúcsszámú gráfok, fokszámokkal ellátva

Ennek alapján most már megfogalmazhatunk egy másik, erősebb állítást is. Ha egy gráf pontjainak száma páros, úgy páros fokszámú pontjainak a száma is az. Végeredményben a következő tételhez jutunk.

Tétel: A páratlan fokszámú pontok száma minden gráfban páros.

Bizonyítás: Rajzoljuk fel egy páratlan csúcsszámú gráf csúcsait, majd próbáljuk meg az éleket egyenként behúzni két pont között. Figyeljük közben a fokszámok változását. Amikor még csak a csúcsokat rajzoltuk meg éllel nélkül, akkor minden pont fokszáma 0 volt, azaz páros. Miután behúztunk egy élt, kaptunk két olyan pontot, amelyeknek 1 lett

a fokszáma. Tehát a páratlan fokszámú pontok száma 2, azaz páros. Az élék behúzóztatásával a következőkhöz jutunk.

- ha az új él mindkét végpontjának fokszáma páros volt, akkor a páratlan fokszámú pontok száma 2-vel növekszik.
- ha az új él mindkét végpontjának fokszáma páratlan volt, akkor a páratlan fokszámú pontok száma 2-vel csökken.
- ha az új él egyik végpontjának fokszáma páros, a másiké páratlan volt, akkor a páratlan fokszámú pontok száma nem változik.

Még egy fontos tétel van, amit meg kell néznünk ahhoz, hogy a gráfelmélet legalapvetőbb fogalmai és tételei a diákok számára teljesen világosak legyenek.

Állítás: Minden gráfra igaz, hogy a fokszámok összege az élszám kétszerese.

Bizonyítás: Nézzük meg egy pontnak mennyi a fokszáma, azaz egy ponthoz hány él illeszkedik, majd ezt végezzük el minden pont esetében. A gráf összes pontjainak a fokszámát adjuk össze. Mivel minden élnek két végpontja van, így minden élet pontosan kétszer számoltunk meg.

2. óra

A Gráfok néhány további fontos tulajdonságai

A [6] könyvből a 138-140. oldalakon és a [7] könyvben a 22-24. oldalakon és a [26] internetes weboldalon található definíciókat és tételeket használtam és a szükséges didaktikai vonatkozásoknak megfelelően készítettem el saját ábráimat. A 11. ábrát a [19] internetes hivatkozásról töltöttem le.

Az első órán bemutatott ábrákban (6. ábra) szerepelt olyan gráf, amelynek egyetlen éle sem volt.

Kérdéseim a tanulókhöz:

- Lehetséges, hogy annak ellenére, hogy nem vezetett él a pontok között, így is gráfnak tekintendő?

A legegyszerűbb gráfoknak egyetlen élük sincs, ezeket él nélküli gráfoknak nevezzük. Olyan gráffal is találkozhatunk, amelynek bármely két pontja között fut él, ezeket teljes gráfoknak nevezzük.

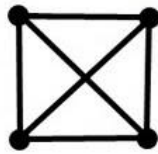
Definíció: Ha veszünk n pontot, és ezek között minden lehetséges élt behúzzunk, akkor egy n pontú teljes gráfot kapunk. Az n pontú teljes gráfot K_n jelöli.

Kérdéseim a tanulókhöz:

Az alábbi feladat alapján próbáljuk meg kitalálni, hogy egy n pontú teljes gráfnak, mennyi lehet az él száma?

Feladat:

Annának az egyik hétvégén társasjátékozni volt kedve. El is határozta, hogy meghívja 3 barátját. A barátai azonban nem ismerték egymást, így Anna izgult egy kicsit, hogy a meghívott vendégek azért jól kijöjjenek egymással. Miután megérkeztek egy kis idő elteltével már mindenki ismert mindenkit, és fesztelen volt a szórakozás. Rajzoljuk le azt a gráfot, amely a legjobban szemlélteti a végeredményben kialakult helyzetet. (8. ábra) Számoljuk össze hány éle van ennek a gráfnak.



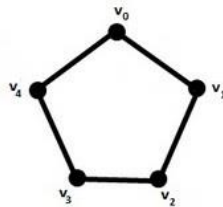
8. ábra
 K_4

Látjuk, hogy a gráf éleinek a száma: $|E(G)|=6$, csúcsainak a száma: $|V(G)|=4$. Egy élnek két végpontja van, így tulajdonképpen az a kérdés, hogy 4 pontból hány féleképpen választhatók ki 2 pontot. $\binom{4}{2}=6$. Ebből pedig általánosíthatunk, azaz az n pontú teljes gráf éleinek a száma: $\binom{n}{2}$.

Tekintsük most azt, hogy hogyan juthatunk el egy pontból, egy másik nem szomszédos pontba. Rajzoljunk n pontot sorba, és kössük össze az egymás utániakat. Az így kapott $n-1$ élű gráfot útnak fogjuk hívni, és az első és az utolsó pont lesznek az út végpontjai. Ha az első és az utolsó pontot összekötjük, akkor az út körré zárul.

Definíció: Útnak nevezzük a gráf éleinek egymáshoz csatlakozó sorozatát, amely egyetlen ponton sem megy át egynél többször. (9. ábra)

Definíció: Körnek nevezzük a gráf éleinek egymáshoz csatlakozó sorozatát, amelyben a kiindulási pont megegyezik a végponttal, egyébként minden él és minden más pont legfeljebb egyszer fordul elő (9. ábra)



9. ábra
Ötpontú gráf

Definíció: Sétának nevezzük a gráf éleinek egymáshoz csatlakozó sorozatát, amelyben ugyanazok az élek és pontok többször is előfordulhatnak. (9. ábra)

Kérdéseim a tanulókhöz:

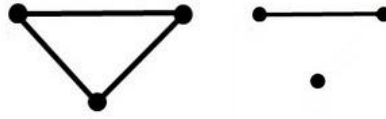
- A fentiekben definiáltuk az utat és a sétát. Ránézésre nagyon hasonlóak a definíciók, de mi lehet a különbség közöttük?

Amikor A-ból C-be el szeretnénk jutni, általában a való életben célirányosan indulunk el, azaz tudjuk hova akarunk menni. Esetleg időre megyünk, így A-ból indulunk, B-n átmegyünk, és végül megérkezünk C-be. Ha sétálunk, akkor viszont általában nem kell időre mennünk, és ha tegyük fel kutyát sétáltatunk, akkor megengedhetjük magunknak, hogy egy háztömböt kétszer is megkerüljünk, többször átmelve esetleg az A vagy a B vagy a C ponton. Persze kutyasétáltatásnál valójában egy kört teszünk, hiszen az otthonunkba, azaz a kiindulási pontba érkezünk vissza. Ezt nevezzük körsétának vagy zárt sétának. Azaz ezek szerint az út és a séta között az a különbség, hogy az útnak különböző pontokon kell átmennie, a séta pedig többször is érintheti ugyanazt a pontot és ugyanazon éleket.

Kérdéseim a tanulókhöz:

- Ha egy gráfból kiveszünk pontokat és éleket, az így kapott gráf milyen kapcsolatban van az eredeti gráfunkkal?

Ha bizonyos pontokat és éleket elhagyunk egy gráfból, akkor az eredeti gráf részgráfját kapjuk. (10. ábra)



10. ábra
Teljes és részgráf

Definíció: A $G'=(V', E')$ gráf $G=(V, E)$ gráf részgráfja, ha $V' \subseteq V, E' \subseteq E$ valamint egy pont és egy él pontosan akkor illeszkedik egymásra G' -ben, ha G -ben is illeszkedők voltak.

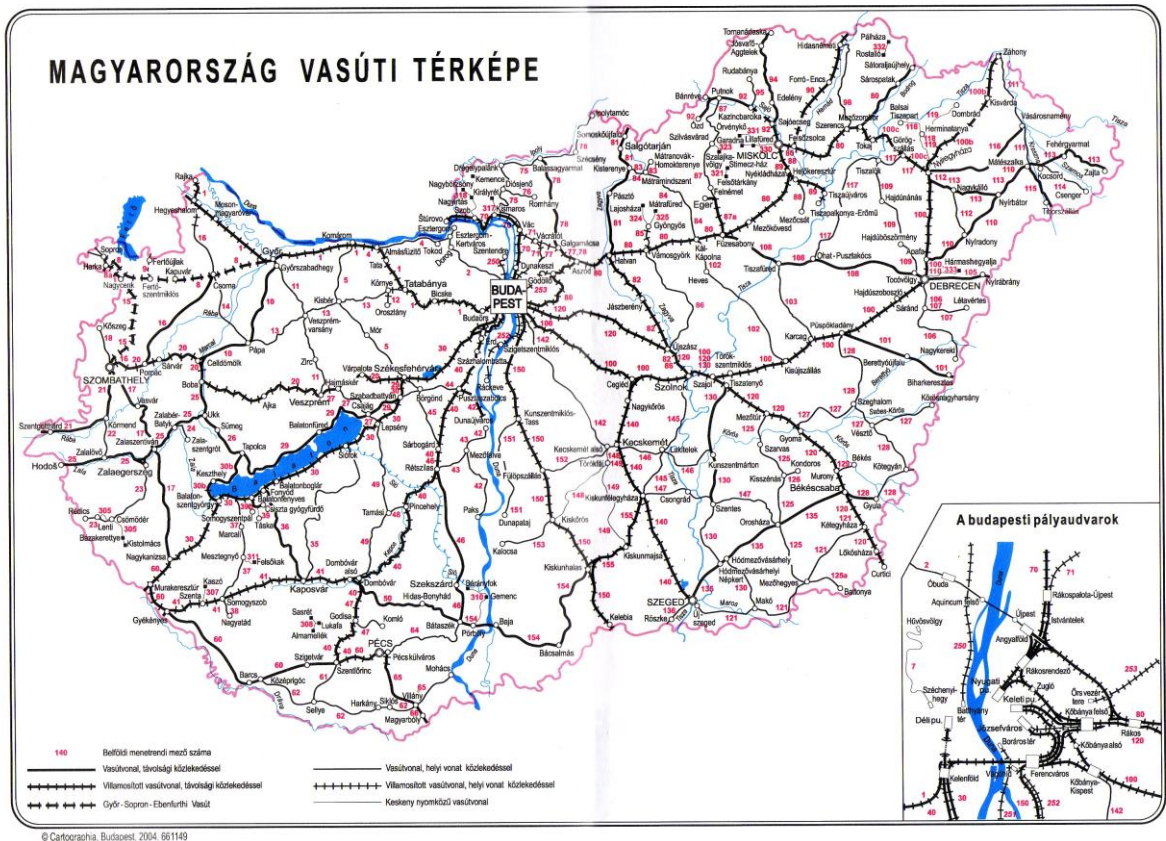
Egy gráfot több különböző módon is le lehet rajzolni. Ezek a különböző módon lerajzolt gráfok mégis ugyanazt a gráfot adják, ha a szomszédos pontok ugyanazok, valamint szomszédos pontpárok esetén ugyanannyi él fut közöttük.

Definíció: A $G=(V, E)$ és a $G'=(V', E')$ gráfok izomorfak, ha van olyan egy – egy értelmű megfeleltetés – bijekció – V és V' között, hogy G -ben pontosan akkor szomszédos két pont, ha G' -ben a nekik megfelelő pontok szomszédosak, és szomszédos pontpárok esetén ugyanannyi él fut közöttük.

Példa: Egy 20 fős osztályban mindenki a helyén ül, és mindenki ismer mindenkit. Ha átültetjük őket, az egymáshoz fűződő ismeretségeik nem változnak.

Kérdéseim a tanulókhoz:

- Mit jelenthet az, hogy egy G gráf összefüggő? Vajon összefüggő Magyarországon a vasút vonalak hálózata?



11. ábra
Magyarországi vasúthálózat

Próbáljuk ki. El szeretnénk jutni Szombathelyről Zircre.

Kérdéseim a tanulókhöz:

- Meg tudjuk tenni, csak a vasútvonalakat használva?

A fenti hálózat (11. ábra) alapján igen, több útvonalon is. A legkevesebb 5 élen keresztül juthatunk el Szombathelyről Zircre.

Definíció: Ha G bármely két pontja között vezet út, akkor a G gráf összefüggő.

Definíció: Tetszőleges G – nem feltétlenül összefüggő – gráfnak van összefüggő részgráfja, ilyen például minden egyetlen pontból álló gráf.

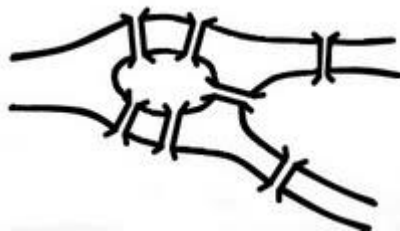
Definíció: A G összefüggő komponensének nevezzük G minden maximális, összefüggő H részgráfját.

3. óra

A Königsbergi hidak problémája

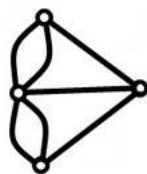
A [6] könyvből a 143-144. oldalakon, a [2] könyvben a 1-4. oldalakon, a [8] könyvben a 15-19. oldalakon, a [1] könyvben a 1-2 oldalakon, [7] könyvben a 28-29. oldalon található Königsbergi hidak problémája alapján valamint saját didaktikai szempontok alapján vezettem le a Königsbergi hidak problémáját. Ábráimat önállóan a fenti könyvekben bemutatott ábrák alapján készítettem el.

Kétszáz évvel ezelőtt Königsberg lakosai gyakran sétálgattak a várost átszelő Pregel folyó két partján és a folyó szigetét összekötő hidakon. A várost a folyó négy kerületre osztotta, amelyet akkoriban hét híd kötött össze (12. ábra). Szerették volna úgy végigjárni a hidakat, hogy a séta során mindegyiken pontosan egyszer haladjanak át. Felmerült hát bennük a kérdés, hogy lehet-e olyan sétát tenni a városban, amelynek során minden hídon pontosan egyszer kelnek át?



12. ábra
Königsberg város és hét hídja

A gráfelmélet talán legelső eredménye Leonhard Eulerhez a 18. század legnagyobb matematikusának nevéhez fűződik. 1736-ban Euler a négy földterületet pontokkal és minden hidat egy éllel helyettesített (13. ábra).



13. ábra
Königsberg város és hét hídjának gráfként való ábrázolása

Ennek eredményeképpen egy négy pontból és hét élből álló (többszörös élek is) gráfot kapott, mellyel tulajdonképpen létrehozta a gráfelméletet. Ezután jelent meg azon tanulmánya, melyben bebizonyította, hogy ezen a gráfon olyan útvonal, amelyik minden élen csak egyszer halad át, nem létezik. A földterületeket, amelyek a gráfunk

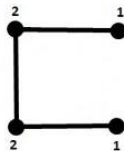
pontjai, A, B, C, D-vel jelölte. Nézzük meg először néhány egyszerű gráfon hogyan alakul a bejárhatóságuk (14. ábra).



14. ábra
Egyszerű kétpontú gráf fokszámokkal ellátva

A fenti gráfról (14. ábra) le tudjuk olvasni, hogy csúcsainak a száma: 2, az élek száma: 1, ha be akarom járni, azt könnyedén megtehetem, hiszen az egyik pontból a másikba egyenesen vezet él. De meg kell vizsgálnunk, hogy milyen paritású pontból indultam és milyen paritású pontba érkeztem.

Látható, hogy páratlan éllel rendelkező (páratlan fokszámú) pontból indultam, hiszen a 14. ábrán bemutatott gráfnak csak ilyen paritású pontja van és páratlan éllel rendelkező (páratlan fokszámú) pontba érkeztem. Nézzünk egy másik példát (15. ábra).

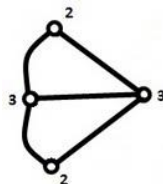


15. ábra
Egyszerű négypontú gráf fokszámokkal ellátva

Ebben a példában azt látjuk, hogy van két páros és két páratlan éllel rendelkező (páratlan fokszámú) pontja. Azt kell megvizsgálnunk, hogy ha be akarjuk járni, mely pontból kell indulnunk és mely pontba fogunk megérkezni.

Azt tapasztaljuk, hogy természetesen bejárható úgy, hogy minden élen csak egyszer haladunk át, és a kezdő és végpontunk is az előző példához hasonlóan páratlan számú éllel rendelkezik (páratlan fokszámú).

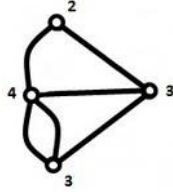
Nézzük most meg, hogy ha módosítunk a Königsbergi gráfon, mi történik (16. ábra).



16. ábra
Módosított Königsbergi gráf fokszámokkal ellátva

A gráfunk egyértelműen bejárható, mivel több sétát is találhatunk a gráfban, de látható, hogy csak abban az esetben, ha valamelyik páratlan fokszámú pontból indulunk

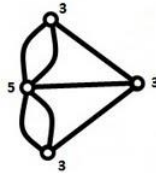
el és ekkor páratlan fokszámú pontba is jutunk. Mi történik akkor, ha behúzzunk egy élt a Königsbergi gráf részgráfjába (17. ábra)?



17. ábra
A Königsbergi gráf további módosítása fokszámokkal ellátva

A fokszámok a behúzott él függvényében változtak, de még mindig elmondható, hogy a gráfban van két páratlan fokszámú pont és szintén van két páros fokszámú pont. Nézzük a bejárhatóságot úgy, ahogyan azt eddig is vizsgáltuk, azaz minden élen csak egyszer haladhatunk át.

Most már elegendő példán keresztül láttuk, hogy csak abban az esetben bejárható egy gráf, ha a kezdő és a végpontja páratlan számú élre illeszkedik, vagy nincs benne páratlan számú élre illeszkedő pontja. Kettőnél több páratlan fokszámú pont nem lehet a gráfban, mert akkor nem bejárható. Mivel a Königsbergi gráfban a páratlan fokszámú pontok száma kettőnél több (18. ábra), így nem bejárható a gráf.



18. ábra
A Königsbergi gráf fokszámokkal ellátva

Ha egy gráfban többszörös élek is megengedettek, akkor a korábbi séta definíciója helyett egy új definíciót vezetünk be.

Definíció: Egy séta olyan $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k$ sorozat, amelyben v_0, v_1, \dots, v_k a gráf pontjai, e_1, e_2, \dots, e_k a gráf élei, és az e_i él minden esetben a v_{i-1} és a v_i pontokat köti össze ($i=1, 2, \dots, k$).

Definíció: Euler-sétának nevezzük azokat a sétákat, amelyek a gráf minden élén pontosan egyszer haladnak át; egy Euler-séta nem feltétlenül zárt.

A Königsbergi hidak problémája és Euler a gráfelméletet megalapozó munkájának eredményeként a következő tételt írhatjuk fel.

Tétel: (a) Ha egy összefüggő gráfnak kettőnél több páratlan fokszámú pontja van, akkor a gráfban nincs Euler-séta.

(b) Ha egy összefüggő gráfnak pontosan kettő páratlan fokszámú pontja van, akkor a gráfban van Euler-séta. Minden Euler-sétának a páratlan fokszámú pontok egyikében kell kezdődnie és a másikban végződnie.

(c) Ha egy összefüggő gráfnak nincs páratlan fokszámú pontja, akkor a gráfban van Euler-séta, és ebben az esetben minden Euler-séta zárt.

Definíció: Hamilton körnek nevezzük azokat a köröket, amelyek a gráf minden pontját tartalmazzák.

A fenti definíció azt jelenti, hogy ha a gráfban van Hamilton út vagy kör, akkor a gráfban van olyan út vagy kör, amely átmegy a gráf minden pontján, mégpedig pontosan egyszer.

4. óra

A gráf, mint fa

Az irodalomjegyzékben szereplő [6] könyvből a 149-155. oldalakon lévő definíciók és tételek alapján, írtam fel a definíciókat és tételeket. Ábráimat saját didaktikai szempontok alapján, önállóan készítettem el, melyhez a [20] internetes hivatkozásra töltöttem le a 19. ábrában megjelenő valódi fa képét.

Hogyan épülhet föl egy fa? Nézzük az alábbi képet (19. ábra) és próbáljuk meg meghatározni, hogy miben különbözhet az eddig tanult gráfoktól.



19. ábra
Fa ábrázolása

Kérdéseim a tanulókhöz:

- Mi az, amit azonnal meg kell vizsgálnunk? Például tekintsük meg, vajon el tudunk-e jutni, bármely pontjából, bármely pontjába, azaz vezet-e út tetszőleges pontból, tetszőleges pontba?

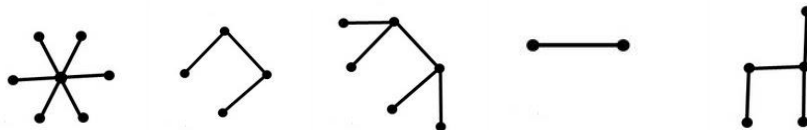
A fenti ábrák (19. ábra) alapján, látható, hogy igen. Meghatároztuk tehát, hogy a fa összefüggő.

- Mi az, amit még látunk rajta? Van-e kör benne? Azaz van-e olyan út, amelynek a kezdő és a végpontja azonos?

Nincs, hiszen egyetlen olyan pont sincs, amelyikből egy úton elindulva ugyanabba a pontba érkezünk vissza. Ennek alapján már meg is határoztuk a fa definícióját.

Definíció: $A G(E, V)$ gráfot *fának* nevezzük, amennyiben összefüggő és nincs benne kör.

A legegyszerűbb fa az egy pontból álló él nélküli fa. A második legegyszerűbb fa pedig, ha két pontot egyetlen él köt össze.



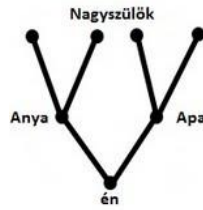
20. ábra
Fagráfok

Ha egy gráf összefüggő, akkor egy új él berajzolása után is összefüggő marad, viszont ha egy élt elhagyunk, lehet, hogy összefüggő lesz, de az is lehet, hogy nem.

Tétel: (a) Egy gráf pontosan akkor fa, ha összefüggő, de ha bármelyik élét elhagyjuk már nem az.

(b) Egy gráf pontosan akkor fa, ha nincs benne kör, de bárhova rajzolunk bele egy újabb élt, kör keletkezik benne.

Példa: Egyszerűsített családfa. (21. ábra)



21. ábra
A családfa gráf ábrázolása

Tehát ha bárhova a gráfon belül élt húzunk, kört kapunk. A valóságban sem lehet Anya és Apa vérszerinti rokonságban, tehát nem mehet közöttük él. Ugyanígy a Nagyszülők esetében sem.

Definíció: Ha egy G összefüggő gráf e élét elhagyjuk, és az így kapott gráf már nem összefüggő, akkor az e élt elvágó élnek nevezzük.

Definíció: A fákban kitüntetethetünk egy pontot, általában ezt a pontot gyökérpontnak hívjuk.

Definíció: Legyen a G fa gyökérpontja r . Ha r -ből a gráf egy $v \neq r$ tetszőleges pontjába pontosan egy út vezet, akkor ezen az úton a v -hez legközelebbi pontot v apjának, a többi v -vel szomszédos pontot pedig v fiainak nevezzük. Az r gyökérpontnak nincs apja, neki valamennyi szomszédja a fia.

Tétel: Minden gyökértől különböző pontnak pontosan egy apja van.

Bizonyítás: Azt tudjuk, hogy minden pont apja a fiainak. Legyen v egy tetszőleges pont u , v -nek valamelyik fia. P legyen a v -t és r -t összekötő út. Az u pont nem eshet a P útra és nem lehet v utáni első pont, mert ekkor v apja lenne, viszont későbbi pont sem lehet, mert ekkor v -ből P mentén u -ba, majd az uv élen vissza egy kört tennénk meg. Ebből viszont az következik, hogy a P úthoz az u pontot és az uv élt hozzáadva, egy u -t és r -t összekötő utat kapunk. Ezen az úton v az első u utáni pont, v tehát valóban u apja.

Akárcsak a való életben egy pontnak (egy apának) akárhány fia lehet, és van olyan pont is, amelynek egyetlen fia sincs. A fiatal pontokat a fa leveleinek nevezzük. A levelek fokszáma: 1.

Kérdéseim a tanulókhöz:

- Hogyan növeszthetünk fákat?

Egyetlen pontból indulunk, és vegyünk föl egy másikat, majd kössük össze a már meglévő ponttal. Ezután vegyünk föl egy újabb pontot, majd a korábbi két pont közül, kössük össze valamelyikkel. Az eljárást ismételjük addig, amekkora fa már kívánságunk szerint elegendő.

Tétel: Minden legalább kétpontú fában van legalább két 1 fokszámú pont.

Bizonyítás: Legyen G olyan fa, amelynek legalább két pontja van. Be kell látnunk, hogy G -nek van legalább egy 1 fokszámú pontja. A fa egy tetszőleges v_0 pontjából elindulunk és teszünk egy sétát a fában, arra vigyázva, hogy egyik pontból se menjünk vissza azon az élen, amelyiken odaérkeztünk. Ezt addig tehetjük meg, amíg el nem érünk egy 1 fokszámú pontba. Ha ilyen pontba érkeztünk, akkor készen vagyunk. Ha nem, akkor előbb vagy utóbb vissza kell térnünk egy olyan pontba, amelyet a sétánk során már érintettünk, ekkor azonban a sétának a két látogatás közötti szakasza egy kör lesz, ami pedig, mivel G egy fa, ezért lehetetlen. Most elindulunk egy másik élen a v_0 pontból. Ha nincs másik él, amin elindulhatnánk, akkor v_0 egy fokszámú pont. Ekkor készen vagyunk. Ha azonban van él amin el tudunk indulni, akkor az eljárást megismételjük. Ekkor egy egy fokszámú pontba jutunk, mert a fában nincs kör.

Tétel: A fenti eljárással „növesztett” gráfok mindegyike fa, és minden fa megkapható ilyen módon.

Bizonyítás: Vegyünk egy olyan gráfot, amelyet a fenti eljárás során növesztettünk. Ez legyen a G gráfunk. A G gráfnál vizsgáljuk meg, hogy bármelyik pontból indulunk is. bármelyik pontjába eljuthatunk és sohasem a kiinduló pontba. (Nem lehet benne kör.) Megállapítottuk, hogy a G gráf fa. Azt kell igazolnunk még, hogy amennyiben egy új pontot veszünk a G -hez és ezt az új v pontot összekötjük a G gráf valamely pontjával, akkor a G' gráfunk is fa. A v pontot most adtuk a gráfhoz, és csak egyetlen ponttal kötöttük össze, így az új pont fokszáma 1. Ebből következően rajta nem haladhat át kör. v -be viszont eljuthatunk a régi utak egyikén haladva, tehát a G' is fa. Olyan kör, amely v -t nem érinti viszont nem lehetséges, mert már G -ről megvizsgáltuk, hogy fa. Igazolnunk kell még, hogy az eljárással minden fa létrehozható. Továbbá, ha a fának egyetlen pontja van, akkor valóban az eljárás első lépésével keletkezett. Tegyük fel, hogy a G gráfnak legalább két pontja van. Ekkor a korábbi tétel szerint van 1 fokszámú

pontja. Legyen a v pont ilyen, és hagyjuk el ezt a pontot (élével együtt) a G gráfból. Megkaptunk így egy G' gráfot. Be kell látnunk, hogy G' fa. Bármelyik pontból, bármelyik másik tetszőleges pontba eljuthatunk, tehát a G' gráf összefüggő. G' gráfban továbbá nem lehet kör, mert egy ilyen kör a G -ben is benne lett volna. Az indukciós feltevés szerint minden G -nél kevesebb pontot számláló gráf megkapható a „fanövesztő” eljárással, így speciálisan G' is. A G gráfot azonban éppen az eljárás második lépése szerint kaphatjuk meg G' -ből.

Kérdéseim a tanulókhöz:

- Hány éle van egy fának, tetszőleges n -re?

Nézzünk példákat. Ha van két pontunk és közöttük egyetlen él fut, akkor azt tapasztaljuk, hogy a csúcsok száma: 2, az élek száma pedig: 1. Ha három pont van összekötve, akkor pedig azt, hogy a csúcsok száma: 3, az élek száma: 2. Ha tovább gondoljuk egy picit, azonnal meg lehet sejteni mennyi egy n pontú fa él száma.

Tétel: Minden n pontú fának $n-1$ éle van.

Bizonyítás: Valóban kezdetben a pontok száma $n=1$, éppen eggyel nagyobb, mint az éleké $e=0$, az újabb élek berajzolásakor pedig mind a pontok, mind az élek száma eggyel nő, a különbség tehát nem változik.

Kérdéseim a tanulókhöz:

- Megszámlálhatóak ezek a fák? Ha igen, akkor hány n pontú fa van?

Igen, de mielőtt rátérnénk, nézzük meg, mikor izomorf két fa. Két fa akkor azonos (izomorf), ha bennük ugyanazok a pontok vannak összekötve. Ha egy fának n pontja van, akkor érdemes a pontokat megszámozni. Az n pontú fa esetében $0,1,2,\dots,n-1$ -ig számozunk.

Tétel: (Cayley tétele) Az n pontú címkézett fák száma n^{n-2} .

5. óra

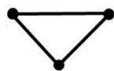
A síkba rajzolható gráfok

Az irodalomjegyzékben szereplő [6] könyvből a 199-200. oldalakon és a [7] könyvből a 38. oldalon lévő definíciók és tételek alapján, írtam fel a definíciókat és tételeket. Ábráimat saját didaktikai szempontok alapján, önállóan készítettem el.

A síkba rajzolható gráfok megbeszélésére azért van szükség, mert a gráfelmélet alapjainak fontos definícióit, tételeit már megbeszéltük. Ezután soron következhet egy olyan témakör, amely azt is hivatott a tanulóknak megtanítani, hogy a gráfok pontjai, élei nem kötöttek, nem kapcsolódnak máshoz, csakis éleken keresztül egymáshoz. Azaz elmozdíthatóak a pontok, az élek pedig nem csak egyenes vonalak lehetnek. Utóbbihoz hasonlót korábban már láttuk, például a hurok él esetében, ám a hurok él speciális él.

Kérdéseim a tanulókhöz:

- Milyen gráfokat nevezhetünk síkba rajzolhatónak? Rajzoljuk le a K_3 -at (22. ábra), hogyan is néz ki. Mit mondhatunk el róla?



22. ábra
 K_3

- Tekinthesdük a fokszámain, megnézhetjük, hogy összefüggő-e?

- De van-e értelme itt a már ismert fogalmakat vizsgálni?

Nincs, a következő definíció megmondja, mit kell figyelniünk.

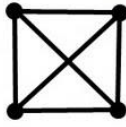
Definíció: *Ha egy gráf lerajzolható a síkba úgy, hogy az élei ne messék egymást, akkor a gráf síkba rajzolható.*

Ahogy a térképeken is láthatjuk az országhatárokat, úgy a síkba rajzolható gráfok esetén a síkot egymástól elhatárolt részekre osztják a gráf élei. Ennek megfelelően ezeket a részeket országoknak nevezhetjük el.

Kérdéseim a tanulókhöz:

- Vajon lerajzolható-e a K_4 , úgy, hogy az élei ne messék egymást?

Természetesen igen, nézzük a következő, 23. ábrát hogyan.

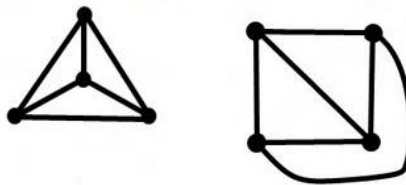


23. ábra
 K_4

- Ez talán nem síkba van, hiszen papírra van lerajzolva?

Az a „baj” vele, hogy az élek metszik egymást. Le lehet ezt máshogyan rajzolni? Gondoljunk az izomorf gráfokra, azaz ha a csúcsokat vagy az éleket mozgatom, akkor a kapcsolat nem fog változni.

Példa: Ha valakinek az Édesanyja kimegy külföldre (azaz a gráf egy pontját elmozgatom), attól a kettejük közötti vérszerinti kapcsolat nem változik meg. Nézzük meg, hogyan néz ki.



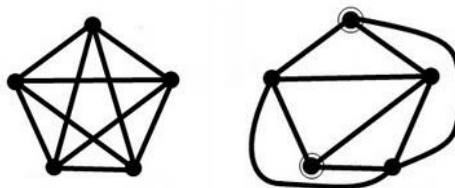
24. ábra
A K_4 síkba rajzolhatóságának két formája

Az egyik esetben az egyik pontot mozgattuk, a másik esetben pedig az egyik élt húztuk be máshogy. Vegyük észre a szabadságot, a pontok és élek nincsenek lerögzítve, a laphoz „szegecselve”.

Kérdéseim a tanulókhöz:

- K_5 esetén mi történik?

Próbáljuk lerajzolni.



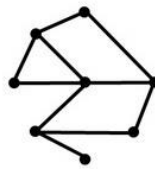
25. ábra
A K_5 és a K_5 síkba rajzolhatóságának egy próbája

Próbálkozásaink alapján megsejthető, hogy például a 25. ábrán a bekarikázott pontok között nem lehet élt behúzni anélkül, hogy valamely élt ne metszenénk el.

Tétel: Az ötpontú teljes gráf, K_5 , nem rajzolható síkba.

Tétel (Euler): Országok száma (\mathbf{l})+pontok száma (\mathbf{c})=élek száma (\mathbf{e})+2 (síkba rajzolható gráfok esetén), vagyis $\mathbf{l+c=e+2}$

Nézzük, mit mond a fenti Euler tétel. Tekintsünk egy 8 pontú gráfot. Ekkor az Euler tétel a következőképpen fest. Országok száma+8=élek száma+2. A 8 pontú gráf esetén nem minden pont van összekötve egymással (26. ábra), hanem esetünkben nézzen ki a következőképpen.



26. ábra
8 pontú, 3 országot elhatároló gráf

A gráfunkra tekintsünk úgy, mintha az élei országhatárok lennének és a határok által körbezárt részek országok.

Jönnek a Tatárok és az egész gráfvilágot, mind a 3 országgal együtt le akarják igazni. A gráfban foglalt országokon kívüli területet már elfoglalták.

Kérdéseim a tanulókhöz:

- Hány országhatárt kell lerombolniuk ahhoz, hogy minden országot elfoglalhassanak? (Egyszerre csak egy határt rombolhatnak le és azt is csak akkor, ha az egyik oldalát már elfoglalták a másikat pedig még nem. Csak a lerombolt határok vesznek oda, a többi határ érintetlen marad.

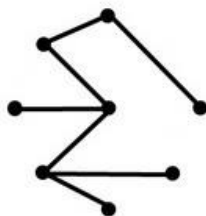
3 ország van, így 3 határvonalat (élt) kell áttörniük a Tatároknak. Az áttört határok (élek) száma: 3, az éppen maradt határok (élek) száma: 7. A csúcsok száma változatlanul 8.

Kérdéseim a tanulókhöz:

- A 3 határ áttörés után milyen gráfot kaptunk? Van benne kör?

Nincs benne kör (27. ábra).

- Vajon fát kaptunk?



27. ábra
Az országhatárok áttörése után kapott fagráf

Azt tudjuk, hogy ez a gráf kezdetben összefüggő volt és azt is, hogy három ilyen él elhagyása után is összefüggő maradt. Tehát a határáttörés utáni gráfunk fa. Azt már tudjuk, hogy egy c csúcsú fának $c-1$ éle van. Tehát akkor a gráfvilág $l-1$ országához $l-1$ határt törtek át és $(c-1)$ határvonalat hagytak épen. Az élek száma a két szám összege: $(l-1) + (c-1) = e$

Tétel: Egy n pontú síkba rajzolható gráfnak legfeljebb $3n-6$ éle lehet.

Bizonyítás: Az Euler formula: $l+c=e+2$. Minden országot 3 él határol, ez összesen $3l$ élt jelentene. Mivel ekkor mindegyiket kétszer számoltuk, az élek számának a minimuma $\frac{3l}{2} \Rightarrow l \leq \frac{2}{3}e$. Az Euler formulával: $e+2=n+l \leq n+\frac{2}{3}e$. Átrendezés után $e \leq 3n-6$ egyenlőtlenséget kapjuk.

6. óra

Többszörös összefüggőség

Az irodalomjegyzékben szereplő [5] Szőnyi Tamás teljes jegyzetében lévő definíciók és tételek alapján írtam fel a definíciókat és tételeket. Ábráimat saját didaktikai szempontok alapján, önállóan készítettem el.

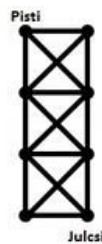
A többszörös összefüggőségre azért van szükség, mert a későbbiekben a nagyobb hálózatoknál a többszörös összefüggés alapján érthetik meg a tanulók, hogy ha egy élt elveszünk a hálózathoz vagy egy pontot, csomópontot, akkor miért nem esik szét a

hálózat. Ezen az órán tanulhatják meg, hogy hány szorosan függhetnek össze a gráfok, és hogy eshetnek szét komponensekre.

Tekintsünk most úgy egy gráfot, mint egy város úthálózatát néznénk. Ekkor vizsgálható, hogy hány csomópont esetén vagy hány él, illetve útszakasz törlése esetén marad összefüggő a gráf. Máshogy megfogalmazva, két tetszőleges pont között hány lényegesen különböző út létezik.

Definíció: A G gráfot k -szorosan (csúcs) összefüggőnek nevezzük, ha legalább $k+1$ csúcsa van, és akárhogy hagyunk el belőle k -nál kevesebb csúcsot, a megmaradó gráf összefüggő marad. Ilyenkor azt mondjuk, hogy a G gráf k -összefüggő. Azt a legnagyobb k -t, amelyre a G gráf k -összefüggő, a gráf (csúcs) összefüggőségi számának hívjuk és $\kappa(G)$ -vel jelöljük.

Példa: Pisti a hátsópadban levelet ír az első padban ülő Julcsinak. (Julcsinak előre dobni a levelet tilos, mert nagy a kockázat, hogy az órát tartó tanár észreveszi. Továbbá tilos egy padot kihagyni, tehát minden padban legalább egy emberen át kell mennie a levélnek.) Ahhoz, hogy Julcsihoz eljusson a levél, Pistinek meg kell néznie, hogy előtte minden padban ül-e legalább egy ember, aki a levelet tovább tudja adni. Tehát Pisti már is tudja, hogy ha minden padban két ember ül, akkor a két ember közül legalább az egyikre szüksége van. Ha azonban a padsorból valamely két ember nem jött aznap iskolába, akkor nem jut el Julcsihoz a levél. Tehát 2 a pontösszefüggőség, az él összefüggőség pedig 3, mert Pisti fokszáma 3. (28. ábra).



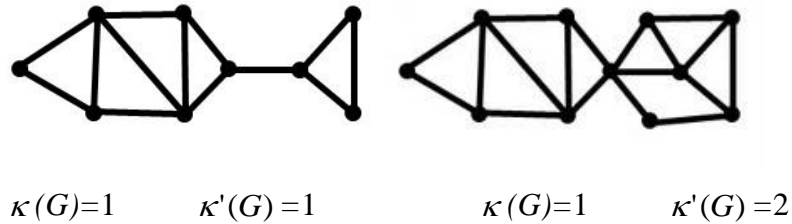
28. ábra
Pontösszefüggőség és élösszefüggőség ábrázolása

Definíció: A G gráfot k -szorosan élösszefüggőnek nevezzük, ha akárhogy hagyunk el belőle k -nál kevesebb élt, a megmaradó gráf összefüggő marad. Ekkor azt mondjuk, hogy G k -élösszefüggő. Azt a legnagyobb k -t, amelyre a gráf k -élösszefüggő, a gráf él

összefüggőségi számnak hívjuk, és $\kappa'(G)$ -vel jelöljük.

A $\kappa(G)$ és a $\kappa'(G)$ tulajdonképpen azt jelenti, hogy legkevesebb ennyi csúcsot és ennyi élt kell törölni ahhoz, hogy a gráf már ne legyen összefüggő.

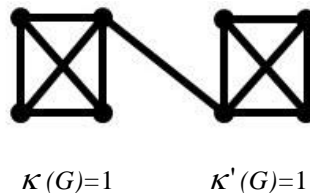
Nézzünk példát. Írjuk fel az alábbi (29. ábra), gráfoknak az él és a pont összefüggőségi számát.



29. ábra
Pontösszefüggőség és élösszefüggőség újabb ábrázolása

Definíció: A K_r teljes gráf $(r-1)$ - pont összefüggő, és $(r-1)$ -élösszefüggő.

Ha egy gráfban van d -ed fokú csúcs, akkor a gráf legfeljebb d -élösszefüggő, mert ha az ebből a csúcsból kiinduló minden élt töröljük, akkor a pont izolált pont lesz. Ha egy gráfban előforduló minimális fokszámot $\delta(G)$ -vel jelöljük, akkor $\kappa'(G) \leq \delta(G)$.

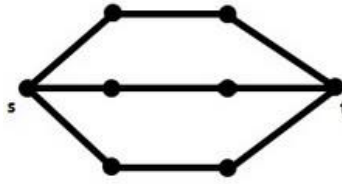


30. ábra
Két K_4 ábrázolása egyetlen éllel összekötve

Tétel: $\kappa(G) \leq \kappa'(G)$

Definíció: Azt mondjuk, hogy egy csúcs illetve él lefog egy utat, ha a csúcsa illetve éle az útnak.

Menger tétele: Legyen s és t két csúcs a G gráfban. Az s -ből t -be menő éldiszjunkt utak maximális száma megegyezik az s -ből t -be vezető összes utat lefogó élek minimális számával.



31. ábra
Éldiszjunkt utak ábrázolása s pontból t pontba

Ha s és t nincs éllel összekötve, akkor az s -ből t -be vezető közös belső csúcs nélküli utak maximális száma megegyezik az s -ből t -be vezető összes utat (s és t felhasználása nélkül) lefogó csúcsok minimális számával.

Lemma: *Ha a $G=(V, E)$ gráf k -szorosán összefüggő ($k \geq 2$), akkor a belőle az e él törlésével kapott $G - e$ gráf $(k - 1)$ -szeresen összefüggő.*

Tétel: *A G gráf $\Leftrightarrow k$ -szorosán összefüggő, ha legalább $k+1$ csúcsa van és bármely két csúcsa között létezik k db közös belső csúcs nélküli út. Ugyanígy $G \Leftrightarrow k$ -szorosán élösszefüggő, ha bármely két csúcsa között létezik k db éldiszjunkt út.*

Tétel: *A G gráf akkor és csak akkor 2-szeresen összefüggő, ha bármely két pontján át megy kör. Az is igaz, hogy itt „bármely két pontján” helyett „bármely két élén” is mondható (ami erősebb).*

Dirac tétele: *Ha $k \geq 2$ és a G gráf k -szorosán összefüggő, akkor bármely k csúcson van kör.*

7. óra

Bevezetés a hálózattudományba

Az irodalomjegyzékben szereplő [8] teljes könyv, [9] előadás, a [13] dokumentumfilm, a [10] előadás, a [12] előadás, a [15] előadás, a [16] bemutató, [24] előadás alapján saját didaktikai gondolataimat megfogalmazva, önállóan készítettem el.

Tulajdonképpen a hálózattudományba való bevezetés a harmadik órán tárgyalt Königsbergi hidak problémájával kezdődött. Mostanra azonban a diákok egy erős alappal rendelkeznek, így elkezdhetünk ténylegesen foglalkozni a hálózatokkal.

Kérdéseim a tanulókhöz:

- Hogyan épülhet föl egy hálózat?

A hálózatokat úgy írhatjuk fel, mint a gráfok pontjait és az élek pedig a köztük futó kapcsolatok. A Königsbergi problémánál láttuk, hogy Euler bizonyításában az igazi gráfelméleti alapkövet az adta, hogy a szigeteket azonosította a gráf pontjaival és a hidakat a gráf éleivel. Ebből kezdetünk tehát kiindulni.

- Gondolkodjunk el azon, hogy vajon milyen hálózatokat, komplex rendszereket ismerünk?

Az első, ami eszünkbe jut az internet. De gondolkodjunk természetesebben, hiszen az internet és a világháló csak néhány éve képezi részét mindennapjainknak.

Kérdéseim a tanulókhöz:

- Ez azt jelentené, hogy előtte nem is voltak hálózatok, komplex rendszerek? Természetesen nem jelentheti ezt, így arra kell rájöttünk, hogy körülöttünk szinte minden még saját testünk belső működése, - gondoljunk pl. az érrendszerünkre, a baráti kapcsolati hálózatainkra, vagy az emberi agyra. Ezek mindegyike a hálózatok működésén alapul.

Kérdéseim a tanulókhöz:

- Milyen fizikai hálózatokat ismerünk?

Ilyen hálózatok a telefonvonalak, vagy az összekötött számítógépek, úthálózat, elektromos hálózat, a sakktábla. A minket körülvevő természet is egy tökéletesen működő komplex rendszer.

- Vajon a komplex rendszerek milyen törvények alapján jönnek létre? Vannak-e egyáltalán törvények, vagy szabályok?

Ahhoz, hogy ezt a kérdést a legjobban körbejárhassuk, kezdjük az Erdős és Rényi féle klasszikus véletlen hálózatokra vonatkozó modellel.

Az Erdős-Rényi véletlen gráf modell

Az irodalomjegyzékben szereplő [8] könyv 20-31. oldal, [9] előadás, [13] dokumentumfilm, [10] előadás, [12] előadás, [15] előadás, [16] bemutató, [23] előadás, [2] könyv 121. oldal, [24] bemutató, a [11] Szakdolgozat 11-16. oldal, [25] internetes hivatkozás alapján saját didaktikai gondolataimat megfogalmazva, önállóan készítettem el. Továbbá a témakörhöz szükséges ábrákat is saját magam készítettem.

A valódi hálózatok nagyszámú csúcsponttal rendelkeznek, így nehéz őket kezelni, és modellezni. Ezért Erdős és Rényi úgy döntöttek, hogy adott n pontot véletlenszerűen fognak összekötni. Azt találták, hogy a legegyszerűbben úgy tudnak véletlenszerű hálózatot létrehozni, ha akár egy pénzfeldobás esetén, $\frac{1}{2}$ valószínűség alapján döntenek el, hogy a kiválasztott két csúcs között fusson-e él, avagy sem. Amennyiben például a pénzdobás eredménye írás, úgy behúzták a két csúcs közötti élt, ha fej, akkor pedig nem, majd ezután újabb két csúcsot választottak ki és az eljárás kezdődött előlről. Ezt addig folytatták, amíg a megadott él szám behúzását el nem érték.

Definíció: Az n pontú, egyszerű véletlen gráfot, így értelmezzük: Számozzuk meg a pontokat 1-től n -ig, majd bármely két csúcspontot $\frac{1}{2}$ valószínűséggel kösse össze él a többi pontpártól függetlenül. Ez megvalósítható pl. úgy, hogy minden pontpárhoz feldobunk egy pénzérmét, és ha fej, akkor összekötjük éllel.

Alkalmazzuk a véletlen gráfok elméletét arra az esetre, ha tekintünk egy gálaestet. A meghívott vendégek közül tegyük, föl egyike sem ismeri a másikat. Mindösszesen egyetlen embert ismernek, mégpedig a főszervezőt. Ahogyan Euler a szigeteket pontokkal a hidakat élekkel azonosította, mi is azonosítsuk a gálaest résztvevőit pontokkal és a közöttük kialakuló kapcsolatokat élekkel. Kezdetben tehát sok elszigetelt pontból indulunk. Majd válasszunk ki két résztvevőt, akik között jelezvén a létrejött kapcsolatot, élt húzunk. Óhatatlanul előbb utóbb annyi élt fogunk behúzni, hogy a pontpárokat összekötjük más pontpárokkal is. Az él hozzáadásával az elszigetelt pontok száma exponenciálisan fog csökkenni.

Ennek következtében csoportok alakulnak ki. Ha azonban már annyi élt húztunk be, hogy minden pontra átlagosan egy él jut, akkor óriáscsoport jelenik meg. Azaz egy összefüggő gráfot kapunk, vagyis tetszőleges pontból az él mentén bármelyik

másikba eljuthatunk. Ez tehát az a pillanat, amikor az óriáskomponens megjelenik. Pontonként tehát csak egyetlen élre van szükség ahhoz, hogy összekapcsolva maradjon a gráfunk, jelen esetben az ismeretségi hálózatunk. Az így kapott gráfot Erdős-Rényi véletlen gráf modellnek nevezzük és $ER_n(p)$ - vel jelöljük. Erdős és Rényi 1959-ben mutatták be fenti véletlen gráf modelljüket.

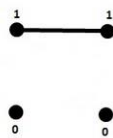
Kérdéseim a tanulókhöz:

- Hurok élek, többszörös élek vannak a modellben?

Nincsenek, mindig két pontot választottak ki és ahhoz $\frac{1}{2}$ valószínűséggel húztak be élt.

- Egy ilyen véletlen gráf esetében, mit érdemes vizsgálni? (pontok száma?, összefüggő?, fokszám?, valószínűség?)

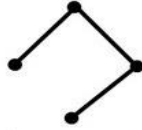
A pontok számát tudjuk, előre meghatározott. Nem minden esetben összefüggő a kapott gráfunk, de összefüggő komponens található benne. Ha az átlagos fokszám 1-től nagyobb, akkor biztosan van benne egy nagy összefüggő komponens, és több kisebb komponens. Ha azonban az átlagos fokszám 1-nél kisebb, akkor a kapott gráfban több kisebb komponens lesz. Tekintsünk most egy olyan véletlen gráfot, melynek csúcsai száma: 4, élei száma: 1. $G(n, m)=G(4,1)$. A 32. ábrán látható gráf a $G(4,1)$ -ből véletlenszerűen létrejövő gráf. Az átlagos fokszám: $\frac{1+1+0+0}{4} = \frac{1}{2}$, tehát kisebb, mint egy. Valóban egy olyan gráfot kaptunk, amely nem összefüggő, de több kisebb komponensből áll.



32. ábra
Egyszerű négypontú gráf, fokszámokkal ellátva

- Mi történik, ha $G(4,3)$ –at tekintünk? (33. ábra)

Ekkor az átlag fokszám $\frac{1+1+2+2}{4} = \frac{3}{2}$. A kapott eredmény 1-től nagyobb, így a gráfunkban lesz egy nagy összefüggő komponens.



33. ábra
Egyszerű négypontú gráf

Innen már megsejthető, hogy az átlagos fokszáma egy Erdős-Rényi véletlen gráfnak:

$$\frac{2m}{n}$$

Két csúcs összekötésének a valószínűségét él valószínűségnek is nevezzük.

Kérdéseim a tanulókhöz:

- Érdemes valószínűséget vizsgálnunk?

Él valószínűséget nem, hiszen minden egyes él $\frac{1}{2}$ valószínűséggel húztunk be. Viszont annak a valószínűségét, hogy egy konkrét gráfot kapunk, azt érdemes vizsgálni.

- Mennyi lehet az összes lehetséges élek száma? Próbáljuk, ki ha 4 csúcsunk van.

Ha 4 csúcsunk van, akkor az összes lehetséges él K_4 fogja reprezentálni. K_4 -nek összesen 6 éle van. Tehát egy 4 csúcsú bármely gráfnak maximálisan 6 éle lehet. Ez

alapján egy n csúcsú gráf összes lehetséges éleinek a száma: $\frac{n(n-1)}{2}$, tehát $\binom{n}{2}$.

Az összes lehetséges n csúcsú gráf száma: $2^{\binom{n}{2}}$ Egy konkrét gráfot $\frac{1}{2^{\binom{n}{2}}}$

valószínűséggel kaphatunk, mert, minden egyes gráf ugyanakkora valószínűséggel áll elő. A véletlen gráfok elmélete $n \rightarrow \infty$ esetén vizsgálja a tulajdonságokat.

8. óra

Gilbert modell (1960)

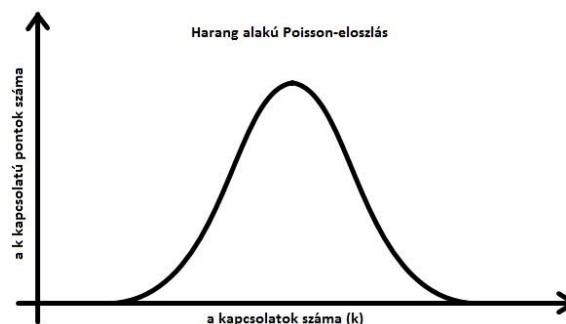
Az irodalomjegyzékben szereplő [8] könyv 20-31. oldal, a [9] előadás, a [13] dokumentumfilm, a [10] előadás, a [12] előadás, a [15] előadás, a [16] bemutató, [23] előadás, a [2] könyv 121. oldal, a [24] bemutató, a [11] Szakdolgozat 11-16. oldal, a [25] internetes hivatkozás és a [22] internetes honlap alapján saját didaktikai gondolataimat megfogalmazva, önállóan készítettem el. Továbbá a témakörhöz szükséges ábrákat a [8] könyv 79. oldalán lévő ábra alapján szintén saját magam készítettem.

Véletlenszerűen kiválasztunk két csúcsot, majd p valószínűséggel összekötjük egymással, $1-p$ valószínűséggel pedig nem kötjük össze őket. Ebben a modellben tehát minden él egy adott valószínűséggel van behúzva, egymástól függetlenül.

Amit érdemes vizsgálni, az az, hogy milyen egy véletlen gráf fokszám eloszlása, valamint azt, amit fentebb említettünk azaz, hogy egy konkrét gráf valószínűsége mennyi. Egy ilyen konkrét gráf valószínűségére egy olyan n és p paraméterű binomiális eloszlás jellemző, amelyet egy X valószínűségi változó követ, amely a következőképpen írható fel: $P(X) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, ahol $k=0,1,2,\dots,n$. A $p, 0$ és 1 közötti pozitív szám, azaz $0 < p < 1$. Ha az n nagy, akkor pedig, azt mondhatjuk, hogy a binomiális-eloszlás határeseteként jelenik meg a Poisson eloszlás, ahol a p 0-hoz közele, k pedig viszonylag kicsi. A Poisson-eloszlás képlete a következő: $\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$, amely a nagy n esetére vonatkoztatott Stirling formulából és ekvivalens átalakítások sorából jön ki. Ahhoz, hogy a tanulók ezeket a képleteket megértsék, rendkívül sokrétű tudásra van szükség.

A kihangsúlyozandó fogalom a tanulók számára ennek megfelelően csak az, hogy a véletlen gráfok binomiális eloszlásúak. Amennyiben nagy az n , azaz a csúcsok száma, akkor pedig eloszlásuk Poisson-eloszlású, amely egy haranggörbét követ.

A véletlen hálózatok eloszlása tehát egy haranggörbét követ, amely szerint a legtöbb pontnak ugyanannyi kapcsolata van, és nem léteznek nagyon nagyszámú kapcsolattal rendelkező pontok.



34. ábra
Poisson-eloszlást ábrázoló grafikon

Az Erdős – Rényi és a Gilbert modell egymással szorosan összefüggő modellek. Az

Erdős-Rényi véletlen gráf modell $G(n, m)$ a Gilbert modellel $G(n, p)$ a következő: $p = \frac{1}{2}$.

Az egy tehát a küszöbérték. Az Erdős és Rényi kockával való hatos dobással döntötték el azt, hogy a két kiválasztott pont között behúzzanak-e élt annak $\frac{1}{2}$ a valószínűsége. A

modellel tehát $p = \frac{1}{2}$, ahol az átlagos fokszám: $\lambda = 1$, a csúcsok száma, $G(4, p)$ esetben

$n=4$. Tehát $\frac{1}{2} = \frac{\lambda}{4} \Rightarrow \lambda = 2$.

Abban az esetben, ha p -t változtatjuk, azaz $\lambda < 1$, akkor a gráf több kisebb komponensből fog állni. pl. $\lambda = 0,15$ esetén, $p = \frac{0,15}{4} = 0,0375$, és ez lesz az a valószínűség, amellyel behúzom az élt két pont között, és $1 - 0,0375 = 0,9625$ lesz annak a valószínűsége, hogy nem húzok be élt. Ha pedig $\lambda > 1$, akkor a gráfunk egy nagy és több kisebb komponensből fog állni. A komponensek méretei meghatározhatók, a komponens csúcsai számának és az egész gráf csúcsai számának arányával.

A későbbiekben látni fogjuk, hogy az Erdős-Rényi véletlen gráfok a valódi hálózatok leírására, modellezésére nem jól alkalmazhatók, mert a komplexitás nem egyenlő a véletlennel. A reguláris gráfokban minden ponthoz ugyanannyi él tartozik. A valódi hálózatokban pedig mindig vannak olyan pontok, amelyekre jóval több él illeszkedik, mint a többi pontra és mindig van olyan csúcs, amelyhez egyetlen él sem tartozik. A világ, amelyben élünk, nem véletlenszerű és valamiféle rendnek kell lennie benne.

A Granovetter – modell

Az irodalomjegyzékben szereplő [8] könyv 22-31. oldal felhasználásával önállóan készítettem el.

Mark Granovetter a következő problémát kívánta megoldani. Hogyan szereznek ma az emberek állást, és ehhez mennyire használják fel meglévő ismeretségi kapcsolataikat? Kísérletet végzett kérdésének megválaszolására majd megírta kéziratát a gyenge kapcsolatok fontosságáról.

Miután tanulmányát két anonim bíráló elutasította, négy évvel később végre publikálásra került 1973-ban. Az állás kereséskor, vagy új üzletünk beindításakor sokkal fontosabbak a gyenge kapcsolatok. Hogy miért, az egy érdekes kérdés és

érdekes választ feltételez. Egy embernek általában vannak legjobb barátai.

Ezekből nem túl sok van, tehát megválogatjuk őket. Viszont az ilyen nagyon jó és mély baráti kapcsolatokkal az a „baj”, hogy nem véletlenül vagyunk barátok. Azonos az érdeklődési körünk, azonos filmeket, előadásokat tartunk mind fontosnak, mind szórakoztatónak. Ezek a legjobb barátok pedig általában egymást is ismerik és felvetődik egy probléma, a „hasonszőrűség”. Granovetter modellje szerint a társadalmunkat leíró hálózatban nagyon sok a teljes gráf, azaz zárt baráti csoportokra tagolódnak és ezeket a teljes gráfokat gyenge kapcsolatok kötik össze a külvilággal.

A gyenge kapcsolatokban két ember két külön teljes gráfból való pontot jelöl. Az erős és mély baráti kapcsolatainkban barátaink, túlságosan hasonlítanak hozzánk, azaz gráf nyelven, benne van a mi általunk is alkotott teljes gráfban. Ő tehát nem jó arra, ha nyitni akarunk a világ felé. Erre leginkább a gyenge kapcsolatok a megfelelőek, mert ők tőlünk különböző helyekre járnak, különböző forrásokból szerzik be az információikat, és megismertethetnek a saját teljes gráfukkal, ahonnan érkezhettek aztán számunkra az ideális állásajánlat.

Ez a modell, már sokkalta igazabbnak tűnik a valódi hálózatokra, valódi kapcsolati, ismeretségi hálózatainkra, mint az Erdős-Rényi által felállított véletlen gráfokra vonatkozó modell.

A Kis világok

Az önszerveződés (szinkronicitás jelensége)

Az irodalomjegyzékben szereplő [8] könyv 48-62. oldal, a [13] dokumentumfilm, a [10] előadás, a [12] előadás, a [15] előadás, a [11] Szakdolgozat 9-11 oldal, alapján önállóan készítettem el.

Kérdéseim a tanulókhöz:

- Ismerjük a jelenséget, amikor például a tücskök együttesen ciripelnek éjjel. Tudunk még példákat mondani?

Az önszerveződés létrejöhet a tücskök ciripelésével, akkor, ha egy színvonalas előadást tekintünk meg, és ha a közönség ütemesen elkezd tapsolni (vastaps), vagy például ahogyan a szentjánosbogarak nagy távolságokat tesznek meg egyszerre villogva.

Az a kérdés, hogyan tud egymástól különböző egyedek populációja külső szemlélő számára hirtelen szinkronizáltan viselkedni? Van-e irányító, akinek jelzésére mindannyian cselekszenek? És ha van, akkor ki az? A válasz az, hogy senki. Danken Watts és Steven Strogatz voltak azok a neves kutatók, akik figyelni és tanulmányozni

kezdték a jelenséget. Végül szinkronicitást tanulmányozva rájöttek, hogy hálózatokban kell gondolkodniuk. Azaz a tücskök és a további előforduló hasonló szinkronicitást mutató egyedek e viselkedése a hálózatokon alapul.

A hat lépés távolság

Az irodalomjegyzékben szereplő [8] könyv 32-47. oldal, a [13] dokumentumfilm, a [10] előadás, a [12] előadás, a [15] előadás, a [11] Szakdolgozat 33-34. oldal alapján önállóan készítettem el.

A hat lépés távolság elmélete 1967-ben Stanley Milgram amerikai pszichológus kísérletével indult. Azt tűzte ki céljául, hogy megtalálja az USA-ban két tetszőleges ember között a távolságot.

Tulajdonképpen arra volt kíváncsi, hogy a földön élő emberek ismeretségi kapcsolatai, egy-egy ember között hány ismeretséget mutatnak. Egy kísérletet talált ki ennek megfejtésére. Maga a kísérlet abból állt, hogy levelet küldött az USA kiválasztott lakóinak azzal a kéréssel, hogy vegyenek részt az amerikai társadalom ismeretségi kapcsolatainak vizsgálatában. Mellékelten megküldte a célszemély fényképét, címét és pár információt róla. A kitétel az volt, hogy amennyiben ismeri a célszemélyt és legalább tegező viszonyban vannak, úgy küldje el neki a levelet, ám amennyiben nem ismeri, úgy ne próbálja meg megkeresni, hanem küldje tovább a levelet egy olyan ismerősének, akivel legalább tegező viszonyban vannak, és akinek esetleg lehet olyan ismerőse, aki vagy közvetlenül ismeri a célszemélyt, avagy tudhat hozzá egy közvetlen, vagy közvetett ismeretségi kapcsolatot. 160 levelet küldött ki, melyből 42 érkezett meg.

Fenti probléma első megjelenése Karinthy Frigyes nevéhez fűződik, aki 1929-ben a Láncszemek című novellájában írt az akkor a Földön másfél milliárd emberre vonatkoztatottan, öt lépés távolságról.

Milgram kísérlete nyomán azt találta, hogy tulajdonképpen az emberek az USA-n belül 5,5 ismeretségi távolságra (kézfogásra vannak) egymástól. Tulajdonképpen az is meglepő, hogy tetszőleges két ember között van útvonal. A Földön élő majd minden embernek 1-nél több ismeretségi kapcsolata van, így mindannyian részesei vagyunk a társadalomnak nevezett hatalmas hálózatnak.

Azt azonban ne felejtjük el, hogy ez a kísérlet 1967-ben volt.

Kérdéseim a tanulókhöz:

-A mai világunkat, milyen fajta rendszerek, hálózatok kicsinyíthetik le?

Az internetnek, a mobil szolgáltatóknak köszönhetően zsugorodott le a világunk. Persze a népesség is időközben az ötszörösére emelkedett, de ennek ellenére a társadalom egy nagyon sűrű háló.

Ha az átlagos kapcsolódás a kritikus 1-hez közeli a távolság igen nagy lehet, azaz ha például az átlagos fokszám 1 körüli és mindenkinek átlagban csak 1 ismerőse van, akkor 1-1 ember között a távolság nagyon nagy lehet.

Arra azonban, hogy a legtöbb hálózatban miért olyan kicsi a távolság a pontok számához képest – amennyiben egy pontból több él is fut - az a magyarázat, hogy ha tekintünk egy pontot, annak átlagosan k kapcsolata (éle) van.

Kérdéseim a tanulókhöz:

- Vajon ebből a pontból hány másikat érhetünk el?

Ebből a pontból k másik pontot érhetünk el. Kétpontnyi távolság után, már k^2 pont lesz és d kapcsolatnyira k^d pont található.

Ha a k nagy, akkor az elért pontok száma még kis d esetén is nagy. Ennek következtében a pontok közötti távolság lecsökken.

A teljes világhálózaton k kapcsolat átlaga 7, ezért ha az első oldalról 7 pontba juthatunk el 1 kattintásnyira, akkor két úton már 49 oldalra juthatunk el, három úton pedig 343 oldalra.

Tőlünk 19 kattintásra 10^{16} oldalt nézhetünk meg, ami sokkal több oldalt jelent, mint a weben található összes oldal száma. Ez tehát egy ellentmondás.

Kérdéseim a tanulókhöz:

- Mi lehet a megoldás?

A kulcs az ismétlődő oldalakban van. Ezek nem új kapcsolatok. Ez azonban a web által mutatott minta. A valóságban, a társadalmunkban, a hat lépés egy felső határ.

Egy tetszőleges embertől egy a világ másik végén élő tetszőleges emberig rengeteg nagyszámú és különböző út létezik.

Tekintve, hogy a már említett mobil telefon társaságok létrejötte, az internet segítségével kis távolságokat lerövidíthetünk, így tehát napjainkban ez a szám inkább a három felé tendál.

9. óra

Kevin Bacon játék

Az irodalomjegyzékben szereplő [8] könyv 67-70. oldal, a [13] dokumentumfilm, a [10] előadás, a [12] előadás, a [15] előadás alapján saját önállóan készítettem el.

1994-ben három amerikai diák (Craig Fess, Brian Turtle és Mike Ginelly), akik az Albright College (Reading Pennsylvania) tanulói voltak felfedezték, hogy Kevin Bacon tulajdonképpen annyira sok filmben játszott, hogy Hollywood bármely tetszőlegesen kiválasztott színészával összekapcsolható. A játék tehát a következőképpen játszható. Kitalálunk egy tetszőleges Hollywood-i színészt, legyen például Robert De Niro. Az a kérdés, hogy fel tudjuk-e idézni, hogy kivel játszott együtt egy filmben Robert De Niro, aki együtt játszott Kevin Baconnel, vagy ha játszottak már együtt egy filmben, akkor mely film az. Tehát tulajdonképpen arra keressük a játékban a választ, hogy egy adott színészhez vezet-e út valamely színészen és közös filmjükön keresztül Kevin Baconig és ha igen, milyen hosszú út. Robert De Niro-val együtt játszottak a Sleepers c. filmben így azt kaptuk, hogy Kevin Bacon és Robert De Niro egymástól 1 távolságra vannak.

Kérdéseim a tanulókhöz:

- Mik a pontok, mik az élek?

A játékban a pontok a színészek, az élek pedig a közös filmbeli szereplés. A játékot, amennyiben az óra időkerete engedi, ki is próbálhatjuk.

Brett Tjaden írt egy programot, amely megmutatja egy tetszőlegesen kiválasztott színésztől a Kevin Baconig vezető utat. Internetes weboldalt is létrehozott <http://oracleofbacon.org/movielinks.php>, melyhez a www.imdb.com weboldal hihetetlenül nagy adatbázisát használta. Az adatokat elkérték a kutatók. Ezután tovább kerestek a meglévő hálózatok között. Azt találták, hogy az amerikai áramhálózat a Hollywood-i hálózatokhoz hasonlatosnak mutatkozik. Feltérképezték, a fonalféreg sejtjeit, majd az elemzésük kapcsán ugyanazt tapasztalták. Rövid kapcsolódások és magas fokú fűrtösödés jellemezte őket. Azaz sok kis csoport van, ami összekapcsolódik egymással.

Erdős számok

Az irodalomjegyzékben szereplő [8] könyv 71-73. oldal, [9] előadás, a [13] dokumentumfilm, a [10] előadás, a [12] előadás, a [15] előadás, a [16] bemutató, a [24] bemutató, a [11] Szakdolgozat 34-35. oldal, a [21] internetes weboldal alapján önállóan készítettem el.

Az Erdős szám egy olyan nem negatív egész szám, amely azt mutatja meg, hogy egy adott tudós publikálásait tekintve, milyen távolságra van Erdős Pál (1913-1996), híres magyar matematikustól. Erdős Pál, Erdős száma 0. Annak, aki Erdős Pállal együtt írt cikket, annak 1 a távolsága.

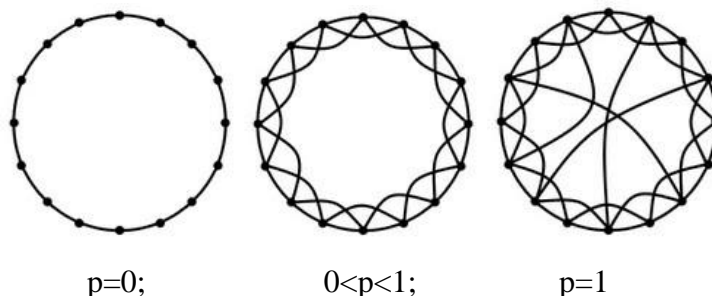
Minden olyan tudós, aki nem írt cikket Erdős Pállal de ismer olyan tudóst (Erdős száma: 1) aki írt cikket vele, annak 2 az Erdős száma. Annak az Erdős száma 3, aki nem írt közös cikket sem Erdőssel, sem olyan tudóssal, akinek 1 az Erdős száma, de írt közös cikket valamely 2 Erdős-számúval, és így tovább.

Ez természetesen a tudósok hálózatában bír jelentőséggel, hiszen olyanokat nem tekinthetünk, akik egyáltalán nem publikáltak, mert nem is foglalkoztak természettudományokkal. Az Erdős szám tehát az utat jelenti, vagyis azt, hogy a megírt cikkek alapján milyen messze van egy adott tudós Erdős Páltól.

Watts és Strogatz modell

Az irodalomjegyzékben szereplő [8] könyv 57-62. oldal, a [13] dokumentumfilm, a [10] előadás, a [12] előadás, a [11] Szakdolgozat 9-11. oldal alapján megfogalmazva, önállóan készítettem el. Továbbá a témakörhöz szükséges ábrákat is saját magam készítettem.

Képzeljünk el egy tömeget egy kör alakú futball stadionban, ahol rengeteg ember elfér. Kísérletképpen szeretnénk eljuttatni egy üzenetet a stadion egyik pontjából a stadionban a legtávolabb ülő nézőnek.



35. ábra
Kis világ modell ábrázolása

Kérdéseim a tanulókhöz:

- Hogyan lehetne ezt megtenni?

Alapesetben arra gondolnánk, hogy az egyik ember elmondja a mellette ülőnek, majd az is elmondja az ő mellette ülőnek és így tovább. Ez igen hosszú időt venne igénybe. Ha **A** mielőtt bemenne a stadionba ad **B**-nek egy kézi adó-vevőt (walky-talky) és a stadionon belül különböző helyre ülnek le, egymással tudnak kommunikálni. Az **A** melletti szomszédok tudnak akár a **B** melletti szomszédokkal is kommunikálni. Tulajdonképpen tehát egy egész csoport tud kommunikálni egy másik csoporttal. Ez a modell tehát a világot lekicsinyíti.

Egy kisvilág tulajdonságú gráfban a csúcsok közötti átlagos távolság a csúcsok számához képest kicsi.

Kérdéseim a tanulókhöz:

- Számít-e az idő?

Mivel a hálózatok az idő függvényében változhatnak, ezért ha a hálózatokat próbáljuk meg matematikailag leírni, az a legcélszerűbb, ha gráf sorozatokat tekintünk. Vegyünk egy G_n gráf sorozatot, ahol $n = \{1 \dots \infty\}$. Most válasszunk ki két tetszőleges csúcsot, amelyek között létezik út és ezt az utat nevezzük el H_n -nek. Ez tehát a kiválasztott két pont közötti távolság, azaz tulajdonképpen nem más, mint a köztük lévő élek száma. Itt emlékezzünk az előbbi Kevin Bacon játékra. Vagyis az előbbi példában $H_n = 1$.

Definíció: Akkor mondjuk, hogy a G_n , ahol $n = \{1 \dots \infty\}$ gráfsorozat kisvilág, ha létezik egy K konstans úgy, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} P(H_n \leq K \log n) = 1$, azaz ha $n \rightarrow \infty$ akkor a zárójelben szerepelő kifejezés valószínűsége tartani fog az 1-hez.

Definíció: Egy G_n , ahol $n = \{1 \dots \infty\}$ gráfsorozat nagyon kis világ, ha létezik egy olyan K konstans, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} P(H_n \leq K \log \log n) = 1$, azaz ha $n \rightarrow \infty$ akkor a zárójelben szerepelő kifejezés valószínűsége tartani fog az 1-hez.

A fenti két definíció csak háttér információ a tanárok számára.

10. óra

Barabási-Albert modell

Az irodalomjegyzékben szereplő [8] könyv 92- oldal, a [9] előadás, a [13] dokumentumfilm, a [10] előadás, a [12] előadás, a [15] előadás, a [16] bemutató, [23] előadás, a [11] Szakdolgozat 23-25. oldal, [24] szemináriumi előadás alapján saját didaktikai gondolataimat megfogalmazva, önállóan készítettem el. Továbbá a témakörhöz szükséges ábrákat is saját magam készítettem.

Az alábbi modellt Barabási Albert-László és Albert Réka dolgozta ki 1999-ben.

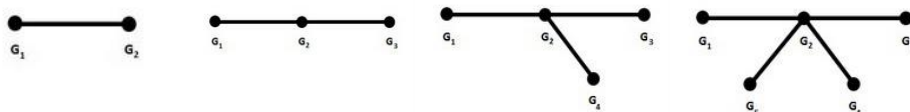
Vesztünk egyetlen csúcsot, melynek legyen a neve G_1 szimbolizálva, hogy ez a G gráfunk első csúcsa. Ebből az egy csúcsból indulunk ki. Ezután minden lépésben egy csúcsot és a belőle kiinduló élt adjuk a gráfhoz. A modellben az egy lépésben hozzáadott élek száma bármilyen pozitív egész szám lehet. $m = \{1, 2, \dots\}$ Ha csak $\delta = 0$, $m=1$ élt adunk minden csúcshoz, akkor Barabási fáról beszélünk. Barabási fát (növekvő sznob fát) úgy készítünk, hogy egyetlen pontból indulunk ki. Ezt a pontot gyökérnek fogjuk nevezni. Majd hozzáadunk egy új csúcsot úgy, hogy az új csúcsból kiinduló él másik végét egy már meglévő csúcshoz kötjük. Az új csúcsot a már meglévő csúcs gyerekének nevezzük. Tehát minden $n+1$ csúcsot egy már meglévőhöz adjuk hozzá.

A valószínűsége annak, hogy egy korábbi d fokú csúcsot választunk, $\frac{d}{(2n-2)}$ vagyis az, hogy mely csúcsot választjuk ki az új csúcs szomszédjának a fokszámokkal, arányos valószínűséggel választhatjuk ki.

Próbáljuk csak ki, ha $d=1$ a fokszám, akkor $\frac{1}{2n-2}$ a valószínűség. Ha $d=2$, akkor

$\frac{1}{n-1}$, ha $d=4$, akkor $\frac{2}{n-1}$, tehát látható, hogy minél nagyobb volt egy korábbi csúcs

fokszáma, annál nagyobb a valószínűsége, hogy egy újabb pontból induló él ebbe a csúcsba fog bekapcsolódni (36. ábra).



36. ábra
A Barabási fa növekedésének ábrázolása

A preferenciális kapcsolódás, azaz a gazdag még gazdagabb lesz

Az irodalomjegyzékben szereplő [8] könyv 90-105. oldal, a [13] dokumentumfilm, a [10] előadás, a [12] előadás, a [11] Szakdolgozat 19-24. oldal, [24] szemináriumi előadás alapján megfogalmazva, önállóan készítettem el.

A gazdagabb még gazdagabb lesz, jelenség jelen van sok hálózatban.

Kérdéseim a tanulókhöz:

- Milyen fontos tulajdonsága van még egy valósi hálózatnak?

A valódi hálózatoknak fontos közös tulajdonsága a növekedés. Tulajdonképpen ebben tér el az Erdős-Rényi és a Strogatz and Watts modelltől is, hiszen mindkét esetben adott n -re vizsgáltuk a kapott gráfokat. A legkorábban létrejött pontok lesznek a leggazdagabbak, mert ezek a pontok hosszabb idő óta gyűjtik kapcsolataikat. A modell a következő:

Az új csúcsok éleit nem azonos valószínűséggel kötjük össze bármelyik csúccsal, hanem azokhoz a csúcsokhoz melyeknek nagyobb a fokszáma, nagyobb valószínűséggel kötjük be éllel az új csúcsot.

Kérdéseim a tanulókhöz:

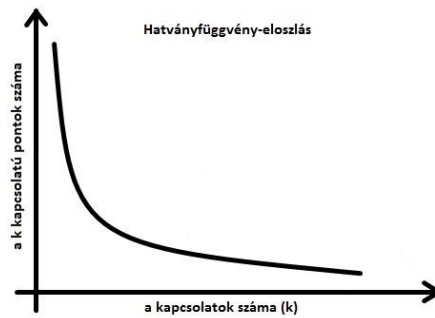
- Tudunk mondani példát?

Az előbbi Barabási – Albert modell tulajdonképpen egy preferenciális kapcsolódási modell. Tehát a preferenciális kapcsolódás a növekedés és a népszerűség függvényében jön létre.

A Skálafüggetlen hálózatok

Az irodalomjegyzékben szereplő [8] könyv 78-81. oldal, a [9] előadás, a [13] dokumentumfilm, a [10] előadás, a [12] előadás, a [15] előadás, a [16] bemutató, a [11] Szakdolgozat 9-11. oldal, alapján megfogalmazva, önállóan készítettem el. Továbbá a témakörhöz szükséges ábrákat is saját magam készítettem.

Egy Poisson-eloszlásnál a tipikus csomópontból k él indul ki. Ennek megfelelően az átlag fokszám is k lesz, ami viszont nem fontos, mert egy hatványfüggvény-eloszlás esetén nem az átlag fokszámot tekintjük, hanem 1-1 pont aktuális fokszámát és nem átlagoljuk. A belső skála ilyen hiánya folytán nevezik a hatványfüggvény – eloszlású hálózatokat skálafüggetlen hálózatoknak.



37. ábra
Hatványfüggvény-eloszlás ábrázolása

A hatványfüggvény alapján kevés olyan pont lesz, amiből nagyon sok kapcsolat indul, és viszonylag sok kevés kapcsolattal rendelkező pont lesz. Így alakulnak ki a „HUB”-ok, más néven középpontok, melyek sok kapcsolatuk miatt uralják a rendszert.

Definíció: Egy G_n , ahol $n = \{1 \dots \infty\}$ gráfsorozatot, ritkának nevezünk, ha $\lim_{n \rightarrow \infty} P_k(n) = p_k$ teljesül egy adott p_k -ra, ahol $k = \{1 \dots \infty\}$ eloszlásra.

Definíció: Egy G_n véletlen gráfsorozatot, ahol $n = \{1 \dots \infty\}$, skálafüggetlennek nevezünk, ha ritka és ha $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log p_k}{\log \frac{1}{k}} = \lambda$ létezik.



38. ábra
Skálafüggetlen hálózat bemutató ábrázolása

Fenti definíciók a tanárok számára feltüntetett háttér információ.

Kérdéseim a tanulókhöz:

- Egy skálafüggetlen hálózatban (38. ábra) miért terjedhet el egy betegség, pl. az influenza?

Azért mert egy skálafüggetlen rendszerben jelen vannak a már említett „HUB”-ok, amelyekből nagyszámú él indul ki. Ezek közül biztosan van egy olyan él, amely egy olyan pontba vagy csomópontba fut, ami már megfertőződött. Ha azonban egy középpont megkapja a vírust, akkor abból szerteágazik az összes kapcsolatán keresztül, így veszélytelve akár más középpontokat is.

11. óra

Lovász László nagy gráfokra vonatkozó összefoglalásának egy bemutató részlete

Az irodalomjegyzékben szereplő [9] előadás, valamint a [16] bemutató alapján saját didaktikai gondolataimat megfogalmazva, önállóan készítettem el. Továbbá a témakörhöz szükséges ábrákat is saját magam készítettem.

Lovász László előadásaiban és vizsgálataiban felmerülnek a nagy gráfokkal (pl. az internet) kapcsolatban azok a kérdések, amelyeket kis gráfok esetén is vizsgálni szoktunk. A vizsgálat azonban arra is vonatkozik, hogy ha tekintjük speciálisan az internetet, akkor esetében is vajon hasonló jelentéssel bírnak-e a fogalmak.

Kérdéseim a tanulókhöz:

- Vizsgálhatjuk, hogy a csúcsok száma páros vagy páratlan?

Az internet esetén ez a kérdés értelmetlen, hiszen bármikor elromolhat egy router, tehát a pontok vagy csúcsok száma folyamatosan hol páros, hol páratlan.

- Azt vizsgálhatjuk, hogy milyen az átlagos fokszám, azaz milyen sűrű egy gráf?

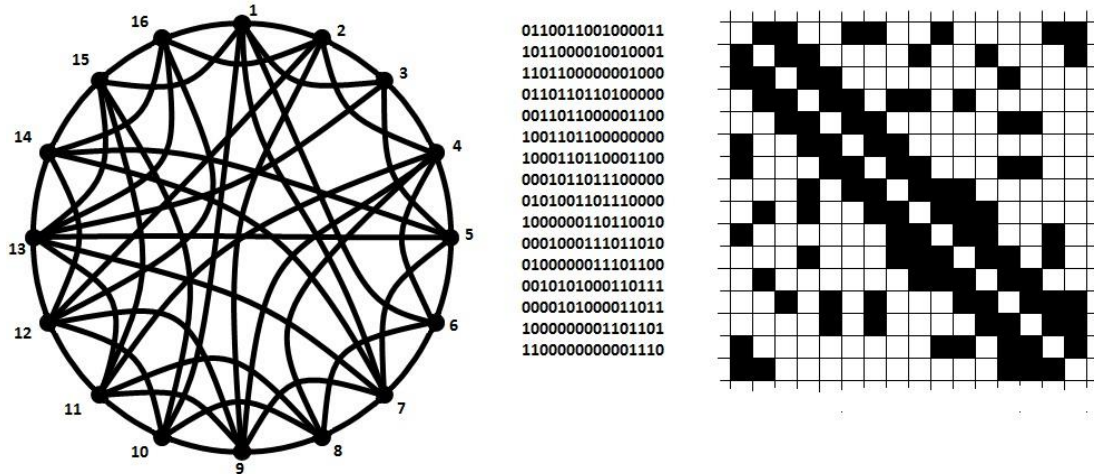
Természetesen vizsgálható és eloszlásuk valószínűségelméleti függvényekkel le is írható.

- Összefüggő?

Az összefüggő a nagyon nagy gráfok esetében már nem csak azt jelenti, hogy a gráf egy pontjából a másikba vezet út, hanem azt is, hogy bár kisebb komponensek leszakadhatnak belőle, ettől még összefüggő marad a gráfunk.

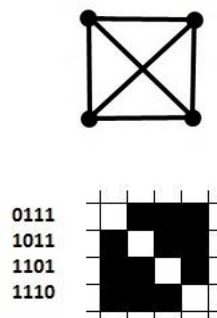
Tekintsük meg, hogyan ábrázolhatjuk a gráfokat, hogyan írhatók még fel. Vesszünk egy n csúcsú gráfot, jelen esetben egy 16 csúcsú gráfot. Ennek a 16 csúcsú gráfnak a pontjait beszámozzuk és megnézzük egyenként, hogy az első pontja mely pontokkal van összekötve. Látjuk, hogy az első pont az első ponttal nincs összekötve,

ezért a 0,1-el felírható táblázatunkban az első sor első eleme 0 számozást kap. Az első pont a második ponttal össze van kötve, tehát vezet él közöttük és így 1-es számozást kap, a sakktábla szerű ábrázolásnál pedig fekete négyzettel jelöljük. A gráf minden pontjára megnézzük, mit írhatunk fel ennek alapján.



39. ábra
Egy egyszerű gráf táblázatba írhatóságának bemutatása

Feladat: Írjuk fel a fentiek alapján a K_4 gráf mindkét táblázatát.

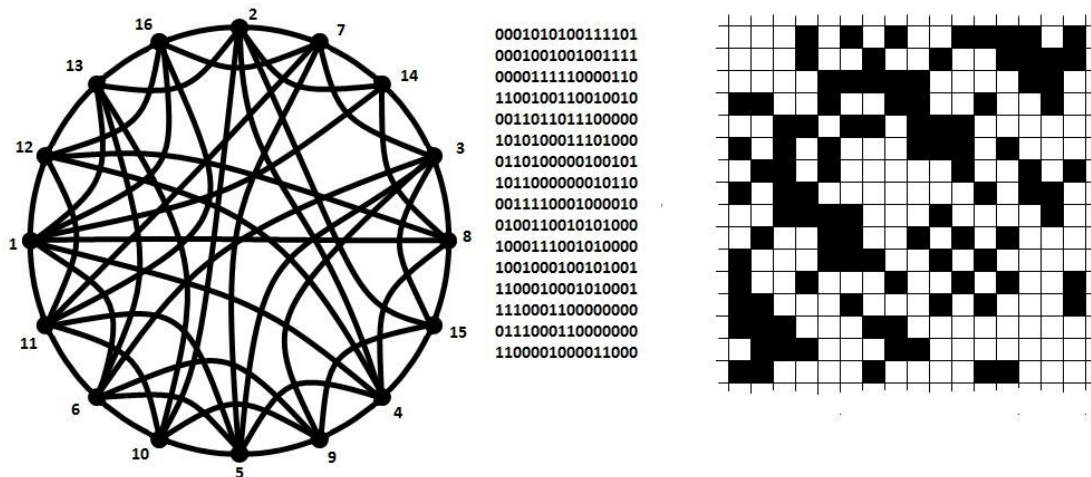


40. ábra
A K_4 táblázatban való ábrázolása

A Szemerédi reguláirtási lemma kimondja, hogy akármilyen hálózat, legyen az akár emberi tervezésű, akár véletlenszerűen létrejött, fel lehet darabolni részhalmazokra. Az információt az hordozza magában, hogy a feldarabolt részek milyen élsűrűségűek, azaz milyen a fokszám eloszlásuk. Azaz mennyire sok él indul ki egy pontból.

A lemma alapján a 39. ábrán látható gráfot átrendezzük, mégpedig a fokszámai sűrűségének megfelelően (41. ábra). A legnagyobb élsűrűségű (fokszámú) pont lesz az első pont, a második pont pedig az utána következő legnagyobb élsűrűségű pont.

Ezt addig folytatjuk, amíg a gráf minden pontját át nem rendeztük a lemma alapján.



41. ábra
Egy egyszerű gráf átrendezése a Szemerédi regulairtási lemma alapján

Ezeket a sűrűségeket lehet vizsgálni az analízis eszközeivel. Ha vizsgálunk egy pontot belőle, akkor egy pont olyan sötét amekkora az 1-max (x,y) függvénynek a maximuma. Tehát akármilyen nagy egy hálózat, az előbbi függvénnyel lehet közelíteni.

Kérdéseim a tanulókhöz:

- Mi okozhat ilyen eltérést a véletlen hálózatok fokszám eloszlása, azaz a haranggörbét követő és a skálafüggetlen hálózatok fokszám eloszlása, azaz a hatványgörbét mutató statisztika között?

A Pólya urna

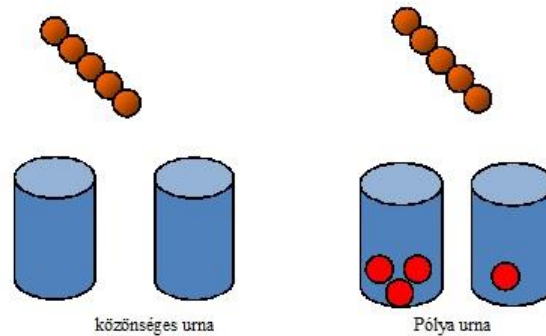
Az irodalomjegyzékben szereplő [9] előadás, a [14] kiadvány alapján és a [18] internetes hivatkozás alapján készítettem el. A témakörhöz szükséges ábrákat [16] Lovász László Nagyon nagy gráfok c. bemutató anyagában szereplő ábrákat használtam fel.

Pólya György 1923-ban egy valószínűségi modellt tervezett, amely önmagában is nagyon fontos. Tegyük fel, hogy van két urnánk. A Pólya – féle urna elrendezés dichotom¹ mintamodell. Ez egy olyan valószínűségi eljárás, amelyben golyókat dobálunk, két különböző urnába. Álljon most 100 golyó a rendelkezésünkre. Minden lépésben véletlenszerűen választva ki, hogy melyikbe dobjuk a következő golyót.

Minden golyó $\frac{1}{2}$ valószínűséggel esik valamelyik urnába. Ha elég sok golyót tekintünk,

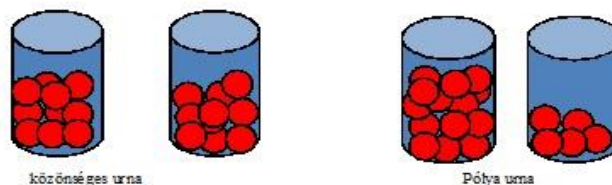
¹ dichotom változó: olyan változó, amely egy adott intervallumban (értelmezési tartományban ill. értékészletben) csak két értéket vehet fel

akkor nagy valószínűséggel egyforma mennyiségű golyó lesz mindkét urnában. Az általunk vett 100 golyó esetében általában nem lesz ugyanannyi, de a Nagy számok törvénye miatt, megközelítőleg hasonló mennyiségű golyó lesz mindkét közönséges urnában.



42. ábra
A közönséges és a Pólya urna ábrázolása

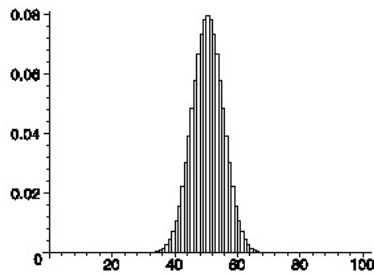
Tekintsük azonban most a Pólya féle urnát. A két üres urnába, megint csak 100 golyó mennyiséget figyelembe véve, az eljárást úgy indítjuk, hogy mindkét urnába 1-1 golyót helyezünk. Ebben az esetben azonban minden lépésben egy-egy urnába azzal, arányos valószínűséggel dobunk be egy golyót, hogy hány golyó van már benne. Az urnákban a golyók száma most 1. Ekkor egy újabb golyót dobunk az egyik urnába, mégpedig ugyanakkora valószínűséggel, mint korábban. Az egyik urnában most 2 golyó van, a másikban pedig 1. Három golyó van már tehát a helyén. Ekkor a negyedik golyót már kétszer akkora valószínűséggel dobjuk abba az urnába, amelyikben 2 golyó van, mint abba, amiben csak 1.



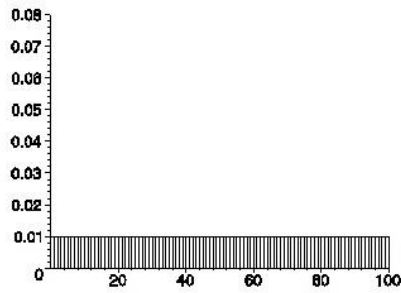
43. ábra
A közönséges és a Pólya urnába helyezett golyó eloszlásának ábrázolása

A két golyót tartalmazó urnába való esés valószínűsége $2/3$, a másiké $1/3$.
 Általában, ha az egyik urnában **a**, a másikban **b** golyó van, akkor a következő golyót $a/(a + b)$ valószínűséggel dobjuk a több golyót tartalmazó urnába, és $b/(a + b)$ valószínűséggel a kevesebb golyót tartalmazó edénybe.

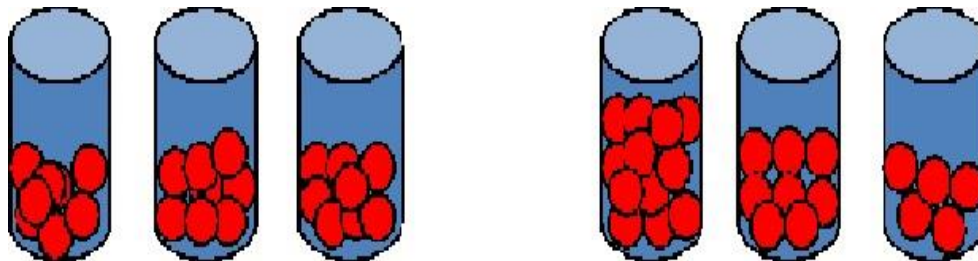
A golyók dobását az alábbi eloszlás függvények mutatják.



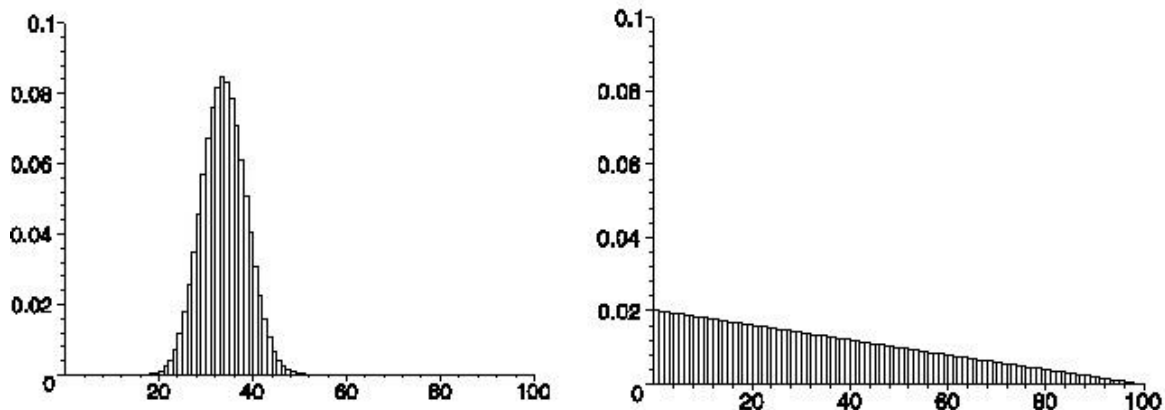
44. ábra
 A közönséges urna eloszlás függvénye



45. ábra
 A Pólya urna eloszlás függvénye



46. ábra
 A közönséges és a Pólya urna eloszlásának ábrázolása, 3-3 urna esetén



47. ábra

A közösséges és a Pólya urna eloszlás függvényei, 3-3 urna esetén

12. óra

A skálafüggetlen gráfok gyenge pontja

Az irodalomjegyzékben szereplő [8] könyv 123-138. oldal, a [13] dokumentumfilm, a [10] előadás, a [12] előadás, alapján megfogalmazva, önállóan készítettem el.

Valahány rendszer, amelynek nagy a hibatűrő képessége, rendelkezik egy közös tulajdonsággal, mégpedig azzal, hogy mindegyikük működését egy hálózat szavatolja. Egy hálózatnak meghibásodhatnak a csomópontjai egyéb pontjai, valamint a középpontjai a „HUB”-ok.

Ha egy hálózat „HUB”-ja hibásodik, akkor nem fokozatosan történik a széthullás, hanem ha kritikus számú „HUB” romlott el, akkor a rendszer rögtön apró részekre esik szét. Az internet a véletlen meghibásodásokkal szemben nagyfokú hibatűrést mutat, ám ha tudjuk, hol kell megfertőzni, elrontani, akkor nagyon hamar és hatékonyan megtámadható és a szétesése előidézhető. A jelenséget részekre hullásnak nevezzük.

Kérdéseim a tanulókhöz:

- Egy skálafüggetlen hálózatból a pontok véletlenszerű eltávolítása nem okoz bajt, de miért nem?

Azért mert kicsi az esély arra, hogy véletlenül pont a „HUB”-okat érje probléma, és annak pedig még kisebb az esélye, hogy véletlenszerűen kritikus számú „HUB”-ot iktassanak ki. A skálafüggetlenségnek van még egy tulajdonsága. A fentebb említett

kritikus küszöb eltűnik akkor, ha a fokszám kitevő kisebb, mint 3. A vizsgált hálózatok, mint pl. az internet fokszám kitevője kisebb, mint 3, így ezek a fajta hálózatok csak akkor esnek szét, ha az összes „HUB”-ját likvidálják. Ennek alapján tehát valószínűleg soha.

A 12. óra megmaradt idejét arra szánom, hogy az érdekesebb vagy nehezen érthető részeket a diákok kérésének megfelelően újra átvegyük. Továbbá ekkor van lehetőség a szakkörrel kapcsolatban felmerülő egyéb kérdések megválaszolásra is.

Összefoglalás

A nagy gráfok elméletének alapjai bemutatásával az volt a célom, hogy már középiskolában, akár egy szakkör keretében a nagy gráfokat megismerjék a tanulók. Tisztába legyenek az alapvető összefüggéseikkel és a hálózatok, gráfokkal történő azonosításával, azaz hogy a hálózatok a gráfokkal írhatók fel és velük modellezhetők. A szakkör végére a tanulók tisztában lesznek a nagy hálózatok alapjaival, továbbá vélelmezhetően felismerik, hogy az őket körülvevő világban mennyire sok minden hálózatalapú.

A szakkör alkalmával a szakkörre járók számtalan olyan információt kaphattak, amik jóval tovább mutatnak azon a szinten, amelyet pontosan megtanulhatnának és pontosan értelmezhetnének. Ám az alapokat megértették és a későbbi tanulmányaik során kapaszkodót nyújthatnak a már megismert témakörök és ismerősként tekinthetnek mind a gráfelmélet alapjaira, mind a hálózatokra. Úgy gondolom a komplex gondolkodásukat erősítettük. A gráfokkal való foglalkozás szakkör keretében azt mutatta meg, hogy a gráfelmélet alapjait, fokozatos ismeret elsajátítás mellett, építkezve a megtanult gráfelméleti témákra, ez egy érdekes, szép, de ugyanakkor mély téma. Ennek ellenére a szakkörön azon diákok is érhetnek el sikereket, akik egyéb okok miatt a hagyományos feladatokban, nem vagy csak kevésbé sikeresek. Az érdeklődés felkeltése volt a cél, nem pedig az elrettentés, így igyekeztem a szakkör foglalkozása alatt a még ismeretlen képleteket nem használni. Ahol mégis szükséges volt, ott igyekeztem megmagyarázni.

Egy szakkör keretében nagyobb a szabadság, tekintve hogy nem konkrét középiskolai tananyagról van szó, így mindenki azért van ott, mert kíváncsi ennek a szakkörnek az anyagára, azaz a gráfelmélet alapjaira és a nagy gráfokra egyaránt. A szakkörön vizsgált témakörök nem teljesen fedték le a nagy hálózatok vizsgálatát, azaz a hálózatelmélet mélysége miatt egzaktabb matematikai háttérrel nem ismertetem. A tanulók azonban a fontosabb modellekkel megismerkedhettek, a gondolatmenetet, ahogyan érdemes a nagy gráfokhoz és a hálózatokhoz hozzáállni megtanulhatták. Mindenki maga fogja tudni kamatoztatni a szakkörön megszerzett tudást, a végső cél az volt, hogy egy-egy tanuló kamatoztatni is akarja.

Irodalomjegyzék

Könyvek, jegyzetek, interneten elérhető weblapok:

- [1] Elekes György, Brunczel András: Véges matematika. ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2002
- [2] Andrásfai Béla: Gráfelmélet. JATE Bólyai Intézet POLYGON könyvsorozat, Szeged, 1997
- [3] Ambrus András: Bevezetés a matematika didaktikába egyetemi jegyzet ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2004
- [4] A. Kauffmann: Pontok, élek, ívek... gráfok. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1972
- [5] Szőnyi Tamás: Többszörös összefüggőség, véges matematika 2. jegyzet 2012-es példány
- [6] Lovász László, Pelikán József, Vesztergombi Katalin: Diszkrét matematika. Typotex kiadó, Budapest, 2010
- [7] Katona Gyula, Recski András, Szabó Csaba: A számítástudomány alapjai, Typotex kiadó, Budapest, 2006
- [8] Barabási Albert-László: Behálózva, Helikon Kiadó, Budapest, 2008
- [9] Lovász László: Mindentudás Egyeteme, előadás, Budapest, 2008
- [10] Barabási Albert-László: A hálózatok csodálatos világa előadás, amely „Az atomoktól a csillagokig” előadássorozat keretén belül került megrendezésre, Budapest
- [11] Nagy Gábor: Lokális tulajdonságok véletlen gráfokban, Szakdolgozat, Témavezető: Backhausz Ágnes, 2012
- [12] Barabási Albert – László, Mindentudás Egyeteme, előadás, Budapest, 2011
- [13] A hat lépés hatalma, dokumentumfilm 2008
- [14] Eötvös Lóránd Tudományegyetem: Az év krónikája, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2008
- [15] Gulyás András, Heszberger Zsolt: Véletlen hálózatok és hálózatmodellek, Kapcsolati háló és internetes közösségi rendszerek előadás
- [16] Lovász László: Nagyon nagy gráfok bemutató, internetes hivatkozás:
<http://www.infoera.hu>
- [17] Kovács Gyula: Hálózati elemzések az üzleti életben, bemutató előadás, internetes hivatkozás: <http://innovativbi.hu>
- [18] Matematika oktatási portál: Pólya György eredményei, internetes hivatkozás:
<http://matek.fazekas.hu>
- [19] Vasúti térképek, internetes hivatkozás: <http://www.vasutallomasok.hu>
- [20] Fa kép, internetes hivatkozás: <http://carpatys.com>
- [21] Erdős szám: internetes hivatkozás: <http://www.oakland.edu/enp/>
- [22] Binomiális eloszlás levezetése, internetes hivatkozás:
http://www.ngkszki.hu/~trembe/nev_eloszl/eloszl_poiss/binpoiss.htm
- [23] Lovász László előadás, internetes hivatkozás:

http://videotorium.hu/hu/recordings/details/2239,A_kiralyno_es_a_szolgaloleany

[24] Backhausz Ágnes Másoláson alapuló problémamegoldó szeminárium, Budapest, 2012

internetes hivatkozás: http://www.cs.elte.hu/~zempleni/ba_ea_2012.pdf

[25] <http://hu.wikipedia.org/wiki>

[26] <http://www.mozaweb.hu>