AFFIN LEKÉPEZÉSEK

SZAKDOLGOZAT

KÉSZÍTETTE: Csatári Tamara

Matematika BSc

tanári szakirány

TÉMAVEZETŐ: Szeghy Dávid

tanársegéd

Geometriai Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

2013

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás

Ezúton is szeretném köszönetemet kifejezni témavezetőmnek, Szeghy Dávidnak, aki a témaválasztástól az utolsó simításokig végigkísért a munkámban, ötleteivel, tanácsaival, magyarázataival folyamatosan támogatva ezen dolgozat elkészülését. Hálás vagyok, hogy a felmerülő kérdéseimmel bátran fordulhattam hozzá, válaszai, észrevételei sokat segítettek abban, hogy a feldolgozott téma mind inkább teljes egésszé álljon össze.

Bevezetés

Affin leképezésekkel hosszú idők óta nap mint nap találkozik az ember. A napóra pálcájának vagy egy ház falának árnyékát például egy speciális affinitás, a párhuzamos vetítés segítségével kapjuk meg az eredeti tárgyból. Ha adott ugyanis egy e egyenes, akkor az olyan síkot síkra képező vetítéseket, melyek során egy pont és képe által megadott egyenes párhuzamos e-vel, párhuzamos vetítéseknek nevezzük [3] alapján.

A fenti példát szem előtt tartva megállapíthatjuk, hogy az affin leképzésekre – legalábbis ebben a speciális esetben – teljesülnek bizonyos tulajdonságok. Az árnyékokra gondolva láthatjuk, hogy ezek a leképezések egyeneseket egyenesekbe, sőt párhuzamos egyeneseket párhuzamos egyenesekbe képeznek, ugyanakkor például nem szögtartók, illetve a távolságokat sem tartják meg. Az a benyomásunk tehát, hogy az affinitások különböznek az általános- és középiskolai tanulmányaink során megismert egybevágóságoktól és hasonlóságoktól. Valóban, ebben a dolgozatban a leképezések egy új fajtájával ismerkedhetünk meg.

Szakdolgozatomban az affin leképezések általános vizsgálatával foglalkozom. Az 1. fejezetben a későbbi meghatározásokhoz szükséges bevezető algebrai fogalmak és segédállítások mellett megismerkedhet az Olvasó az affin terekkel és azok különféle objektumaival. A 2. fejezetben az affinitások definiálása után a leképezés tulajdonságaival találkozhatunk. Megmutatjuk többek között, hogy a fent említett egyenes- és párhuzamosságtartás nemcsak a párhuzamos vetítések esetén, hanem általánosan is igaz az affin leképezésekre, illetve megadunk egy olyan mennyiséget, amely például az euklideszi térben az affinitások során változatlan marad. A 3. fejezetben ismét egy új struktúrát és leképezést ismerhetünk meg: a projektív tereket és a kollineációkat. A 4. fejezetben végül egy alkalmazást mutatunk meg, mely az előbb említett projektív terek és az affin terek, illetve a kollineációk és az affinitások közötti kapcsolaton alapszik.

1. fejezet
Az affin tér

Az affin leképezések vizsgálatához szükségünk van az affin tér, illetve az affin altér definíciójára. Ezek meghatározásakor felhasználunk néhány alapvető algebrai fogalmat, a test feletti vektorterek, a lineáris alterek és a vektortér dimenziójának fogalmát. Ezeket az alábbiakban definiáljuk. Az ebben a fejezetben használt algebrai fogalmak részletesen megtalálhatók [2]-ben.

Mielőtt a test feletti vektortereket definiálnánk, megnézzük, mit értünk test alatt.

1.1. Definíció: Legyen T egy legalább kételemű halmaz. A T halmazt *test*nek nevezzük, ha

(1) T-n értelmezve van egy összeadásnak nevezett $+ : \mathrm{T} \times \mathrm{T} \to \mathrm{T}$ és egy szorzásnak nevezett $\cdot : \mathrm{T} \times \mathrm{T} \to \mathrm{T}$ kétváltozós művelet;

(2) az összeadásra teljesülnek az alábbi tulajdonságok:
- $(a + b) + c = a + (b + c)\ \ \forall a, b, c \in \mathrm{T}$ (asszociativitás);
- $a + b = b + a\ \ \forall a, b \in \mathrm{T}$ (kommutativitás);
- $\exists 0 \in \mathrm{T}$, amelyre $a + 0 = 0 + a = a\ \ \forall a \in \mathrm{T}$ (nullelem létezése);
- $\forall a \in \mathrm{T}$, $\exists(-a) \in \mathrm{T}$, amelyre $a + (-a) = 0$ (ellentett létezése);

(3) a szorzásra teljesülnek az alábbi tulajdonságok:
- $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)\ \ \forall a, b, c \in \mathrm{T}$ (asszociativitás);
- $a \cdot b = b \cdot a\ \ \forall a, b \in \mathrm{T}$ (kommutativitás);
- $\exists e(\neq 0) \in \mathrm{T}$, amelyre $a \cdot e = e \cdot a = a\ \ \ \forall a \in \mathrm{T}$ (egységelem létezése);
- $\forall a \neq 0 \in \mathrm{T}$, $\exists a^{-1} \in \mathrm{T}$, amelyre $a \cdot a^{-1} = e$ (inverz létezése);

(4) a szorzás disztributív az összeadásra nézve, azaz $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ $\forall a, b, c \in \mathrm{T}$.

Itt megjegyezzük, hogy a szorzást a későbbiekben általában a $\cdot$ jel elhagyásával jelöljük, azaz például a $\cdot$ b helyett ab-t írunk.

Az egyik legegyszerűbb példa testre a valós vagy a komplex számok halmaza, melyeket a megszokott módon $\mathbb{R}$-rel, illetve $\mathbb{C}$-vel jelölünk. Ezen halmazokkal foglalkozva felmerülhet a kérdés, hogy kaphatunk-e valamilyen módon ezeknél tágabb halmazokat. Például amikor a valós számok helyett a valós számsíkkal foglalkozunk, akkor bizonyos értelemben egy bővebb halmazzal dolgozunk. Ha a valós esethez hasonlóan tetszőleges test esetén is szeretnénk valamiféle kiterjesztett, bővebb halmazt kapni, akkor eljuthatunk a test feletti vektorterek fogalmához.

1.2. Definíció: Egy V nemüres halmaz *vektortér* (más néven *lineáris tér*) a T test felett, ha teljesülnek az alábbi kikötések:

(1) V-n értelmezve van egy összeadásnak nevezett $+ : V \times V \to V$ kétváltozós művelet, melyre
- $(\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} = \underline{u} + (\underline{v} + \underline{w}) \quad \forall \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in V$ (asszociativitás);
- $\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u} \quad \forall \underline{u}, \underline{v} \in V$ (kommutativitás);
- $\exists \underline{0} \in V$, amelyre $\underline{u} + \underline{0} = \underline{u} \quad \forall \underline{u} \in V$ (nullelem létezése);
- $\forall \underline{u} \in V$, $\exists -\underline{u} \in V$, amelyre $\underline{u} + (-\underline{u}) = \underline{0}$ (ellentett létezése);

(2) V-n értelmezve van egy skalárral való szorzásnak nevezett $T \times V \to V$ függvény, amely $\forall \lambda \in T$ és $\underline{u} \in V$ elempárhoz egyértelműen hozzárendel egy $\lambda\underline{u} \in V$ elemet úgy, hogy
- $(\lambda + \mu)\underline{u} = \lambda\underline{u} + \mu\underline{u} \quad \forall \lambda, \mu \in T$ és $\underline{u} \in V$;
- $\lambda(\underline{u} + \underline{v}) = \lambda\underline{u} + \lambda\underline{v} \quad \forall \lambda \in T$ és $\underline{u}, \underline{v} \in V$;
- $(\lambda\mu)\underline{u} = \lambda(\mu\underline{u}) \quad \forall \lambda, \mu \in T$ és $\underline{u} \in V$;
- $e\underline{u} = \underline{u} \quad \forall \underline{u} \in V$, ahol e a T test egységeleme.

Elnevezés: a T test elemeit *skalárok*nak, a V halmaz elemeit pedig *vektorok*nak nevezzük.

Amikor vektorterekkel foglalkozunk, akkor szükségünk lehet bizonyos objektumokra. Mindenki által ismert például az euklideszi sík, vagy az euklideszi tér mint valós számok feletti vektortér, melyekben vizsgálhatunk helyvektorok segítségével megadott pontokat, egyeneseket. Most bevezetünk egy definíciót, ami általánosan meghatároz ezekhez hasonló objektumokat.

1.3. Definíció: Egy T test feletti V vektortér valamely W nemüres részhalmazát *lineáris altér*nek nevezzük, ha

(1) $\underline{u}, \underline{v} \in W \Rightarrow \underline{u} + \underline{v} \in W$;

(2) $\underline{u} \in W$ és $\lambda \in T \Rightarrow \lambda\underline{u} \in W$;

azaz ha W zárt az összeadás és a skalárral való szorzás műveletére.

Ezekre az algebrai fogalmakra építve már meghatározhatjuk, mit értünk affin altér alatt. Látni fogjuk, hogy minden lineáris altér egyben affin altér is, így ebben a lépésben is az előző fogalom egyfajta kibővítését kapjuk.

1.4. Definíció: Legyen W lineáris altér egy T test feletti V vektortérben, $\underline{u}$ pedig egy V-beli tetszőleges vektor. Ekkor az $\underline{u} + W = \{\underline{u} + \underline{w} \mid \underline{w} \in W\}$ halmazokat *affin alterek*nek nevezzük.

1.5. Állítás: *Affin alterek metszete affin altér.*

Bizonyítás: Megmutatható a [2] könyv 107-108. oldalán található feladatok alapján. □

A következő meghatározáshoz, valamint a későbbiekben is felhasználunk néhány lineáris algebrából ismert fogalmat: a *lineáris kombináció*, a *generátorrendszer*, a *függetlenség* és a *bázis* fogalmát. Ezeket külön nem definiáljuk, a meghatározások és a megértést segítő példák megtalálhatók [2]-ben.

1.6. Definíció: Egy V vektortér bázisának elemszámát a *vektortér dimenziójá*nak nevezzük, és dimV-vel jelöljük. A dimenzió fogalmát a $\{\underline{0}\}$ vektortérre, illetve olyan vektorterekre is értelmezzük, amelyeknek nincs véges generátorrendszere: az előbbi dimenziója definíció szerint 0, az utóbbié végtelen.

1.7. Megjegyzés: Az üreshalmaz dimenziója: $\dim\{\emptyset\} = -1$, ezt fel fogjuk használni a későbbiekben.

1.8. Állítás (Dimenzióformula): *Legyenek W_1 és W_2 lineáris alterek a V vektortérben. Ekkor $dim\langle W_1, W_2\rangle = dimW_1 + dimW_2 - dim(W_1 \cap W_2)$, ahol $\langle W_1, W_2\rangle$ a W_1 és W_2 alterek által generált altér.*

Bizonyítás: A részletes bizonyítás megtalálható az [1] könyv 23. oldalán, vagy meggondolható a [2] könyv 131. oldalán leírtak alapján is. □

Fontos látni, hogy az 1.8. Állítás lineáris alterekre teljesül, affin alterek esetén azonban nem feltétlenül igaz, erre az 1.12. Megjegyzésben mutatunk példát.

1.9. Állítás: *Egy k-dimenziós affin altérhez és egy nem benne fekvő ponthoz egyértelműen létezik olyan k+1-dimenziós affin altér, amely ezeket tartalmazza.*

Bizonyítás: Jelöljük a V vektortérben W_1-gyel a k-dimenziós affin alteret, W_2-vel pedig a nem benne fekvő pontot mint affin alteret. Feltehető, hogy W_1 tartalmazza a V vektortér origóját, mert ha nem, akkor eltolhatjuk a vektorteret úgy, hogy az origója, azaz a nullvektor által megadott 0 pont része legyen W_1-nek. A definícióból látható ugyanis, hogy az affin alterek invariánsak az eltolásra, azaz egy tetszőleges vektorral való eloltás után továbbra is affin alterek maradnak. Ha W_2 pont helyett az $\overline{OW_2}$ egyenest tekintjük, akkor a W_1 és az $\overline{OW_2}$ is lineáris alterek a V-ben, így alkalmazható rájuk az 1.8. Állításban megadott dimenzióformula. Tudjuk egyrészt, hogy $\dim W_1 = k$ és $\dim\overline{OW_2} = 1$, másrészt $\dim\left(W_1 \cap \overline{OW_2}\right) = 0$. A dimenzióformulával ez azt jelenti, hogy $\dim\langle W_1, W_2\rangle = \dim\langle W_1, \overline{OW_2}\rangle = k + 1 - 0 = k + 1$, azaz valóban azt kaptuk, hogy a legszűkebb affin altér, mely W_1-et és W_2-t tartalmazza, k+1 dimenziós.
Az egyértelműséget kell még belátnunk. Legyen H (k+1)-dimenziós affin altér, mely tartalmazza a W_1 és W_2 affin altereket. Mivel $\langle W_1, W_2\rangle$ a legszűkebb affin altér, amelynek W_1 és W_2 része, ezért $\langle W_1, W_2\rangle \subset H$. Tudjuk viszont, hogy $\langle W_1, W_2\rangle$ bázisa bázisa H-nak is, hiszen mindkét affin altér (k+1)-dimenziós. Így $\langle W_1, W_2\rangle = H$ minden $W_1, W_2 \subset H$ affin altérre, azaz nincs több W_1-et és W_2-t tartalmazó affin altér. □

A T test feletti n-dimenziós vektorterekre mostantól a T^n jelölést is használjuk, speciálisan például a valós test feletti n-dimenziós vektorteret $\mathbb{R}^n$-nel jelöljük.

Az alábbiakban az [5]-ben található definíció segítségével határozunk meg egy illeszkedési struktúrát az [1] 24-25. oldalán a projektív esetre megadottakhoz hasonlóan.

1.10. Definíció: Tekintsünk egy T test feletti n-dimenziós vektorteret, melynek dimenziója legalább kettő.
Az affin tér *pontjai* legyenek T^{n} vektorai, az *egyenesek* pedig az egydimenziós affin alterek. Magasabb dimenzióban a 2-dimenziós affin altereket *síkok*nak, a k-dimenziós affin altereket *k-síkok*nak, az (n-1)-dimenziós affin altereket pedig *hipersíkok*nak nevezzük.
Ha egy pont mint T^{n}-beli vektor eleme egy egyenesnek mint affin altérnek, azt mondjuk, hogy a pont illeszkedik az egyenesre. Hasonlóan egy tetszőleges K_1 affin altérről azt mondjuk, hogy része egy K_2 affin altérnek, ha K_1 minden eleme eleme K_2-nek is.
Az így kapott illeszkedési struktúra a T test feletti *affin ter*et adja meg.

1.11. Megjegyzés: Szemléletesen azt mondhatjuk, hogy egy lineáris térből úgy kapunk affin teret, ha az origó kitüntetett szerepéről megfeledkezünk, és fordítva: egy affin térből vektorteret kapunk, ha kijelölünk egy kitüntetett pontot. Így ha X affin tér, melynek $\mathrm{O} \in \mathrm{X}$ egy pontja, akkor az X affin térből az O pont kitüntetésével nyert vektortér: $(\mathrm{X}, \mathrm{O}) = \mathrm{V}$.

1.12. Megjegyzés: A dimenzióformula affin alterekre nem feltétlenül teljesül. Felhasználva az 1.7. Megjegyzést, ha például az e és f egy síkban fekvő egyeneseknek nincs közös pontja, akkor a dimenzióformula alapján $\dim\langle \mathrm{e}, \mathrm{f} \rangle = 1 + 1 - (-1) = 3$ teljesülne, holott tudjuk, hogy az egyenesek által generált altér egy sík.

Ha az euklideszi térben, azaz a 3-dimenziós valós test feletti vektortérben dolgozunk, számos tulajdonságot természetesnek gondolunk. Felmerül azonban a kérdés, hogy például a 3-dimenziós affin térben, sőt magasabb dimenziójú affin terek esetén ezek teljesülnek-e. Az alábbiakban tetszőleges test feletti affin terek két, jelen dolgozat szempontjából fontos tulajdonságát mutatjuk meg.

1.13. Lemma: *Rögzítsünk a T test feletti X affin térben egy O pontot, az $(X, O) = V$ vektortér origóját. Legyen A és B az affin tér két különböző pontja, és $\overrightarrow{OA} := \underline{a}$, illetve $\overrightarrow{OB} := \underline{b}$. Ekkor egy $C \in X$ pont akkor és csak akkor illeszkedik az A és B pontok által meghatározott $\overline{AB}$ egyenesre, ha $\overrightarrow{OC} := \underline{c} = (1-\gamma)\underline{a} + \gamma\underline{b}$.*

Bizonyítás: Mivel A és B két különböző pont, ezért az 1.9. Lemma miatt egy 1-dimenziós affin alteret adnak meg, az $\overline{\mathrm{AB}}$ egyenest. Az affin egyenesek definíciója szerint ekkor az $\overline{\mathrm{AB}}$ egyenes egy 1-dimenziós lineáris altér egy $\underline{\mathrm{e}}$ vektorral vett eltoltja, ahol a lineáris altér az 1.6. Definíció alapján egyetlen vektorral generálható. Könnyen látható, hogy a generáló vektorok, melyeket az 1-dimenziós lineáris altér irányvektorainak nevezünk, egymás nem nulla testbeli skalárszorosai. Válasszunk tehát ezen irányvektorok közül egyet, $\underline{\mathrm{v}}$-t. Mivel ekkor az $\underline{\mathrm{a}} - \underline{\mathrm{e}}$ vektor az 1-dimenziós lineáris altérben fekszik, felírható a $\underline{\mathrm{v}}$ skalárszorosaként: $\underline{\mathrm{a}} - \underline{\mathrm{e}} = \mathrm{c}\underline{\mathrm{v}}$, ahol $\mathrm{c} \in \mathrm{T}$. Emiatt a lineáris altér egy tetszőleges pontjának $\underline{\mathrm{e}}$ vektorral vett eltoltjára $\mathrm{k}\underline{\mathrm{v}} + \underline{\mathrm{e}} = $ $= \mathrm{k}\underline{\mathrm{v}} + \underline{\mathrm{a}} - \mathrm{c}\underline{\mathrm{v}} = (\mathrm{k} - \mathrm{c})\underline{\mathrm{v}} + \underline{\mathrm{a}}$ teljesül. Azt látjuk tehát, hogy a lineáris alteret $\underline{\mathrm{e}}$-vel és $\underline{\mathrm{a}}$-val eltolva is ugyanazt az $\overline{\mathrm{AB}}$ affin egyenest kapjuk, azaz az $\overline{\mathrm{AB}}$ egyenes tetszőleges D pontjára $\overrightarrow{\mathrm{OD}} := \underline{\mathrm{d}} = \underline{\mathrm{a}} + \delta\underline{\mathrm{v}}$, hogy $\delta \in \mathrm{T}$. Így speciálisan a B pontra $\underline{\mathrm{b}} = \underline{\mathrm{a}} + \beta\underline{\mathrm{v}}$, ahol $\beta \in \mathrm{T}$. Ezt átrendezve $\underline{\mathrm{b}} - \underline{\mathrm{a}} = \beta\underline{\mathrm{v}}$, tehát a $\underline{\mathrm{b}} - \underline{\mathrm{a}}$ vektor is irányvektora a lineáris altérnek. Az O pontot és az $\overline{\mathrm{AB}}$ egyenest tartalmazó sík egy tetszőleges C pontja pontosan akkor illeszkedik az $\overline{\mathrm{AB}}$ egyenesre, ha felírható az $\underline{\mathrm{a}}$ vektor és a lineáris altér egy alkalmas T testbeli skalárral megszorzott irányvektorának összegeként, azaz ha $\underline{\mathrm{c}} = \underline{\mathrm{a}} + \gamma(\beta\underline{\mathrm{v}}) = \underline{\mathrm{a}} + \gamma(\underline{\mathrm{b}} - \underline{\mathrm{a}}) = (1-\gamma)\underline{\mathrm{a}} + \gamma\underline{\mathrm{b}}$, ahol $\gamma \in \mathrm{T}$. □

A következő segédállítás kimondása előtt nézzük meg, hogy az 1.10. Definícióban megadott struktúrában mit értünk párhuzamosság alatt.

1.14. Definíció: Ha két k-dimenziós affin altér egy (k+1)-dimenziós affin altérben van, és nincs közös pontjuk, akkor *párhuzamos affin altereknek* nevezzük őket. Speciálisan, ha két diszjunkt egyenes egy síkban fekszik, akkor azt mondjuk, hogy a két egyenes párhuzamos.

A párhuzamosság jelölésére a továbbiakban a $\parallel$ jelet használjuk.

1.15. Lemma: *Legyen S a T test feletti X affin térben egy sík, $e \subset S$ egyenes és $P \in S$ olyan pont, mely nem illeszkedik az e egyenesre. Ekkor egyértelműen létezik olyan P-n átmenő $f \subset S$ egyenes, melyre $e \parallel f$.*

Bizonyítás: Rögzítsünk egy 0 pontot az S síkon, mely rajta van az e egyenesen. Legyen f a $\{\underline{p} + \alpha\underline{v}\}$ ponthalmaz, ahol $\underline{p}$-vel az $\overrightarrow{OP}$ vektort, míg $\underline{v}$-vel az e egyenes egy irányvektorát jelöljük, és α T-beli skalár. Ekkor tudjuk, hogy f affin egyenes, hiszen ha az S síkot mint vektorteret tekintjük, melynek origója 0, akkor az 1.4. Definíció értelmében a fenti ponthalmaz affin alteret ad meg, amely 1-dimenziós. Azt állítjuk, hogy az így kapott f egyenesnek nincs közös pontja e-vel, és f-en kívül nincs más ilyen egyenes. Vizsgáljuk meg ehhez, hogy egy olyan egyenes, amely tartalmazza P-t, mikor metszi az e egyenest.

Tekintsünk tehát egy, a P ponton áthaladó g egyenest az S síkon. Ha a síkra mint vektortérre tekintünk, akkor jelöljük g_0-lal azt az 1-dimenziós lineáris alteret, melynek g az eltoltja. A g_0 egyenes egy irányvektora, $\underline{w}$ tehát irányvektora g-nek is. Mivel az S síkon $\underline{p}$ és $\underline{v}$ bázis alkot, ezért létezik olyan $\alpha, \beta \in T$, melyre $\underline{w} = \alpha\underline{p} + \beta\underline{v}$. Legyen az e és g egyenes metszéspontja M. Mivel az M pont eleme az e egyenesnek, ezért az $\overrightarrow{OM} = \underline{m}$ vektor felírható az alábbi alakban: $\underline{m} = c\underline{v}$, ahol $c \in T$. Tudjuk azonban azt is, hogy az M pont illeszkedik a g egyenesre is, azaz $\exists k \in T, \underline{m} = \underline{p} + k\underline{w}$. A fenti két egyenlet pontosan akkor teljesülhet, azaz tehát e-nek és g-nek akkor és csak akkor létezik metszéspontja, ha $c\underline{v} = \underline{m} = \underline{p} + k\underline{w}$. A $\underline{w}$ vektort $\underline{p}$ és $\underline{v}$ segítségével felírva azt kapjuk, hogy $c\underline{v} = \underline{p} + k\left(\alpha\underline{p} + \beta\underline{v}\right)$. Az egyenletet kibontva $c\underline{v} = (1 + k\alpha)\underline{p} + k\beta\underline{v}$ adódik. Mivel $\underline{p}$ és $\underline{v}$ bázist alkot, ezért a fenti egyenlet csak úgy teljesülhet, ha egyrészt $0 = 1 + k\alpha$, másrészt $c = k\beta$.

Legyen $k = -\frac{1}{\alpha}$, illetve $c = -\frac{\beta}{\alpha}$. Jól látszik, hogy az így megadott k és c pontosan akkor lesz jól definiált, ha $\alpha \neq 0$, hiszen egy testben ekkor értelmezhető a fenti osztás. Így ha $\alpha \neq 0$, akkor találtunk alkalmas c és k skalárokat, melyekre $\underline{m} = c\underline{v}$ és $\underline{m} = \underline{p} + k\underline{w}$ teljesül, azaz e és g metszik egymás, és fordítva: ha létezik metszéspont, akkor találhatók a fenti módon alkalmas skalárok. Azonban ha $\alpha = 0$, akkor $\underline{w} = \beta\underline{v}$, azaz a g és az f egyenes egybeesik, hiszen irányvektoraik csak skalárszoros erejéig térnek el, és egy ponton haladnak át. □

Megjegyezzük, hogy az 1.15. Lemma nemcsak a fent igazolt speciális esetben teljesül, hanem általánosan is igaz: egy K^{k+1} (k+1)-dimenziós affin altérben egy K_1^k k-dimenziós affin altérhez és egy nem benne fekvő P ponthoz, melyre $P \in K^{k+1}$ egyértelműen létezik olyan $K_2^k \subset K^{k+1}$ k-dimenziós affin altér, melyre $K_1^k \parallel K_2^k$.

2. fejezet
Affin leképezések

Az affin leképezések definiálására több út is létezik. Megadhatók az affinitások úgy, mint bijektív, egyenestartó, párhuzamosságtartó és osztóviszonytartó leképezések, de belátható, hogy például ez utóbbi két tulajdonság levezethető úgy is, ha a meghatározásban csak a bijektivitás és az egyenestartás van megkövetelve. Ebben a dolgozatban mi egy még gyengébb definícióból indulunk ki, és megmutatjuk, hogy ennyi is elég ahhoz, hogy – többek között – a fent említett tulajdonságok teljesüljenek. A 2. fejezetben az [1] irodalomból több, a projektív terekre kimondott állítást és bizonyítást felhasználunk az affin esetre átdolgozva.

2.0.1. Definíció: Egy $\phi: X \to Y$ két n-dimenziós, ugyanazon test feletti affin tér közti bijekciót *affin leképezés*nek (röviden *affinitás*nak) nevezünk, ha bármely három X-ben kollineáris pont képe kollineáris Y-ban.

Megjegyezzük, hogy egy X-beli objektum, például P pont affin képére a dolgozatban kétféle jelölést is használunk, néha $\phi(P)$-vel, míg máskor P'-vel jelöljük. Ez a két jelölési mód akár egy bizonyításon belül is megjelenhet, ám ilyenkor minden esetben mindkét jelölés ugyanarra az objektumra utal.

2.1. Az affin leképezések általános tulajdonságai

Az alábbiakban azt vizsgáljuk, hogy milyen tulajdonságokkal rendelkeznek a 2.0.1. Definícióval megadott affin leképezések.

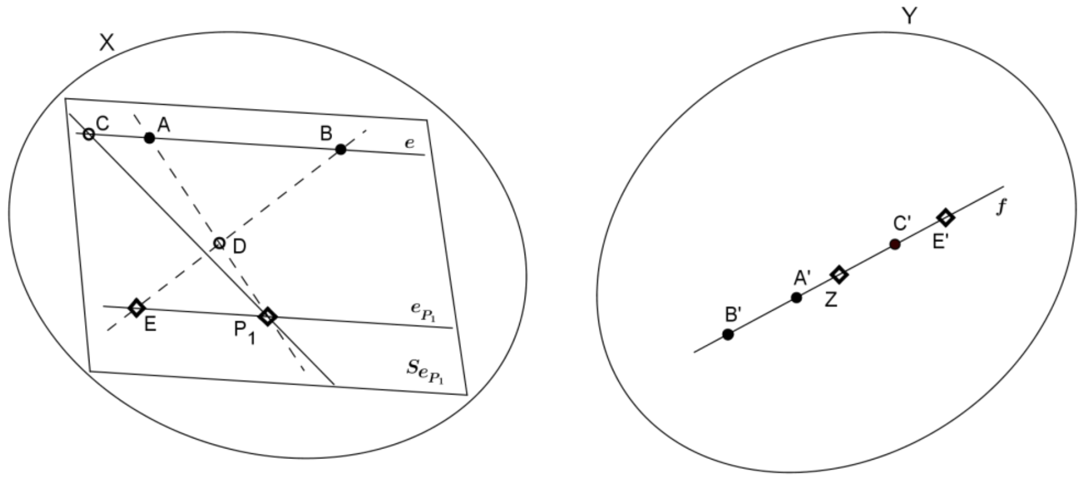
2.1.1. Lemma: *Az affin leképezések során egyenes egyenesbe képződik.*

Bizonyítás: Vegyünk egy $e \subseteq X$ egyenest, és rajta két különböző pontot, A-t és B-t. Ezen pontok képe, $\phi(A)$ és $\phi(B)$ nem esik egybe, hiszen a ϕ affinitás injektív leképezés. Így ez a két képpont meghatároz egy egyenest Y-ban, jelöljük ezt f-fel. A definícióból adódóan ekkor egy tetszőleges A-tól és B-től $C \in e$ pont képe, $\phi(C) \in f$. Tudjuk tehát, hogy $\phi(e) \subset f$. □

2.1.2. Lemma: *Minden egyenes affin képe egyenes, azaz az affinitás egyenest egyenesre képez.*

Bizonyítás: A 2.1.1. Lemma bizonyításában használt jelölésekkel itt azt szeretnénk belátni, hogy $\phi(e) = f$. Indirekt tegyük fel ehhez, hogy $f \setminus \phi(e) \neq \emptyset$, azaz van olyan Z pont, ami rajta van f-en, és nem eleme $\phi(e)$-nek. Mivel ϕ bijektív leképezés, $\exists P_1 \in X$ pont, amire $\phi(P_1) = Z$, és ekkor $P_1 \notin e$, hiszen $Z \notin \phi(e)$. Vegyünk az e egyenesen egy A-tól és B-től különböző tetszőleges pontot, jelöljük ezt C-vel. Tekintsük a $\overline{P_1C}$ egyenes képét. A 2.1.1. Lemmában igazoltak alapján ekkor $\phi(\overline{P_1C})$ része a $\phi(P_1)$ és $\phi(C)$ által meghatározott egyenesnek, és tudjuk, hogy $\phi(P_1) = Z$, valamint $\phi(C) \in f$, mert C rajta van az e egyenesen és $\phi(e) \subset f$. Ezekből az adódik, hogy $\overline{P_1C}$ egyenes az f egyenesbe képződik. Mivel a C pontot tetszőlegesen megválaszthatjuk az e egyenesen, az e és P_1 által meghatározott S_{e,P_1} sík minden egyenesének képéről láthatjuk az előbbiek alapján, hogy része az f egyenesnek, kivéve a P_1-en átmenő e-vel párhuzamos egyenest, melyet jelöljünk e_{P_1}-el, hiszen az 1.15. Lemmából tudjuk, hogy ez az egyedüli olyan P_1-et tartalmazó egyenes az S_{e,P_1} síkon, melynek nincs közös pontja e-vel.

Azt állítjuk, hogy az e_{P_1} egyenes képe is az f-re képződik. Vegyünk az $\overline{AP_1}$ egyenesen egy A-tól és P_1-től különböző D pontot úgy, hogy a D és B pontok által meghatározott egyenes e_{P_1}-el vett metszéspontja legyen E. Ha nem létezne ilyen E pont, akkor a D pont rajta lenne az e egyenesen, mert az 1.15. Lemma miatt egyetlen B-n átmenő e_{P_1}-el párhuzamos egyenes létezik, az e. Ekkor viszont mivel A is eleme e-nek, P_1 rajta lenne az e-n, így ellentmondásra jutnánk. $B,D \in S_{e,P_1} \setminus e_{P_1}$, ezért $\phi(B)$ és $\phi(D)$ f-beli pontok lesznek. Ekkor $\overline{BD}$ egyenest a ϕ leképezés f-be viszi, és mivel $E \in \overline{BD}$, így E képe is rajta lesz az f egyenesen. Azt kell még ellenőriznünk, hogy $E \neq P_1$. Tegyük fel ehhez, hogy $E = P_1$, azaz $\overline{BD} \cap e_{P_1} = P_1$. Ekkor a D és a P_1 pont is rajta van az $\overline{AD}$ és a $\overline{BD}$ egyenesen is, azaz $\overline{AD} = \overline{BD}$, így azonban az A és B pontok egybeesnének, ami ellentmond a kezdeti feltételeknek. Ezekből következik, hogy a P_1 és az E pont egyenest határoz meg, és a 2.1.1. Lemma miatt a $\phi(\overline{P_1E})$ egyenes is része lesz f-nek, ami éppen a vizsgált $\phi(e_{P_1})$ egyenes. Beláttuk tehát, hogy a teljes S_{e,P_1} síkot a ϕ leképezés az f egyenesbe viszi.



2.1. ábra

Vegyük most az előbbi S_{e,P_1} síkot és egy rá nem illeszkedő P_2 pontot, az általuk kifeszített 3-dimenziós affin alteret jelöljük K^3-mal. Ekkor az előzőekhez hasonlóan K^3 minden pontjának képe rajta lesz az f egyenes és P_2 képe által meghatározott $S_{f,\phi(P_2)}$ síkon, kivéve az S_{e,P_1} síkkal párhuzamos, P_2-n átmenő S_{P_2}síkot. Azt állítjuk itt is, hogy $\phi(S_{P_2}) \subset S_{f,\phi(P_2)}$ teljesül, a kétdimenziós esethez hasonló okok miatt.

Ha ezt az iterációt tovább folytatjuk magasabb dimenziókra, akkor a végén azt kapjuk, hogy az n-dimenziós X affin terünk képe része lesz K^{n-1}-nek, ami egy (n-1)-dimenziós affin altér, ez azonban ellentmond annak, hogy ϕ bijekció két n-dimenziós affin tér között. Tehát valóban $\phi(e) = f$. □

2.1.3. Állítás: *Affin leképezés esetén k-dimenziós affin altér képe k-dimenziós affin altér.*

Bizonyítás: A 2.1.2. Lemmából látjuk, hogy egy dimenzióban igaz az állítás. A 2.1.1. Lemmában leírtakhoz hasonlóan meggondolható, hogy egy egyenes és egy pont által generált altér az egyenes képe és a pont képe által generált altérbe megy. Ezt a gondolatmenetet indukcióval folytatva azt kapjuk, hogy egy k-dimenziós alteret az affinitások k-dimenziós altérbe visznek. A bizonyítás alapötlete így alkalmazható magasabb dimenziókra is, azaz minden esetben az indirekt feltevéssel, miszerint egy k-dimenziós affin altér az affinitás során csupán beleképződik egy k-dimenziós affin altérbe, de nem minden pontját találja el, ellentmondásra jutunk. □

A 2.1.3. Állítás következtében megállapíthatjuk tehát, hogy az affinitások nem csupán egyenestartó, hanem síktartó leképezések, sőt a k-dimenziós altereket megtartják. Ezenkívül még egy fontos tulajdonság, a párhuzamosságtartás is megmutatható ezen állítás következményeként.

2.1.4. Következmény: *Az affinitások párhuzamosságtartó leképezések.*

Bizonyítás: Legyen K_1^k és K_2^k két különböző k-dimenziós affin altér a (k+1)-dimenziós K^{k+1} affin altérben, és $K_1^k \parallel K_2^k$. Ekkor a 2.1.3. Állításból tudjuk, hogy $\phi(K_1^k)$ és $\phi(K_2^k)$ affin altér része lesz a $\phi(K^{k+1})$ affin altérnek, és $K_1^k \cap K_2^k = \emptyset$ következtében $\phi(K_1^k) \cap \phi(K_2^k) = \emptyset$. Ez utóbbinak azért kell teljesülnie, mert ha lenne metszéspontja $\phi(K_1^k)$-nak és $\phi(K_2^k)$-nak, akkor ezen metszéspont őse egyrészt eleme lenne a K_1^k, másrészt a K_2^k affin altérnek is. Ez viszont $K_1^k \parallel K_2^k$ miatt azt jelentené, hogy a metszéspontnak két őse van, az egyik K_1^k-n, a másik pedig K_2^k-n, ami ellentmondana annak, hogy ϕ bijekció. □

A következő tulajdonság a definícióból közvetlenül adódik, mivel azonban a későbbiekben többször is felhasználjuk, a bizonyítását is részletesen megmutatjuk.

2.1.5. Lemma: *Affin leképezések kompozíciója is affin leképezés.*

Bizonyítás: Legyen $\phi: X \to Y$ és $\psi: Y \to Z$ két affin leképezés. Mivel ϕ és ψ bijekció, tudjuk, hogy a kompozíciójuk, $\psi \circ \phi: X \to Z$ is bijekció. Másrészt viszont, ha A, B, C tetszőleges X-beli, kollineáris pont, akkor teljesül, hogy $\phi(A)$, $\phi(B)$ és $\phi(C)$, valamint $\psi(\phi(A))$, $\psi(\phi(B))$ és $\psi(\phi(C))$ is kollineáris, mivel ϕ és ψ affinitás. Így azt kaptuk, hogy a ϕ és ψ kompozíciójaként előálló leképezés is bijektív, mely három kollineáris pontot három kollineáris pontba visz, azaz $\psi \circ \phi$ is affinitás. □

2.1.6. Lemma: *Affin leképezések inverze is affin leképezés.*

Bizonyítás: Legyen $\phi: X \rightarrow Y$ affin leképezés. Mivel ϕ bijekció, ezért a leképezés inverze, $\phi^{-1}: Y \rightarrow X$ létezik és bijektív. Legyen A', B' és C' három tetszőleges Y-beli kollineáris pont, melyekre $A', B', C' \in e$. Ekkor a bijektivitás miatt létezik olyan $A, B \in X$ pont, melyre $\phi(A) = A'$ és $\phi(B) = B'$. A 2.1.2. Lemma értelmében ekkor a ϕ affinitás az $\overline{AB}$ egyenest az e egyenesre képezi bijektíven. Ebből viszont az következik, hogy a a ϕ^{-1} leképezés során a C pont képe is az $\overline{AB}$ egyenesre illeszkedik, azaz a ϕ^{-1} leképezés is affinitás. □

Az identikus leképezés nyilvánvalóan affin leképezés is, hiszen teljesül rá a definícióban megkövetelt feltétel. Ezenkívül a 2.1.6. Lemma miatt az affinitások inverze is affinitás, valamint a 2.1.5. Lemmából tudjuk, hogy az affin leképezések kompozíciója is affin leképezés. Mindezekből az alábbi állítás következik.

2.1.7. Állítás: *Egy n-dimenziós affin tér önmagába menő affinitásai csoportot alkotnak a kompozíció műveletére nézve.*

Az euklideszi térben ismeretesek az egybevágóságok, melyek távolságtartó leképezések, azaz a távolság invariáns mennyiség az egybevágóságok esetén. Könnyen látható, hogy ez a tulajdonság az affinitásoknál nem teljesül szükségszerűen, csak néhány speciális esetben. Van azonban olyan mennyiség, amelyet bizonyos affin leképezések nem változtatnak meg, ezt adja meg a következő definíció.

2.1.8. Definíció: Rögzítsünk a T test feletti X affin térben egy O pontot, az $(X, O) = V$ vektortér origóját. Legyen adott egy $e \subset X$ egyenes és rajta két különböző pont, A és B. Vegyünk egy B-től különböző, tetszőleges e-beli pontot, jelöljük ezt C-vel. Az 1.13. Lemmát és jelöléseit használva az $\overrightarrow{AC}$ vektorra teljesül, hogy $\overrightarrow{AC} = \underline{c} - \underline{a} = \gamma(\underline{b} - \underline{a})$, hasonlóan a $\overrightarrow{CB} = \underline{b} - \underline{c} = (1 - \gamma)(\underline{b} - \underline{a})$. Ekkor az *ABC ponthármas osztóviszonyá*n az

$$(ABC) = \frac{\gamma}{(1 - \gamma)}$$

skalárt értjük.

2.1.9. Megjegyzés: Könnyen meggondolható, hogy a fent megadott osztóviszony jól definiált, azaz nem függ az O pont választásától. Vegyünk fel ehhez az affin térben egy másik origót, egy $\mathrm{O}' \in \mathrm{X}$ pontot, és jelöljük az $\overrightarrow{\mathrm{O'A}}$, $\overrightarrow{\mathrm{O'B}}$, $\overrightarrow{\mathrm{O'C}}$ vektorokat rendre $\underline{\mathrm{a}}'$-vel, $\underline{\mathrm{b}}'$-vel és $\underline{\mathrm{c}}'$-vel. Legyen az $\overrightarrow{\mathrm{O'O}} = \underline{\mathrm{e}}$, ezzel $\underline{\mathrm{a}}' = \underline{\mathrm{e}} + \underline{\mathrm{a}}$, $\underline{\mathrm{b}}' = \underline{\mathrm{e}} + \underline{\mathrm{b}}$ és $\underline{\mathrm{c}}' = \underline{\mathrm{e}} + \underline{\mathrm{c}}$. Az 1.13. Lemma alapján tudjuk, hogy létezik olyan T-beli elem, γ, melyre $\underline{\mathrm{c}} = (1-\gamma)\underline{\mathrm{a}} + \gamma\underline{\mathrm{b}}$. A $\underline{\mathrm{c}}'$ vektor kifejezhető tehát $\underline{\mathrm{c}}' = \underline{\mathrm{e}} + (1-\gamma)\underline{\mathrm{a}} + \gamma\underline{\mathrm{b}} = (1-\gamma+\gamma)\underline{\mathrm{e}} + (1-\gamma)\underline{\mathrm{a}} + \gamma\underline{\mathrm{b}} =$ $= (1-\gamma)\left(\underline{\mathrm{e}} + \underline{\mathrm{a}}\right) + \gamma\left(\underline{\mathrm{e}} + \underline{\mathrm{b}}\right)$ formában, ahol $\underline{\mathrm{e}} + \underline{\mathrm{a}} = \mathrm{a}'$ és $\underline{\mathrm{e}} + \underline{\mathrm{b}} = \underline{\mathrm{b}}'$. Azt kaptuk tehát, hogy az osztóviszony definíciójában használt $(1-\gamma), \gamma$ együtthatók függetlenek az origótól, így maga az osztóviszony sem függ az O pont választásától.
Látható ezenkívül, hogy mivel $\mathrm{C} \neq \mathrm{B}$, ezért $\underline{\mathrm{c}} = (1-\gamma)\underline{\mathrm{a}} + \gamma\underline{\mathrm{b}}$ felírásban $(1-\gamma) \neq 0$, azaz a definícióban nem használjuk a 0-val való osztást, amely a testekben nincs megengedve. Mindezek azt jelentik, hogy az osztóviszony definíciója jó.

2.1.10. Állítás: *A valós test feletti affin terek közt megadott affinitások osztóviszonytartó leképezések.*

Bizonyítás: Az állítást később, a fejezet végén kimondott tételhez használt fogalmak segítségével bizonyítjuk. □

2.2. Az affin és a lineáris leképezések kapcsolata

2.2.1. Definíció: Tekintsünk egy pontrendszert az n-dimenziós affin térben. Azt mondjuk, hogy a *pontrendszer általános helyzetű*, ha bármely $\mathrm{k} + 1 \leq \mathrm{n} + 1$ pontja k-dimenziós affin alteret feszít ki.

Használni fogjuk a következőkben az *invertálható lineáris leképezések* fogalmát. A lineáris leképezések tulajdonságai megtalálhatók a [2] könyvben a 134. oldaltól. Ezeket nem írjuk le részletesen, a későbbi bizonyításokban azonban néhányat felhasználunk.

2.2.2. Definíció: Legyen V_1 és V_2 a T test feletti vektortér. Az $\mathcal{L}: \mathrm{V}_1 \to \mathrm{V}_2$ bijektív függvényt *invertálható lineáris leképezés*nek nevezzük, ha

(1) $\mathcal{L}\left(\underline{\mathrm{u}} + \underline{\mathrm{v}}\right) = \mathcal{L}\left(\underline{\mathrm{u}}\right) + \mathcal{L}\left(\underline{\mathrm{v}}\right) \quad \forall \underline{\mathrm{u}}, \underline{\mathrm{v}} \in \mathrm{V}_1$;

(2) $\mathcal{L}(\lambda\underline{u}) = \lambda\mathcal{L}(\underline{u})\quad \forall\underline{u} \in V_1$ és $\forall\lambda \in T$.

2.2.3. Megjegyzés: Az 1.11. Megjegyzés miatt az affin terekből vektortereket nyerhetünk, ha megadunk egy-egy origót. Legyen tehát a továbbiakban X és Y affin tér, $A_0 \in X$, $B_0 \in Y$ pontok, valamint az X affin térből az A_0 pont kitüntetésével nyert vektortér: $(X, A_0) = V_1$, hasonlóan $(Y, B_0) = V_2$.

Az így kapott lineáris terek közötti invertálható lineáris leképezés egy olyan leképezést ad, melyet az affin terek közötti invertálható lineáris leképezésnek nevezünk, ahol az affin tereket úgy kapjuk vissza, hogy az előbb meghatározott origókról megfeledkezünk.

2.2.4. Lemma: *Minden invertálható lineáris leképezés affin leképezés is.*

Bizonyítás: A lemma előtt mondottak alapján, mivel invertálható lineáris leképezést tekintünk, ezért vannak olyan $A_0 \in X$, $B_0 \in Y$ pontok és $\phi\colon (X, A_0) \to (Y, B_0)$ invertálható lineáris leképezés, amely az affin terek közötti invertálható lineáris leképezést indukálja. Az invertálható lineáris leképezésekre a bijektivitás a definícióból adódóan teljesül. Az 1.13. Lemma értelmében egy affin térben az A, B, C pontok pontosan akkor kollineárisak, ha a kitüntetett pontból mint origóból az A, B, C pontokba mutató $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorokra teljesül egy testbeli γ elemmel, hogy $\underline{c} = (1-\gamma)\underline{a} + \gamma\underline{b}$. Azt kell tehát belátnunk, hogy a ϕ invertálható lineáris leképezés esetén ez a tulajdonság megőrződik Az $\underline{c}$ vektor képére ekkor $\phi(\underline{c}) = \phi((1-\gamma)\underline{a} + \gamma\underline{b})$, melyre a lineáris leképezések definíciója szerint teljesül, hogy $\phi\left((1-\gamma)\underline{a} + \gamma\underline{b}\right) = \phi\left((1-\gamma)\underline{a}\right) + \phi(\gamma\underline{b}) = (1-\gamma)\phi(\underline{a}) + \gamma\phi(\underline{b})$, azaz a három képvektor is kollineáris lesz. Azt kaptuk tehát, hogy a ϕ leképezés affinitás az X és Y affin terek között. □

2.2.5. Következmény: *Ha adott egy $\phi\colon V_1 \to V_2$ invertálható lineáris leképezés, akkor ugyanez a leképezés az X és Y affin terek között is invertálható affin leképezést ad.*

2.2.6. Állítás: *Legyen X és Y két n-dimenziós affin tér és A_0, $A_1, \dots, A_n$ X-beli, valamint B_0, $B_1, \dots, B_n$ Y-beli általános helyzetű pontrendszer. Ekkor létezik olyan invertálható lineáris leképezés, $\phi\colon (X, A_0) \to (Y, B_0)$, amelyre $\phi(A_i) = B_i$ $i = 0, 1, \dots, n$ esetén.*

Bizonyítás: Tekintsük először az A_0, $A_1, \dots, A_n$ pontrendszert. Legyen az A_0 pont kitüntetett szerepű, vegyük az innen kiinduló, $A_1, A_2, \dots, A_n$ pontokban végződő vektorokat. Alkalmazzuk az alábbi jelölést ezekre: $\underline{a_1} := \overrightarrow{A_0A_1}$, $\underline{a_2} := \overrightarrow{A_0A_2} \dots$, $\underline{a_n} := \overrightarrow{A_0A_n}$. Az így kapott $\underline{a_1}$, $\underline{a_2}, \dots$, $\underline{a_n}$ vektorok bázist alkotnak, mert ha ez nem teljesülne, akkor benne feküdnének egy (n-1)-dimenziós affin altérben. Ekkor viszont az A_0, $A_1, \dots, A_n$ pontok is benne lennének ebben az altérben, ami ellentmondana annak, hogy általános helyzetű pontok, melyek n-dimenziós affin alteret feszítenek ki. Így tehát az $\left\{\underline{a_1}, \underline{a_2}, \dots, \underline{a_n}\right\}$ bázissal egy tetszőleges $P \in X$ pontnak megfelelő, a 2.2.3. Megjegyzésben megadott V_1-beli $\overrightarrow{A_0P} = \underline{p}$ vektor felírható a bázisvektorok lineáris kombinációjaként: $\underline{p} = \alpha_1\underline{a_1} + \alpha_2\underline{a_2} + \dots + \alpha_n\underline{a_n}$, ahol $\alpha_i \in T$ $i = 1, 2, \dots, n$. Megjegyezzük, hogy az $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ együtthatókkal egyfajta koordinátázást adtunk meg tehát abban a koordinátarendszerben, melynek origója A_0, koordinátatengelyei pedig az $\underline{a_1}$, $\underline{a_2}, \dots$, $\underline{a_n}$ irányvektorú egyenesek. Ehhez hasonló módon Y-ban is bázist készítünk, illetve koordinátarendszert kapunk, ha vesszük a B_0 pontból kiinduló, B_1, $B_2, \dots, B_n$ pontokban végződő $\underline{b_1} := \overrightarrow{B_0B_1}$, $\underline{b_2} := \overrightarrow{B_0B_2} \dots$, $\underline{b_n} := \overrightarrow{B_0B_n}$ vektorokat. Tekintsük azt a $\phi: X \to Y$ leképezést, amely a $\underline{p}$ vektort $\phi(\underline{p}) = \underline{p'} =$ $= \alpha_1\underline{b_1} + \alpha_2\underline{b_2} + \dots + \alpha_n\underline{b_n}$ pontba képezi. Ezzel tulajdonképpen a fent említett két koordinátarendszer közt definiáltunk egy invertálható lineáris leképezést. □

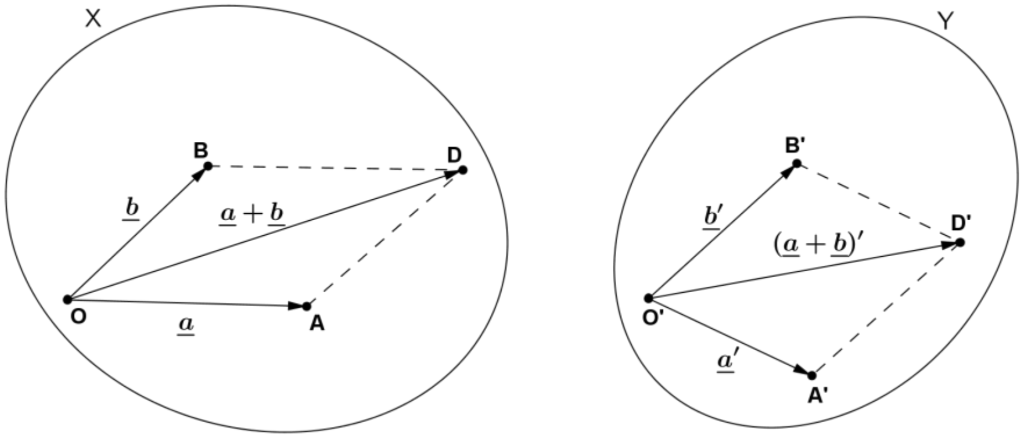
2.2.7. Következmény: A 2.2.5. Következmény miatt a 2.2.6. Állításból az következik, hogy mivel két általános helyzetű pontrendszer közt létezik invertálható lineáris leképezés, ezért affin leképezés is létezik, amely szintén invertálható, és az inverze is affin leképezés, és ezen affin leképezésnél is az A_i pontok képe B_i.

2.3. Az affin leképezések összeg- és szorzattartása

2.3.1. Lemma: *Az affinitások összegtartó leképezések.*

Bizonyítás: Azt mutatjuk meg, hogy ha X és Y affin terek és $\varphi: X \to Y$ affin leképezés, akkor $\underline{a}, \underline{b} \in X$ vektorok Y-beli $\underline{a'}, \underline{b'}$ képére $\varphi(\underline{a} + \underline{b}) = \varphi(\underline{a}) + \varphi(\underline{b})$ teljesül.

Legyen először $\underline{a} \nparallel \underline{b}$. Vegyük fel az $\underline{a}, \underline{b}$ vektorokat közös O kezdőponttal, a végpontjaikat pedig jelöljük rendre A-val, illetve B-vel. Ekkor az $\underline{a} + \underline{b}$ vektor végpontját, D-t a következő szerkesztési szabállyal kapjuk meg. Húzzunk az A ponton keresztül a $\underline{b}$ vektorral, illetve a B ponton keresztül az $\underline{a}$ vektorral párhuzamos egyenest, legyen D a metszéspontjuk. Látható, hogy ekkor az O, A, D, B pontok egy parallelogrammát határoznak meg, ha a parallelogrammán olyan négyszöget értünk, melynek szemközti oldalai párhuzamosak. Mivel az affinitások illeszkedés- és párhuzamosságtartók, ezért ha ezt a szerkesztést a képvektorokra és az általuk meghatározott pontokra alkalmazzuk, akkor az így kiszerkesztett pont éppen az eredeti D pont képét adja. Azaz ekkor valóban $\varphi(\underline{a}) + \varphi(\underline{b}) = \varphi(\underline{a} + \underline{b})$.



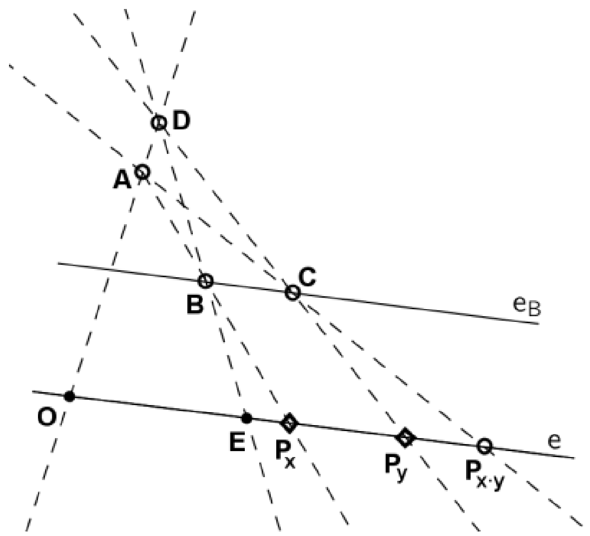
2.2. ábra

Ha $\underline{a} \parallel \underline{b}$, akkor létezik olyan $\underline{c}$ vektor X-ben, amire $\underline{c} \nparallel \underline{a}, \underline{b}$. Az előzőek alapján ekkor tudjuk, hogy $\varphi(\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}) = \varphi\left((\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c}\right) = \varphi(\underline{a} + \underline{b}) + \varphi(\underline{c})$, hiszen $\underline{c} \nparallel \underline{a} + \underline{b}$. Az is teljesül, hogy $\varphi(\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}) = \varphi(\underline{a} + (\underline{b} + \underline{c})) = \varphi(\underline{a}) + \varphi(\underline{b} + \underline{c})$, mert $\underline{c} \nparallel \underline{b}$ miatt $\underline{a} \nparallel \underline{b} + \underline{c}$. Ugyanakkor $\underline{c} \nparallel \underline{b}$ miatt $\varphi(\underline{a}) + \varphi(\underline{b} + \underline{c}) = \varphi(\underline{a}) + \varphi(\underline{b}) + \varphi(\underline{c})$. Azt kaptuk tehát, hogy $\varphi(\underline{a} + \underline{b}) + \varphi(\underline{c}) = \varphi(\underline{a}) + \varphi(\underline{b}) + \varphi(\underline{c})$, amiből az következik, hogy az összegtartás $\underline{a} \parallel \underline{b}$ esetén is teljesül. □

Ha a T test feletti affin tér egy e egyenesének pontjait tekintjük, akkor ezen pontok éppen a T test elemeinek feleltethetőek meg, a következő módon. Jelöljünk ki két pontot az egyenesen, legyen az egyik O, a másik pedig E. Feleljen meg az O pont a testbeli nullelemnek, 0-nak, míg E az egységelemnek, 1-nek. Az egyenes pontjai legyenek az $\overrightarrow{OE}$ vektor skalárszorosai által meghatározott pontok, azaz pl. a P_λ pontot a $\underline{p_\lambda} = \lambda\overrightarrow{OE}$ vektor adja meg, ahol $\lambda \in T$. Ha minden $P_\lambda \in e$ pontot a megfelelő λ skalárral azonosítjuk, akkor megfeleltetést kapunk az egyenes pontjai és T elemei között.

Ha veszünk most két pontot az egyenesen, P_x-et és P_y-t, akkor értelmezhetünk köztük összeadást és szorzást is, ha a pontoknak megfeleltetett testbeli elemek összegének, illetve szorzatának megfelelő pontokat tekintjük, eszerint tehát $P_x + P_y = P_{x+y}$ és $P_x P_y = P_{xy}$. Megjegyezzük, hogy ha ilyen módon értelmezzük az összeadást, akkor az éppen a 2.3.1. Lemmában megadottakkal egyenértékű, mert a pontokat és az őket meghatározó helyvektorokat bijektíven megfeleltethetjük egymásnak.

Az alábbiakban megadjuk a szorzatnak egy kiszerkesztési módját, és megmutatjuk, hogy a kiszerkesztett pontot az affinitás a képegyenesen kiszerkesztett pontba viszi, azaz két pont szorzatának képe a képpontok szorzata.



2.3. ábra

Tekintsünk ehhez egy e egyenest, melyen adott tehát a 0 és az 1 pont helye, O és E. Vegyünk fel e-n két O-tól és E-től különböző pontot, P_x-et és P_y-t (ezek akár egybe is eshetnek). Válasszunk e egyenesen kívül A, B segédpontokat úgy, hogy P_x rajta legyen az $\overline{AB}$ egyenesen, és az $\overline{OA}$ és $\overline{EB}$ egyeneseknek legyen metszéspontja, jelöljük ezt D-vel. Vegyük ezzel a $\overline{DP_y}$ és az e_B egyenes metszéspontját, C-t, ahol e_B-vel az e-vel párhuzamos és a B ponton átmenő egyenest jelöljük. A P_x és P_y pontok szorzatát ezen pont segítségével kapjuk meg: $P_{x \cdot y} = \overline{AC} \cap e$. Megjegyezzük előre, hogy belátható, hogy a $P_{x \cdot y}$ pont nem függ a segédpontok választásától, ezt a 2.3.2. Lemma bizonyításában mutatjuk meg.

Tekintsük most az e egyenes $\varphi(e)$ affin képét. Legyen ezen az egyenesen az O pont képe O', az E pont képe pedig E', és keressük a $P_{x \cdot y}$ pont képét. Tudjuk, hogy az affinitások párhuzamosság-, egyenes- és illeszkedéstartó leképezések, ezért ez a szerkesztés a φ affin leképezés során átmegy abba a szerkesztésbe, mintha a $P_{x \cdot y}$ képét O', E', P_x', P_y' pontokra adnánk meg A' és B' segítségével, ami viszont éppen P_x' és P_y' pontok szorzata, mivel a fenti megjegyzés miatt $\varphi(P_{x \cdot y})$ pont sem függ az A' és B' segédpontok választásától.

Ha a szorzást a fenti azonosítás segítségével értelmezzük, akkor teljesül az alábbi állítás.

2.3.2. Lemma: *A φ affinitás esetén az 1-dimenziós affin alterek tetszőleges P_x és P_y pontjainak képére teljesül, hogy $\varphi(P_{xy}) = \varphi(P_x)\varphi(P_y)$, azaz azt mondjuk, hogy az affinitások szorzattartók.*

Bizonyítás: A fentiekben mutattunk egy szerkesztési eljárást, és beláttuk, hogy ha ilyen módon értelmezzük egy egyenes pontjai közötti szorzást, akkor az affinitások szorzattartók. Most megmutatjuk, hogy ezzel a szerkesztéssel az $P_x, P_y \in e$ pontokra a kiszerkesztett pont egybeesik azzal a ponttal, melyet a testbeli szorzással kapunk, azaz $P_{x \cdot y} = P_{xy}$.

A szerkesztési eljárásban megadott jelöléseket használva legyen az $\overrightarrow{OE} = \underline{e}$ és $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$. Mivel O, E és A különböző pontok, ezért az általuk meghatározott S síkon egy tetszőleges pontot meghatározó vektor felírható az $\underline{e}$ és $\underline{a}$ vektorok lineáris kombinációjaként. Az a célunk, hogy a szerkesztésben szereplő pontokat sorra kifejezzük az $\underline{e}$ és $\underline{a}$ vektorok által alkotott bázis segítségével, így végül a $P_{x \cdot y}$ pontot is. A következő lépésekben ehhez az 1.13. Lemmában megfogalmazott állítást használjuk, az alábbi skalárok így minden esetben a T test elemei. Tekintsük először a P_x és a P_y pontokat. Mivel mindkét pont illeszkedik az e egyenesre, ezért a nekik megfelelő helyvektorok: $\underline{p_x} = x\underline{e}$, valamint $\underline{p_y} = y\underline{e}$. Legyen a B pontot megadó vektor $\overrightarrow{OB} = \underline{b}$. Mivel B illeszkedik az $\overline{AP_x}$ egyenesre, ezért $\underline{b} = \alpha\underline{a} + (1-\alpha)x\underline{e}$. Vizsgáljuk most a D pontot. Ekkor $\overrightarrow{OD} = \underline{d} = d\underline{a} = \beta\underline{b} + (1-\beta)\underline{e}$, mert D eleme $\overline{OA}$ és $\overline{EB}$ egyenesnek is. Tudjuk, hogy $\underline{d} = \beta\big(\alpha\underline{a} + (1-\alpha)x\underline{e}\big) + (1-\beta)\underline{e} = \beta\alpha\underline{a} + \big((1-\alpha)\beta x + (1-\beta)\big)\underline{e}$, a $\underline{b}$ vektor fenti felírása miatt. Mivel $\underline{a}$ és $\underline{e}$ bázist alkotnak az S síkon, ez az egyenlet pontosan akkor teljesül, ha $d = \beta\alpha$ és $0 = (1-\alpha)\beta x + (1-\beta)$, azaz $\beta - 1 = (1-\alpha)\beta x$. A C pont az e egyenessel párhuzamos, B ponton áthaladó egyenesen fekszik, ezért $\overrightarrow{OC} = \underline{c} = \underline{b} + c\underline{e}$, de $C \in \overline{DY}$ miatt $\underline{c} = \gamma\underline{d} + (1-\gamma)y\underline{e}$. Ez azt jelenti, hogy $\alpha\underline{a} + (1-\alpha)x\underline{e} + c\underline{e} = \alpha\underline{a} + \big((1-\alpha)x + c\big)\underline{e} = \gamma\beta\alpha\underline{a} + (1-\gamma)y\underline{e}$. Innen azt fogjuk felhasználni, hogy az egyenlet két oldalán az $\underline{a}$ vektor együtthatóinak meg kell egyeznie, tehát $\alpha = \gamma\beta\alpha$, azaz $\alpha, \beta \neq 0$ esetén $\gamma = \frac{1}{\beta}$. Az α és β skalárokról viszont tudjuk, hogy nullától különböznek, hiszen sem a B, sem a D pont nem illeszkedik az e egyenesre, helyes tehát a fent kapott összefüggés. Tekintsük végül a $P_{x\cdot y}$ pontot, mely az $\overline{AC}$ és az e egyenes metszéspontja. Az $\overrightarrow{OP_{x\cdot y}} = \underline{p_{x\cdot y}} = k\underline{e} = \kappa\underline{a} + (1-\kappa)\underline{c}$, azaz $k\underline{e} = \kappa\underline{a} + (1-\kappa)\big(\gamma\underline{d} + (1-\gamma)y\underline{e}\big) = \kappa\underline{a} + (1-\kappa)\frac{1}{\beta}\beta\alpha\underline{a} + (1-\kappa)\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)y\underline{e}$. Így $0 = \kappa + (1-\kappa)\frac{1}{\beta}\beta\alpha$, tehát $\kappa = \frac{\alpha}{\alpha - 1}$, ha $\alpha - 1 \neq 0$. Feltehető viszont, hogy $O \neq P_x$, azaz a B pont nem illeszkedik az $\overline{OA}$ egyenesre. $O = P_x$ esetén ugyanis könnyen látható, hogy teljesül az állítás, hiszen minden esetben a szerkesztés eredményeként $P_{x\cdot y} = O$ adódik. Ha tehát $B \notin \overline{OA}$, akkor $1 - \alpha \neq 0$, így $\alpha - 1 \neq 0$ teljesül. A $\underline{p_{x\cdot y}}$ vektor fenti felírása megköveteli, hogy $k = (1-\kappa)\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)y = \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha - 1}\right)\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)y = \left(-\frac{1}{\alpha - 1}\right)\left(\frac{\beta - 1}{\beta}\right)y = \left(\frac{1}{(1-\alpha)}\right)\left(\frac{(1-\alpha)\beta x}{\beta}\right)y$. Az egyszerűsítések után azt kapjuk, hogy $k = xy$, azaz $\underline{p_{x\cdot y}} = xy\underline{e}$, ezzel igazoltuk az állítást. Az is látszik a fenti számolásból, hogy a végül eltűnik az $\underline{a}$ és a $\underline{b}$ vektor is, hiszen $k\underline{e} = xy\underline{e}$ marad, azaz $P_{x\cdot y}$ független a segédpontok választásától. □

2.3.3. Definíció: Egy T *test automorfizmusá*n olyan $\varphi: T \to T$ bijekciót értünk, amelyre $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ és $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ $\forall x, y \in T$-re.

A testautomorfizmusok tehát összeg- és szorzattartó bijekciók, melyeknél szükségképpen a nullelem képe a nullelem, az egységelem képe pedig az egységelem.

2.3.4. Tétel: *Legyen X és Y két n-dimenziós valós affin tér és* $A_0,\ A_1, \dots, A_n$ *X-beli,* $B_0, B_1, \dots, B_n$ *pedig Y-beli általános helyzetű pontrendszer. Legyenek* ϕ *és* ψ *olyan affin leképezések, melyekre* $\phi(A_i) = B_i$ és $\psi\,(B_i) = A_i \quad i = 0,\ 1, \dots, n$. *Ekkor* $\psi \circ \phi$ *az identikus leképezés.*

Bizonyítás: Tudjuk a 2.1.6. Lemmából, hogy $\psi \circ \phi$ affin leképezés, hiszen két affin leképezés kompozíciójaként áll elő. Jelöljük ezt a leképezést φ-vel. Tudjuk, hogy a φ affinitás az $A_0,\ A_1, \dots, A_n$ pontokat önmagukba viszi. A 2.2.4. Állítás bizonyításában definiált $\underline{a_1},\ \underline{a_2}, \dots,\ \underline{a_n}$ vektorokat jelöljük ezentúl rendre $\underline{e_1},\ \underline{e_2}, \dots,\ \underline{e_n}$-nel, míg az általuk meghatározott tengelyegyeneseket e_i-vel. Az $\underline{e_1},\ \underline{e_2}, \dots,\ \underline{e_n}$ vektorok kezdő- illetve végpontja ekkor megadja a tengelyeken a nullpontot illetve az egységpontot. Tekintsünk az i-edik tengelyegyenest. A φ leképezés során ez a tengely önmagába megy, és a 0 képe a 0, az 1 képe pedig az 1 lesz, mivel A_0 képe A_0 és A_i képe A_i.
Mivel kitüntettünk egy origót, az affin tér pontjai kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők az innen kiinduló helyvektoroknak. Innentől kezdve ezért a fenti lemmákban kimondott tulajdonságokat helyvektorokra alkalmazzuk. A 2.3.1. Lemma miatt tetszőleges $P_x, P_y \in e_i$ pontokra, melyeket $\underline{x}$ és $\underline{y}$ vektorok adnak meg, $\varphi\left(\underline{x} + \underline{y}\right) = \varphi(\underline{x}) + \varphi(\underline{y})$. A 2.3.2. Lemma alapján emellett a tengelyegyeneseken teljesül, hogy $\varphi\left(\underline{xy}\right) = \varphi(\underline{x})\varphi(\underline{y})$. Mindezekből az következik, hogy ha az e_i egyenes pontjait azonosítjuk a T test elemeivel, akkor a φ affinitás az e_i egyenesen testautomorfizmust ad.
Az egyes tengelyeken külön-külön láttuk tehát a testautomorfizmust, be kellene még látni, hogy ezek nem különböznek, hanem ugyanazt a testautomorfizmust kaptuk mindegyik tengelyen. Tekintsük ehhez az a $\underline{e_1},\ \underline{e_2}, \dots,\ \underline{e_n}$ vektorok összegét, mely éppen az átlóegyenes irányvektora. Jelölje az ezt a vektort $\underline{e_1} + \underline{e_2} + \dots + \underline{e_n}$. Az összegtartás miatt $\varphi\left(\underline{e_1} + \underline{e_2} + \dots + \underline{e_n}\right) = \varphi\left(\underline{e_1}\right) + \varphi\left(\underline{e_2}\right) + \dots + \varphi\left(\underline{e_n}\right)$, ami viszont éppen $\underline{e_1} + \underline{e_2} + \dots + \underline{e_n}$-nel egyenlő, hiszen ezen bázisvektorok az affinitás során önmagukba mennek. Azt kaptuk tehát, hogy a φ affinitás az átlóegyenest önmagába viszi, és az egyenesen a 0-val azonosított A_0 pont, valamint az 1-gyel

azonosított $\underline{e_1} + \underline{e_2} + \ldots + \underline{e_n}$ által meghatározott pont képe önmaga. Jelöljük az egyes tengelyeken a testautormorfizmusokat $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$-nel. Mivel a bizonyítás elején leírtak nemcsak a tengelyegyenesekre, hanem tetszőleges egyenesekre elmondhatók, melyekre a nullpont és az egységpont fixen marad, ezért az átlóegyenesen is testautomorfizmust ad az affin leképezésünk, legyen ez $\varphi_{\text{átló}}$. Ekkor az átlóegyenes valamely $\underline{x}$ által megadott P_x pontjára teljesül egyrészt, hogy $\varphi\left(\underline{x}\left(\underline{e_1} + \underline{e_2} + \ldots + \underline{e_n}\right)\right) = \varphi_{\text{átló}}\left(\underline{x}\left(\underline{e_1} + \underline{e_2} + \ldots + \underline{e_n}\right)\right)$, és a szorzattartás miatt $\varphi_{\text{átló}}\left(\underline{x}\left(\underline{e_1} + \underline{e_2} + \ldots + \underline{e_n}\right)\right) = \varphi_{\text{átló}}(\underline{x})\varphi_{\text{átló}}\left(\underline{e_1} + \underline{e_2} + \ldots + \underline{e_n}\right)$, ami egyenlő $\varphi_{\text{átló}}(\underline{x})\left(\underline{e_1} + \underline{e_2} + \ldots + \underline{e_n}\right) = \varphi_{\text{átló}}(x)\underline{e_1} + \varphi_{\text{átló}}(x)\underline{e_2} + \ldots + \varphi_{\text{átló}}(x)\underline{e_n}$-nel. Az is teljesül másfelől, hogy $\varphi\left(\underline{x}\left(\underline{e_1} + \underline{e_2} + \ldots + \underline{e_n}\right)\right) = \varphi\left(\underline{x}\underline{e_1} + \underline{x}\underline{e_2} + \ldots + \underline{x}\underline{e_n}\right)$, ami pedig $\varphi\left(\underline{x}\underline{e_1}\right) + \varphi\left(\underline{x}\underline{e_2}\right) + \ldots + \varphi\left(\underline{x}\underline{e_n}\right) = \varphi_1(\underline{x})\underline{e_1} + \varphi_2(\underline{x})\underline{e_2} + \ldots + \varphi_n(\underline{x})\underline{e_n}$-nel egyenlő. Azt kaptuk tehát, hogy $\varphi_{\text{átló}}(\underline{x})\underline{e_1} + \varphi_{\text{átló}}(\underline{x})\underline{e_2} + \ldots + \varphi_{\text{átló}}(\underline{x})\underline{e_n} =$ $= \varphi_1(\underline{x})\underline{e_1} + \varphi_2(\underline{x})\underline{e_2} + \ldots + \varphi_n(\underline{x})\underline{e_n}$ az átlóegyenes tetszőleges P_x pontjára, azaz $\varphi_{\text{átló}} = \varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_n$.
Mivel a valós számtest felett testautomorfizmus csak az identitás lehet, ezért beláttuk, hogy $\varphi = \psi \circ \phi$ valóban az identikus leképezés. □

2.3.5. Megjegyezés: Azt kaptuk tehát, hogy $\psi \circ \phi = \mathrm{id}$, amit jobbról ϕ^{-1}-gyel beszorozva $\psi = \phi^{-1}$ adódik. Ennek következtében egy olyan affin leképezést, mely egy n-dimenziós valós affin teret n-dimenziós valós affin térbe képez, egyértelműen meghatároz egy n+1 pontból álló általános helyzetű pontrendszer és képe.

2.3.6. Megjegyezés: A fenti bizonyításban csak az utolsó lépésben használtuk ki, hogy valós test feletti koordinátázásról beszélünk. Erre szükség is volt, mert más testek felett, például a komplex számok esetén már nem igaz az állítás. Ilyen esetekben annyit mondhatunk csupán, hogy a $\psi \circ \phi$ leképezés az identikus leképezés és valamilyen testautomorfizmus kompozíciójaként áll elő.

A 2.1.10. Állítás bizonyítása: Mivel tudjuk, hogy a valós testnek az identikus leképezésen kívül nincs más testautomorfizmusa, ezért a valós test feletti affin terek közt értelmezett affin leképezések a lineáris kombinációt megtartják. Azaz ha az $\overline{\mathrm{AB}}$ egyenes egy C pontjára, a korábbi jelölésekkel $\underline{\mathrm{c}} = (1-\gamma)\underline{\mathrm{a}} + \gamma\underline{\mathrm{b}}$, akkor az egyenes és a C pont affin képére igaz, hogy $\underline{\mathrm{c}'} = (1-\gamma)\underline{\mathrm{a}'} + \gamma\underline{\mathrm{b}'}$, így az osztóviszonyhoz használt skalárok nem változnak. □

Ebben a fejezetben megmutattuk tehát, hogy az általunk használt gyengébb definíció is elegendő ahhoz, hogy az affin leképezésekkel kapcsolatos szokásos tulajdonságok érvényesüljenek.

3. fejezet
A projektív tér

Ebben a dolgozatban eddig a vektorterekről és az affin terekről esett csupán szó. Létezik azonban egy ezeknél tágabb fogalom, a projektív terek fogalma, melyben sok, általunk talán könnyen magától értetődőnek tekintett tulajdonság nem teljesül. Így például ebben a struktúrában az egy síkban fekvő egyenesek közt nem tudunk két olyat találni, melyeknek ne lenne metszéspontja. Az ehhez hasonló tulajdonságai miatt szokás ezeket a projektív tereket a vektorterek lezárásának nevezni. A fejezet címében szereplő projektív jelző a vetítés szóból ered, a középpontos vagy centrális vetítés kapcsán merült fel ugyanis az igény az euklideszi tér kibővítésére. A geometriának azt az ágát, amely az alakzatok ezen vetítés során változatlan tulajdonságaival foglalkozik, projektív geometriának nevezik.

3.1. Az euklideszi tér projektív kibővítése

Először megnézzük a [4] jegyzet segítségével, hogy mit értünk az euklideszi tér projektív kibővítésén. Az euklideszi tér kiterjesztése érdekében hozzáveszünk a térhez más, nem euklideszi térelemeket, melyeket ideális térelemeknek hívunk.

Az euklideszi tér minden egyeneséhez hozzárendelünk egy, nem az euklideszi térből vett pontot, az egyenes *ideális pontját*, a következő módon. Az e és f egyenesekhez akkor és csak akkor tartozik ugyanaz az ideális pont, ha e ‖ f. Egy közönséges egyenes pontjaiból és az egyeneshez rendelt ideális pontból álló ponthalmazt *közönséges egyenes*nek, míg azt a ponthalmazt, amelyet egy sík ideális pontjai alkotnak, a sík *ideális egyenesén*ek hívjuk. *Projektív egyenesek*nek nevezzük a közönséges és az ideális egyeneseket is. Az egyenesekhez hasonlóan két síkhoz pontosan akkor tartozik ugyanaz az ideális egyenes, ha a két sík párhuzamos. A projektív térben a *projektív sík* lehet egyrészt egy *közönséges sík,* melyet egy euklideszi térből vett sík pontjaiból és a sík ideális egyenesére illeszkedő pontokból álló halmazként értelmezünk, másrészt pedig a térbeli egyenesekhez rendelt ideális pontok által alkotott *ideális sík*.

Noha mi a fentiekben egy speciális esetre, a 3-dimenziós valós test feletti vektortérre mutattuk meg, ez a fajta kibővítés hasonló módon más vektorterekre és magasabb dimenziók esetén is elvégezhető.

3.2. Vektortérhez asszociált projektív tér

Hasonlóan ahhoz, ahogy az 1. fejezetben az affin tereket definiáltuk, az [1] könyv 24. és 25. oldala alapján egy projektív teret is megadhatunk valamilyen test feletti vektortér segítségével, itt azonban nem feledkezünk meg az origó kitüntetett szerepéről.

Legyen adott egy V vektortér a T test felett. Tekintsük a V vektortér elemeit a nullvektor kivételével. Két ilyen V-beli vektort, $\underline{u}$-t és $\underline{v}$-t pontosan akkor nevezünk ekvivalensnek, ha létezik olyan nullától különböző $\lambda \in T$, amelyre $\underline{u} = \lambda\underline{v}$. Az ennek segítségével értelmezett ekvivalenciareláció a $V\backslash\{\underline{0}\}$ halmazon ekvialenciaosztályokat hoz létre, melyek bijektíven megfeleltethetők V egydimenziós lineáris altereinek.

3.2.1. Definíció: A V *vektortérhez asszociált projektív tér* a fent létrehozott ekvivalenciaosztályok halmaza, melyet $P(V)$-vel jelölünk.

Az így kapott projektív térben is – akárcsak az affin térben – beszélhetünk pontokról, egyenesekről, síkokról vagy hipersíkokról. Az alábbiakban megmutatjuk, hogyan kapjuk meg ezen objektumokat.

3.2.2. Definíció: Egy $\underline{u} \in V\backslash\{\underline{0}\}$ vektor ekvivalenciaosztálya egy pontot ad meg a projektív térben, melyet a projektív tér $\underline{u}$ *által meghatározott pontjának* nevezünk, és $[\underline{u}]$-val jelölünk. Ekkor az $\underline{u}$ vektor az $[\underline{u}]$ pont *meghatározó vektora*.

3.2.3. Definíció: Legyen W a V vektortér egy lineáris altere. A W vektortérhez asszociált projektív teret a $\mathrm{P(V)}$ tér *projektív alteré*nek nevezzük.

A vektortér dimenziójának segítségével megadhatjuk egy projektív tér, és ezzel egy projektív altér dimenzióját is.

3.2.4. Definíció: A $\mathrm{P(V)}$ projektív tér *dimenziója*: $\dim \mathrm{P(V)} = \dim \mathrm{V} - 1$.

A fenti fogalmakat felhasználva a projektív tér *pontjai* éppen a 0-dimenziós, *egyenesei* az 1-dimenziós, *síkjai* pedig a 2-dimenziós projektív alterek. Magasabb dimenzióban a k-dimenziós projektív altereket *k-síkok*nak, az (n-1)-dimenziós projektív altereket pedig *hipersíkok*nak nevezzük.

3.3. A projektív terek sugárnyaláb-modellje

A 3.1. és a 3.2. alfejezetben kétféle bevezetését ismertettük a projektív tereknek, ez azonban természetesen nem azt jelenti, hogy a két módszerrel különböző, másként értelmezett fogalmakat kapunk. Bizonyítható, hogy az euklideszi tér kibővítésével és a vektorterek segítségével nyert projektív terek is kielégítik a projektív geometria axiómáit. Ezen dolgozatban egy modell segítségével mutatjuk meg a két út közötti kapcsolatot.

3.3.1. Megjegyzés: Fontos megemlítenünk, hogy projektív terek axiómáit, köztük az illeszkedési axiómákat ebben a dolgozatban nem részletezzük, néhányat azonban felhasználunk közülük a továbbiakban. Ezek részletesen megtalálhatók az [1] könyv 4. fejezetében. Ismertnek tekintjük például, hogy a projektív tér két különböző pontjához egyértelműen létezik egyenes, mely őket tartalmazza, illetve hogy egy hipersíknak és egy egyenesnek mindig van közös pontja, és ha a hipersík nem tartalmazza az egyenest, akkor egyetlen pontban metszik egymást.

Legyen adott egy (n+1)-dimenziós V vektortér a T test felett, melynek origóját jelöljük O-val. Tekintsük a vektortér egy n-dimenziós alterének egy eltoltját, azaz egy n-dimenziós X affin alteret, mely nem tartalmazza az O pontot. Tekintsük a V vektorteret úgy, mint affin teret, és vegyük a projektív lezárását, jelöljük ezt $\overline{\mathrm{V}}$-vel. Ha az X affin altért lezártját hasonlóan $\overline{\mathrm{X}}$-szel jelöljük, akkor $\overline{\mathrm{X}} \subset \overline{\mathrm{V}}$ teljesül. Ha veszünk ekkor egy $\mathrm{P} \in \overline{\mathrm{X}}$ pontot, akkor a $\overline{\mathrm{V}}$ projektív térben O és P pont egy egyenest határoz meg, hiszen $\mathrm{O} \notin \overline{\mathrm{X}}$ miatt $\mathrm{O} \neq \mathrm{P}$. Ezen $\overline{\mathrm{OP}}$ egyenesnek egy irányvektora – például az $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ vektor – a P pont meghatározó vektora. Fordítva, ha tekintünk egy $\underline{\mathrm{v}} \in \overline{\mathrm{V}}$ vektort mint irányvektort, akkor ez meghatároz egy O-n átmenő $\mathrm{e}_{\underline{\mathrm{v}}}$ egyenest. Ha vesszük most ezen egyenes és $\overline{\mathrm{X}}$ metszetét, akkor a 3.3.1. Megjegyzésben említettek alapján egyetlen $\overline{\mathrm{X}}$-beli P pontot kapunk, mely a $\underline{\mathrm{v}}$ vektor által meghatározott pont. Ilyen módon egyfajta megfeleltetést kaptunk a V-beli, O-n átmenő egyenesek és $\overline{\mathrm{X}}$ pontjai között. Látható, hogy a kibővített affin térben így az ideális pontoknak is tudunk meghatározó vektort adni, valamint hogy azok az O-n átmenő egyenesek is meghatároznak egy-egy $\overline{\mathrm{X}}$-beli pontot, melyeknek a V vektortérben nem volt közös pontjuk X-szel.
A modellben is megfigyelhető egyrészt, hogy a meghatározó vektorok csupán skalárszorzó erejéig egyértelműek. Másrészt viszont, ha azon meghatározó vektorokat, melyek egymás skalárszorosai, ekvivalensnek tekintjük, akkor a $\overline{\mathrm{X}}$-beli e és f egyeneseknek a meghatározó vektorok által megadott ideális pontja pontosan akkor egyezik meg, ha e és f párhuzamos.

A modellt szemléletesen *sugárnyaláb-modell*nek, vagy *O-pont modell*nek nevezzük.

3.4. Kollineációk és kettősviszony

A projektív térben is értelmezhetünk ahhoz hasonló leképezéseket, amilyenek az affin terek közötti affinitások. Ebben az alfejezetben az [1]-ben és [4]-ben található definíciók és állítások segítségével dolgozunk.

3.4.1. Definíció: Egy $\phi\colon \mathrm{P}(\mathrm{V}_1) \to \mathrm{P}(\mathrm{V}_2)$ leképezést, ahol $\mathrm{P}(\mathrm{V}_1)$ és $\mathrm{P}(\mathrm{V}_2)$ n-dimenziós projektív terek, *kollineáció*nak nevezünk, ha bijektív és altereket alterekre képez.

A 2.13. Állítás kimondja, hogy az affinitások altértartók. Az 1.11. Megjegyzésből tudjuk ezenkívül, hogy az affin terekből vektortereket nyerhetünk, melyek segítségével projektív terekhez juthatunk. Ilyen módon beszélhetünk az affin leképezések projektív kiterjesztéséről. Az így kapott affinitások olyan kollineációk lesznek, melyek ideális pontokat ideálisakba, közönséges pontokat pedig közönségesekbe visznek.

A 2. fejezetben az affinitások esetén különféle tulajdonságokat vizsgáltunk, megmutatható, hogy a kollineációkra is hasonló tulajdonságok teljesülnek. Ezek közül néhányat a 4. fejezetben használni fogunk, így például azt, hogy a kollineációk is illeszkedés- és egyenestartó leképezések, melyek megadhatók (n+2) darab általános helyzetű pont és képe által.

Az affinitásoknál felmerült az igény, hogy olyan mennyiséget keressünk, amely változatlan marad a leképezés során, ha valós test feletti affin tereket tekintünk. Ugyanígy a kollineációk esetén is szeretnénk valamilyen invariáns mennyiséget találni. Az egybevágóságok esetén ehhez egy egyenesen kettő, az affin leképezéseknél három pontra volt szükségünk, a kollineációknál pedig mindez négy pontot igényel.

3.4.2. Definíció: Az A, B, C, D egy egyenesen fekvő négy különböző pontot *rendezett pontnégyes*nek (a továbbiakban röviden: *pontnégyes*nek) nevezzük, melybe a pontok sorrendjét is beleértjük.

Belátható, hogy az így megadott pontnégyesek körében a kettősviszony az a mennyiség, melyet a kollineációk nem változtatnak meg, ha valós test feletti projektív tereket vizsgálunk.

3.4.3. Definíció: Legyen adott egy $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}$ pontnégyes egy $\mathrm{P(V)}$ projektív térben, ahol V vektortér a T test felett. Válasszunk ezen pontoknak meghatározó vektorokat, ezek legyenek rendre $\underline{\mathrm{a}}$, $\underline{\mathrm{b}}$, $\underline{\mathrm{c}}$ és $\underline{\mathrm{d}}$. Ekkor léteznek olyan $\lambda_i, \mu_i \in \mathrm{T}$ nem nulla skalárok, melyekkel $\underline{\mathrm{c}} = \lambda_1\underline{\mathrm{a}} + \mu_1\underline{\mathrm{b}}$ és $\underline{\mathrm{d}} = \lambda_2\underline{\mathrm{a}} + \mu_2\underline{\mathrm{b}}$. Ezekkel az A, B, C, D *pontnégyes kettősviszonyá*n az

$$(\mathrm{ABCD}) = \frac{\mu_1}{\lambda_1} : \frac{\mu_2}{\lambda_2}$$

skalárt értjük.

3.4.4. Megjegyzés: A 3.4.5. Lemmában megmutatjuk, hogy a fenti definíció jó, azaz nem függ a meghatározó vektorok választásától. Ezenkívül a 3.3 alfejezetben leírtak alapján, mivel a $\mathrm{P(V)}$vektortérhez asszociált projektív tér és az X affin tér $\overline{\mathrm{X}}$ lezártja egymásnak megfeleltethető, ezért a 3.4.3. Definíció egy kettősviszony definíciót ad az $\overline{\mathrm{X}}$-ben. Belátható, hogy ez független az azonosítástól, azaz attól, hogy az O-pont modellhez hogyan választjuk az O pontot. Emiatt az $\overline{\mathrm{X}}$-ben indukált kettősviszony úgy fejezhető ki, hogy ha veszünk egy közönséges pontot, O-t, akkor az $\overline{\mathrm{OA}}$, $\overline{\mathrm{OB}}$, $\overline{\mathrm{OC}}$, illetve $\overline{\mathrm{OD}}$ egyenesek meghatározó vektorait használjuk a 3.4.3. Definícióban.

3.4.5. Lemma: *A kettősviszony nem függ a meghatározó vektorok megválasztásától.*

Bizonyítás: Legyen 3.4.3. Definícióban használt jelölésekkel A, B, C, D rendre az $\underline{\mathrm{a}}$, $\underline{\mathrm{b}}$, $\underline{\mathrm{c}}$ és $\underline{\mathrm{d}}$ meghatározó vektorokkal megadott pontnégyes, melyre $\underline{\mathrm{c}} = \lambda_1\underline{\mathrm{a}} + \mu_1\underline{\mathrm{b}}$ és $\underline{\mathrm{d}} = \lambda_2\underline{\mathrm{a}} + \mu_2\underline{\mathrm{b}}$. Megmutatjuk, hogy más meghatározó vektorokat választva a pontnégyes osztóviszonya nem változik, ha pontokat nem változtatjuk meg. Legyenek az új meghatározó vektorok rendre $\underline{\mathrm{a}}' = \alpha\underline{\mathrm{a}}$, $\underline{\mathrm{b}}' = \beta\underline{\mathrm{b}}$, $\underline{\mathrm{c}}' = \gamma\underline{\mathrm{c}}$ és $\underline{\mathrm{d}}' = \delta\underline{\mathrm{d}}$, ahol egyik skalár sem 0. Ezekkel

$$\underline{\mathrm{c}}' = \gamma\left(\lambda_1\frac{\underline{\mathrm{a}}'}{\alpha} + \mu_1\frac{\underline{\mathrm{b}}'}{\beta}\right) = \gamma\frac{\lambda_1}{\alpha}\underline{\mathrm{a}}' + \gamma\frac{\mu_1}{\beta}\underline{\mathrm{b}}',$$

$$\underline{\mathrm{d}}' = \delta\left(\lambda_2\frac{\underline{\mathrm{a}}'}{\alpha} + \mu_2\frac{\underline{\mathrm{b}}'}{\beta}\right) = \delta\frac{\lambda_2}{\alpha}\underline{\mathrm{a}}' + \delta\frac{\mu_2}{\beta}\underline{\mathrm{b}}'\,.$$

A definíciót alkalmazva erre

$$(\mathrm{ABCD}) = \frac{\gamma\mu_1/\beta}{\gamma\lambda_1/\alpha} : \frac{\gamma\mu_2/\beta}{\gamma\lambda_2/\alpha},$$

melyből egyszerűsítés után éppen az eredeti meghatározó vektorok együtthatóival számolt kettősviszonyt kapjuk. □

A 2.1.9. Megjegyzéshez hasonlóan meggondolható a kettősviszony fogalmával kapcsolatban továbbá, hogy mivel négy különböző pontot tekintünk, a definícióban szereplő skalárok közül semelyik sem 0. Ennek, valamint a 3.4.5. Lemmának köszönhetően láthatjuk, hogy a meghatározás korrekt.

Azt már tudjuk, hogy az affinitások is kiterjeszthetők kollineációkká. Ez azt feltételezi, hogy az osztóviszony és a kettősviszony között valamilyen kapcsolat áll fent, ezt az összefüggést mutatjuk meg a következő lemmában.

3.4.6. Állítás: *Ha az e egyenesen fekvő valamely pontnégyes három pontja, A, B és C közönséges pont, a negyedik pont, I pedig az egyenes ideális pontja, akkor az $(ABCI)$ kettősviszony az (ABC) osztóviszony ellentettje.*

Bizonyítás: Rögzítsünk egy O közönséges pontot, mely nem illeszkedik az e egyenesre. A 3.4.4. Megjegyzés miatt választhatjuk az A, B és C pontoknak az alábbi meghatározó vektorokat: $\underline{a} = \overrightarrow{OA}$, $\underline{b} = \overrightarrow{OB}$ és $\underline{c} = \overrightarrow{OC}$. Az 1.13. Lemmából tudjuk, hogy ekkor $\underline{c} = \lambda_1 \underline{a} + \mu_1 \underline{b}$, ahol $\lambda_1 + \mu_1 = 1$. Az (ABC) osztóviszonyra így teljesül, hogy

$$(\mathrm{ABC}) = \frac{\mu_1}{\lambda_1}.$$

Válasszunk az I pontnak egy meghatározó vektort, legyen ez a $[\underline{b} - \underline{a}]$ vektor, ez valóban jó, hiszen $[\underline{b} - \underline{a}] \parallel$ e. Ezzel $\underline{b} - \underline{a} = \lambda_2 \underline{a} + \mu_2 \underline{b}$ a definíció jelölései szerint, ahol tehát $\lambda_2 = -1$ és $\mu_2 = 1$. Az (ABCI) kettősviszony a fenti meghatározó vektorok együtthatóival így

$$(\mathrm{ABCI}) = \frac{\mu_1}{\lambda_1} : (-1) = -\frac{\mu_1}{\lambda_1},$$

tehát valóban az osztóviszony ellentettje. □

4. fejezet
Az affin leképezések egy érdekes alkalmazása

A 3. fejezetben elkezdtünk megismerkedni a projektív geometriával. Betekintést nyerhettünk a projektív és az affin terek, illetve azok egy-egy speciális leképezése között fennálló kapcsolatba. Ezen fejezetben egy újabb összefüggést mutatunk meg. A projektív geometriának két alapvető tétele, Papposz és Desargues tétele is bizonyítható az affin lekéepezések segítségével, ezek közül az egyiket részletesen leírjuk. Vizsgáljuk meg elsőként ezeket a tételeket és a hozzájuk kapcsolódó fogalmakat közelebbről az [1] és [4] források segítségével.

Az alábbi állításokban projektív háromszögekkel kapcsolatos illeszkedési tulajdonságokat mondunk ki. Felmerülhet azonban a kérdés, hogy mit értsünk háromszögön egy projektív síkon. Könnyen látható, hogy ha a szokásos definíció szerint tekintjük a háromszögnek egy oldalát, akkor egyáltalán nem egyértelmű, hogy milyen szakaszt értsünk alatta. Éppen ezért nem oldalszakaszokat, hanem teljes oldalegyeneseket használunk a meghatározásban.

4.1. Definíció: Legyen adott három nem kollineáris pont, A, B és C egy projektív síkon. Ekkor az A, B, C pontok által megadott ABC *(pont)háromszög* csúcsai A, B és C oldalegyenesei pedig az $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ és $\overline{BC}$ egyenesek.

4.2. Definíció: Ha adott három nem egy ponton áthaladó egyenes, a, b és c egy projektív síkon, akkor ezen egyenesek által meghatározott abc *(vonal)háromszög* oldalegyenesei az a, b és c egyenesek, míg csúcsai az $A = b \cap c$, $B = a \cap c$, $C = a \cap b$ pontok.

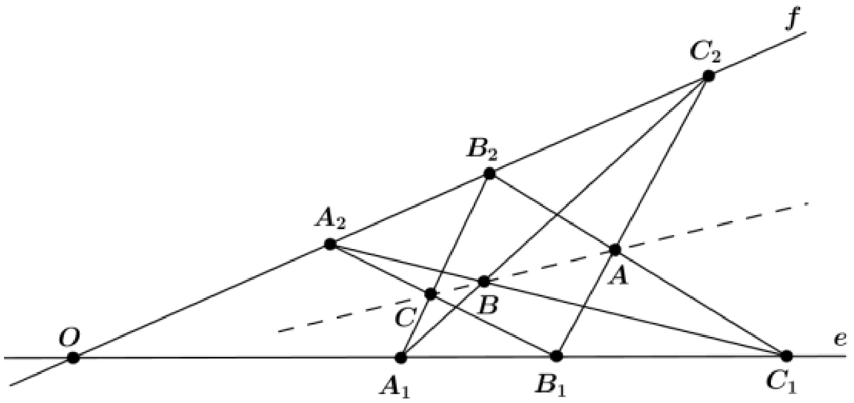
4.3. Definíció: Egy projektív térben az $A_1B_1C_1$ és az $A_2B_2C_2$ pontháromszög egy P *pontra nézve perspektív*, ha a PA_1A_2, PB_1B_2és PC_1C_2 ponthármasok kollineárisak.

4.4. Definíció: Egy projektív térben az $a_1b_1c_1$ és az $a_2b_2c_2$ vonalháromszögeket egy p *egyenesre nézve perspektív*nek nevezzük, ha a pa_1a_2, pb_1b_2és pc_1c_2 egyeneshármasok egy ponton mennek át.

4.5. Tétel (Desargues tétele): *Két háromszög pontosan akkor perspektív pontra nézve, ha egyenesre nézve is perspektív.*

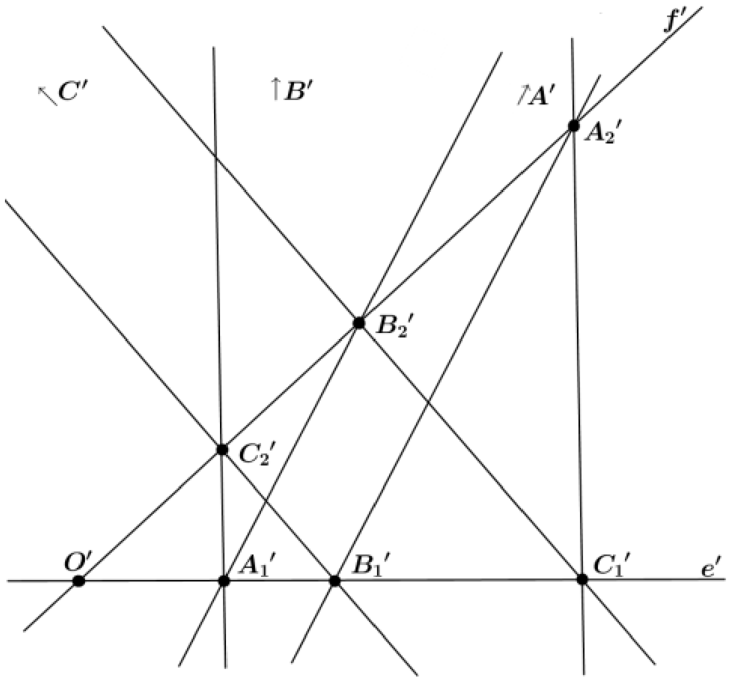
A 4.5. Tétel hasonló ötlettel bizonyítható, mint a 4.6. Tétel, ezért mi ebben a dolgozatban csak az utóbbi tétel igazolásával foglalkozunk.

4.6. Tétel (Papposz tétele): *Legyenek adottak a projektív síkon az $e \neq f$ egyenesek, melyek metszéspontja O, valamint az $A_1, B_1,\ C_1 \in e$ és az $A_2, B_2,\ C_2 \in f$ különböző pontok, melyek az O-tól is különböznek. Ekkor az $A = \overline{B_1C_2} \cap \overline{C_1B_2}$, $B = \overline{A_1C_2} \cap \overline{C_1A_2}$ és $C = \overline{A_1B_2} \cap \overline{B_1A_2}$ pontok kollineárisak.*



5.1. ábra

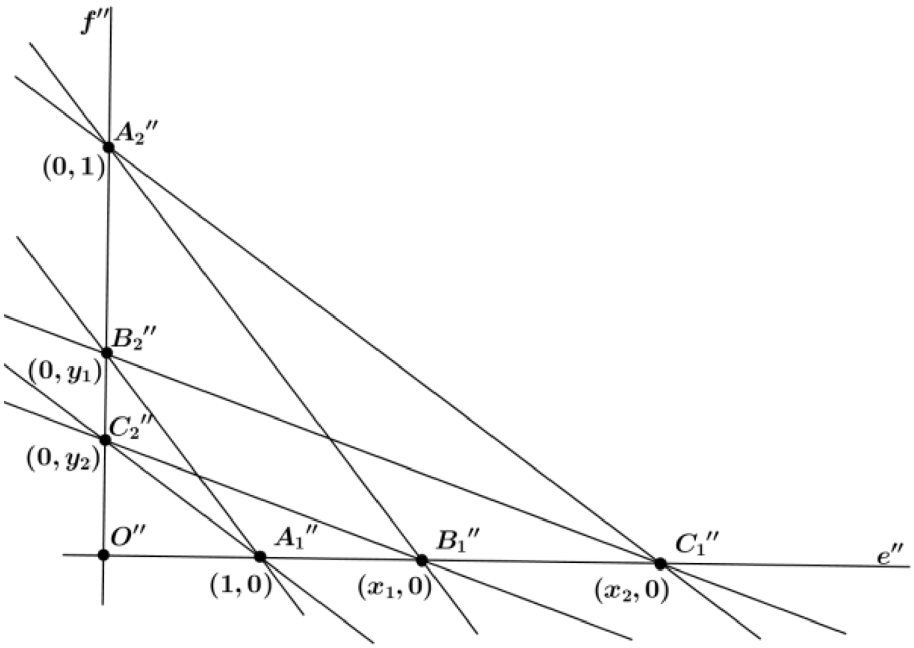
Bizonyítás: Azt kellene megmutatunk, hogy az A pont illeszkedik az $\overline{BC}$ egyenesre. Mivel a kollineációk illeszkedéstartók, ezért ha az eredeti pontokra igaz a tétel, akkor egy kollineáció során kapott képeikre is teljesül, és fordítva. Tekintsük ezért a projektív sík egy olyan ϕ kollineációját, mely a projektív síkot önmagába viszi, és amely során az $\overline{AB}$ egyenes a sík ideális egyenesébe megy. Ilyen transzformáció létezik, mert a kollineációk megadhatók (n+2) darab általános helyzetű pont és képe által. Tekintsünk most erre a síkra úgy, mint affin síkra, azaz feledkezzünk meg az ideális pontokról és a sík ideális egyeneséről. Ekkor $\overline{A_1'C_2'} \cap \overline{C_1'A_2'} = \emptyset$, azaz $\overline{A_1'C_2'} \parallel \overline{C_1'A_2'}$, hasonlóan $\overline{A_1'B_2'} \parallel \overline{B_1'A_2'}$. A tétel bizonyításához elegendő lenne erre az esetre belátni, hogy $\overline{B_1'C_2'} \parallel \overline{C_1'B_2'}$, hiszen ekkor a kibővített síkon az A', B', C' pontok az ideális egyenes pontjai lennének, azaz teljesülne, hogy kollineárisak.



5.2. ábra

Alkalmazzunk most az affin síkra egy olyan ψ transzformációt, mely affinitás, és amely az e' és f' egyenest merőleges egyenesekbe viszi, azaz $e'' \perp f''$. (Tudjuk, hogy létezik ilyen affinitás.) Az így kapott e'' és f'' egyenesekre gondoljunk úgy, mint koordinátatengelyekre, melyeken az egységet jelölje az A_1'' illetve az A_2'' pont. Ekkor a sík egy P pontját koordinátákkal láthatjuk el. Ha tekintjük ugyanis az $\underline{a_1} = \overrightarrow{OA_1''}$ és az $\underline{a_2} = \overrightarrow{OA_2''}$ vektorok alkotta bázist, akkor ezen vektorok segítségével a P pontra $\underline{p} = \overrightarrow{OP} = \alpha_1 \underline{a_1} + \alpha_2 \underline{a_2}$ alkalmas $\alpha_1, \alpha_1 \in T$ skalárokkal. Azt mondjuk, hogy ekkor a P pont koordinátái: (α_1, α_2). A vizsgált pontok így az alábbi koordinátákkal adhatók meg: $A_1''(1{,}0)$, $B_1''(x_1, 0)$, $C_1''(x_2, 0)$ és $A_2''(0{,}1)$, $B_2''(0, y_1)$, $C_2''(0, y_2)$. Ezen koordináták segítségével szeretnénk ellenőrizni, hogy $\overline{A_1''C_2''} \parallel \overline{C_1''A_2''}$ és $\overline{A_1''B_2''} \parallel \overline{B_1''A_2''}$ esetén

$\overline{B_1''C_2''} \parallel \overline{C_1''B_2''}$ teljesül-e. Tudjuk, hogy két egyenes pontosan akkor párhuzamos egymással, ha a meredekségük azonos.



5.3. ábra

Mivel tudjuk, hogy $\overline{A_1''C_2''} \parallel \overline{C_1''A_2''}$, ezért a meredekségük egyenlő:

$$\frac{y_2}{1} = \frac{1}{x_2}.$$

Hasonlóan $\overline{A_1''B_2''} \parallel \overline{B_1''A_2''}$ miatt:

$$\frac{y_1}{1} = \frac{1}{x_1}.$$

Ha a fenti egyenletek segítségével írjuk fel a $\overline{B_1''C_2''}$ meredekségét, akkor

$$\frac{y_2}{x_1} = \frac{\frac{1}{x_2}}{x_1} = \frac{\frac{1}{x_1}}{x_2} = \frac{y_1}{x_2},$$

ami éppen a $\overline{C_1''B_2''}$ egyenes meredekségével egyenlő. Találtunk tehát egy olyan speciális affin esetet, amelyben a tételt könnyen igazolni lehetett, az illeszkedéstartás miatt viszont ezzel teljesen általános esetre is beláttuk az állítást. □

Összefoglalás, kitekintés

A fenti fejezetek segítségével ebben a dolgozatban némi betekintést nyerhettünk az affinitások világába. Új, középiskolából többnyire nem ismert struktúrákat, leképezéseket ismerhettünk meg bizonyos tulajdonságaikkal együtt. Fontos azonban megemlítenünk, hogy az affinitásoknak számos, általunk nem részletezett leírása, tulajdonsága és alkalmazása létezik. Megadhatók például az affin leképezések analitikusan, koordináták és mátrixok segítségével. Beszélhetünk más, a párhuzamos vetítéstől különböző speciális affinitásról is. Szemléletes, könnyen elképzelhető példákat találhatunk, ha a valós sík tengelyes affin transzformációit tekintjük: a merőleges, a ferde és a párhuzamos affinitást. Nem tértünk ki ezenkívül ebben a dolgozatban arra, hogy különböző alakzatokkal, például a kúpszeletekkel mi történik az affin leképezések során, és arra sem, hogy bizonyos szerkesztésekben hogyan használhatjuk fel mindezt. Azoknak, akik az affin leképezések minden részletével foglalkozni szeretnének, azt javasoljuk, hogy a fent említett területek mindegyikével ismerkedjenek meg.

Irodalomjegyzék

[1] Csikós Balázs - Kiss György: *Projektív geometria*, Szegedi Egyetemi Kiadó, 2011

[2] Freud Róbert: *Lineáris algebra*, ELTE Eötvös Kiadó, 2009

[3] Moussong Gábor: *Geometria 2. előadásjegyzet*

[4] Moussong Gábor: *Geometria 3. előadásjegyzet*

[5] http://www.math.unideb.hu/~szzoltan/proj_zv.pdf