

Trigonometrikus összefüggések a Cayley-Klein-modellben

Matematika BSc
Szakdolgozat

Készítette: Csákberényi-Nagy Erzsébet
Matematika BSc, tanári szakirány

Témavezető: Dr. Verhóczki László, egyetemi docens
Matematikai Intézet, Geometriai Tanszék



Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
2013

Tartalomjegyzék

Tartalomjegyzék	2
Előszó	3
1. A hiperbolikus síkgeometria axiómái.....	4
1.1. Síkgeometriai alapfogalmak és illeszkedési tulajdonságok	5
1.2. A hiperbolikus síkgeometria axiómarendszere	6
1.3. A modellek szerepe	7
2. A Cayley-Klein-féle körmodell	8
2.1. A modell értelmezése	8
2.2. A hiperbolikus síkgeometria axiómarendszerének teljesülése a modellben	10
2.3. Az egybevágósági axióma modellbeli teljesülésének igazolása	11
2.4. Tengelyes tükrözések a modellben.....	18
2.5. Szögek a modellben.....	22
2.6. Háromszögek a modellben	25
3. Trigonometrikus összefüggések a modellben	28
3.1. Hiperbolikus függvények alapvető összefüggései.....	28
3.2. Kapcsolat a modellbeli és az euklideszi távolságok között.....	28
3.3. Trigonometrikus összefüggések igazolása a modellben.....	30
3.3.1. Trigonometrikus összefüggések derékszögű háromszögekben	30
3.3.2. Trigonometrikus összefüggések általános háromszögekben	33
3.4. Parallel szögek a modellben	37
3.5. A modellbeli kör kerületének meghatározása	38
3.6. A sokszögek szöghiányát leíró függvény és a terület kapcsolata.....	40
3.7. A modellbeli kör területének meghatározása	41
Irodalomjegyzék	42

Előszó

Szakedolgozatom célja a hiperbolikus síkgeometria Cayley–Klein-féle modelljének bemutatása és a legalapvetőbb trigonometriai tételeinek tárgyalása. Azért választottam ezt a témát, mert mindig is érdekelt, hogy vajon milyen új világot fedezett fel a XIX. század legkiválóbb magyar matematikusa, Bolyai János.

Mint ismeretes, Bolyai János 1832-ben, Nyikolaj Ivanovics Lobacsevszkij orosz matematikus pedig 1829-ben publikálta először elméletét, ami arra a kérdésre adott nemleges választ, hogy vajon az euklideszi geometria párhuzamossági axiómája levezethető-e a többi axiómából. A kor matematikusainak nagy része sokáig idegenkedett elfogadni, hogy a párhuzamossági axióma tagadására is fel lehet építeni egy geometriai elméletet, melyet aztán hiperbolikus geometriának neveztek el. Azonban az 1870-es évek elejére E. Beltrami, A. Cayley és F. Klein munkássága alapján az euklideszi geometriában sikerült egy modellt adni a hiperbolikus geometriára, melyet később Cayley–Klein-féle gömbmodellnek neveztek el. Számomra egyetemi tanulmányaim során vált világossá, hogy azért váratott magára több évtizeden át ezen modellnek a felfedezése, mert a megalkotásához projektív geometriai eszközöket is alkalmazni kell.

Szakedolgozatom első fejezetében ismertetem a hiperbolikus síkgeometria axiómáit. A második fejezetben térek rá a síkgeometria Cayley-Klein-féle körmodelljének bemutatására. Sor kerül annak igazolására, hogy ebben a modellben teljesülnek a hiperbolikus síkgeometria axiómái, azonban ehhez projektív geometriai tételeket is alkalmaznunk kell.

A harmadik fejezetben azt vizsgálom, hogy a modellbeli háromszögek oldalai és szögei között milyen összefüggések állnak fenn. Ehhez azt használom ki, hogy azon modellbeli szögek, melyek csúcsa a modellkör középpontja, az euklideszi síkon valódi méretükben látszanak. A Cayley-Klein-féle modellben többek között levezetésre kerül a szinusztétel, valamint az oldalakra és a szögekre vonatkozó koszinusztétel is. Ezen trigonometriai tételek esetében azt láthatjuk, hogy a modellbeli összefüggések a gömbi geometriában ismeretes tételekhez hasonló alakot öltenek azzal a különbséggel, hogy hiperbolikus függvények szerepelnek bennük a szögfüggvények helyett. A dolgozat végén a modellbeli kör területét leíró formulát is igazolom.

Ezúton is szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Verhóczy Lászlónak a szakedolgozatom megírása során nyújtott segítségével és a konzultációkért.

1. A hiperbolikus síkgeometria axiómái

Euklidesz i.e. 300 körül az *Elemek* című munkájában a korabeli geometria egy precíz összefoglalását adta meg. Euklidesz felismerte, hogy ehhez szükség van bizonyos „alapigazságokra”, úgynevezett axiómákra és alapfogalmakra. Alapfogalomnak nevezzük az elmélet olyan objektumait, amit nem kívánunk definiálni, viszont minden későbbi definícióban építeni szeretnénk rá. A síkgeometria alapfogalmai a pont, az egyenes és a sík. Axiómáknak a bizonyítás nélkül igaznak elfogadott egyszerű állításokat nevezzük. Bármely állítást vagy tételt logikai úton ezekre próbálunk visszavezetni. Euklidesz az axiómáit posztulátumoknak nevezte.

Az axiómák összessége alkotja az euklideszi geometria axiómarendszerét. Alapvető követelmény egy axiómarendszerrel szemben, hogy ne legyen ellentmondásos, azaz ne lehessen egy állítást és annak tagadását is az axiómákból levezetni. Ezen kívül fontos még a függetlenség kérdése. Egy axiómarendszer kidolgozásánál törekedni szoktak arra, hogy az axiómák függetlenek legyenek egymástól, azaz egyik axióma se legyen levezethető a többi axiómából. Ha valamely axióma nem volna független, azaz le lehetne vezetni a többi axióma felhasználásával, akkor az az úgynevezett axióma felesleges lenne.

Euklidesz öt darab posztulátumot fogalmazott meg. Az ötödik posztulátuma a párhuzamos egyenesekre vonatkozott:

„Ha egy egyenes másik kettőt úgy metsz, hogy a metsző egyenes ugyanazon oldalán belül keletkező két szög összege a derékszög kétszeresénél kisebb, akkor a két egyenes határtalanul meghosszabbítva azon az oldalon találkozik, amelyik oldalon az a két szög van, amelyeknek összege két derékszögnél kisebb.”

Ezen posztulátum alapigazságként való kezelését már Euklidesz kortársai is megkérdőjelezték. Túlzásnak tartottak egy ilyen erős állítást axiómának tekinteni. Felmerült a kérdés, hogy nem függ-e a többi axiómától. A függetlenség kérdésének bizonyítása érdekében neves matematikusok évszázadokon keresztül próbálkoztak a párhuzamossági axióma igazolásával. Abban reménykedtek, hogy az első négy posztulátum alapján levezethető a párhuzamos egyenesekre vonatkozó posztulátum.

Egészen a XIX. század elejéig eldöntetlen kérdés volt a párhuzamossági axióma függetlensége. Ekkor Bolyai János magyar és Nyikolaj Ivanovics Lobacsevszkij orosz matematikusok a párhuzamossági axióma tagadásán alapuló elméletet dolgoztak ki egymástól függetlenül. Lobacsevszkij, a kazanyi egyetem professzora 1829-ben publikálta először

elméletét. Bolyai János eredményei édesapja, Bolyai Farkas *Tentamen* című latin nyelvű tankönyvének a függelékeként, latinul appendixeként jelent meg 1832-ben. Ezért ma is *Appendixként* emlegetik.

Mindketten a párhuzamossági axióma helyett annak tagadását vették az axiómák közé és ezzel ellentmondásmentes elmélethez jutottak. Ebből pedig már következik, hogy a párhuzamossági axióma nem következik a maradék axiómákból, valamint az is, hogy az euklideszi geometrián kívül más geometriai elmélet is kidolgozható. A párhuzamossági axióma tagadásán alapuló geometriát *hiperbolikus geometriának* nevezzük.

D. Hilbert, német matematikus 1899-ben az euklideszi geometria első olyan axiómarendszerét adta meg, amely teljes mértékben megfelel a mai tudományos igényeknek. Axiómáit tartalmuk alapján öt csoportba lehet sorolni: illeszkedési, rendezési, egybevágósági, folytonossági és párhuzamossági axiómák.

G. D. Birkhoff, amerikai matematikus 1930-ban javasolt egy nagyon erős axiómát, amely egy távolságfüggvény létezésén alapult. Ez az úgynevezett vonalzó axióma a Hilbert-féle axiómák közül többet is helyettesít: a folytonossági axiómákat, valamint a rendezési és az egybevágósági axiómák egy részét.

A hiperbolikus síkgeometria axiómarendszerét fel lehet építeni a Hilbert-féle axiómarendszer bizonyos állításait, a Birkhoff-féle axiómát és a párhuzamossági axióma tagadását véve alapul. A szakdolgozatomban ezt az utat követjük.

1.1. Síkgeometriai alapfogalmak és illeszkedési tulajdonságok

Legyen adott egy Y halmaz, amelyet nevezünk síknak. Az Y elemeit nevezünk pontoknak és jelöljük latin nagybetűkkel őket. Az Y részhalmazait alakzatoknak mondjuk, melyek közül bizonyos kitüntetett alakzatokat egyeneseknek nevezünk. Jelölésükre latin kisbetűket használunk. Az egyenesek összességének halmazát jelölje ε .

Azt mondjuk, hogy az A pont illeszkedik az e egyeneshez, más szóval az A pont rajta van az e egyenesen, ha A eleme e -nek.

Amennyiben C és D különböző pontok, jelölje $\langle C; D \rangle$ azt az egyenest, amelyhez C és D is illeszkedik. Ha f és g egyeneseknek van közös pontja, akkor a két egyenest metszőnek nevezük, a közös pontjukat pedig metszéspontnak hívjuk.

Kollineárisnak nevezünk három pontot, ha egy egyenesre illeszkednek.

Ezen fogalmak bevezetése után megismerkedhetünk a hiperbolikus geometria axiómáival.

1.2. A hiperbolikus síkgeometria axiómarendszere

Az első két axióma a Hilbert-féle illeszkedési axiómák közül a síkra vonatkozóak:

- I. Létezik a síkban három olyan pont, amelyek nem kollineárisak.
- II. Bármely két ponthoz egy és csakis egy egyenes illeszkedik.

A harmadik axiómát a Birkhoff-féle vonalzó axiómának nevezzük. A szakásoknak megfelelően jelölje \mathbb{R} a valós számok halmazát.

- III. Adva van egy olyan $d : Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ valós függvény, amelyre teljesül a következő feltétel: Tetszőleges g egyeneshez létezik olyan $\xi : g \rightarrow \mathbb{R}$ bijekció, hogy bármely g -re illeszkedő A, B pontokra teljesül:

$$|\xi(A) - \xi(B)| = d(A; B).$$

Tetszőleges A és B pontok esetén a $d(A; B)$ nemnegatív számot a két pont távolságának mondjuk.

A vonalzó axióma felhasználásával definiálhatjuk a „közte levés” fogalmát, majd az első három axióma segítségével precíz meghatározását tudjuk adni a szakasz, a félegyenes, a félsík, a zászló és az egybevágósági transzformáció fogalmának.

Definíció: Legyen adva három különböző pont: A, B és C . Ekkor azt mondjuk, hogy a B pont az A és C pontok között van, ha a három pont kollineáris és fennáll a $d(A; B) + d(B; C) = d(A; C)$ összefüggés. Ekkor azt is mondhatjuk, hogy a B pont elválasztja egymástól az A és C pontokat.

Definíció: Legyen adva két különböző pont: A és B . Az A és B végpontokkal meghatározott \overline{AB} szakaszon azt az alakzatot értjük, amelyet az A és B pontok, valamint a köztük fekvő pontok alkotnak. A $d(A; B)$ számot az \overline{AB} szakasz hosszának mondjuk és erre az AB jelölést is alkalmazzuk.

Definíció: Legyen adva három nem kollineáris pont: A, B és C . Ekkor $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}$ szakaszok uniójaként nyert alakzatot az A, B és C csúcspontok által meghatározott háromszögnek, illetve háromszögvonálnak nevezzük. Az egyes szakaszok a háromszög oldalai.

Definíció: Legyen adva két különböző pont: A és B . Ekkor az A kezdőpontú és a B pontot tartalmazó $[A; B>$ félegyenesen azt az alakzatot értjük, amelyet az $\langle A; B \rangle$ egyenes azon pontjai alkotnak, amelyeket A pont nem választ el a B ponttól.

Definíció: Legyen adva egy e egyenes és arra nem illeszkedő két különböző pont: A és B . Azt mondjuk, hogy az e egyenes elválasztja egymástól a két pontot, ha e egy belső pontjában metszi az \overline{AB} szakaszt.

Az általunk leírt axiómarendszer negyedik axiómája, az úgynevezett Pasch-féle rendezési axióma:

IV. Ha adott egy háromszög és egy egyenes, amely nem megy át a háromszög egyik csúcspontján sem és metszi a háromszög egyik oldalát, akkor az egyenes metszi a háromszög még egy oldalát.

Definíció: Legyen adva egy e egyenes és egy arra nem illeszkedő A pont. Az e egyenessel határolt és az A pontot tartalmazó félsíkon azon pontok halmazát értjük, amelyeket az e egyenes nem választ el az A ponttól. Jelöljük ezt félsíkot $[e; A>$ -val.

Definíció: Egy félegyenesből és egy félsíkból álló alakzatpárt zászlónak nevezünk, amennyiben a félegyenes tartalmazza a félsík határegyenesét.

Definíció: Egybevágósági transzformáción (egybevágóságon) az olyan $\varphi: Y \rightarrow Y$ bijektív leképezést értjük, amelynél tetszőleges $A, B \in Y$ pontokra fennáll a $d(A; B) = d(\varphi(A); \varphi(B))$ összefüggés és egyenest egyenesbe képez.

Az ötödik axióma, az úgynevezett egybevágósági axióma:

V. Ha adva van két tetszőleges síkbeli zászló, akkor egyértelműen létezik egy olyan egybevágósági transzformáció, amely az első zászlót a másikba viszi.

A hatodik axióma a hiperbolikus síkgeometriában érvényes párhuzamossági axióma:

VI. Ha adott egy g egyenes és egy arra nem illeszkedő P pont, akkor legalább két olyan egyenes van, amely áthalad a P ponton és nem metszi g egyenest.

Azt a matematikai elméletet, ami a fent felsorolt axiómákon alapul *hiperbolikus síkgeometriának* vagy *Bolyai-Lobacsevszkij-féle síkgeometriának* nevezzük.

1.3. A modellek szerepe

Egy matematikai elmélet axiómarendszerében szereplő állítások az elmélet alapfogalmaira vonatkozó összefüggéseket írják le. Ha megadunk konkrét fogalmakat és a köz-

tük lévő kapcsolatokat, amelyekre érvényesek az axiómarendszer állításai, akkor az axiómarendszer egyik modelljét adjuk meg. Egy elméletnek természetesen több modellje is lehet.

A hiperbolikus síkgeometriának is több modelljét meg lehet konstruálni az euklideszi síkgeometriában. Közülük a legismertebbek közé tartozik a Cayley-Klein-féle körmodell és a Poincaré-féle körmodell.

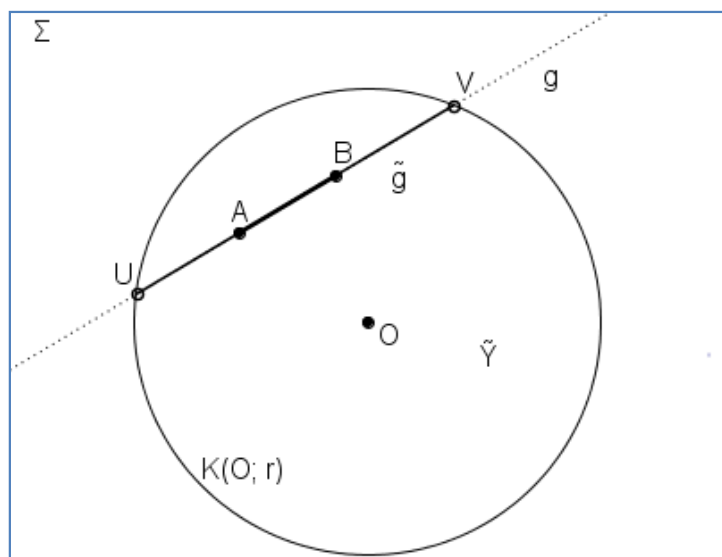
Szakedolgozatom témája a Cayley-Klein-féle körmodell általános bemutatása, valamint benne a trigonometrikus összefüggések levezetése.

2. A Cayley-Klein-féle körmodell

2.1. A modell értelmezése

A Cayley-Klein-féle körmodell megkonstruálásához vegyünk az euklideszi térben egy Σ síkot és azon tekintsünk egy O középpontú, r sugarú körvonalat. Jelöljük ezt $K(O; r)$ -rel. A modellbeli sík legyen az $\tilde{Y} = \{P \in \Sigma \mid d(O; P) < r\}$ halmaz, vagyis egy nyílt körlemez, melyet a $K(O; r)$ körvonal határol.

A modellbeli egyenesek legyenek a kör húrjai. A húr végpontjai természetesen nem tartoznak az egyeneshez, hiszen a körvonal nem tartozik a modellhez. Ha g az euklideszi síkon egy tetszőleges egyenes, akkor az általa meghatározott modellbeli egyenest jelöljük \tilde{g} -mal, amelyre teljesül, hogy $\tilde{g} = g \cap \tilde{Y}$. Ha g egyenes nem metszi a $K(O; r)$ körvonalat az euklideszi síkon, akkor nem határoz meg modellbeli egyenest.



1. ábra. A Cayley-Klein-féle körmodell

A következőkben megadjuk a modellbeli távolságfüggvényt. Legyen k egy rögzített pozitív valós szám.

Legyenek A és B a modell két különböző pontja. Távolságuk értelmezéséhez tekintünk a $g = \langle A; B \rangle$ egyenest az euklideszi síkon. A $K(O; r)$ körvonal és a g egyenes metszéspontja legyen U és V az euklideszi síkon. Ekkor a \tilde{d} távolságfüggvény értéke az $(A; B)$ pontpárra vonatkozóan legyen:

$$\tilde{d}(A; B) = \frac{k}{2} \cdot |\ln(UVAB)|;$$

ahol k az előre rögzített szám; $(UVAB)$ a kollineáris pontnégyes kettősviszonyát; \ln pedig a természetes alapú logaritmusfüggvényt jelöli. A \tilde{d} távolságfüggvény értéke bármely $(A; A)$ pontpáron legyen $\tilde{d}(A; A) = 0$.

Az így módon definiált távolságfüggvénynek van értelme a modell bármely két pontjára alkalmazva. Az A és B pontok minden esetben U és V pontok között fekszenek, így az $(UVAB) = \frac{(UVA)}{(UVB)} = \frac{UA}{AV} : \frac{UB}{BV}$ kettősviszony értéke egy pozitív valós szám, aminek vehetjük a természetes alapú logaritmusát. (A kifejezésben UA az \overline{UA} szakasz hosszát jelöli.)

A \tilde{d} távolságfüggvény értéke független attól, hogy a körvonal és az egyenes metszéspontjai közül melyiket választottuk U -nak és V -nek. A kettősviszonyról tudjuk, hogy fennáll rá a következő összefüggés:

$$(UVAB) = \frac{1}{(VUAB)}.$$

Vegyük mindkét oldal logaritmusát, majd abszolút értékét. Így módon adódik, hogy:

$$|\ln(UVAB)| = \left| \ln \frac{1}{(VUAB)} \right| = |\ln(VUAB)^{-1}| = |-\ln(VUAB)| = |\ln(VUAB)|.$$

A \tilde{d} távolságfüggvény szimmetriájának igazolása hasonló módon történik. Kettősviszonyról a következő összefüggést kell ismerni hozzá:

$$(UVAB) = \frac{1}{(UVBA)}.$$

Mindkét oldal logaritmusát, majd abszolút értékét véve azt kapjuk, hogy:

$$|\ln(UVAB)| = \left| \ln \frac{1}{(UVBA)} \right| = |\ln(UVBA)^{-1}| = |-\ln(UVBA)| = |\ln(UVBA)|.$$

Így módon teljesül a $\tilde{d}(A; B) = \tilde{d}(B; A)$ összefüggés.

2.2. A hiperbolikus síkgeometria axiómarendszerének teljesülése a modellben

Az előbb definiált rendszert akkor tekinthetjük a hiperbolikus síkgeometria egy modelljének, ha a benne meghatározott fogalmakra és a köztük előforduló kapcsolatokra teljesülnek a hiperbolikus síkgeometria axiómarendszerének axiómái.

Az általunk megadott I. és II. axiómák nyilvánvalóan teljesülnek a modellben.

A III. axióma igazolásához bármely egyeneshez kell találni egy olyan ξ bijektív függvényt, amely teljesíti a Birkhoff-féle vonalzó axióma feltételét. Ehhez vegyünk egy tetszőleges g egyenest a Σ euklideszi síkon, amely két pontban metszi a $K(O; r)$ körvonalat. A két metszéspontot jelöljük U -val és V -vel. A g egyenes által meghatározott modellbeli egyenest jelöljük \tilde{g} -mal, amelyre igaz, hogy $\tilde{g} = g \cap \tilde{Y}$. Legyen a $\xi : \tilde{g} \rightarrow \mathbb{R}$ leképezés az a függvény, amely bármely $P \in \tilde{g}$ pont esetén a $\xi(P) = \frac{k}{2} \cdot \ln(UVP)$ értéket veszi fel.

Ha a P pont befutja a \tilde{g} modellbeli egyenes pontjait, akkor az $(UVP) = \frac{UP}{PV}$ osztóviszony befutja a pozitív valós számok halmazát. Tetszőleges $t \in (0; \infty)$ valós szám esetén egyértelműen találunk a \tilde{g} egyenesen egy olyan Q pontot, melyre teljesül, hogy $(UVQ) = t$. Mivel a természetes alapú logaritmusfüggvény a $(0; \infty)$ intervallumon szigorúan monoton növekvő, ezért a ξ függvény bijektív.

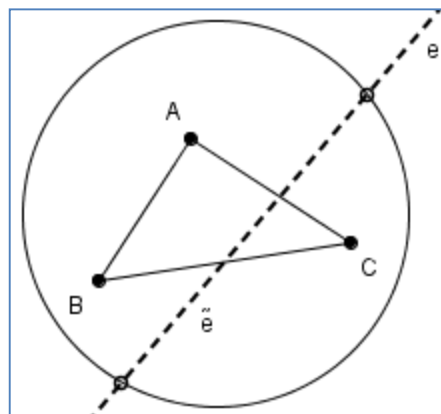
Vegyünk a \tilde{g} egyenesen két pontot. Ezek legyenek A és B . Teljesül rájuk az alábbi összefüggés:

$$|\xi(A) - \xi(B)| = \left| \frac{k}{2} \cdot \ln(UVA) - \frac{k}{2} \cdot \ln(UVB) \right| = \frac{k}{2} \cdot \left| \ln \frac{(UVA)}{(UVB)} \right| = \frac{k}{2} \cdot |\ln(UVAB)|;$$

$$|\xi(A) - \xi(B)| = \tilde{d}(A; B).$$

Ezek alapján a modellben igaz a vonalzó axióma.

A IV. axióma igazolásának alapja az, hogy minden modellbeli szakasz az euklideszi síkon is az, hiszen egy C pont pontosan akkor van A és B pontok között a modellben, ha C euklideszi értelemben is az A és B pontok között fekszik. Ebből következik, hogy a modellbeli háromszögek az euklideszi síkon is háromszögek. Tehát adódik, hogy a modellben teljesül a Pasch-féle rendezési axióma is.



2. ábra. Pasch-féle axióma teljesülése

2.3. Az egybevágósági axióma modellbeli teljesülésének igazolása

Az egybevágósági axióma igazolásához szükséges a Σ euklideszi sík ideális elemekkel történő kibővítése. Az így keletkező projektív síkot jelölje $\bar{\Sigma}$. Az ideális pontok értelmezése és a projektív síkra vonatkozó alapfogalmak a Hajós György által írt [3] tankönyv 44. pontjában részletesen ki vannak fejtve.

Az egybevágósági axióma igazolásához olyan egybevágósági transzformációt kell találni a modellben, amely egy tetszőleges zászlóhoz egy másik, előre adott zászlót rendel hozzá. Ilyen transzformációt a projektív transzformációk, más néven a kollineációk segítségével lehet konstruálni.

Definíció: A $\bar{\Sigma}$ projektív sík kollineációján egy olyan $\kappa : \bar{\Sigma} \rightarrow \bar{\Sigma}$ bijektív leképezést értünk, amely egyenest egyenesbe képez, azaz egyenestartó.

Az axióma teljesülésének megvizsgálása előtt szükséges a kollineációval kapcsolatos néhány fogalom és tétel tárgyalása.

Tegyük fel, hogy rögzítve van a $\bar{\Sigma}$ projektív sík egy homogén koordinátázása. Mint ismeretes ilyen koordinátázáshoz jutunk, ha vesszük a Σ sík egy derékszögű koordináta-rendszerét és a $\bar{\Sigma}$ projektív sík úgynevezett analitikus modelljét. A $\bar{\Sigma}$ projektív sík pontjaihoz rendelt meghatározó vektorok és a homogén koordináták értelmezése megtalálható a Hajós György által írt [3] tankönyv 44.3. pontjában.

Ekkor a meghatározó vektorok alapján bármely $P \in \bar{\Sigma}$ pontnak megfelel az euklideszi tér \mathcal{V} szabad vektorainak teréből egy egydimenziós altér. Ha \underline{x} egy meghatározó vektora a P pontnak, akkor a pontnak az $\mathbb{R}\underline{x} = \{\lambda \cdot \underline{x} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ egydimenziós altér felel meg.

Definíció: Tekintsünk a \mathcal{V} vektortéren egy $\xi: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ lineáris izomorfizmust. A ξ lineáris izomorfizmus által indukált $\bar{\Sigma}$ -beli kollineáción azt a $\kappa: \bar{\Sigma} \rightarrow \bar{\Sigma}$ leképezést értjük, amely tetszőleges $\underline{x} \in \mathcal{V}$ ($\underline{x} \neq \underline{0}$) vektor esetén az \underline{x} által meghatározott pontot a $\xi(\underline{x})$ által meghatározott pontba képezi.

Az alábbi fontos tételt bizonyítás nélkül mondjuk ki.

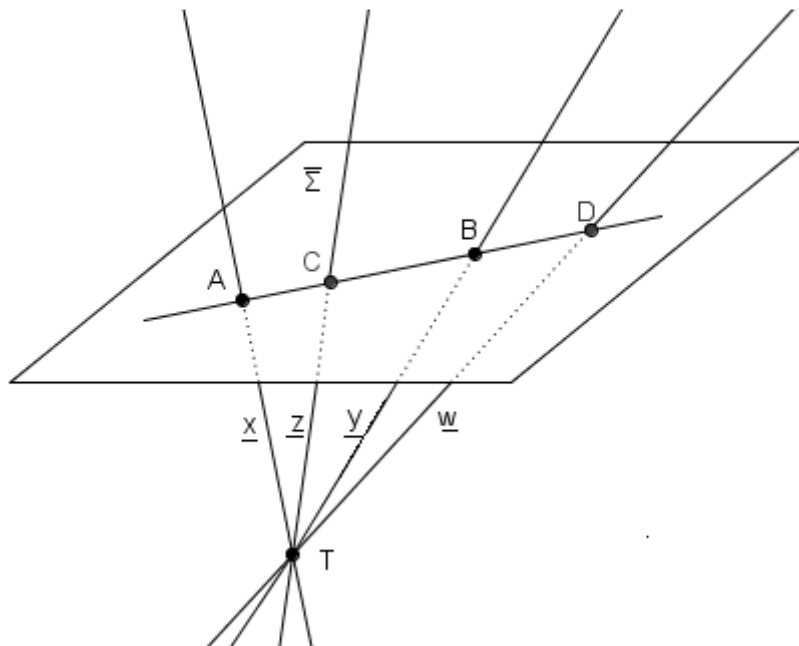
Tétel: A projektív geometria alaptétele

A $\bar{\Sigma}$ projektív sík tetszőleges $\kappa: \bar{\Sigma} \rightarrow \bar{\Sigma}$ kollineációjához létezik olyan $\xi: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ lineáris izomorfizmus, amely éppen a κ kollineációt indukálja.

Tétel: A $\bar{\Sigma}$ projektív sík tetszőleges κ kollineációja kettősviszonytartó.

Bizonyítás:

A projektív geometria alaptétele alapján létezik olyan $\xi: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ lineáris izomorfizmus, amely κ -t indukálja. Legyen A, B, C és D a $\bar{\Sigma}$ projektív sík négy különböző, kollineáris pontja. Ezen pontok meghatározó vektorait jelöljük rendre $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}$ és \underline{w} vektorokkal. Ekkor a C és D pontokat meghatározó vektorokat felírhatjuk \underline{x} és \underline{y} lineáris kombinációjaként, azaz $\underline{z} = \lambda_1 \cdot \underline{x} + \mu_1 \cdot \underline{y}$ és $\underline{w} = \lambda_2 \cdot \underline{x} + \mu_2 \cdot \underline{y}$ teljesül, valamely λ_1, μ_1 és λ_2, μ_2 együtthatókkal. Mint ismeretes, ekkor az $(ABCD)$ kettősviszonyra teljesül az $(ABCD) = \frac{\mu_1}{\lambda_1} : \frac{\mu_2}{\lambda_2}$ összefüggés.



3. ábra.

A κ leképezés az A, B, C és D pontokat képezze az A', B', C' és D' pontokba. Ezen pontok meghatározó vektorai:

$$\underline{x}' = \xi(\underline{x});$$

$$\underline{y}' = \xi(\underline{y});$$

$$\underline{z}' = \xi(\underline{z}) = \xi(\lambda_1 \cdot \underline{x} + \mu_1 \cdot \underline{y}) = \lambda_1 \cdot \underline{x}' + \mu_1 \cdot \underline{y}';$$

$$\underline{w}' = \xi(\underline{w}) = \xi(\lambda_2 \cdot \underline{x} + \mu_2 \cdot \underline{y}) = \lambda_2 \cdot \underline{x}' + \mu_2 \cdot \underline{y}'.$$

Mindezek alapján a képpontok kettősviszonyára adódik, hogy

$$(A'B'C'D') = \frac{\mu_1}{\lambda_1} : \frac{\mu_2}{\lambda_2} = (ABCD).$$

A kollineációkra vonatkozóan igaz az alábbi tétel is.

Tétel: *A $\bar{\Sigma}$ projektív síkon legyen adva az A_1, A_2, A_3, A_4 és B_1, B_2, B_3, B_4 általános helyzetű pontnégyesek. Ez azt jelenti, hogy a pontnégyesek pontjai közül semelyik három nem kollineáris. Ekkor egyértelműen létezik olyan $\kappa : \bar{\Sigma} \rightarrow \bar{\Sigma}$ kollineáció, amelyre teljesül, hogy $\kappa(A_i) = B_i$ bármely $i = 1, 2, 3, 4$ esetén.*

Bizonyítás:

Az A_i pontoknak feleljen meg az A_i egydimenziós altér \mathcal{V} -ben. Az A_1, A_2 és A_3 alterek generálják az egész \mathcal{V} vektorteret. Ily módon egy rögzített A_4 -beli $\underline{a}_4 \neq 0$ vektort egyértelműen fel lehet írni az $\underline{a}_4 = \underline{a}_1 + \underline{a}_2 + \underline{a}_3$ alakban, ahol $\underline{a}_1 \in A_1, \underline{a}_2 \in A_2$ és $\underline{a}_3 \in A_3$.

A B_i pontnak feleljen meg a B_i egydimenziós altér \mathcal{V} -ben ($i = 1, 2, 3, 4$). Egyértelműen léteznek olyan $\underline{b}_1 \in B_1, \underline{b}_2 \in B_2$ és $\underline{b}_3 \in B_3$ vektorok, hogy egy rögzített B_4 -beli $\underline{b}_4 \neq 0$ vektorra teljesüljön, hogy $\underline{b}_4 = \underline{b}_1 + \underline{b}_2 + \underline{b}_3$.

Vegyük azt a $\xi: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ lineáris izomorfizmust, melyre teljesül hogy $\xi(\underline{a}_1) = \underline{b}_1; \xi(\underline{a}_2) = \underline{b}_2$ és $\xi(\underline{a}_3) = \underline{b}_3$. Ekkor egy tetszőleges $w = w_1 \cdot \underline{a}_1 + w_2 \cdot \underline{a}_2 + w_3 \cdot \underline{a}_3$ vektor képét a $\xi(w) = \xi(w_1 \cdot \underline{a}_1 + w_2 \cdot \underline{a}_2 + w_3 \cdot \underline{a}_3) = w_1 \cdot \underline{b}_1 + w_2 \cdot \underline{b}_2 + w_3 \cdot \underline{b}_3$ összefüggés adja meg. Ez alapján természetesen a $\xi(\underline{a}_4) = \underline{b}_4$ összefüggés is teljesül. Ily módon teljesül, hogy $\xi(\underline{a}_i) = \underline{b}_i$. Tekintsük a ξ által indukált κ kollineációt. Mivel fennáll, hogy $\xi(A_i) = B_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$), így a $\kappa : \bar{\Sigma} \rightarrow \bar{\Sigma}$ kollineációra teljesül, hogy $\kappa(A_i) = B_i$.

Ez után azt kell még megvizsgálni, hogy κ kollineáció egyértelműen meghatározott-e. Ehhez vegyünk egy $\bar{\kappa} : \bar{\Sigma} \rightarrow \bar{\Sigma}$ kollineációt, amelyre szintén fennáll, hogy

$\bar{\kappa}(A_i) = B_i$ ($i = 1,2,3,4$). Ennek feleljen meg a $\bar{\xi}: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ lineáris izomorfizmus. Emiatt erre is teljesül, hogy $\bar{\xi}(A_i) = B_i$.

Tekintsük az $\eta = \xi^{-1} \circ \bar{\xi}$ lineáris izomorfizmust. Világos, hogy erre igaz, hogy $\eta(A_i) = A_i$ ($i = 1,2,3,4$). Eszerint az \underline{a}_1 , \underline{a}_2 , \underline{a}_3 és \underline{a}_4 vektorok az η leképezés sajátvektorai. Legyenek a hozzájuk tartozó sajátértékek rendre c_1, c_2, c_3 és c_4 . Tehát ezekkel teljesül, hogy $\eta(\underline{a}_i) = c_i \cdot \underline{a}_i$. Ily módon fennáll az alábbi két egyenlet:

$$\begin{aligned}\eta(\underline{a}_4) &= c_4 \cdot \underline{a}_4 = c_4 \cdot (\underline{a}_1 + \underline{a}_2 + \underline{a}_3); \\ \eta(\underline{a}_4) &= \eta(\underline{a}_1 + \underline{a}_2 + \underline{a}_3) = c_1 \cdot \underline{a}_1 + c_2 \cdot \underline{a}_2 + c_3 \cdot \underline{a}_3.\end{aligned}$$

Vonjuk ki a második egyenletet az elsőből. Azt kapjuk, hogy igaz

$$\underline{0} = (c_4 - c_1) \cdot \underline{a}_1 + (c_4 - c_2) \cdot \underline{a}_2 + (c_4 - c_3) \cdot \underline{a}_3.$$

Mivel a \underline{a}_1 , \underline{a}_2 és \underline{a}_3 vektorok lineárisan függetlenek, így az előbbi egyenlet csak akkor teljesülhet, ha $c_4 = c_1$, $c_4 = c_2$ és $c_4 = c_3$ egyenlőségek teljesülnek. Eszerint létezik olyan $c \in \mathbb{R}$ ($c \neq 0$) szám, hogy $\eta = c \cdot id_{\mathcal{V}}$ teljesül, ahol $id_{\mathcal{V}}$ az identikus leképezés \mathcal{V} -n.

Ily módon az η által indukált kollineáció éppen a $\bar{\Sigma}$ projektív sík identikus leképezése. Tehát fennáll, hogy $\kappa^{-1} \circ \bar{\kappa} = id_{\bar{\Sigma}}$, vagyis $\bar{\kappa} = \kappa$ teljesül.

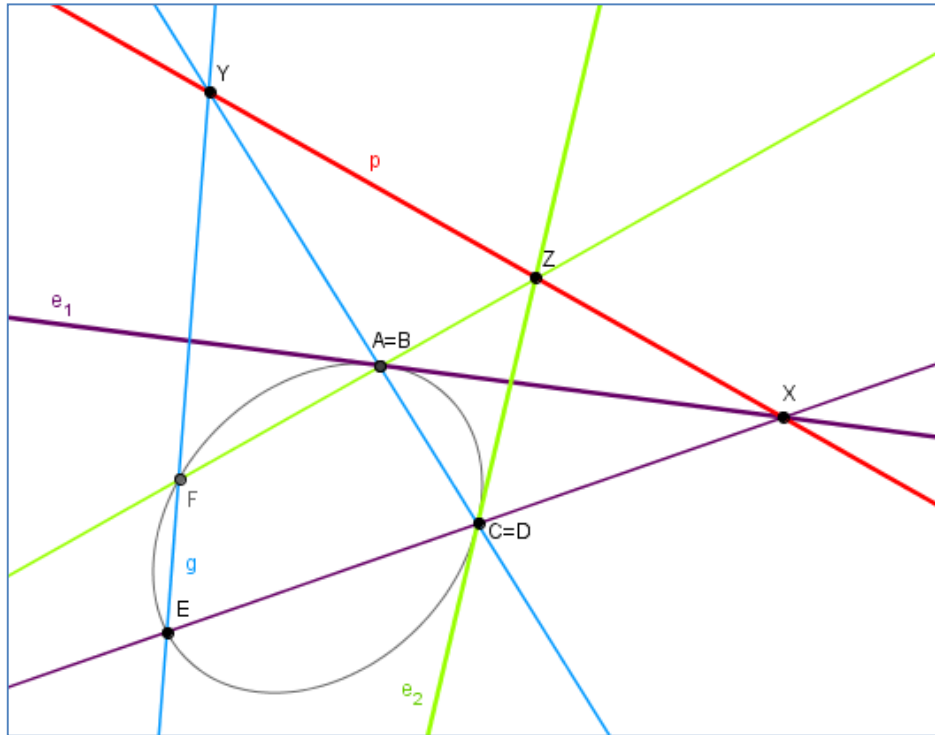
Az egybevágósági axióma teljesülését az alábbi tétel felhasználásával fogjuk igazolni.

Tétel: *Egy kúpszeletet három pontja és közülük kettőben az érintő már egyértelműen meghatározzák.*

Bizonyítás:

Ez a tétel a Pascal-tétel következménye. A Pascal-tétel szerint, a projektív síkon bármely közösleges kúpszeletbe írt hatszög átellenes oldalegyeneseinek metszéspontjai kollineárisak.

A bizonyítandó tételben szereplő adatokat tekinthetjük úgy, hogy az a két pont, amelyekben az érintő is adott, két-két pontnak (más szóval dupla pontnak) felelnek meg és ezek összekötő egyenese éppen az érintő. Jelölje e_1 és e_2 az adott érintőket és legyen az e_1 érintő érintési pontja $A=B$, az e_2 érintő érintési pontja pedig $C=D$. Ha egy kúpszelet görbéjén egy ponttal közelítünk a másikhoz, akkor a pontok által meghatározott szelők sorozata érintőhöz tart. Ezen megállapodások alapján három pontból és közülük kettőben az érintőből a kúpszelet további pontjai a következő módon szerkeszthetők meg:



4. ábra. Kúpszeletet meghatározza három pontja és két érintője

Jelölje az adott harmadik pontot E . Vegyünk fel ezen a ponton keresztül egy tetszőleges g egyenest. A g egyenes kúpszelettel való másik metszéspontját kell meghatározni. (Lásd a 4. ábrát.)

A Pascal tétel alapján venni kell a szemközti oldalegyenesek metszéspontjait. Jelölje ezeket X , Y és Z úgy, hogy teljesüljenek az alábbi feltételek:

$$X = \langle A; B \rangle \cap \langle D; E \rangle = e_1 \cap \langle D; E \rangle;$$

$$Y = \langle B; C \rangle \cap \langle E; F \rangle = \langle B; C \rangle \cap g;$$

$$Z = \langle C; D \rangle \cap \langle F; A \rangle = e_2 \cap \langle F; A \rangle.$$

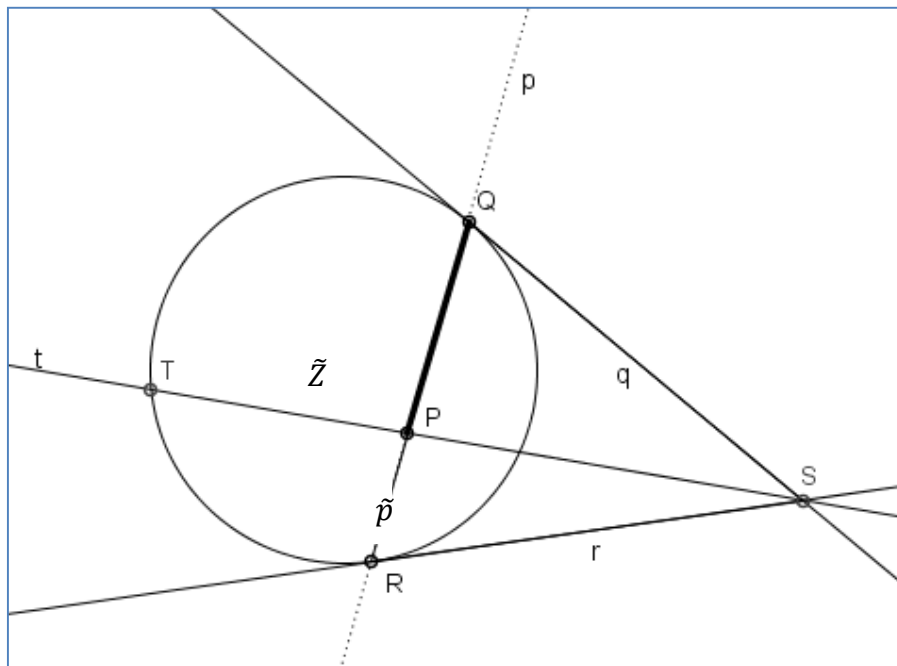
Az adott adatokból X és Y pontok megszerkeszthetőek. Az általuk meghatározott egyenest jelölje p . A Pascal-tétel alapján Z pontnak illeszkedni kell a p egyenesre. A Z pontot az e_2 érintő jelöli ki a p egyenesen. A kúpszelet egy további F pontját oly módon kapjuk, hogy $F = \langle A; Z \rangle \cap g$.

Különböző E -n átmenő egyeneseket választva a kúpszelet összes pontja előáll ily módon.

Az V. axióma teljesülésének megvizsgálása előtt, még a modellbeli félegyenes és félsík fogalmát kell tisztázni. A modellbeli félegyenesek euklideszi értelemben olyan szakaszok, melyeknek egyik végpontja a modellt határoló körvonalra esik. A modellbeli

félsíkok az euklideszi síkon körszeletek. Zászlóként definiálunk egy félegyenesből és egy félsíkból álló alakzatpárt, amennyiben a félegyenes illeszkedik a félsík határegyenesére.

A modellbeli egybevágósági axióma igazolása érdekében rendeljünk hozzá minden zászlóhoz egy-egy pontnégyest a következő módon: Legyen adott egy \tilde{Z} modellbeli zászló, ahol a félegyenes kezdőpontját jelöljük P -vel; a félegyenes által meghatározott modellbeli egyenest pedig \tilde{p} -mal. A \tilde{p} egyenest definiáló p euklideszi egyenes messe a $K(O; r)$ körvonalat Q és R pontokban. Ezek közül Q legyen a modellbeli félegyenenest meghatározó euklideszi szakasz végpontja. A Q és R pontokban húzott érintők metszéspontját jelöljük S -sel. Abban az esetben, ha \tilde{p} egyenes a $K(O; r)$ kör egyik átmérője, akkor az érintők párhuzamosak egymással, így az S pont az érintők által meghatározott egyenesosztaéhoz rendelt ideális pont. Jelöljük a $\langle Q; S \rangle$ egyenest q -val, az $\langle R; S \rangle$ egyenest r -rel és a $\langle P; S \rangle$ egyenest t -vel. Tekintsük a t egyenes körvonallal vett metszéspontjai közül azt, amelyik a modellbeli félsíkot határoló euklideszi körvonalnak is pontja. Ezt a pontot jelöljük T -vel. A modellbeli \tilde{Z} zászlót a Q, R, S, T pontnégyessel jellemezhetjük.



5. ábra. A modellbeli \tilde{Z} zászló értelmezése

Vegyünk a modellben két tetszőleges zászlót, \tilde{Z}_1 -mal és \tilde{Z}_2 -mal jelöljük őket. A \tilde{Z}_1 zászlót meghatározó pontnégyes legyen Q_1, R_1, S_1, T_1 ; a \tilde{Z}_2 zászlót meghatározó pontokat pedig jelöljük Q_2, R_2, S_2, T_2 -vel. Legyen $\langle Q_1; R_1 \rangle = p_1$; $\langle Q_1; S_1 \rangle = q_1$; $\langle R_1; S_1 \rangle = r_1$; $\langle S_1; T_1 \rangle = t_1$; $\langle Q_2; R_2 \rangle = p_2$; $\langle Q_2; S_2 \rangle = q_2$ és $\langle R_2; S_2 \rangle = r_2$; $\langle S_2; T_2 \rangle = t_2$

A korábban kimondott tétel alapján a projektív síkon egyértelműen létezik olyan κ kollineáció, amelyre teljesül, hogy $\kappa(Q_1) = Q_2$, $\kappa(R_1) = R_2$, $\kappa(S_1) = S_2$, $\kappa(T_1) = T_2$.

A kollineáció egyenestartó tulajdonságából következik, hogy fennállnak a következő egyenlőségek:

$$\begin{aligned}\kappa(t_1) &= \kappa(\langle S_1; T_1 \rangle) = \langle \kappa(S_1); \kappa(T_1) \rangle = \langle S_2; T_2 \rangle = t_2; \\ \kappa(p_1) &= \kappa(\langle Q_1; R_1 \rangle) = \langle \kappa(Q_1); \kappa(R_1) \rangle = \langle Q_2; R_2 \rangle = p_2; \\ \kappa(q_1) &= \kappa(\langle Q_1; S_1 \rangle) = \langle \kappa(Q_1); \kappa(S_1) \rangle = \langle Q_2; S_2 \rangle = q_2; \\ \kappa(r_1) &= \kappa(\langle R_1; S_1 \rangle) = \langle \kappa(R_1); \kappa(S_1) \rangle = \langle R_2; S_2 \rangle = r_2.\end{aligned}$$

A leképezés egyenesek metszéspontját a transzformált egyenesek metszéspontjába képezi. Ezért a P_1 pont képe azon P_2 pont, mely $P_2 = p_2 \cap t_2$.

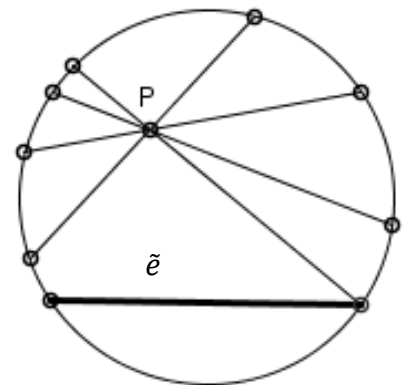
A κ kollineáció a $K(O; r)$ körvonalat olyan közös kúpszeletbe képezi, amely áthalad a Q_2, R_2, T_2 pontokon, és amelyet a q_2 és r_2 egyenesek a Q_2 és R_2 pontokban érintenek. A korábban igazolt tétel alapján ezek az adatok egyértelműen meghatároznak egy közös kúpszeletet, ami éppen a $K(O; r)$ körvonallal egyezik meg.

Eszerint a κ kollineáció a $K(O; r)$ körvonalat önmagába képezi. A kollineáció \tilde{Y} körlemezre vett leszűkítése egy egyenestartó bijekciót ad a modellben. A κ kollineáció kettősviszonytartása miatt, tetszőleges $A, B \in \tilde{Y}$ pontokra igaz, hogy $\tilde{d}(A; B) = \tilde{d}(A'; B')$, ugyanis ha $\langle A; B \rangle$ egyenes a határkört az U és V pontokban metszi, akkor az $A' = \kappa(A)$, $B' = \kappa(B)$, $U' = \kappa(U)$ és $V' = \kappa(V)$ képpontokkal fennáll, hogy

$$\tilde{d}(A'; B') = \frac{k}{2} \cdot |\ln(U'V'A'B')| = \frac{k}{2} \cdot |\ln(UVAB)| = \tilde{d}(A; B).$$

Ezzel beláttuk, hogy a κ kollineáció \tilde{Y} körlemezre vett leszűkítése egy egybevágósági transzformációt ad a modellben, amely a \tilde{Z}_1 zászlót a megadott \tilde{Z}_2 zászlóba képezi.

A VI. axióma teljesülése a modellben nyilvánvaló. Legyen \tilde{e} egy modellbeli egyenes, P pedig egy modellbeli pont úgy, hogy a P pont ne illeszkedjen az \tilde{e} egyeneshez. Ekkor, ahogy a 6. ábra mutatja, több olyan egyenes is található a modellben, amelynek nincsen \tilde{e} egyenessel közös pontja.



6. ábra. \tilde{e} -t nem metsző egyenesek

Mindezek alapján megállapítható, hogy a Cayley-Klein-féle körmodellben érvényesek a hiperbolikus síkgeometria axiómái, tehát a Cayley-Klein-féle körmodell valóban a hiperbolikus síkgeometria egy modellje.

2.4. Tengelyes tükrözések a modellben

Definíció: Adott egy $\kappa : \bar{\Sigma} \rightarrow \bar{\Sigma}$ kollineáció. A $\bar{\Sigma}$ projektív sík egy t egyenesét a κ kollineáció tengelyének nevezzük, ha a leképezés a t egyenes összes pontját helyben hagyja.

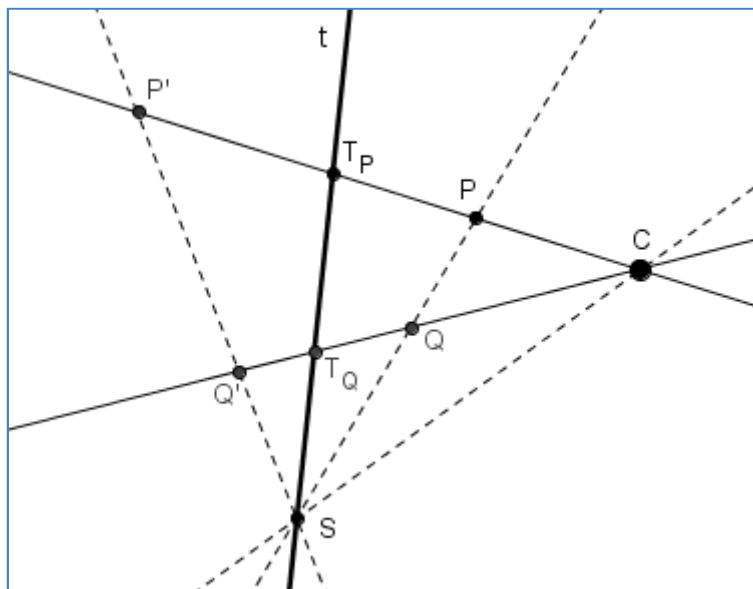
Definíció: Adott egy $\kappa : \bar{\Sigma} \rightarrow \bar{\Sigma}$ kollineáció. A $\bar{\Sigma}$ projektív sík egy C pontját a κ kollineáció centrumának mondjuk, ha a leképezés az összes C -t tartalmazó egyenest fixen hagyja.

Definíció: Azokat a kollineációkat, amelyeknek van tengelye és centruma is, centrális-tengelyes kollineációknak nevezzük.

Állítás: Ha egy centrális tengelyes kollineációnak ismert a t tengelye, C centruma, továbbá egy P pont és annak képe, akkor az összes síkbeli pont képe kijelölhető.

Bizonyítás:

Keressük egy $\bar{\Sigma}$ -beli Q pont képét. (Lásd a 7. ábrát.) Ez olyan Q' pont, amelynek illeszkednie kell a $\langle C; Q \rangle$ egyeneshez.



7. ábra.

Jelölje S a $\langle P; Q \rangle$ egyenes metszéspontját a tengellyel. Ekkor a $\langle P'; S \rangle$ egyenes kimetszi a $\langle C; Q \rangle$ egyenesből a Q' pontot.

Állítás: Legyen adva egy κ centrális tengelyes kollineáció, egy $P \in \bar{\Sigma}$ pont és annak P' képe úgy, hogy P ne illeszkedjen a t tengelyegyenesre, valamint ne egyezzen meg a C centrummal. Jelölje T_P a t tengely és a $\langle P; P' \rangle$ egyenes metszéspontját. Ekkor a $(CT_P PP')$ kettősviszony értéke független a P pont megválasztásától.

Bizonyítás:

Az előbb említett eljárással származtatott Q' pontra teljesül, hogy $(CT_Q QQ') = (CT_P PP')$, hiszen a kettősviszony megmarad a középpontos vetítésnél. Tekintsük az S centrumú középpontos vetítést (7. ábra.), amely a C, T_Q, Q és Q' pontokat rendre a C, T_P, P és P' pontokba képezi. Ekkor a Papposz-Steiner-tétel szerint a $(CT_P PP') = (CT_Q QQ')$ egyenlőség teljesül.

A fenti állítás alapján be lehet vezetni az alábbi fogalmat.

Definíció: A $c(\kappa) = (CT_P PP')$ számot a κ centrális tengelyes kollineáció karakterisztikus kettősviszonyának nevezzük.

Állítás: Ha $\kappa : \bar{\Sigma} \rightarrow \bar{\Sigma}$ centrális tengelyes kollineáció karakterisztikus kettősviszonyára igaz, hogy $c(\kappa) = -1$, akkor a $\kappa \circ \kappa$ szorzat az identikus leképezést eredményezi.

Bizonyítás:

Vegyük a $\bar{\Sigma}$ projektív sík egy tetszőleges P pontját. Ekkor a feltétel szerint igaz $(CT_P PP') = -1$. Ebből adódik a kettősviszony tulajdonságai alapján, hogy $(CT_P P'P) = -1$ egyenlőség is teljesül.

A $\langle C; P' \rangle$ egyenesen, amely a T_P pontban metszi a t tengelyt, egyetlen olyan Q pont van, amelyre teljesül, hogy $(CT_P P'Q) = -1$. Az előzőek szerint tehát igaz, hogy $Q = P$ és $\kappa(P') = Q$.

Ily módon bármely $P \in \bar{\Sigma}$ pontra igaz, hogy $\kappa \circ \kappa(P) = P$, tehát $\kappa \circ \kappa = id_{\bar{\Sigma}}$ teljesül.

A következő fontos állítás bizonyítása során alkalmazni fogjuk a másodrendű görbékre vonatkozó konjugált pontok és a pontok polárisának fogalmát, illetve a velük kapcsolatos alapvető összefüggéseket. Ezek a Hajós György könyvének [3] 46. pontjában található meg.

Állítás: Legyen t egy olyan egyenes a $\bar{\Sigma}$ projektív síkon, amely az U és V pontokban metszi a $K(O; r)$ körvonalat. Az U és V pontbeli körérintők $\bar{\Sigma}$ -beli metszéspontját jelölje C .

Ily módon a κ centrális tengelyes kollineáció \tilde{Y} halmazra vett megszorítása fixen hagyja a \tilde{t} egyenest és az önmagával vett szorzata a $id_{\tilde{Y}}$ identikus leképezés. Eszerint a κ kollineáció megszorítása a modellkörre épp a \tilde{t} tengelyre történő modellbeli tengelyes tükrözést adja.

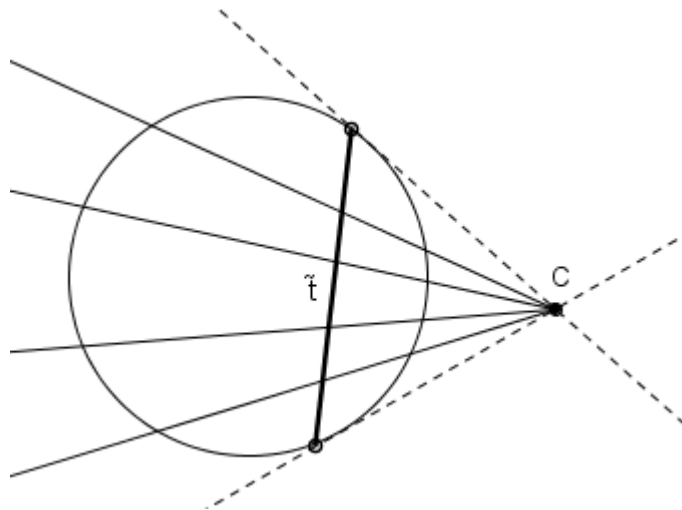
Megjegyzés: Ha a modellkör egy tetszőleges átmérőjének egyenesét választjuk a centrális-tengelyes kollineáció tengelyéül, akkor az arra vonatkozó tükrözés megegyezik a szokásos tengelyes tükrözés modellre való megszorításával.

2.5. Szögek a modellben

Állítás: Két tetszőleges modellbeli egyenes pontosan akkor merőleges egymásra, ha az egyik egyenesnek a határkörrel vett metszéspontjaiban a $K(O; r)$ körhöz húzott érintők a másik egyenest meghatározó euklideszi egyenesen metszik egymást.

Bizonyítás:

Két egyenes pontosan akkor merőleges egymásra, ha az egyik egyenesre történő tengelyes tükrözés a másik egyenest önmagába képezi. A modellbeli tükrözéseknek a projektív síkon vett centrális tengelyes kollineációk felelnek meg. Ezért a modellben pontosan akkor lesz két egyenes merőleges egymásra, ha az egyik egyenesre, mint tengelyre és az egyenes pólusára, mint centrumra vonatkozó centrális tengelyes kollineáció önmagába képezi a másik egyenest. Projektív geometriából ismeretes, hogy az érintők metszéspontja adja az egyenes pólusát. Ebből pedig már következi állításunk helyessége.



9. ábra. Adott \tilde{t} egyenesre merőleges egyenesek a modellben

Következmény: A modellkör bármely átmérőjére euklideszi értelemben merőleges egyenes a modellben is az.

Bizonyítás:

Az átmérő végpontjaiban húzott érintők párhuzamosak, tehát metszéspontjuk az általuk meghatározott párhuzamossági egyenesosztály ideális pontja, ami illeszkedik az átmérőre merőleges egyenesekre.

Állítás: Legyen $AOB \sphericalangle$ egy modellbeli konvex szög, melynek O csúcspontja egyezzen meg a $K(O; r)$ kör O centrumával. Ekkor az $AOB \sphericalangle$ szög modellbeli mértéke megegyezik az euklideszi síkon neki megfelelő szög mértékével.

Bizonyítás:

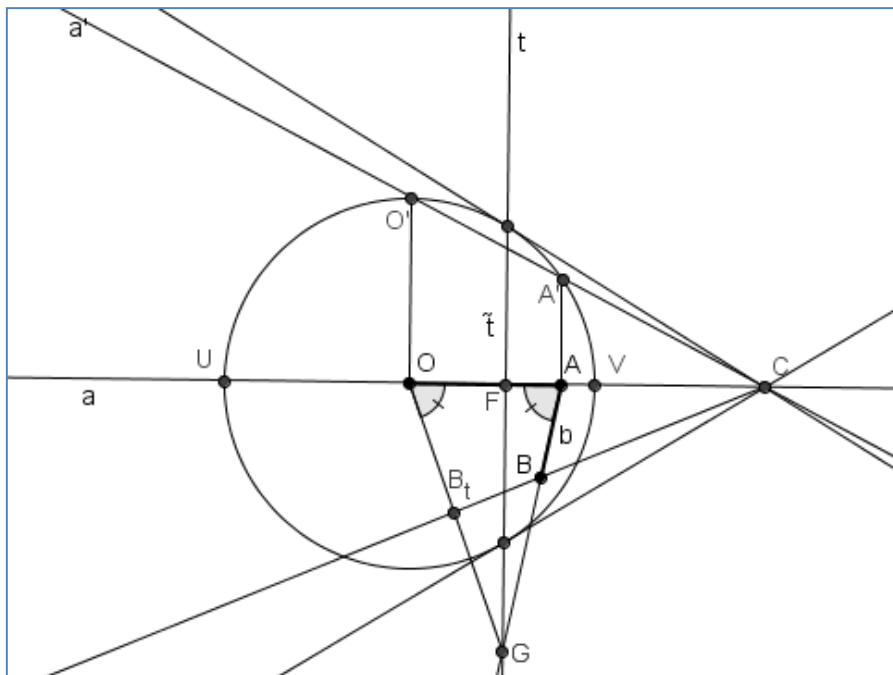
Ha a két egyenes merőleges egymásra, akkor már láttuk, hogy a szög kétféle mértéke megegyezik. Ez esetben a közös mérték $\frac{\pi}{2}$.

A O csúcsú szögek euklideszi értelemben vett szögfelezői a modellben is felezik a szöget. Ezért azoknál a szögeknél, amelyek mértéke a modellben $\frac{m}{2^n} \cdot \frac{\pi}{2}$ alakú, ahol m és n nemnegatív egész számokat jelölnek, euklideszi mértékük is $\frac{m}{2^n} \cdot \frac{\pi}{2}$. Ebből pedig már következik, hogy bármely O csúcsú szög valódi méretében látszik az euklideszi síkon.

Állítás: *Bármely OAB hegyesszög modellbeli mértéke mindig kisebb, mint az euklideszi mértéke.*

Bizonyítás:

Jelölje a az O és A pontok által meghatározott euklideszi egyenest, b pedig az A és B pontok által meghatározott egyenest. Vegyük az \overline{OA} szakasz modellbeli felezőmerőlegesét, amelyre A -t tükrözve O -t kapjuk. Jelölje t ezt az euklideszi egyenest.



10. ábra. Szakaszfelező merőleges

Ehhez először állítsunk merőlegest az a egyenesre az O és A pontokban. Ezek megegyeznek az euklideszi értelemben vett merőlegesekkel, hiszen a egy átmérője a körnek. Jelölje O' és A' a merőlegesek ugyanazon félkörívvel vett metszéspontjait. Legyen $\angle O'; A' = a'$ egyenes metszéspontja az a egyenessel C . A C -ből húzzunk érintőket a körhöz és az érintési pontokat összekötő egyenes legyen t . Korábbi eredményeink szerint a

t -re történő tengelyes tükrözés felcseréli az O és A pontokat. Tehát \tilde{t} az \overline{OA} szakasz modellbeli felezőmerőlegese. Legyen $F = t \cap a$ és $G = t \cap b$. A B pont felezőmerőlegesre vonatkozó tükörképe legyen B_t . (Lásd a 10. ábrát.)

Mivel az F pont az \overline{OA} szakasz felezőpontja a modellben, ezért teljesül, hogy $\tilde{d}(O; F) = \tilde{d}(F; A)$. A tükrözés miatt az OAB_t szög megegyezik AOB_t szöggel a modellben. Azonban az AOB_t szög modellbeli mértéke megegyezik az euklideszi mértékével. Az állítás igazolásához azt kell belátni, hogy az AOB_t szög kisebb az OAB szögnél euklideszi értelemben. Ehhez elegendő igazolni, hogy a $FAG\Delta$ derékszögű háromszög \overline{FA} befogójának euklideszi hossza kisebb, mint az $FOG\Delta$ derékszögű háromszög \overline{FO} befogójának hossza. Jelöljük U -val és V -vel az a egyenes metszéspontját a körvonallal. Vezessük be az $OA = x$ és $OF = y$ jelölést az euklideszi hosszakra.

$$\begin{aligned}\tilde{d}(O; A) &= \frac{k}{2} |\ln(UVOA)| = \frac{k}{2} \left| \ln \frac{AV}{UA} \right| = \frac{k}{2} \left| \ln \frac{r+x}{r-x} \right| = \frac{k}{2} \left(\ln \frac{r+x}{r-x} \right); \\ \tilde{d}(O; F) &= \frac{k}{2} |\ln(UVOF)| = \frac{k}{2} \left| \ln \frac{FV}{UF} \right| = \frac{k}{2} \left(\ln \frac{r+y}{r-y} \right).\end{aligned}$$

Felhasználva, hogy F pont felezi az \overline{OA} szakaszt a modellben:

$$\begin{aligned}\tilde{d}(O; A) &= 2 \cdot \tilde{d}(O; F); \\ \frac{k}{2} \left(\ln \frac{r+x}{r-x} \right) &= 2 \cdot \left[\frac{k}{2} \left(\ln \frac{r+y}{r-y} \right) \right]; \\ \frac{r+x}{r-x} &= \frac{(r+y)^2}{(r-y)^2}; \\ 2 \cdot x \cdot (r^2 + y^2) &= 4 \cdot r^2 \cdot y; \\ x &= \frac{2 \cdot r^2 \cdot y}{(r^2 + y^2)} = 2 \cdot y \cdot \frac{r^2}{r^2 + y^2} < 2 \cdot y.\end{aligned}$$

Ezzel azt kaptuk, hogy $OA < 2 \cdot OF$ egyenlőtlenség teljesül az euklideszi síkon. Ebből következik, hogy \overline{FA} befogó hossza kisebb, mint az \overline{FO} befogó hossza, tehát az OAB szög modellbeli mértéke kisebb az euklideszi mértékénél.

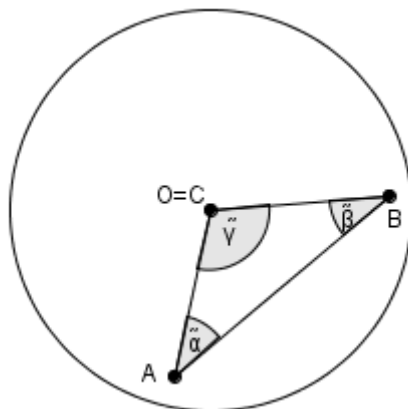
2.6. Háromszögek a modellben

A modellbeli háromszögek az euklideszi síkon is azok. Az euklideszi síkgeometriában igaz, hogy bármely háromszög belső szögeinek összege π . Ez a tétel hiperbolikus geometriában nem így van.

Tétel: *A modellben bármely háromszög belső szögeinek összege kisebb, mint π .*

Bizonyítás:

Vegyünk egy tetszőleges $ABC\Delta$ háromszöget a modellben. Ennek a háromszögnek biztosan van legalább két hegyesszöge. Tegyük fel, hogy a háromszög C csúcsánál fekvő $\tilde{\gamma}$ szög a legnagyobb. Tengelyes tükrözéssel vigyük a C csúcsot az O centrumba.



11. ábra. *A háromszög belső szögei*

Ekkor a C csúcsnál lévő szög modellbeli mértéke és euklideszi mértéke megegyezik, azaz $\tilde{\gamma} = \gamma$, ahol $\tilde{\gamma}$ a szög modellbeli mértékét, γ pedig az euklideszi mértékét jelöli. Az előző állítás alapján az A és B csúcsoknál kapott szögek modellbeli mértéke viszont kisebb, mint az euklideszi mértékük. Jelölje a szögek modellbeli mértékét $\tilde{\alpha}$ és $\tilde{\beta}$, euklideszi mértéküket pedig α és β . Ekkor az alábbi kapcsolatot írhatjuk fel a szögek között: $\tilde{\alpha} < \alpha$ és $\tilde{\beta} < \beta$. Ezek alapján adódik, hogy

$$\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} + \tilde{\gamma} < \alpha + \beta + \gamma = \pi.$$

Definíció: Egy háromszög szöghiányán, vagy más néven, defektusán azt a pozitív számot értjük, amennyivel a háromszög belső szögeinek összege kisebb π -nél. Tetszőleges $ABC\Delta$ háromszög esetén $\delta(ABC\Delta) = \pi - (\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} + \tilde{\gamma})$ összefüggés adja meg az $ABC\Delta$ háromszög defektusát, ahol $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{\gamma}$ a háromszög modellbeli szögeinek mértékét jelöli.

Tétel: Háromszögekbe írható körök sugarainak supremuma

A modellbeli háromszögekbe írható körök sugarainak supremuma:

$$\rho = \frac{k}{2} \cdot \ln 3.$$

Bizonyítás:

Vegyünk a modellben egy O középpontú kört. Ez az euklideszi síkon is kör, melynek sugarát jelöljük h -val. A körvonalra illeszkedjen egy P pont. Ekkor az \overline{OP} szakaszra teljesül a modellben, hogy

$$\tilde{d}(O; P) = \frac{k}{2} \cdot |\ln(MNOP)| = \frac{k}{2} \cdot \left| \ln \frac{(MNO)}{(MNP)} \right|,$$

ahol M és N pontok az $\langle O; P \rangle$ egyenes és az r sugarú modellkör metszéspontjait jelöli. Továbbalakítva a kifejezést az alábbi összefüggést kapjuk:

$$\tilde{d}(O; P) = \frac{k}{2} \cdot \left| \ln \left(\frac{MO}{ON} : \frac{MP}{PN} \right) \right| = \frac{k}{2} \cdot \left| \ln \left(\frac{PN}{MP} \right) \right| = \frac{k}{2} \cdot \left| \ln \left(\frac{r-h}{r+h} \right) \right|.$$

A modellben akkor lehet a h sugarú kör egy háromszög beírt köre, ha teljesül, hogy $2 \cdot h < r$, azaz $h < \frac{r}{2}$. Ezt felhasználva, az előző összefüggés szerint a ρ supremumra fennáll, hogy

$$\rho = \frac{k}{2} \cdot \left| \ln \left(\frac{r - \frac{r}{2}}{r + \frac{r}{2}} \right) \right| = \frac{k}{2} \cdot \left| \ln \left(\frac{1}{3} \right) \right| = \frac{k}{2} \cdot \ln 3.$$

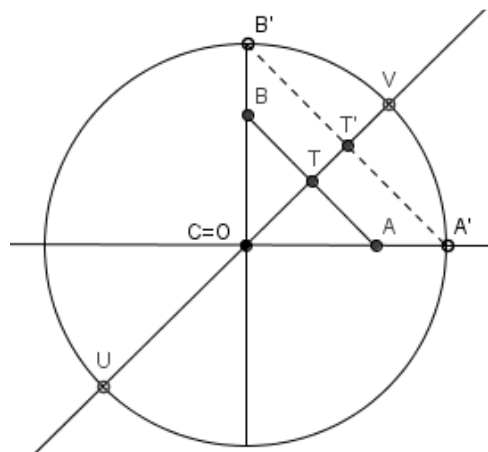
Tehát a modellben nem létezik olyan háromszög, amelybe a beírható háromszög sugara nagyobb, mint $\frac{k}{2} \cdot \ln 3$, továbbá ez a szám adja a beírható körök sugarainak supremumát.

Tétel: Derékszögű háromszögek magasságainak supremuma

A modellbeli derékszögű háromszögek átfogóhoz tartozó magasságainak supremuma:

$$\mu = k \cdot \ln(\sqrt{2} + 1).$$

Bizonyítás:



12. ábra

Legyen az $ABCA$ háromszög C derékszögű csúcsa a modellkör O centruma. Jelölje T az AB oldalhoz tartozó magasságvonal talppontját. A $BTC\alpha = ATC\alpha = \frac{\pi}{2}$ összefüggés a modellben is igaz. Ennek a magasságnak a hosszára teljesül, hogy:

$$\tilde{d}(T, C) = \frac{k}{2} \cdot |\ln(UVTC)| = \frac{k}{2} \cdot \left| \ln \frac{(UVT)}{(UVC)} \right|;$$

ahol U és V a magasságvonal euklideszi egyenesének és a $K(O; r)$ körvonal metszéspontjait jelöli.

Ha a magasság euklideszi értelemben vett hosszát x -szel jelöljük, akkor a magasság modellbeli mértéke a következő módon alakul:

$$\tilde{d}(T, C) = \frac{k}{2} \cdot \left| \ln \left(\frac{UT}{TV} : \frac{UO}{OV} \right) \right| = \frac{k}{2} \cdot \left| \ln \left(\frac{r+x}{r-x} : \frac{r}{r} \right) \right| = \frac{k}{2} \cdot \left| \ln \left(\frac{r+x}{r-x} \right) \right|.$$

Látható, hogy a modellkör által tartalmazott $ABCA$ derékszögű háromszögek átfogójához tartozó magasságainak felső határa $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot r$. Ezt felhasználva a magasság modellbeli mértéke a következő módon alakul:

$$\tilde{d}(C, T) = \frac{k}{2} \cdot \left| \ln \left(\frac{r+x}{r-x} \right) \right| < \frac{k}{2} \cdot \left| \ln \left(\frac{r + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot r}{r - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot r} \right) \right| = \frac{k}{2} \cdot \left| \ln \frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} \right| = \frac{k}{2} \cdot \ln(3 + 2\sqrt{2}).$$

$$\tilde{d}(C, T) < \frac{k}{2} \cdot |\ln(3 + 2\sqrt{2})| = \frac{k}{2} \cdot \ln(1 + \sqrt{2})^2 = k \cdot \ln(\sqrt{2} + 1) \approx 0,8814 \cdot k.$$

Tehát az egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága nem haladhatja meg a $k \cdot \ln(\sqrt{2} + 1)$ értéket, továbbá a $k \cdot \ln(\sqrt{2} + 1)$ érték a magasságok supremuma.

3. Trigonometrikus összefüggések a modellben

3.1. Hiperbolikus függvények alapvető összefüggései

Először felsoroljuk a hiperbolikus függvényekre vonatkozó azon összefüggéseket, amelyekre a későbbiekben hivatkozni fogunk:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad (1)$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \quad (2)$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}; \quad (3)$$

$$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}; \quad (4)$$

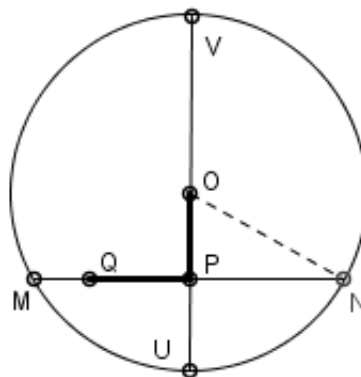
$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1; \quad (5)$$

$$\operatorname{th}^2 x = 1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}; \quad (6)$$

$$\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y. \quad (7)$$

3.2. Kapcsolat a modellbeli és az euklideszi távolságok között

A \tilde{d} távolságfüggvény kapcsolatot teremt egy szakasz euklideszi hossza és modellbeli hossza között, ezzel az euklideszi távolságból meg tudjuk határozni a modellbeli távolságot. Trigonometrikus összefüggések levezetése során szükség van a fordított irányú kapcsolatra is.



13. ábra.

Legyen P a modell egy tetszőleges pontja. Jelölje δ a P pont O középponttól mért euklideszi távolságát, d pedig az OP távolság modellbeli hosszát, azaz $d = \tilde{d}(O; P)$. Jelöljük U -val és V -vel az \overline{OP} szakasz által meghatározott egyenes metszéspontjait a határkörrel. (Lásd a 13. ábrát.) Tegyük fel, hogy a $PV > UP$ egyenlőtlenség fennáll. Ekkor igaz az alábbi összefüggés:

$$d = \tilde{d}(O; P) = \frac{k}{2} \cdot |\ln(UVOP)| = \frac{k}{2} \cdot \left| \ln \left(\frac{UVO}{UVP} \right) \right| = \frac{k}{2} \cdot \ln \left(\frac{UO}{OV} : \frac{UP}{PV} \right) = \frac{k}{2} \cdot \ln \left(\frac{r + \delta}{r - \delta} \right),$$

ahol r a modellkör sugarát jelöli.

Ekvivalens átalakítások után adódik az alábbi két összefüggés:

$$e^{\frac{2d}{k}} = \frac{r + \delta}{r - \delta};$$

$$\delta \cdot \left(1 + e^{\frac{2d}{k}} \right) = r \cdot \left(e^{\frac{2d}{k}} - 1 \right).$$

Ekkor a δ euklideszi távolság a következő módon határozható meg a modellbeli d távolság segítségével:

$$\delta = r \cdot \frac{\left(e^{\frac{2d}{k}} - 1 \right)}{\left(e^{\frac{2d}{k}} + 1 \right)} = r \cdot \frac{e^{\frac{d}{k}} \cdot \left(e^{\frac{d}{k}} - \frac{1}{e^{\frac{d}{k}}} \right)}{e^{\frac{d}{k}} \cdot \left(e^{\frac{d}{k}} + \frac{1}{e^{\frac{d}{k}}} \right)} = r \cdot \frac{\left(e^{\frac{d}{k}} - e^{-\frac{d}{k}} \right)}{\left(e^{\frac{d}{k}} + e^{-\frac{d}{k}} \right)}.$$

A (3)-as összefüggés felhasználásával azt kapjuk, hogy δ euklideszi távolság és a d modellbeli távolság között fennáll az alábbi összefüggés:

$$\delta = r \cdot \operatorname{th} \left(\frac{d}{k} \right). \quad (8)$$

Vegyünk most a modellben egy \overline{PQ} szakaszt úgy, hogy az merőleges legyen az előbbi \overline{OP} szakaszra. (Lásd a 13. ábrán.) Jelöljük μ -vel a szakasz euklideszi hosszát, m -mel pedig a modellbeli hosszt. Legyen M és N a \overline{PQ} szakasz által meghatározott egyenes két metszéspontja a határkörrel. Feltéve, hogy a $QN > MQ$ egyenlőtlenség teljesül, m mértékét a következő összefüggés határozza meg:

$$m = \tilde{d}(P; Q) = \frac{k}{2} \cdot |\ln(MNPQ)| = \frac{k}{2} \cdot \ln \left(\frac{MP}{PN} : \frac{MQ}{QN} \right) = \frac{k}{2} \cdot \ln \left(\frac{PN + \mu}{PN - \mu} \right).$$

Algebrai átalakítások után adódik, hogy

$$e^{\frac{2m}{k}} = \frac{PN + \mu}{PN - \mu};$$

$$\mu \cdot \left(1 + e^{\frac{2m}{k}} \right) = PN \cdot \left(e^{\frac{2m}{k}} - 1 \right);$$

$$\mu = \frac{PN \cdot \left(e^{\frac{2m}{k}} - 1\right)}{\left(1 + e^{\frac{2m}{k}}\right)} = PN \cdot \frac{e^{\frac{m}{k}} \cdot \left(e^{\frac{m}{k}} - \frac{1}{e^{\frac{m}{k}}}\right)}{e^{\frac{m}{k}} \cdot \left(e^{\frac{m}{k}} + \frac{1}{e^{\frac{m}{k}}}\right)} = PN \cdot \frac{\left(e^{\frac{m}{k}} - e^{-\frac{m}{k}}\right)}{\left(e^{\frac{m}{k}} + e^{-\frac{m}{k}}\right)} = PN \cdot \operatorname{th}\left(\frac{m}{k}\right).$$

A \overline{PN} szakasz az $OPN\Delta$ derékszögű háromszög egyik befogója, ezért felírható rá az euklideszi geometriában ismeretes Pitagorasz-tétel:

$$PN^2 = ON^2 - OP^2 = r^2 - \delta^2;$$

$$PN = \sqrt{r^2 - \delta^2} = \sqrt{r^2 \cdot \left[1 - \operatorname{th}^2\left(\frac{d}{k}\right)\right]}.$$

A (6)-os összefüggés felhasználásával:

$$PN = \sqrt{r^2 \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{d}{k}\right)}} = \frac{r}{\operatorname{ch}\left(\frac{d}{k}\right)}.$$

Mindezek alapján a \overline{PQ} szakasz euklideszi hosszára teljesül a

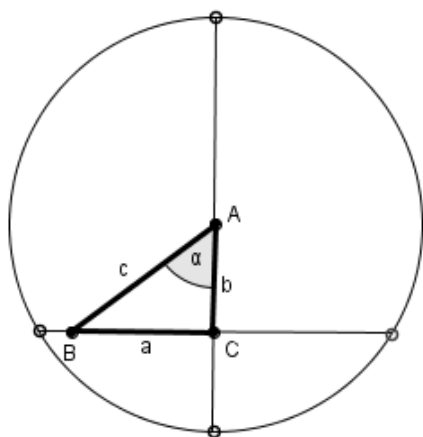
$$\mu = \frac{r}{\operatorname{ch}\left(\frac{d}{k}\right)} \cdot \operatorname{th}\left(\frac{m}{k}\right) = r \cdot \frac{\operatorname{th}\left(\frac{m}{k}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{d}{k}\right)} \quad (9)$$

egyenlőség a d és m modellbeli távolságokkal.

3.3. Trigonometrikus összefüggések igazolása a modellben

3.3.1. Trigonometrikus összefüggések derékszögű háromszögekben

Először derékszögű háromszögekben határozzuk meg a trigonometrikus összefüggéseket. Helyezzük el úgy a derékszögű háromszöget a modellbeli síkon, hogy az A hegyesszögű csúcsa az O középpontba essék. Ekkor az A csúcsnál a modellbeli szög az euklideszi síkon valódi méretében látszik.



14. ábra. Derékszögű háromszög a modellben

A derékszögű háromszög oldalai a modellben:

$$a = \tilde{d}(B; C);$$

$$b = \tilde{d}(A; C);$$

$$c = \tilde{d}(A; B).$$

A derékszögű háromszög oldalainak euklideszi hossza a (8)-as és (9)-es összefüggések alapján:

$$AB = r \cdot \operatorname{th}\left(\frac{c}{k}\right);$$

$$AC = r \cdot \operatorname{th}\left(\frac{b}{k}\right);$$

$$BC = r \cdot \frac{\operatorname{th}\left(\frac{a}{k}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{b}{k}\right)}.$$

Ezeket az összefüggéseket alkalmazva adódnak modellbeli derékszögű háromszög oldalai és szögei között az alábbi összefüggések:

$$\cos \alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{r \cdot \operatorname{th}\left(\frac{b}{k}\right)}{r \cdot \operatorname{th}\left(\frac{c}{k}\right)} = \frac{\operatorname{th}\left(\frac{b}{k}\right)}{\operatorname{th}\left(\frac{c}{k}\right)}; \quad (10)$$

$$\sin \alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{\operatorname{th}\left(\frac{a}{k}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{b}{k}\right)} \cdot \frac{1}{\operatorname{th}\left(\frac{c}{k}\right)}; \quad (11)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{\operatorname{th}\left(\frac{a}{k}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{b}{k}\right)} \cdot \frac{1}{\operatorname{th}\left(\frac{b}{k}\right)} = \frac{\operatorname{th}\left(\frac{a}{k}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{b}{k}\right)}. \quad (12)$$

Állítás: A modellbeli derékszögű háromszögek oldalai között fennáll a következő összefüggés (a és b jelöli a befogókat, c pedig az átfogót):

$$\operatorname{ch}\left(\frac{a}{k}\right) \cdot \operatorname{ch}\left(\frac{b}{k}\right) = \operatorname{ch}\left(\frac{c}{k}\right). \quad (13)$$

Bizonyítás:

Írjuk fel a derékszögű háromszög euklideszi oldalaira a Pitagorasz-tételt:

$$AC^2 + BC^2 = AB^2.$$

A fenti összefüggés alapján azt kapjuk, hogy a modellbeli szakaszokra igaz az alábbi összefüggés:

$$r^2 \cdot \operatorname{th}^2\left(\frac{b}{k}\right) + r^2 \cdot \frac{\operatorname{th}^2\left(\frac{a}{k}\right)}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{b}{k}\right)} = r^2 \cdot \operatorname{th}^2\left(\frac{c}{k}\right).$$

Az r^2 -tel való leosztás után és a (6)-os összefüggés felhasználásával a következő egyenlőségeket kapjuk:

$$\begin{aligned} \left[1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{b}{k}\right)} \right] + \frac{1}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{b}{k}\right)} \cdot \left[1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{a}{k}\right)} \right] &= 1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{c}{k}\right)}; \\ -\frac{1}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{b}{k}\right)} + \frac{1}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{b}{k}\right)} - \frac{1}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{b}{k}\right) \cdot \operatorname{ch}^2\left(\frac{a}{k}\right)} &= -\frac{1}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{c}{k}\right)}; \\ \frac{1}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{b}{k}\right) \cdot \operatorname{ch}^2\left(\frac{a}{k}\right)} &= \frac{1}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{c}{k}\right)}. \end{aligned}$$

A fenti egyenlet mindkét oldalának reciprokát véve és gyököt vonva kapjuk a bizonyítandó összefüggést:

$$\operatorname{ch}\left(\frac{a}{k}\right) \cdot \operatorname{ch}\left(\frac{b}{k}\right) = \operatorname{ch}\left(\frac{c}{k}\right).$$

Állítás: Derékszögű háromszögben az α hegyesszög szinusza a következő alakban is felírható a modellben:

$$\sin \alpha = \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{a}{k}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{c}{k}\right)}. \quad (14)$$

Bizonyítás:

Vegyük a 14. ábrán látható derékszögű háromszöget. Ekkor $O=A$ miatt a modellbeli szög valódi méretében látszik. Ily módon azt kapjuk, hogy:

$$\sin \alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{\operatorname{ch}\left(\frac{b}{k}\right)} \cdot \frac{\operatorname{th}\left(\frac{a}{k}\right)}{\operatorname{th}\left(\frac{c}{k}\right)}.$$

A (3)-as összefüggés felhasználásával adódik, hogy

$$\sin \alpha = \frac{1}{\operatorname{ch}\left(\frac{b}{k}\right)} \cdot \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{a}{k}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{a}{k}\right)} \cdot \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{c}{k}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{c}{k}\right)} = \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{a}{k}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{c}{k}\right)} \cdot \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{c}{k}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{a}{k}\right) \cdot \operatorname{ch}\left(\frac{b}{k}\right)}.$$

A (13)-as egyenlet alapján az utolsó tört értéke 1. Ezzel az állításbeli alakot kaptuk:

$$\sin \alpha = \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{a}{k}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{c}{k}\right)}.$$

Állítás: Bármely modellbeli derékszögű háromszögekben igaz, hogy

$$\cos \alpha = \sin \beta \cdot \operatorname{ch} \left(\frac{a}{k} \right). \quad (15)$$

Bizonyítás:

Az α szög koszinuszát az alábbi módon határozhatjuk meg a 14. ábrán megadott háromszögnél:

$$\cos \alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{\operatorname{th} \left(\frac{b}{k} \right)}{\operatorname{th} \left(\frac{c}{k} \right)}.$$

Alkalmazzuk most is a (3)-as, (13)-as és (14)-es állításokat. Az alábbi összefüggést kapjuk:

$$\cos \alpha = \frac{\operatorname{sh} \left(\frac{b}{k} \right)}{\operatorname{ch} \left(\frac{b}{k} \right)} \cdot \frac{\operatorname{ch} \left(\frac{c}{k} \right)}{\operatorname{sh} \left(\frac{c}{k} \right)} = \frac{\operatorname{sh} \left(\frac{b}{k} \right)}{\operatorname{sh} \left(\frac{c}{k} \right)} \cdot \frac{\operatorname{ch} \left(\frac{a}{k} \right) \cdot \operatorname{ch} \left(\frac{b}{k} \right)}{\operatorname{ch} \left(\frac{b}{k} \right)} = \sin \beta \cdot \operatorname{ch} \left(\frac{a}{k} \right).$$

3.3.2. Trigonometrikus összefüggések általános háromszögekben

A továbbiakban a modellben vett általános $ABC\Delta$ háromszögeket vizsgáljuk és kapcsolatokat keresünk az oldalak és a szögek között. Az $ABC\Delta$ háromszögnek oldalai és szögei legyenek a , b , c , valamint α , β és γ . Ehhez felhasználjuk az előző részben kapott összefüggéseket:

Tétel: Hiperbolikus szinusztétel

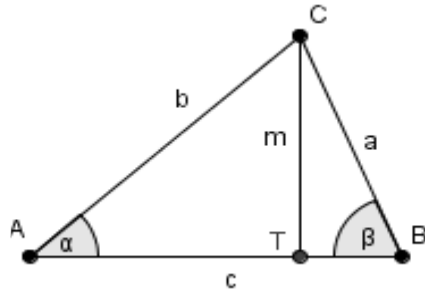
Tetszőleges modellbeli $ABC\Delta$ háromszögben fennáll a következő összefüggés:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\operatorname{sh} \left(\frac{a}{k} \right)}{\operatorname{sh} \left(\frac{b}{k} \right)}.$$

Bizonyítás:

Vegyünk a modellben egy tetszőleges $ABC\Delta$ háromszöget és húzzuk meg a háromszög azon magasságvonalát, amelyhez tartozó oldal nem szerepel a tételben. (15. ábra.). Ezzel az általános háromszöget két derékszögű háromszögre bontottuk, melyekben alkalmazhatjuk az előző fejezetben levezetett összefüggéseket.

A derékszögű háromszögekben teljesülnek a következő összefüggések:



$$\sin \alpha = \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{m}{k}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{b}{k}\right)}$$

$$\sin \beta = \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{m}{k}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{a}{k}\right)}$$

15. ábra.

Hányadosukat képezve kapjuk a tétel állítását:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{m}{k}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{b}{k}\right)} \cdot \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{a}{k}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{m}{k}\right)} = \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{a}{k}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{b}{k}\right)}.$$

Amennyiben az $ABC\Delta$ háromszög α vagy β szöge tompaszög, akkor a c oldalhoz tartozó magasságvonal az \overline{AB} szakaszt nem egy belső pontjában metszi. A derékszögű háromszögek ebben az esetben is megjelennek. Felhasználva a szinusz szögfüggvényről a $\sin x = \sin(\pi - x)$ összefüggést, kapjuk a tétel igazolását.

Tétel: Oldalakra vonatkozó koszinusztétel

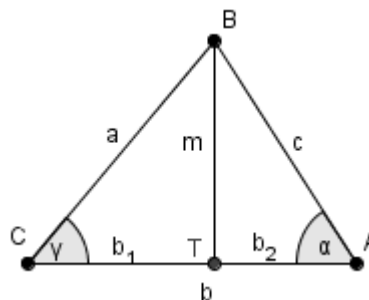
Tetszőleges $ABC\Delta$ modellbeli háromszögben teljesül

$$\operatorname{ch}\left(\frac{c}{k}\right) = \operatorname{ch}\left(\frac{a}{k}\right) \cdot \operatorname{ch}\left(\frac{b}{k}\right) - \operatorname{sh}\left(\frac{a}{k}\right) \cdot \operatorname{sh}\left(\frac{b}{k}\right) \cdot \cos \gamma$$

ahol γ a háromszög c oldallal szemközti szöge.

Bizonyítás:

Először vizsgáljuk hegyesszögű háromszögek esetében a tételt. Húzzuk meg az $ABC\Delta$ háromszög b oldalához tartozó magasságvonalat. Ezt jelöljük m -mel, talppontját a b oldalon pedig T -vel. Legyen $CT = b_1$ és $TA = b_2$. (Lásd a 16. ábrán.)



16. ábra.

A $BCT\Delta$ derékszögű háromszögben érvényesek a következő összefüggések a (10) és (13)-as összefüggések alapján:

$$\cos \gamma = \frac{\operatorname{th} \left(\frac{b_1}{k} \right)}{\operatorname{th} \left(\frac{a}{k} \right)};$$

$$\operatorname{ch} \left(\frac{b_1}{k} \right) \cdot \operatorname{ch} \left(\frac{m}{k} \right) = \operatorname{ch} \left(\frac{a}{k} \right) \rightarrow \operatorname{ch} \left(\frac{b_1}{k} \right) = \frac{\operatorname{ch} \left(\frac{a}{k} \right)}{\operatorname{ch} \left(\frac{m}{k} \right)}.$$

Az $ABT\Delta$ derékszögű háromszögben a következő összefüggés érvényes a (13)-as összefüggés alapján:

$$\operatorname{ch} \left(\frac{c}{k} \right) = \operatorname{ch} \left(\frac{b_2}{k} \right) \cdot \operatorname{ch} \left(\frac{m}{k} \right) = \operatorname{ch} \left(\frac{b}{k} - \frac{b_1}{k} \right) \cdot \operatorname{ch} \left(\frac{m}{k} \right).$$

Felhasználva a (7)-es összefüggést azt kapjuk, hogy:

$$\operatorname{ch} \left(\frac{c}{k} \right) = \operatorname{ch} \left(\frac{m}{k} \right) \cdot \left[\operatorname{ch} \left(\frac{b}{k} \right) \cdot \operatorname{ch} \left(\frac{b_1}{k} \right) - \operatorname{sh} \left(\frac{b}{k} \right) \cdot \operatorname{sh} \left(\frac{b_1}{k} \right) \right].$$

Felhasználva a $\operatorname{ch} \frac{b_1}{k}$ kifejezésre kapott eredményt, adódik, hogy

$$\operatorname{ch} \left(\frac{c}{k} \right) = \operatorname{ch} \left(\frac{b}{k} \right) \cdot \operatorname{ch} \left(\frac{a}{k} \right) - \operatorname{sh} \left(\frac{b}{k} \right) \cdot \operatorname{sh} \left(\frac{b_1}{k} \right) \cdot \operatorname{ch} \left(\frac{m}{k} \right).$$

A (3)-as összefüggést alkalmazva $\operatorname{sh} \frac{b_1}{k}$ -re:

$$\operatorname{ch} \left(\frac{c}{k} \right) = \operatorname{ch} \left(\frac{b}{k} \right) \cdot \operatorname{ch} \left(\frac{a}{k} \right) - \operatorname{sh} \left(\frac{b}{k} \right) \cdot \operatorname{th} \left(\frac{b_1}{k} \right) \cdot \operatorname{ch} \left(\frac{b_1}{k} \right) \cdot \operatorname{ch} \left(\frac{m}{k} \right).$$

A $BCT\Delta$ derékszögű háromszögben érvényes összefüggések alapján:

$$\operatorname{ch} \left(\frac{c}{k} \right) = \operatorname{ch} \left(\frac{b}{k} \right) \cdot \operatorname{ch} \left(\frac{a}{k} \right) - \operatorname{sh} \left(\frac{b}{k} \right) \cdot \cos \gamma \cdot \operatorname{th} \left(\frac{a}{k} \right) \cdot \operatorname{ch} \left(\frac{a}{k} \right).$$

Ezek után a (3)-as összefüggéssel közvetlenül adódik a tétel állítása hegyesszögű háromszögekre:

$$\operatorname{ch} \left(\frac{c}{k} \right) = \operatorname{ch} \left(\frac{a}{k} \right) \cdot \operatorname{ch} \left(\frac{b}{k} \right) - \operatorname{sh} \left(\frac{a}{k} \right) \cdot \operatorname{sh} \left(\frac{b}{k} \right) \cdot \cos \gamma.$$

Meg kell említeni azt az esetet, amikor az $ABCD$ háromszög α vagy γ szöge tompaszög.

Ha α tompaszög, akkor a b_2 szakasz $b_2 = b_1 - b$ formában írható fel. Az előzőhöz hasonlóan igazolható a tétel.

Tegyük fel, hogy a háromszög γ szöge a tompaszög. Ekkor a b_2 szakasz a b és b_1 szakaszok összegeként írható fel. Így az $ABT\Delta$ háromszögben felírt összefüggés az alábbiak szerint módosul:

$$\operatorname{ch} \left(\frac{c}{k} \right) = \operatorname{ch} \left(\frac{b_2}{k} \right) \cdot \operatorname{ch} \left(\frac{m}{k} \right) = \operatorname{ch} \left(\frac{b}{k} + \frac{b_1}{k} \right) \cdot \operatorname{ch} \left(\frac{m}{k} \right);$$

$$\operatorname{ch} \left(\frac{c}{k} \right) = \operatorname{ch} \left(\frac{m}{k} \right) \cdot \left[\operatorname{ch} \left(\frac{b}{k} \right) \cdot \operatorname{ch} \left(\frac{b_1}{k} \right) + \operatorname{sh} \left(\frac{b}{k} \right) \cdot \operatorname{sh} \left(\frac{b_1}{k} \right) \right];$$

$$\operatorname{ch} \left(\frac{c}{k} \right) = \operatorname{ch} \left(\frac{b}{k} \right) \cdot \operatorname{ch} \left(\frac{a}{k} \right) + \operatorname{sh} \left(\frac{b}{k} \right) \cdot \operatorname{th} \left(\frac{b_1}{k} \right) \cdot \operatorname{ch} \left(\frac{b_1}{k} \right) \cdot \operatorname{ch} \left(\frac{m}{k} \right).$$

Mivel a koszinusz szögfüggvény tompaszögek esetén negatív értékeket vesz fel, ezért a (10)-es összefüggés alapján igaz a, hogy $\operatorname{th} \left(\frac{b_1}{k} \right) = -\cos \gamma \cdot \operatorname{th} \left(\frac{a}{k} \right)$ egyenlőség. Ennek felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\operatorname{ch} \left(\frac{c}{k} \right) = \operatorname{ch} \left(\frac{b}{k} \right) \cdot \operatorname{ch} \left(\frac{a}{k} \right) + \operatorname{sh} \left(\frac{b}{k} \right) \cdot \left[-\cos \gamma \cdot \operatorname{th} \left(\frac{a}{k} \right) \right] \cdot \operatorname{ch} \left(\frac{a}{k} \right);$$

$$\operatorname{ch} \left(\frac{c}{k} \right) = \operatorname{ch} \left(\frac{a}{k} \right) \cdot \operatorname{ch} \left(\frac{b}{k} \right) - \operatorname{sh} \left(\frac{a}{k} \right) \cdot \operatorname{sh} \left(\frac{b}{k} \right) \cdot \cos \gamma.$$

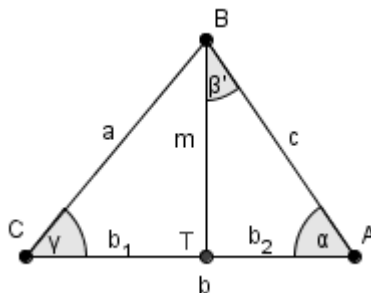
Tétel: Szögekre vonatkozó koszinusztétel

Tetszőleges $ABCD$ modellbeli háromszögben igaz, hogy

$$\cos \gamma = -\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \operatorname{ch} \left(\frac{c}{k} \right).$$

Bizonyítás:

Vegyünk egy tetszőleges hegyesszögű háromszöget a modellben. (Lásd a 17. ábrát.) Húzzuk meg a háromszög b oldalához tartozó magasságvonalat. A magasságvonalat jelöljük m -mel, talppontját a b oldalon pedig T -vel. Legyen $CT = b_1$ és $TA = b_2$.



17. ábra.

Az ABT derékszögű háromszögben (13)-as és (15)-ös egyenletek alapján teljesül, hogy

$$\operatorname{ch} \left(\frac{m}{k} \right) \cdot \operatorname{ch} \left(\frac{b_2}{k} \right) = \operatorname{ch} \left(\frac{c}{k} \right);$$

$$\cos \alpha = \sin \beta' \cdot \operatorname{ch} \left(\frac{m}{k} \right);$$

$$\cos \beta' = \sin \alpha \cdot \operatorname{ch} \left(\frac{b_2}{k} \right).$$

A BCT háromszögben a (15)-ös egyenlőség alapján fennáll, hogy

$$\cos \gamma = \sin(\beta - \beta') \cdot \operatorname{ch} \left(\frac{m}{k} \right).$$

Felhasználva a $\sin(x - y) = \sin x \cdot \cos y - \sin y \cdot \cos x$ összefüggést adódik, hogy:

$$\cos \gamma = \operatorname{ch}\left(\frac{m}{k}\right) \cdot (\sin \beta \cdot \cos \beta' - \sin \beta' \cdot \cos \beta).$$

Alkalmazva az $ABT\Delta$ háromszögben érvényes egyenlőségeket igazak az alábbiak:

$$\cos \gamma = \operatorname{ch}\left(\frac{m}{k}\right) \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha \cdot \operatorname{ch}\left(\frac{b_2}{k}\right) - \operatorname{ch}\left(\frac{m}{k}\right) \cdot \sin \beta' \cdot \cos \beta;$$

$$\cos \gamma = \sin \beta \cdot \sin \alpha \cdot \operatorname{ch}\left(\frac{c}{k}\right) - \cos \alpha \cdot \cos \beta.$$

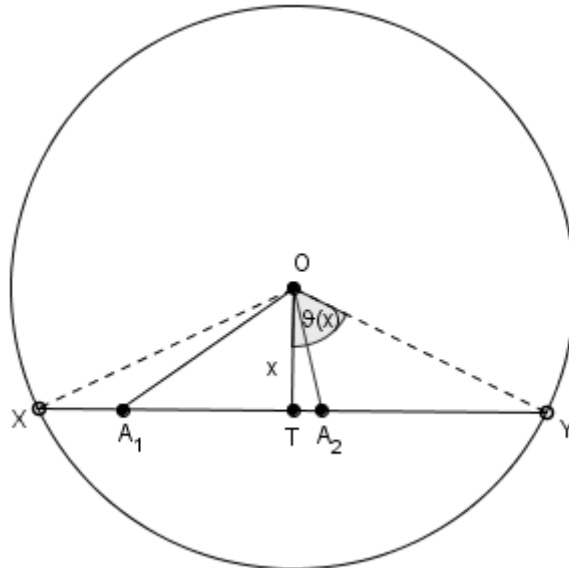
Hasonlóan igaz a tétel akkor is, ha γ tompaszög.

3.4. Parallel szögek a modellben

Definíció: Legyen e a modell egy egyenese, amely nem megy át O -n. Az e egyenes O középponttól vett modellbeli távolságát jelölje x . Az x távolsághoz tartozó parallelszögön a $\vartheta(x) = \sup \{ \angle TOA \mid A \in e \}$ szöget értjük, ahol T az O -ból az e egyeneshez húzott merőleges szakasz talppontját jelöli.

Megjegyzés: A fenti definícióban az A pont befutja a teljes e egyenest. Világos, hogy teljesül a $\vartheta(x) \leq \frac{\pi}{2}$ összefüggés.

A 18. ábrán látható, hogy a modellben $\vartheta(x)$ és x értékek között fordított arányosság áll fenn: minél nagyobb az x távolság, annál kisebb a hozzá tartozó $\vartheta(x)$ parallel szög.



18. ábra.

Tétel: Az x modellbeli távolság és a hozzá tartozó parallel szög között a következő kapcsolatot áll fenn:

$$\vartheta(x) = 2 \cdot \operatorname{arcctg} e^{\frac{x}{k}}.$$

Bizonyítás:

A parallel szögek származtatásához tekintsük a 18. ábrát és azon az $YOT_1\Delta$ derékszögű háromszöget az euklideszi síkon. Ebben a háromszögben a (8)-as és (10)-es egyenletek alapján igaz a következő összefüggés:

$$\cos[\vartheta(x)] = \frac{OT}{OY} = \frac{r \cdot \operatorname{th}\left(\frac{x}{k}\right)}{r} = \operatorname{th}\left(\frac{x}{k}\right) = \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{x}{k}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{x}{k}\right)}.$$

Felhasználva az (1), (2)-es összefüggéseket adódik, hogy

$$\cos[\vartheta(x)] = \frac{e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}}}{e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}} = \frac{e^{\frac{2x}{k}} - 1}{e^{\frac{2x}{k}} + 1}.$$

Algebrai átalakítások után kapjuk a következő összefüggést:

$$e^{\frac{2x}{k}} = \frac{1 + \cos[\vartheta(x)]}{1 - \cos[\vartheta(x)]}.$$

Alkalmazva a $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ és a $\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ addíciós tételt, azt kapjuk, hogy

$$\left(e^{\frac{x}{k}}\right)^2 = \frac{\cos^2\left[\frac{\vartheta(x)}{2}\right]}{\sin^2\left[\frac{\vartheta(x)}{2}\right]} = \operatorname{ctg}^2\left[\frac{\vartheta(x)}{2}\right];$$

$$e^{\frac{x}{k}} = \operatorname{ctg}\left[\frac{\vartheta(x)}{2}\right];$$

$$\vartheta(x) = 2 \cdot \operatorname{arcctg} e^{\frac{x}{k}}.$$

Megjegyzés: A parallelszöget mérő ϑ függvény határértékeire fennáll, hogy

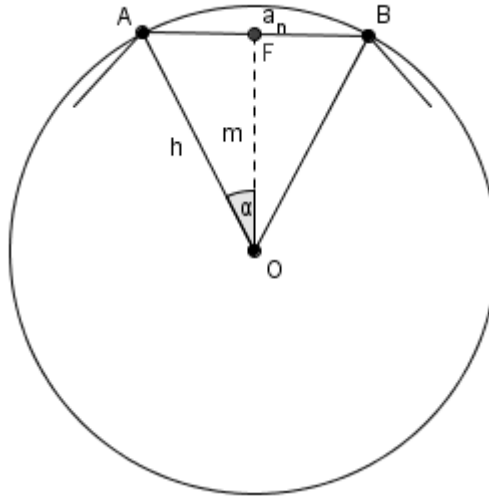
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \vartheta(x) = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \vartheta(x) = \frac{\pi}{2}.$$

3.5. A modellbeli kör kerületének meghatározása

Egy h sugarú kör kerülete a hiperbolikus geometriában és a modellben is, a körbe írható szabályos sokszögek kerületéből határozható meg. Konkrétan a körbe beírt szabályos sokszögek kerületeinek supremumaként kapjuk a kerületet. A modellsíkon a szabályos

sokszögek egy olyan sokszögek, melynek oldalai és szögei páronként egyenlők. A szabályos sokszög köré mindig írható kör.



19. ábra. Illusztráció a kör kerületének meghatározásához

Állítás: Egy h sugarú kör területét a következő képlettel határozhatjuk meg a modellben:

$$K_O = 2 \cdot \pi \cdot k \cdot \text{sh} \left(\frac{h}{k} \right).$$

Bizonyítás:

Jelölje a_n a h sugarú körbe írható n oldalú szabályos sokszög oldalhosszát (19. ábra). A sokszög területét a $K_n = n \cdot a_n$ összefüggéssel határozhatjuk meg. Bővítsük az összefüggést a következő módon:

$$K_n = n \cdot a_n = n \cdot a_n \cdot \frac{2 \cdot k}{2 \cdot k} \cdot \frac{\text{sh} \left(\frac{a_n}{2 \cdot k} \right)}{\text{sh} \left(\frac{a_n}{2 \cdot k} \right)} \cdot \frac{\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}.$$

Az ábrán látható $AOF\Delta$ háromszög derékszögű, amiből következik, hogy $\angle AOF = \frac{\pi}{n}$. Az $\angle AOF$ szög szinuszára a (14)-es egyenlőség alapján fennáll:

$$\sin \left(\frac{\pi}{n} \right) = \frac{\text{sh} \left(\frac{a_n}{2 \cdot k} \right)}{\text{sh} \left(\frac{h}{k} \right)} \rightarrow \text{sh} \left(\frac{a_n}{2 \cdot k} \right) = \sin \left(\frac{\pi}{n} \right) \cdot \text{sh} \left(\frac{h}{k} \right).$$

Helyettesítsük ezt be a K_n -képlet számlálójába:

$$K_n = n \cdot a_n \cdot \frac{2 \cdot k}{2 \cdot k} \cdot \frac{\sin \left(\frac{\pi}{n} \right) \cdot \text{sh} \left(\frac{h}{k} \right)}{\text{sh} \left(\frac{a_n}{2 \cdot k} \right)} \cdot \frac{\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = 2 \cdot \pi \cdot k \cdot \text{sh} \left(\frac{h}{k} \right) \cdot \frac{a_n}{2 \cdot k} \cdot \frac{\sin \left(\frac{\pi}{n} \right)}{\frac{\pi}{n}}.$$

A kör területének meghatározásához $\lim_{n \rightarrow \infty} K_n$ határértékét kell venni. Belátható, hogy ekkor a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ összefüggés is teljesül. Azt kapjuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 \cdot \pi \cdot k \cdot \operatorname{sh} \left(\frac{h}{k} \right) \cdot \frac{\frac{a_n}{2 \cdot k}}{\operatorname{sh} \left(\frac{a_n}{2 \cdot k} \right)} \cdot \frac{\sin \left(\frac{\pi}{n} \right)}{\frac{\pi}{n}} \right) = 2 \cdot \pi \cdot k \cdot \operatorname{sh} \left(\frac{h}{k} \right);$$

ugyanis a szorzat utolsó két tényezője a L'Hospital szabály és az átviteli elv alapján egyez tart, az első négy tényező pedig konstans, hiszen nem függ n -től.

Eszerint egy modellbeli, O középpontú kör kerületét a következő összefüggéssel határozhatjuk meg:

$$K_O = 2 \cdot \pi \cdot k \cdot \operatorname{sh} \left(\frac{h}{k} \right).$$

3.6. A sokszögek szöghiányát leíró függvény és a terület kapcsolata

Vegyünk egy n -oldalú egyszerű sokszöget a modellben. Ha ezt átlókkal felbontjuk háromszögekre, akkor a korábbi eredményünk alapján azt kapjuk, hogy a sokszög belső szögeinek összege kisebb, mint $(n - 2) \cdot \pi$. Ez alapján értelmezni lehet az alábbi fogalmat.

Definíció: Legyen adva a modellben egy n -oldalú Π sokszög. Legyenek $\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n$ a sokszög belső szögei. Ekkor a sokszög defektusán a

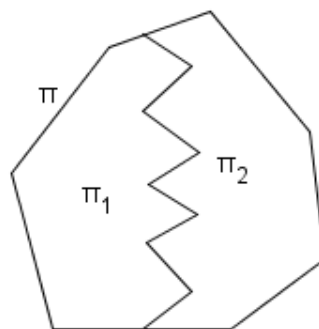
$$\delta(\Pi) = (n - 2) \cdot \pi - \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

pozitív számot értjük.

Jelölje H a modellbeli egyszerű sokszögek halmazát.

Vegyük észre, hogy a H halmazon vett δ függvény teljesíti az alábbi feltételeket:

- (1) Bármely $\Pi \in H$ esetén teljesül, hogy $\delta(\Pi) > 0$.
- (2) Ha Π_1 és Π_2 egybevágó sokszögek, akkor teljesül, hogy $\delta(\Pi_1) = \delta(\Pi_2)$.
- (3) Ha egy Π sokszöget egy belső töröttvonalal felbontjuk a Π_1 és Π_2 sokszögekre, akkor teljesül, hogy $\delta(\Pi) = \delta(\Pi_1) + \delta(\Pi_2)$.



20. ábra

A sokszögek területének mérésére a δ függvény egy konstans szorosát alkalmazhatjuk. Megállapodás szerint $T(\Pi) = k^2 \cdot \delta(\Pi)$ összefüggéssel értelmezzük a Π sokszög területét.

3.7. A modellbeli kör területének meghatározása

Végezetül a kör területére vonatkozó formulát igazoljuk az analízis eszközeinek felhasználásával.

Állítás: Egy modellbeli h sugarú körlemez területe:

$$T_O = 4 \cdot \pi \cdot k^2 \cdot \text{sh}^2\left(\frac{h}{2 \cdot k}\right).$$

Bizonyítás:

A tétel igazolásához bontsuk fel a körlemezt olyan körgyűrűkre, melyeknek páronként nincsen közös belső pontja. Ekkor a körlemez területét a körgyűrűk területeinek összegeként is megkaphatjuk. Abban az esetben, ha a körgyűrűk vastagsága igen kicsi, akkor az egyes körgyűrűk területét a gyűrűket határoló körök kerületének és a vastagságának szorzatával lehet közelíteni. Ezen elv alapján, a körlemez területének meghatározásához integráljuk a kerület kifejezésére nyert függvényt 0 -tól h -ig:

$$T_O = \int_0^h 2 \cdot \pi \cdot k \cdot \text{sh}\left(\frac{x}{k}\right) dx = 2 \cdot \pi \cdot k \cdot \int_0^h \text{sh}\left(\frac{x}{k}\right) dx.$$

Felhasználva, hogy a $\text{sh } x$ függvény primitív függvénye a $\text{ch } x$, adódik, hogy

$$T_O = 2 \cdot \pi \cdot k \cdot \left[k \cdot \text{ch}\left(\frac{x}{k}\right) \right]_0^h = 2 \cdot \pi \cdot k^2 \cdot \left(\text{ch}\left(\frac{h}{k}\right) - 1 \right).$$

A $\text{ch}(2x) = \text{sh}^2 x + \text{ch}^2 x$ egyenlőség és az (5)-ös összefüggés felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$T_O = 2 \cdot \pi \cdot k^2 \cdot \left[\text{sh}^2\left(\frac{h}{2 \cdot k}\right) + \text{ch}^2\left(\frac{h}{2 \cdot k}\right) - 1 \right] = 2 \cdot \pi \cdot k^2 \cdot 2 \cdot \text{sh}^2\left(\frac{h}{2 \cdot k}\right);$$

$$T_O = 4 \cdot \pi \cdot k^2 \cdot \text{sh}^2\left(\frac{h}{2 \cdot k}\right).$$

Irodalomjegyzék

- [1] H. S. M. Coxeter: *A geometriák alapjai*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1987.
- [2] Csikós Balázs - Kiss György: *Projektív geometria*. Polygon, Szeged, 2011.
- [3] Hajós György: *Bevezetés a geometriába*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1999.
- [4] Reimann István: *A geometria és határterületei*. Gondolat Kiadó, Budapest, 1986.
- [5] Strohmajer János: *A geometria alapjai*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2006.
- [6] Verhóczy László: *Axiómák és modellek*. (Interneten elérhető jegyzet.)
<http://www.cs.elte.hu/geometry/vl/Axiomak2010.pdf>