Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Szabályos kombinatorikai struktúrák

Szakdolgozat

Készítette:

Hadaró Szonja

Matematika BSc szakos hallgató

Témavezető:

Szőnyi Tamás

egyetemi tanár

Budapest

2013

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezető

Szakdolgozatom témájának a szabályos kombinatorikai struktúrákat választottam. A téma kiválasztásában nagy segítséget nyújtott témavezetőm, Szőnyi Tamás egyetemi tanár, akivel több témát végiggondolva jutottunk erre a döntésre. Szakdolgozatom írása közben sok új matematikai résszel találkoztam, amelyek bővítették rálátásomat a matematika ezen ágára.

Az illeszkedési struktúrákon át, a véges geometrián keresztül eljutunk a Steiner rendszerekhez. Az egész szakdolgozaton végigvonul a Fano-sík és az amőbasík, hiszen sok példában előkerülnek.

A következő oldalakon elkalauzolom az olvasót ezen téma piciny szeletébe.

2. fejezet

Illeszkedési struktúrák

Ez a fejezet az ELTE által kiadott jegyzetből Frank de Clerck [3] cikkére támaszkodik.
Mindenekelőtt definiáljuk azt a fogalmat, amiről ebben a fejezetben szó lesz, vagyis az illeszkedési struktúrát:

2.1. Definíció. Egy *illeszkedési struktúra* olyan $\mathbf{D} = (\mathbf{P}, \mathbf{B}, I)$ hármas, ahol $\mathbf{P}$ és $\mathbf{B}$ két diszjunkt, nem üres halmaz és I egy kétváltozós reláció $\mathbf{P}$ és $\mathbf{B}$ között, azaz $I \subseteq \mathbf{P} \times \mathbf{B}$.

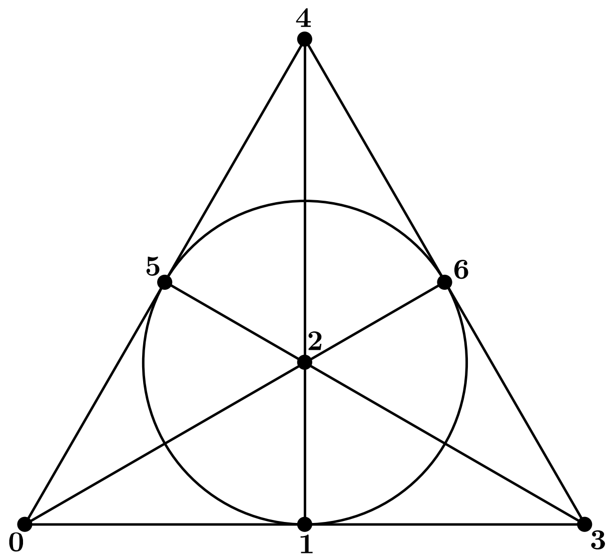
A $\mathbf{P}$ halmaz elemeit *pontoknak*, a $\mathbf{B}$ halmaz elemeit *blokkoknak* és az I elemeit *illeszkedő* pont egyenes párnak illetve pont blokk párnak nevezzük. A $(p, B) \in I$ helyett gyakran azt írjuk, hogy pIB és úgy mondjuk, hogy „a p pont a B blokkban fekszik" vagy „B átmegy p-n" vagy „p és B illeszkednek egymásra". A blokkokat latin nagybetűvel, a pontokat pedig latin kisbetűvel jelöljük.
A fejezet példáiban, illetve a motivációban használunk geometriai fogalmakat, amelyeket majd a későbbi fejezetekben tárgyalunk részletesen. Ugyancsak előkerülnek példaként a gráfok, amelyekkel a Véges matematika előadások során ismerkedtünk meg. Azért használjuk a blokk kifejezést az egyenes helyett, mert olyan alakzatokat is blokknak tekinthetünk (pl. körök, síkok vagy egy gráf élei), amelyek nem úgy viselkednek, mint az egyenesek. Gyakran tekintjük a projektív vagy affin terek altereit blokknak. A vizsgált illeszkedési struktúrák végesek, ami azt jelenti, hogy $\mathbf{P}$ és $\mathbf{B}$ is véges elemszámú halmazok, $|\mathbf{P}| = v$ és $|\mathbf{B}| = b$. A későbbiekben v és b mindig a pontok illetve a blokkok számát jelenti majd. A 2.1. Definíció szerint bármely két diszjunkt véges halmaz közötti reláció jó példának, leggyakrabban az '$\in$' reláció lesz.

Lássunk egy példát illeszkedési struktúrára:

2.2. Példa. Legyen $\mathbf{P} = \{0, \dots, 6\}$ és

$$\mathbf{B} = \{\{0,1,3\},\{1,2,4\},\{2,3,5\},\{3,4,6\},\{4,5,0\},\{5,6,1\},\{6,0,2\}\}$$

és az illeszkedési reláció a tartalmazás. Ez az illeszkedési struktúra nem más, mint a másodrendű projektív sík, ismertebb nevén a Fano-sík.



2.1. ábra. A Fano-sík

A Fano-síkról a későbbiekben a Véges geometria fejezetben lesz szó. Érdekesség, hogy Gino Fano olasz matematikus a projektív geometria axiomatizálásakor ezt a struktúrát kizárta.

Most mutatunk egy másik módot illeszkedési struktúrák reprezentálására, amely a lineáris algebra használatát teszi lehetővé. Ehhez azonban előbb szükségünk lesz egy definícióra:

2.3. Definíció. Legyen $\mathbf{D} = (\mathbf{P}, \mathbf{B}, I)$ véges illeszkedési struktúra és címkézzük a pontjait a következőképp: $P_1, \dots, P_v$ és a blokkjait $B_1, \dots, B_b$. Azt az M mátrixot, ahol $M = (m_{ij}) \quad (i = 1, \dots, v; j = 1, \dots, b)$ és

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ha } p_i I B_j \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

a $\mathbf{D}$ $(0,1)$-*illeszkedési mátrixának* hívjuk. Szoktak $(0,1)$-mátrix helyett $(-1,+1)$ illeszkedési mátrixokat is használni.

2.4. Példa. A 2.2. Példa (azaz a Fano-sík) illeszkedési mátrixa (a blokkokat a fenti sorrendben soroltuk föl):

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Természetesen M függ a pontok, illetve a blokkok felsorolásának sorrendjétől, de a különböző sorrendekhez tartozó mátrixok az oszlopok és sorok permutációjával egymásba alakíthatók. Ebben az értelemben tehát az illeszkedési mátrix egyértelmű.

2.5. Állítás. *Legyenek az M és M' egymástól különböző mátrixok ugyanannak a struktúrának az illeszkedési mátrixai. Ekkor léteznek olyan P és Q permutáció mátrixok, hogy $PMQ = M'$. P és Q éppen azt írja le, hogyan permutáljuk a pontokat, blokkokat.*

Legyen $\mathbf{P} = \{0, \ldots, 6\}$ és

$$\mathbf{B} = \{\{0,1,2\}, \{2,3,4\}, \{4,5,0\}, \{3,0,6\}, \{1,6,4\}, \{5,6,2\}, \{3,5,1\}\}.$$

Az illeszkedési mátrix pedig az alábbi (a blokkokat megint a fenti felsorolás sorrendjében soroltuk fel):

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Szeretnénk ellenőrizni, hogy vajon a most megadott illeszkedési struktúra lényegében azonos-e a Fano-síkkal. Ehhez szükségünk lesz az izomorfizmus és az automorfizmus fogalmára:

2.6. Definíció. Legyenek $\mathbf{D} = (\mathbf{P}, \mathbf{B}, I)$ és $\mathbf{D}' = (\mathbf{P}', \mathbf{B}', I')$ illeszkedési struktúrák és legyen $\pi : \mathbf{P} \cup \mathbf{B} \to \mathbf{P}' \cup \mathbf{B}'$ bijekció. Azt mondjuk, hogy π *izomorfizmus*, ha

$$\mathbf{P}^\pi = \mathbf{P}' \quad \text{és} \quad \mathbf{B}^\pi = \mathbf{B}';$$

$$pIB \Longleftrightarrow p^{\pi}I'B^{\pi} \qquad \forall p \in \mathbf{P} \quad \forall B \in \mathbf{B}.$$

Ebben az esetben azt mondjuk, hogy $\mathbf{D}$ és $\mathbf{D}'$ izomorfak. Ha $\mathbf{D} = \mathbf{D}'$, akkor π neve *automorfizmus.*

2.7. Állítás. *Legyen* $\mathbf{D}$ *és* $\mathbf{D}'$ *két illeszkedési struktúra, az illeszkedési mátrixok rendre* M *és* M'*. A* $\mathbf{D}$ *és* $\mathbf{D}'$ *struktúrák akkor és csak akkor izomorfak, ha létezik az oszlopoknak és soroknak olyan permutációja, amely az* M*-et* M'*-be viszi, azaz akkor és csak akkor, ha léteznek* P *és* Q *permutáció mátrixok, hogy*

$$PMQ = M'.$$

Ha $\mathbf{D} = \mathbf{D}'$*, akkor*

$$PMQ = M.$$

Ez szemléletesen éppen azt jelenti, hogy a pontok és a blokkok egyformára címkézhetőek (a P és Q permutáció mátrixok szerint).

2.8. Megjegyzés. Ismeretes, hogy egy adott $\mathbf{D}$ illeszkedési struktúra összes automorfizmusának halmaza csoportot alkot a kompozícióra (egymás után való elvégzés) mint műveletre nézve. Egy $\mathbf{D}$ struktúra automorfizmus csoportját $\mathrm{Aut}\mathbf{D}$ jelöli.

Megmutatjuk, hogy léteznek olyan P és Q mátrixok, hogy $PMQ = M'$ a korábbi M, M'-re. Most előállítjuk a P és Q mátrixokat. Tekintsük a következő megfeleltetéseket a Fano-sík két korábbi megadásakor szereplő pontjai között:

$$0 \to 0 \quad 1 \to 1 \quad 2 \to 4.$$

A további pontok képe ezután már egyértelmű. Ezt majd pontosabban kifejtjük a Fano-sík automorfizmusainak megszámlálásakor. A további pontok képei:

$$3 \to 2 \quad 4 \to 6 \quad 5 \to 3 \quad 6 \to 5.$$

Hisz a $\{0, 1, 3\}$ 2.2-beli egyenes a 2.4-ben a $0, 1$-en átmenő egyenesbe, azaz $\{0, 1, 2\}$-be megy át, a többi esetben hasonlóan okoskodunk. Ha a pontokat így feleltetjük meg egymásnak, akkor a blokkok megfeleltetése az alábbi módon történik:

$$\begin{aligned}
\{0,1,3\} &\to \{0,1,2\} \\
\{1,2,4\} &\to \{1,4,6\} \\
\{2,3,5\} &\to \{4,2,3\} \\
\{3,4,6\} &\to \{2,6,5\} \\
\{4,5,0\} &\to \{6,3,0\} \\
\{5,6,1\} &\to \{3,5,1\} \\
\{6,0,2\} &\to \{5,0,4\}
\end{aligned}$$

Ez mutatja, hogy a két struktúra izomorf. A pontok közötti megfeleltetések alapján most felírjuk a P permutáció mátrixot:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Innen a Q mátrix már könnyen meghatározható, hiszen ha tekintjük a PM mátrixot, valamint M'-t, akkor láthatjuk, hogy az oszlopaik ugyanazok, csak más sorrendben. Ezt is vártuk, mivel Q csak a P és M mátrix szorzataként előálló mátrix oszlopaira hat és így állítja elő M'-t. A P és M mátrix szorzataként a

$$PM = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrix áll elő. Ennek oszlopait összevetve M' oszlopaival adódik, hogy a Q mátrix:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ellenőrizhetjük, hogy a blokkokon fentebb megadott megfeleltetésnél a blokkok 2.4-beli felsorolásának felel meg. A következőkben megszámoljuk, hány automorfizmusa van a Fano-síknak. Előbb azonban - a könnyebb érthetőség kedvéért némileg leegyszerűsítve - újra megfogalmazzuk mit is értünk automorfizmus alatt:
Az automorfizmus megtartja az illeszkedést, azaz, ha a $\mathbf{D}$ struktúrában l darab pont,

ahol $l \geq 2$, illeszkedik egy blokkra, akkor a $\mathbf{D}'$ struktúrában az l darab pont képeként előálló pontok is illeszkedni fognak egy blokkra. Ha pedig az l darab pont a $\mathbf{D}$ struktúrában nem illeszkedett egy blokkra, akkor a képeik sem lesznek ugyanabban a blokkban $\mathbf{D}'$-ben.

Most már mindent tudunk ahhoz, hogy meg tudjuk számolni, hány automorfizmusa van a Fano-síknak. Azt kell megvizsgálni, hogy melyik pontnak hány képe lehet. Az első pont képeként nyilván bármely pontot választhatjuk, azaz 7-féle képe lehet. A második pontnak 6, hiszen csak az előtte kiválasztott pont képét nem választhatjuk. Az első két pont által meghatározott B blokk harmadik pontja a képpontok által meghatározott B' blokk harmadik pontja kell legyen. Vegyünk tehát egy olyan harmadik pontot, amelyik nincs B-ben. Ennek képe 4-féle lehet (tetszőleges B'-ben nem levő pont). Ezek meghatározzák az első 3 ponton átmenő 3 blokkban levő további 3 pont képét. Egy pont marad ki, amelynek képe szintén egyértelmű. Ebből az következik, hogy legfeljebb $7 \cdot 6 \cdot 4 = 168$ automorfizmusa van. Meg lehet gondolni, hogy a fenti módon definiált leképezés automorfizmus (illetve hivatkozhatunk a kollineációkról szóló 3.7. Tételre, hiszen a fenti 3 pont és a kimaradó egyetlen pont egy-egy általános helyzetű pontnégyest alkot).

Eredményünket állítás formájában mondjuk ki:

2.9. Állítás. *A Fano-sík automorfizmusainak száma:*

$$|\mathrm{Aut}(\mathrm{Fano})| = 7 \cdot 6 \cdot 4 = 168.$$

A korábban megadott P és Q nem egyértelmű. Ha ugyanis $PMQ = M'$ és $P^*MQ^* = M$, azaz tekintjük a 2.1-beli Fano-sík egy automorfizmusát, amelyet a P^*, Q^* ír le, akkor $PMQ = P(P^*MQ^*)Q = (PP^*)M(Q^*Q) = M'$, azaz P, Q helyett PP^* és Q^*Q is jó. Megfordítva, ha $PMQ = M'$ és $\widetilde{P}M\widetilde{Q} = M'$, akkor $PMQ = \widetilde{P}M\widetilde{Q}$, azaz $M = (P^{-1}\widetilde{P})M(\widetilde{Q}Q^{-1})$, más szóval $P^* = P^{-1}\widetilde{P}$, $Q^* = \widetilde{Q}Q^{-1}$ az M egy automorfizmusát adja.

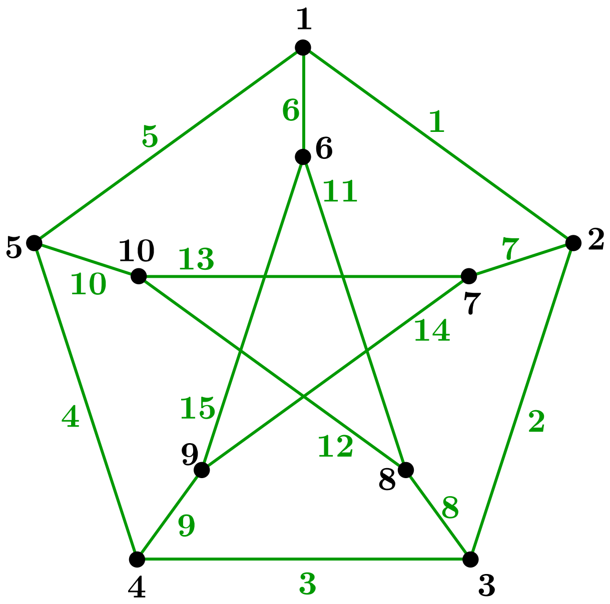
Most definiáljuk a négyzetes illeszkedési struktúra fogalmát (ezt néha szokták szimmetrikusnak is nevezni):

2.10. Definíció. Egy illeszkedési struktúrát *négyzetesnek* nevezünk, ha ugyanannyi pontja van, mint blokkja.

A Fano-sík tehát négyzetes illeszkedési struktúra, hiszen 7 pontja és 7 blokkja van.

Most mutatunk egy példát arra, hogy egy illeszkedési struktúra nem feltétlenül négyzetes, ráadásul akár még gráf is lehet. Blokkoknak a gráf éleit tekintjük.

2.11. Példa. Példánk a Petersen-gráf lesz, amit a 2.2. ábrán láthatunk. Ez a következőképpen néz ki:



2.2. ábra. Petersen-gráf

A 2.2. ábrához tartozó illeszkedési mátrix egy 10×15-ös mátrix, hiszen a Petersen-gráfnak 10 csúcsa és 15 éle van:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ha az M mátrixszal reprezentált Petersen-gráf csúcsait és éleit az óra járásával egyező irányban például $2 \cdot \frac{2\pi}{5}$-tel elforgatjuk, akkor visszakapjuk a Petersen-gráfot, azaz így a Petersen-gráf egy automorfizmusát kapjuk.

Ez a következőképp írható le az éleken: $1 \to 3 \to 5 \to 2 \to 4 \to 1$, $6 \to 8 \to 10 \to 7 \to 9 \to 6$, valamint $11 \to 12 \to 13 \to 14 \to 15 \to 11$. Tehát végrehajtva a leírt oszlopcseréket, az

$$
M' = \begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{pmatrix}.
$$

mátrixot kapjuk.

Az oszlopcseréket leíró Q mátrix:

$$
Q = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}.
$$

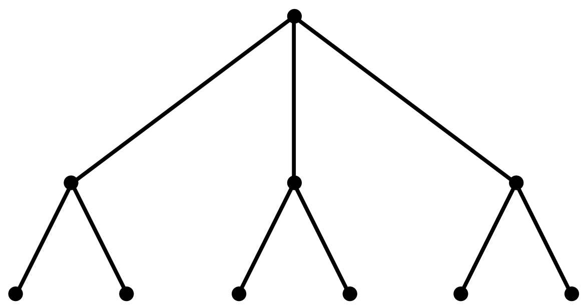
M' sorai megegyeznek M soraival, így sorcserékkel, pontosabban a csúcsok forgatásával kaphatjuk meg M'-ből.

Ezt a

$$P = \begin{pmatrix} 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0 \end{pmatrix}.$$

mátrix írja le, amelyre $PMQ = M$, ami a 2.7. Állítás automorfizmusokra vonatkozó részét illusztrálja.

Az előbbi példában láthattuk a Petersen-gráf egy nem triviális (identitástól különböző) automorfizmusát. Első pillanatra úgy látszik, hogy $10 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$-féleképpen lehet a Petersen-gráfot átszámozni. A Petersen-gráf ugyanis tartalmazza a következő feszítőfát, úgy, hogy a gyökér csúcs a Petersen-gráf tetszőleges csúcsa lehet:



Tekintsünk ugyanis egy Petersen-gráfot, melynek csúcsait megszámoztuk. A gyökér képe tetszőleges lehet, erre tehát 10 lehetőségünk van. A középső szinten lévő három pont $3! = 6$ különböző sorrendben írható fel, ezek képei a gyökér képének szomszédai. Az alsó szinten lévő csúcsok kettenként felcserélhetők, vagyis ez adna még $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ lehetőséget.
Ekkor azonban nem feltétlenül kapunk automorfizmust. Könnyen meggondolható, hogy ha az első két sor és a második sor valamely pontjának szomszédai ismertek, akkor a fennmaradó négy pont már egyértelműen meghatározott. Ez tehát csak $10 \cdot 6 \cdot 2 = 120$ lehetőség, vagyis a Petersen-gráfnak legfeljebb 120 automorfizmusa van.

Meg lehetne gondolni, hogy így tényleg automorfizmust kapunk, de inkább megmutatjuk a Petersen-gráfnak egy olyan konstrukcióját, amelyből azonnal látszik, hogy ennyi automorfizmusa van is.
Legyen $P = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ egy ötelemű halmaz. Vesszük P összes kételemű részhalmazát. Ezek száma $\binom{5}{2} = 10$. Ezeket a kételemű halmazokat megfeleltetjük a gráf csúcsainak:

$$V = \{\{0, 1\}, \{0, 2\}, \{0, 3\}, \{0, 4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}.$$

Akkor van él a gráfban két $u, v \in V$ csúcs között, ha a csúcsoknak megfelelő halmazok diszjunktak.
Megfeleltetés létesíthető az általunk korábban tárgyalt konstrukció (2.11. Példa) és a Petersen-gráf ilyen módon történő megkonstruálása között. A 2.2. ábra számozását követve egy lehetséges megfeleltetés:

$$\begin{array}{ccccc} 1 \to \{0,3\} & 2 \to \{1,4\} & 3 \to \{2,3\} & 4 \to \{0,1\} & 5 \to \{2,4\} \\ 6 \to \{1,2\} & 7 \to \{0,2\} & 8 \to \{0,4\} & 9 \to \{3,4\} & 10 \to \{1,3\} \end{array}$$

Ebből a reprezentációból az is következik, hogy az ötelemű P alaphalmaz minden permutációja a Petersen-gráf egy automorfizmusát adja (különböző permutációk különbözőket), azaz a Petersen-gráfnak legalább 120 automorfizmusa van.
Abból, hogy $|\mathrm{Aut(Petersen)}| \leq 120$ és $|\mathrm{Aut(Petersen)}| \geq 120$ triviálisan adódik, hogy $|\mathrm{Aut(Petersen)}| = 120$, ráadásul azt is látjuk, hogy $\mathrm{Aut(Petersen)} = S_5$, a P alaphalmaz összes permutációinak halmaza.
A következő tételhez szükségünk lesz arra, hogy mit értünk pont, illetve blokk fokán:

2.12. Definíció. Egy pont foka a rá illeszkedő blokkok száma, a blokk foka a rajta lévő pontok száma.

2.13. Tétel. *Tegyük fel, hogy van egy illeszkedési struktúra, amelyben a pontok foka $r_1, \ldots, r_v$ és a blokkok foka $k_1, \ldots, k_b$. Ekkor szükségképpen*

$$\sum_{i=1}^{v} r_i = \sum_{j=1}^{b} k_j.$$

Bizonyítás. Megszámolunk minden illeszkedő (azaz I-beli) pont egyenes párt kétféleképpen. Felhasználva, hogy az i. pont pontosan r_i blokkban van benne, így az egyenlet bal oldalán a pontok fokát összeadva kapjuk meg az illeszkedések számát. Hasonlóan, mivel a j. blokk b_j pontosan k_j pontot tartalmaz, az egyenlet jobb oldalán szintén az illeszkedéseket számoljuk meg, ezúttal a blokkok felől nézve. Ez a két érték nyilván egyenlő (hiszen mindkettő $|I|$). ■

Ha a k_i és az r_j számok egyenlők, a formula nagyon egyszerű lesz.

2.14. Következmény. *Legyen* **D** *egy illeszkedési struktúra,* v *darab ponttal,* b *darab blokkal, ahol minden pont foka* r *és minden blokk foka* k*. Ekkor*

$$v \cdot r = b \cdot k.$$

Például a Fano-sík esetén $v = b = 7$, $r = k = 3$ (hisz minden ponton 3 blokk megy át, minden blokk 3 pontú). A Petersen-gráfra $v = 10$, $b = 15$, $r = 3$, $k = 2$ (hiszen itt a gráf élei 2 elemű részhalmazok).
Ezeket az összefüggéseket a későbbi fejezetekben többször felhasználjuk majd.

3. fejezet

Klasszikus affin és projektív sík

A geometria a matematikának az az ága, amely az alakzatokkal, illetve azok tulajdonságaival, egymáshoz való viszonyával foglalkozik. Ezen tulajdonságok összevetése igencsak nehézkes volt, mígnem René Descartes a híres francia matematikus kitalálta a koordináta-rendszert, lehetővé téve az alakzatok algebrai vizsgálatát. Ha a koordináta-rendszer vízszintes tengelyét x-szel, függőleges tengelyét y-nal jelöljük, akkor pont alatt olyan (x, y) rendezett párt értünk, ahol $x, y \in \mathbb{R}$. Az egyenes egyenlete kétfajta lehet:

1. Ha $x = c$ valamely $c \in \mathbb{R}$-re, akkor pontjai a $\{(c, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ pontok.
2. Ha $y = mx + b$ valamely $m, b \in \mathbb{R}$-re, akkor pontjai a $\{(x, mx + b) \mid x \in \mathbb{R}\}$ pontok.

Ezzel meghatároztuk az euklideszi sík alapelemeit, amelyek a *pont* és az *egyenes*. Az illeszkedés az '$\in$' reláció.

Vizsgáljuk meg, hogy az egyenes egyenlete alapján mit mondhatunk két egyenes metszéséről. Tekintsük az

1. $y = m_1x + b_1$
2. $y = m_2x + b_2$

egyenletű egyeneseket. Ezeket az egyenleteket egymásból kivonva a

$$0 = (m_1 - m_2)x + (b_1 - b_2)$$

egyenlethez jutunk. Ezt az egyenletet x-re rendezve kapjuk, hogy

$$x = \frac{b_2 - b_1}{m_1 - m_2},$$

kivéve, ha $m_1 = m_2$. Ebben az esetben a két egyenes párhuzamos egymással, azaz nem metszik egymást, vagy azonosak.
Ha viszont $m_1 \neq m_2$, akkor x (és így y is) egyértelmű, azaz a két egyenesnek pontosan egy metszéspontja van. Hasonlóan egyszerű módon látható, hogy bármely két pontnak pontosan egy összekötő egyenese van.

Az euklideszi sík tehát teljesíti a következő tulajdonságokat:

- Bármely két pontra pontosan egy egyenes illeszkedik.
- Bármely egyeneshez és egy rá nem illeszkedő ponthoz pontosan egy egyenes van, amely átmegy a ponton és nem metszi az egyenest.
- Van három nem kollineáris pont.

Ezen tulajdonságokat megkövetelve jutunk az (általános) affin sík fogalmához, amelyet most absztrakt formában definiálunk:

3.1. Definíció. Az $\alpha = (\mathbf{P}, \mathbf{B}, I)$ hármast, ahol $\mathbf{P}$ és $\mathbf{B}$ két diszjunkt halmaz, valamint $I \subset \mathbf{P} \times \mathbf{B}$ egy illeszkedésnek nevezett reláció, *affin síknak* nevezünk, ha kielégíti a következő axiómákat:

A1. $\mathbf{P}$ bármely két különböző p, q eleméhez pontosan egy olyan F eleme van $\mathbf{B}$-nek, amely mindkettővel I relációban áll ($(p, F) \in I$ és $(q, F) \in I$), azaz két ponton át pontosan egy egyenes húzható.

A2. Ha $p \in \mathbf{P}$ és $F \in \mathbf{B}$ úgy, hogy $(p, F) \notin I$, akkor pontosan egy olyan $B \in \mathbf{B}$ létezik, hogy $(p, B) \in I$ és nem létezik $q \in \mathbf{P}$, hogy $(q, F) \in I$ és $(q, B) \in I$, azaz egy egyenesen és egy rajta kívüli ponton pontosan egy a ponton átmenő, az egyenest nem metsző egyenes van.

A3. Van olyan $p, q, r \in \mathbf{P}$, hogy nem létezik $F \in \mathbf{B}$, amelyre $(p, F) \in I$, $(q, F) \in I$ és $(r, F) \in I$, azaz létezik három nem egy egyenesen fekvő pont.

Az euklideszi sík teljesíti ezeket a tulajdonságokat, tehát kimondhatjuk a következő állítást:

3.2. Állítás. *Az euklideszi sík affin sík.*

A körülöttünk lévő tér euklideszi. Ha egy térbeli alakzatot síkban szeretnénk ábrázolni, akkor le kell azt vetítenünk. (A vetítést más szóval projekciónak mondjuk.) Az emberi szem is így működik, ugyanis a térbeli tárgyakról általa alkotott kép éppen a centrális vetületnek felel meg. Vezessük most be a centrális vetítés fogalmát.

3.3. Definíció. Legyen adott egy σ sík és egy $C \notin \sigma$ pont az euklideszi térben. Tetszőleges olyan P-re, ahol a CP egyenes nem párhuzamos a σ síkkal, a P pont centrális vetülete a C-re nézve az a P' pont lesz, ahol a CP egyenes metszi a σ síkot.

Nyilvánvaló, hogy amennyiben a P olyan pont, hogy CP párhuzamos a σ síkkal, akkor a P pontnak nem lesz centrális vetülete a σ síkon a C pontra nézve. Azért, hogy az ilyen P pontoknak is legyen képe, alakult ki a projektív geometria.
Közismert, hogy affin síkon a párhuzamosság ekvivalencia-reláció. A projektív síkot úgy származtathatjuk az euklideszi síkból, hogy a sík egyeneseinek minden párhuzamossági osztályához hozzárendelünk egy végtelen távoli vagy más szóval ideális pontot. Egy g euklideszi egyeneshez hozzávéve a g párhuzamossági osztályának ι_g ideális pontját a $\overline{g}$ projektív egyeneshez jutunk. Az ideális pontok halmaza adja az ideális egyenest. Ezzel elértük azt, hogy bármely két egyenesnek legyen közös pontja. Ez a tulajdonság a projektív síkok legfontosabb tulajdonsága, amelyet az általános (absztrakt) projektív síkok definiálására is felhasználhatunk.

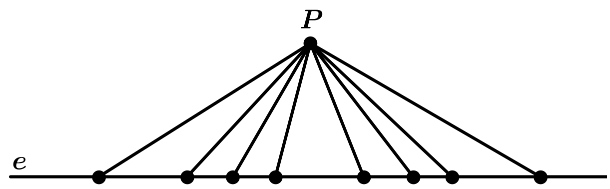
3.4. Definíció. A $\Pi = (\mathbf{P}, \mathbf{B}, I)$ hármast, ahol $\mathbf{P}$ és $\mathbf{B}$ két diszjunkt halmaz, valamint $I \subset \mathbf{P} \times \mathbf{B}$ egy illeszkedésnek nevezett reláció, projektív síknak nevezünk, ha kielégíti a következő axiómákat:

P1. $\mathbf{P}$ bármely két különböző eleméhez pontosan egy olyan eleme van $\mathbf{B}$-nek, amely mindkettővel I relációban áll, azaz két ponton pontosan egy egyenes megy át.

P2. $\mathbf{B}$ bármely két különböző eleméhez pontosan egy olyan eleme van $\mathbf{P}$-nek, amely mindkettővel I relációban áll, azaz két egyenesnek pontosan egy metszéspontja van.

P3. Létezik négy általános helyzetű pont, azaz négy olyan pont, melyek közül semelyik három nincs egy egyenesen.

A **P3.** axióma az elfajuló projektív síkok kizárására szolgál. Ha vesszük kollineáris pontok tetszőleges halmazát és egy az egyenesükön nem levő pontot, illetve ezen pontok összekötő egyeneseit, akkor **P1.**, **P2.** axiómákat teljesítő $\Pi = (\mathbf{P}, \mathbf{B})$ struktúrát kapunk, viszont **P3.** nem teljesül. Az elfajuló projektív sík olyan illeszkedési struktúra, amelyben a blokkok különböző méretűek.



3.1. ábra. Az érdektelen sík

Az affin és a projektív síkok közötti szembetűnő eltérés az, hogy a projektív síkon nincs értelme párhuzamosságról beszélni, hiszen az ideális pontok és a belőlük kapott ideális egyenes bevezetése miatt két egyenes biztosan metszi egymást.

Az 1. fejezetben szemléletesen tárgyaltuk az automorfizmus fogalmát. Ez algebrai fogalom, aminek geometriai megfelelője a projektív transzformáció, azaz a kollineáció. Most megnézzük, mik is pontosan a kollineációk, és kimondunk néhány hozzájuk kapcsolódó, alapvető fontosságú tételt. A következőkben σ az euklideszi (affin) síkot jelöli, $\overline{\sigma}$ pedig a belőle ideális pontok bevezetésével kapható klasszikus projektív síkot.

3.5. Definíció. A $\kappa : \overline{\sigma} \to \overline{\sigma}$ bijektív leképezést a $\overline{\sigma}$ sík kollineációjának (vagy projektív transzformációjának) mondjuk, ha bármely $\overline{\sigma}$-beli egyenesnek a κ szerinti képe egyenes.

3.6. Definíció. A $\overline{\sigma}$ projektív síkon legyen adott négy pont. Ezekről azt mondjuk, hogy általános helyzetű pontnégyest alkotnak, ha közülük bármelyik három nincs egy egyenesen. (Ezek létezését követeli a **P3.** axióma.)

3.7. Tétel. *A $\overline{\sigma}$ projektív síkon legyenek adva a P_1, P_2, P_3, P_4 és Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 általános helyzetű pontnégyesek. Ekkor egyértelműen létezik egy olyan $\kappa : \overline{\sigma} \to \overline{\sigma}$ kollineáció, amelyre fennáll $\kappa(P_r) = Q_r \quad (r = 1, 2, 3, 4)$.*

A 3.7. Tétel a klasszikus projektív síknál általánosabb síkokra is igaz. Például, ha a fentiekből a valós számok $\mathbb{R}$ teste helyett egy $\mathbb{K}$ kommutatív testre építjük a geometriát, akkor a 3.7. Tételbeli κ létezése igaz marad. Ha $\mathbb{K}$-nak nincs az identitástól különböző automorfizmusa, akkor az egyértelműség is igaz. A Fano-sík esetén ez a $\mathbb{K}$ test a modulo 2 maradékosztályok teste, ahogy ezt később látni fogjuk. Ennek csak az identitás automorfizmusa, így a 3.7. Tétel megfelelője igaz a Fano-síkra. Ezt használtuk a 2.9. Állításnál.

3.1. Homogén koordináták

Bár nem a homogén koordináták segítségével tárgyaltuk a projektív síkról szóló részt, azért felvázoljuk ennek lehetőségét. Ehhez Verhóczki László [5] jegyzetére támaszkodtunk.

A projektív síkot mindenekelőtt koordinátázni szeretnénk. A σ euklideszi síkon - mely a korábbiak alapján affin sík - már van egy jól ismert koordinátázásunk. Rögzítsünk ugyanis a σ síkon egy $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ derékszögű koordináta-rendszert. Ekkor egy σ-beli P pont esetén a helyvektor $\overrightarrow{OP} = x_P\mathbf{i} + y_P\mathbf{j}$ kifejezésben szereplő együtthatóit mondjuk a P síkbeli koordinátáinak.

Jelölje a σ síkhoz tartozó ideális egyenest i_σ. A $\overline{\sigma} = \sigma \cup i_\sigma$ projektív síkot úgy koordinátázzuk, hogy ahhoz az előzőekben tárgyalt Descartes-féle koordináta-rendszert vesszük alapul. Legyen $\mathbf{k}$ a σ-beli $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ ortonormált vektorok vektoriális szorzata, azaz legyen $\mathbf{k} = \mathbf{i} \times \mathbf{j}$. Vegyük az euklideszi térben azt a T pontot, amelyre fennáll a $\overrightarrow{TO} = \mathbf{k}$ egyenlőség.

Következzen most néhány definíció arról, hogy mit értünk a projektív síkon vett tetszőleges P pont és e egyenes homogén koordinátáin.

3.8. Definíció. Egy $P \in \overline{\sigma}$ *közönséges pont*[1] meghatározó vektorain a $\langle T; P \rangle$ egyenes irányvektorait értjük. Ezen meghatározó vektoroknak az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ bázisra vonatkozó koordináta-hármasait mondjuk a P pont homogén koordinátáinak.

3.9. Definíció. Egy $\overline{\sigma}$-beli e egyeneshez tartozó I_e ideális pont meghatározó vektorain az e egyenes irányvektorait értjük. A meghatározó vektorok koordináta-hármasait az I_e ideális pont homogén koordinátáinak nevezzük.

3.10. Definíció. Egy $\overline{e} \in \overline{\sigma}$ *közönséges egyenes*[2] meghatározó vektorain a $\langle T; e \rangle$ euklideszi sík normálvektorait értjük. Ezen meghatározó vektoroknak az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ bázisra vonatkozó koordináta-hármasait mondjuk az $\overline{e}$ egyenes homogén koordinátáinak.

3.11. Definíció. Feleltessük meg az i_σ ideális egyenesnek a T-n áthaladó és a σ síkkal párhuzamos μ síkot. Az i_σ-hoz rendeljük hozzá a μ sík normálvektorait, vagyis a $\lambda\mathbf{k}, \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$ vektorokat. Ezek $[0, 0, \lambda]$ koordináta-hármasait mondjuk az i_σ egyenes homogén koordinátáinak.

3.12. Definíció. Legyen $\mathbf{v}$ az $\overline{e}$ egyenes homogén koordináta-hármasa, $\mathbf{p}$ pedig a P pont homogén koordináta-hármasa. A P pont akkor és csak akkor illeszkedik az $\overline{e}$ egyenesre, ha $\mathbf{p} \cdot \mathbf{v} = 0$ (a $\mathbf{p}$ és $\mathbf{v}$ skaláris szorzatát vesszük).

[1] a σ euklideszi sík pontjai

[2] a σ euklideszi sík egyenesei

Szemléletesen úgy is megfogalmazhatnánk ezt, hogy a pontok az origón átmenő egyenesek (a megfelelő homogén koordináta az egyenes valamely $\mathbf{v}$ irányvektora), az egyenesek az origón átmenő síkok (a megfelelő homogén koordináta a sík valamely $\mathbf{n}$ normálvektora), az illeszkedés a tartalmazás. Ebből azt is láthatjuk, hogy az egyenes akkor és csak akkor része a síknak, ha $\mathbf{v}$ merőleges $\mathbf{n}$-re, azaz ha $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ mint a 3.12. Definícióban.

Véges geometriák esetén is használhatnánk a homogén koordinátákat, de a későbbiekben ezt nem fogjuk részletezni.

4. fejezet

Véges geometria

4.1. Véges affin sík

Az előző fejezetben definiáltuk az absztrakt affin sík fogalmát. Most végessé tesszük úgy, hogy az ott leírt axiómarendszerhez hozzáveszünk még egy axiómát.

4.1. Definíció. Legyen $n \geq 2$ és $n \in \mathbb{Z}$. Egy illeszkedési struktúrát (melyben a blokkokat egyenesnek nevezzük) n-edrendű, véges affin síknak nevezünk, ha teljesíti a következő axiómákat:

A1. Bármely két pontra pontosan egy egyenes illeszkedik.

A2. Bármely egyeneshez és egy rá nem illeszkedő ponthoz pontosan egy olyan egyenes van, amely átmegy a ponton és nem metszi az egyenest.

A3. Van három nem kollineáris pont.

A4. Van olyan egyenes, mely n pontból áll.

Néhány egyszerűen bizonyítható tulajdonság következik az axiómákból, lásd Kárteszi Ferenc [1] és Kiss György - Szőnyi Tamás [2] könyveiben.

4.2. Állítás. *Egy n-edrendű véges affin síkra igazak az alábbiak:*

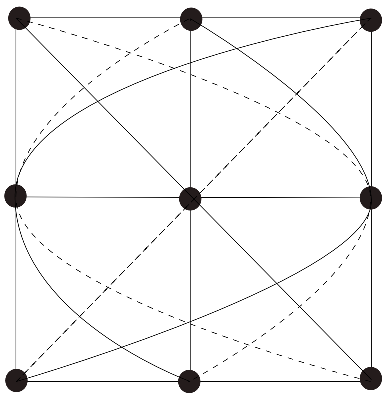
AT1. *Minden egyenes n pontból áll.*

AT2. *Minden pontra $n+1$ egyenes illeszkedik.*

AT3. *A sík n^2 pontot tartalmaz.*

AT4. *A sík n^2+n egyenest tartalmaz.*

Következzen egy példa az $n = 3$ esetre.



4.1. ábra. Az amőbasík

Adódik a kérdés, vajon az axiómarendszer és a belőle következő tulajdonságok együtteseként kapott 7 állításból kiválaszthatunk-e hármat úgy, hogy azokból következzen a másik négy. Most mutatunk egy-egy olyan példát, amikor következik a kiválasztott három axiómából a másik négy illetve amikor nem.

4.3. Példa. Legyenek az alapaxiómáink az **A1.**, **AT1.**, **AT2.**. Az **A3.** és **A4.** axiómák nyilván következnek belőlük. Az **AT3.** ellenőrzéséhez vegyünk egy tetszőleges pontot. Erre **AT2.** szerint $n + 1$ egyenes illeszkedik. Az $n + 1$ egyenes mindegyikén a kiválasztott ponton kívül $n - 1$ pont van. A pontok száma tehát $(n + 1) \cdot (n - 1) + 1$, ami éppen n^2. Az **A2.** vizsgálatához vegyünk egy P pontot és egy rá nem illeszkedő e egyenest. Az e egyenesen n pont van, amelyek mindegyikére illeszkedik egy olyan egyenes, amely átmegy P-n. Mivel P-n $n + 1$ egyenes megy át, marad egy egyenes, amire illeszkedik a P pont és nincs közös pontja e-vel. Ahhoz, hogy **AT4.**-et igazoljuk, meg fogjuk számolni az illeszkedéseket. A síkon n^2 pont van, amelyek mindegyikére $n + 1$ pont illeszkedik, a másik irányból nézve pedig x egyenes, amelyek mindegyikén n pont van. Tehát a megoldandó egyenlet: $n^2 \cdot (n + 1) = x \cdot n$. Leosztva n-nel (amit nyilván megtehetünk, hiszen feltettük, hogy $n \geq 2$ egész szám), $x = n^2 + n$ adódik. A kiválasztott állítások tehát szintén adhatnák a véges affin sík egy axiómarendszerét. Hasonlóan, az **A1.**, **AT1.** és **AT3.** is jó lenne, mert ezekből **AT2.** azonnal következik.

4.4. Példa. Most következzen egy olyan eset, amikor nem teljesülnek a tulajdonságok a kiinduló axiómákból, azaz nem feltétlen kapunk n-edrendű affin síkot. Tekintsük az **A1.**, **A3.**, **AT3.** axiómákat és vizsgáljuk az $n = 9$ esetet. A sík pontjainak száma **AT3.** miatt $9^2 = 81$. Tekintsük a 3.1. ábrát úgy, hogy az e egyenesen 80 pont van. Ekkor a feltett három axióma teljesül, de **AT4.** nem, hiszen 90 egyenesnek kellene lennie, de csak 81 van.

4.2. Véges projektív sík

Most bevezetjük a véges projektív sík fogalmát is a véges affin síkéhoz hasonlóan.

4.5. Definíció. Legyen $n \geq 2$ és $n \in \mathbb{Z}$. Egy illeszkedési struktúrát (melyben a blokkokat egyenesnek nevezzük) n-edrendű, véges projektív síknak nevezünk, ha teljesíti a következő axiómákat:

P1. Bármely két pontra pontosan egy egyenes illeszkedik.

P2. Bármely két egyenes egy pontban metszi egymást.

P3. Van négy, hármanként nem kollineáris pont.

P4. Van olyan egyenes, mely $n+1$ pontból áll.

Nem meglepő, hogy a projektív esetben is van néhány könnyen belátható tulajdonság.

4.6. Állítás. *Egy n-edrendű véges projektív síkra igazak az alábbiak:*

PT1. *Minden egyenes $n+1$ pontból áll.*

PT2. *Minden pontra $n+1$ egyenes illeszkedik.*

PT3. *A sík n^2+n+1 pontot tartalmaz.*

PT4. *A sík n^2+n+1 egyenest tartalmaz.*

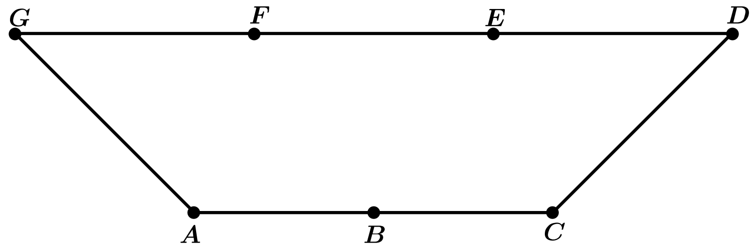
Az affin esethez hasonlóan most is mutatunk példákat arra, hogy lehetne-e más axiómarendszert alapul választani.

4.7. Példa. Legyenek a kiinduló axiómáink **P1. PT1. PT3.** Triviális, hogy ekkor azonnal teljesül a **P4.** axióma és nem lehet minden pont egy egyenesen. Vegyünk két egyenest, és rajtuk két-két pontot, amelyek nem közösek. Ezek mutatják **P3.** teljesülését. Az egyenesek száma:

$$\frac{\binom{n^2+n+1}{2}}{\binom{n+1}{2}}.$$

Elvégezve a lehetséges egyszerűsítéseket adódik, hogy ez éppen n^2+n+1, azaz teljesül a **PT4.** axióma. Legyen P rögzített pont, és jelölje x a rá illeszkedő egyenesek számát. Ezen egyenesek mindegyikén (P-t nem számolva) n pont van. Így összesen $x(n+1)+1=n^2+n+1$ pontunk van, amiből $x=n+1$. Ez tetszőleges P pontra igaz, vagyis teljesül **PT2.** és ez magával hozza **P2.** teljesülését is.

4.8. Példa. Legyenek a kiinduló axiómáink **P3. P4. PT3.** és legyen $n=2$. Tekintsük a következő ábrát, amelyen a pontok az A, B, C, D, E, F, G, az egyenesek pedig $\overline{AC}, \overline{CD}, \overline{DG}, \overline{GA}$:



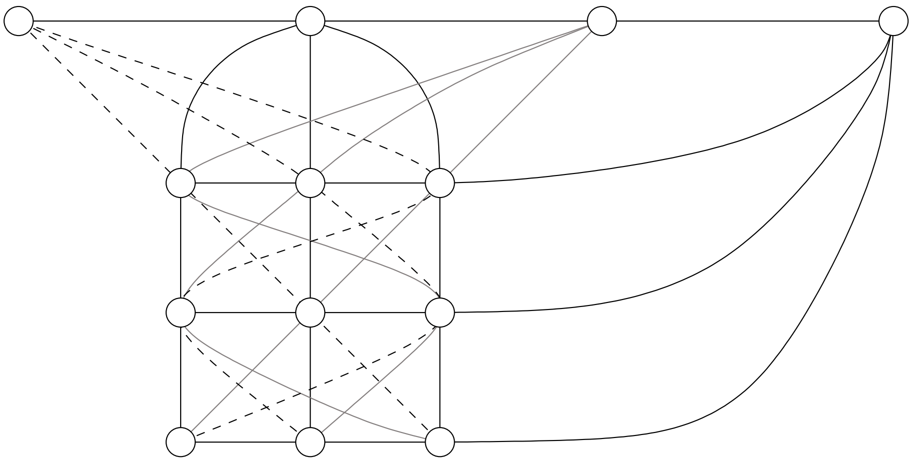
A feltett axiómák nyilván teljesülnek, viszont semelyik másik nem.

4.3. Véges affin és véges projektív sík kapcsolata

Először megmutatjuk, hogyan lehet affin síkból projektív síkot készíteni. Ehhez a klasszikus esethez hasonlóan ideális pontokat vezetünk be. Alapul szolgálnak az affin sík axiómái. Meg kell vizsgálnunk, hogy a párhuzamosság a véges affin síkon is ekvivalencia-reláció-e. Ehhez szükség van a reflexivitás, a szimmetrikusság és a tranzitivitás ellenőrzésére. Két egyenest párhuzamosnak tekintünk, ha azonosak vagy nem metszik egymást.

A reflexivitás és a szimmetrikusság triviális, így csak a tranzitivitást látjuk be. Legyen $a \parallel b$ és $b \parallel c$. A kérdés, hogy a és c lehetnek-e metsző egyenesek. Tegyük fel, hogy igen. Jelölje ekkor metszéspontjukat M. Eszerint M rajta van egy b-vel párhuzamos egyenesen. Mivel M illeszkedik az a és a c egyenesekre is, így két különböző b-vel párhuzamos egyenesen van rajta. Ekkor azonban sérülne az **A2.** axióma, mely szerint ha adott egy e egyenes és egy rá nem illeszkedő P pont, akkor pontosan egy olyan egyenes létezik, amely átmegy P-n és párhuzamos e-vel. Ezzel ellentmondásra jutottunk, vagyis a párhuzamosság a véges affin síkon is rendelkezik a tranzitivitás tulajdonságával, így itt is ekvivalencia-reláció.

Könnyen meggondolható **A2.** alapján, hogy ha tekintünk egy tetszőleges egyenest egy véges affin síkon, majd hozzávesszük az összes vele párhuzamos egyenest, akkor ez az egyenessereg a vizsgált sík összes pontját pontosan egyszer fedi le.
Korábban már láttuk az amőbasíkot. Most megmutatjuk, hogyan kreálhatunk belőle véges projektív síkot (általában n-edrendű affin síkból is).



4.2. ábra. Ideális egyenessel bővített amőbasík

Akárcsak az euklideszi síknál, a párhuzamos egyenesseregekhez vegyünk hozzá egy-egy ideális pontot. Az axiómákból következik, hogy négy (általában $n+1$) ideális pontot kell hozzávennünk a síkhoz. Ugyanis minden pontra 4 (általában $n+1$) egyenes illeszkedik. Az ideális pontok alkotják az ideális egyenest. Ahhoz, hogy belássuk, hogy így valóban egy véges projektív síkot kaptunk, be kell látnunk, hogy teljesülnek a szükséges axiómák.
A **P1.** axióma szerint bármely két pontra pontosan egy egyenes kell illeszkedjen. Ez nemideális pontokra nyilvánvalóan teljesül, az **A1.** axióma miatt. Ha mindkét pont ideális, akkor ők rajta vannak az ideális egyenesen. Ha az egyik pont ideális, a másik pedig nem, akkor is létezik egy általuk egyértelműen meghatározott egyenes, hiszen a véges affin sík párhuzamos egyenesei minden pontot pontosan egyszer fednek le, és minden párhuzamos egyenessereghez egyértelműen tartozik egy ideális pont. Tekintsük tehát az ideális ponton átmenő nemideális egyeneseket és válasszuk azt, amelyik illeszkedik a választott nemideális pontra.
A **P2.** axióma szerint bármely két egyenesnek egy pontban kell metszenie egymást. Két affin síkbeli egyenes vagy metsző, vagy párhuzamos. Ha metsző, akkor kész vagyunk. Ha nem, akkor egyértelműen létezik egy ideális pont, amelyen mindkét egyenes átmegy, hiszen éppen a párhuzamos egyenesekhez rendeltük ugyanazt az

ideális pontot. Mivel minden affin egyeneshez pontosan egy ideális pont tartozik, így bármely affin egyenesnek és az ideális egyenesnek is egyértelműen létezik közös pontja.
A **P3.** axióma nyilvánvalóan teljesül. A **P4.** axiómához csupán azt kell meggondolni, hogy ha az affin síkon létezett n pontú egyenes, akkor a projektív síkon ebből éppen $n + 1$ pontú egyenes lett.
Ezután belátjuk, hogy mindez „visszafelé" is működik, azaz projektív síkból is mindig készíthető affin sík egy tetszőleges egyenes elhagyásával. Felmerülhet a kérdés, hogy tetszőleges egyenes elhagyásával izomorf síkokhoz jutunk-e. Erre az általában nemleges választ megtalálhatjuk Montágh Balázs [6] cikkében, valamint Kárteszi Ferenc [1] könyvében, amely példát is konstruál erre. A legkisebb olyan példa, amikor ez előfordul az $n = 9$, azaz a síknak 91 pontja van. Testre épített projektív síkokra viszont tudjuk, hogy tetszőleges egyenest elhagyva ugyanazt az affin síkot kapjuk (ami testre van építve).
Ahogyan az előbbiekben a véges affin sík projektívvá bővítésénél azt ellenőriztük, hogy a bővített síkon teljesülnek-e a véges projektív sík axiómái, most azt fogjuk ellenőrizni, hogy a véges projektív síkból egy tetszőleges egyenes elhagyásával származtatott sík esetében érvényben lesznek-e a véges affin sík axiómái.
Tekintsünk egy n-edrendű véges projektív síkot. Megmutatjuk, hogy egy egyenes elhagyásával véges affin síkot kapunk. Mivel a megmaradt pontok esetén korábban igaz volt a **P1.** axióma, és az ideális egyenes pontjainak elhagyásával ez nem változott meg, így az **A1.** axióma érvényben marad.
Tekintsünk egy tetszőleges P pontot a megmaradó síkon, valamint egy e egyenest, mely nem megy át P-n. Mivel e-re az ideális egyenesnek pontosan egy pontja illeszkedik, és ezen ideális ponton és a P ponton átmenő egyenes is egyértelmű, ez lesz az az egyenes, ami átmegy P-n és nem metszi e-t, azaz az **A2.** axióma is teljesül.
Az utolsó két axióma fennállásának belátása a fordított irányú származtatásnál látottakhoz teljesen hasonlóan végezhető.
Ez a kapcsolat magyarázza az **AT1.**,**AT2.**,**AT3.**,**AT4.** és **PT1.**,**PT2.**,**PT3.**,**PT4.** közötti összefüggéseket is, például ha tudjuk, hogy n-edrendű projektív síknak $n^2 + n+1$ pontja van (**PT3.**), akkor egy egyenes törlésével $n+1$ pontot töröltünk (**PT1.**), tehát n^2 pont marad (**AT3.**). A többi tulajdonságot hasonlóan lehetne ellenőrizni.

4.4. Véges testek és rájuk épített síkok

Az előző fejeztben megmutattuk, hogyan lehet a valós számok testére síkot építeni. Ha a valós számok helyett tetszőleges (akár véges) testet tekintünk, akkor is teljesen hasonlóan járhatunk el. A q elemszámú véges test jelölése: $GF(q)$. Ennek a fejezetnek a megírásához a Kárteszi Ferenc [1] illetve a Kiss György - Szőnyi Tamás [2] könyveket illetve Montágh Balázs [6] által írt cikket használtuk fel.

4.9. Példa. Legyen $q = 2$. Az affin sík pontjai $(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$, az egyenesek $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, y = x, y = x+1$ (modulo 2 számolunk). Ebből projektív síkot úgy csinálhatunk, hogy a párhuzamos egyenesekhez egy-egy ideális pontot rendelünk, így $x = 0, x =$ 1-hez (∞)-t, $y = 0, y =$ 1-hez (0)-t, $y = x, y = x+1$-hez (1)-t. A projektív sík pontjai tehát $(0,0),(0,1),(1,0),(1,1),(\infty),(0),(1)$, az egyenesek pedig az ideális egyenes, valamint a fenti egyenesek, a hozzájuk rendelt ideális ponttal együtt. Könnyű ellenőrizni, hogy ez a Fano-sík, vagyis a Fano-sík a 2 elemű testre épített sík.

4.10. Példa. Legyen most $q = 3$. Mivel q prím, így izomorfia erejéig egyetlen q elemű test létezik: $\mathbb{Z}_3$, a modulo 3 maradékosztály teste, melynek elemei $\{0,1,2\}$ a műveleteket modulo 3 végezzük.
Ekkor a pontok a $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ Descartes-szorzat elemei, vagyis azon (x,y) párok, ahol $x = 0,1,2$; $y = 0,1,2$. Az egyenesek pedig:

1. $x = c$, ahol $c \in \mathbb{Z}_3$, azaz a három egyenes

$$x = 0, \qquad x = 1, \qquad x = 2$$

2. $y = mx + b$, ahol $m, b \in \mathbb{Z}_3$, vagyis az így kapott $3 \cdot 3 = 9$ egyenes

$$\begin{array}{lll} y = 0x+0 & y = x+0 & y = 2x+0 \\ y = 0x+1 & y = x+1 & y = 2x+1 \\ y = 0x+2 & y = x+2 & y = 2x+2 \end{array}$$

Például az $y = 2x+1$ egyenes pontjai $(0,1),(1,0)$ és $(2,2)$. Az összesen $3+9 =$ 12 darab egyenes. Kaptunk tehát egy 9 pontú síkot. Emlékezhetünk, hogy az amőbasíknak éppen 9 pontja és 12 egyenese van. Kis vizsgálódás után rájöhetünk, hogy újfent az amőbasíkhoz jutottunk. Egyenesek metszéspontját, illetve két pont összekötő egyenesét is teljesen hasonlóan számolhatjuk, mint a valós esetben. Annyi csupán a különbség, hogy az együtthatókat szükség esetén modulo 3 kell venni. Az

$(1,1)$ és $(2,0)$ pontokon átmenő egyenes meredeksége $\frac{0-1}{2-1} = -1 = 2$ (modulo 3), azaz az egyenes $y = 2x + b$ alakú lesz. Mivel az $(1,1)$ pont rajta van az egyenesen, így $1 = 2 \cdot 1 + b$, amiből $b = -1$, vagyis modulo 3, $b = 2$. Tehát az összekötő egyenes egyenlete $y = 2x + 2$.
Példaként számoljuk ki az

$$y = 2x + 1 \tag{4.1}$$

$$y = x + 2 \tag{4.2}$$

egyenesek metszéspontját.
Ehhez vonjuk ki (4.1) egyenletből a (4.2) egyenletet. Ekkor

$$x = 1$$

adódik. Ezt (4.2)-be visszahelyettesítve kapjuk, hogy $y = 3$, amit modulo 3 véve

$$y = 0$$

lesz az eredmény. A keresett metszéspont tehát az $(1,0)$ számpár.

A projektív síkká való bővítés az előző példához hasonlóan a $(\infty), (0), (1), (2)$ ideális pontok hozzávételével történik. Az $x = 0, 1, 2$ egyenesekhez a (∞), az $y = mx + b$-hez az (m) ideális pontot vesszük hozzá. A kapott sík a 4.2. ábrán látható.

A következő példához szükség lesz a nullosztómentesség fogalmára, ezért felelevenítjük:

4.11. Definíció. Tetszőleges R gyűrű nullosztómentes, ha $u, v \in R$ esetén, amennyiben $uv = 0$, akkor $u = 0$ vagy $v = 0$.

Ez azt jelenti, hogy ha egy szorzat 0, akkor legalább az egyik tényezője 0.

A következő példában négyelemű testet szeretnék csinálni. Ezúttal nem vehetjük $\mathbb{Z}_4$-et, hiszen nem test. Ahhoz ugyanis nullosztómentesnek kellene lennie, és $\mathbb{Z}_4$-ben $2 \cdot 2 = 0$. Azonban a 4 prímhatvány, vagyis a kérdés, hogy tudunk-e prímhatvány elemszámú véges testet kreálni. A választ a következő tétel adja meg, amelyet a véges testek alaptételének szoktak nevezni.

4.12. Tétel. *Véges test elemszáma egy q prímhatvány, azaz $q = p^n$, ahol p prím. Minden q prímhatványhoz létezik q elemű véges test, amely izomorfia erejéig egyértelmű.*

4.13. Példa. Legyen $q = 4$. Mivel $4 = 2^2$, így találnunk kell egy $\mathbb{Z}_2$ fölötti másodfokú irreducibilis polinomot. Azért másodfokú, mert minden testnek eleme a 0 és az 1, vagyis az $x^q - x$ polinomból kiemelhető x és $x - 1$. Bontsuk tehát szorzattá a $t(x) = x^4 - x$. polinomot. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$x^4 - x = x(x-1)(x^2 + x + 1)$$

Tehát a keresett másodfokú polinom: $f(x) = x^2 + x + 1$. Egy másodfokú polinom pontosan akkor irreducibilis egy test feleltt, ha abban a testben nincs gyöke, így csak azt kell leellenőrizni, hogy ennek a polinomnak gyöke-e a 0 vagy az 1.

$$f(0) = 0^2 + 0 + 1 = 1$$
$$f(1) = 1^2 + 1 + 1 = 1$$

Az $f(x)$ polinom tehát valóban irreducibilis $\mathbb{Z}_2$ fölött. A véges test elemei a modulo 2 fölötti legfeljebb elsőfokú polinomok lesznek, vagyis $0, 1, x, x+1$. Jelölje a két gyökét A és B. Ekkor a négyelemű test elemei: $0, 1, A, B$. Írjuk fel a test összeadásra és szorzásra vonatkozó műveleti tábláit, ahol $A = x$ és $B = x + 1$:

+	0	1	A	B
0	0	1	A	B
1	1	0	B	A
A	A	B	0	1
B	B	A	1	0

·	0	1	A	B
0	0	0	0	0
1	0	1	A	B
A	0	A	B	1
B	0	B	1	A

Itt például $AB = x(x+1)$, ami $f(x)$-szel elosztva 1 maradékot ad $\pmod 2$, ezért lesz $AB = 1$. A művelettáblák többi eleme hasonlóan ellenőrizhető.

Legyen $f(x) = x^3 + x + 1$. Ez irreducibilis $GF(2)$ fölött, hiszen $f(0) = f(1) = 1$. Így $GF(8)$-at állíthatjuk elő, amelynek elemei a $0, 1, x, x{+}1, x^2, x^2{+}1, x^2{+}x, x^2{+}x{+}1$ polinomok lesznek. Példaként nézzük $x^2 + 1$ és $x^2 + x$ szorzatát. Ez $x^4 + x^3 + x^2 + x$, amit elosztva $f(x)$-szel $(x+1)$-et kapunk, a maradék pedig $x + 1$ lesz, így a testben $(x^2 + 1)(x^2 + x) = x + 1$.
Hasonlóan gyárthatjuk le $GF(9)$-et is, itt $f(x) = x^2 + 1$ lesz irreducibilis $GF(3)$ fölött, tehát az elemek $0, 1, 2, x, x + 1, x + 2, 2x, 2x + 1, 2x + 2$ lesznek. A szorzásnál x^2 helyett (-1)-et írhatunk, mint a komplex számok szorzásánál. Hasonlóan csinálhatunk p^2 elemű testeket, de $x^2 + 1$ nem mindig lesz irreducibilis (például modulo 5 nem az, mert $x = 2$ gyöke), ilyenkor $x^2 - k$ lesz $f(x)$, ahol k kvadratikus nemmaradék.

Általában, a test elemei az f-nél kisebb fokú polinomok lesznek. Két ilyen polinom testbeli szorzatát úgy kapjuk, hogy szorzatukat maradékosan elosztjuk $f(x)$-szel, és a szorzat a maradék lesz. Ha $f(x)$ irreducibilis, akkor $a(x) \cdot b(x) \neq 0$, ha $a(x)$ és $b(x)$ semelyike sem 0, azaz a kapott gyűrű nullosztómentes. Mivel véges sok elemünk van, ebből következik, hogy osztani is tudunk (például adott $a(x)$-hez találunk olyan $b(x)$-et, amelyre $a(x) \cdot b(x) = 1$). Ugyanis írjuk fel az $a(x) \cdot t(x)$ alakú elemeket az összes $t(x)$-re. Ezek között nincs két azonos, mert ha $a(x)t(x) = a(x)s(x)$ lenne, akkor a $a(x)(t(x) - s(x)) = 0$ adódna, amiből a nullosztómentesség miatt $t(x) = s(x)$. Így az $a(x)t(x)$ alakú elemek a test elemeinek egy permutációját adják, vagyis van olyan $t(x) = b(x)$, amelyre $a(x)b(x) = 1$ teljesül. Jegyezzük meg, hogy a most konstruált $q = 4, 8, 9$ elemű testeknek van az identitástól különböző testautomorfizmusa, tehát a rájuk épített síkokon nem igaz a **3.7**. Tétel egyértelműségi része. Valóban, $q = 4, 8$ esetén a $\delta : x \mapsto x^2$, míg $q = 9$ esetén a $\delta : x \mapsto x^3$ testautomorfizmus. Általában, ha q prím, akkor $GF(q)$-nak csak az identitás automorfizmusa, ha viszont $q = p^n, n > 1$, akkor a $\delta : x \mapsto x^p$ is az.

A $GF(q)$ véges test fölötti affin sík pontjai az (x, y) párok, ha $x, y \in GF(q)$, az egyenesek egyenlete $x = c, c \in GF(q)$ illetve $y = mx + b$ alakú, $m, b \in GF(q)$. Láthatjuk, hogy a pontok száma q^2, az egyeneseké $q + q^2$. Ebből projektív síkot a $(\infty), (m)$, $m \in GF(q)$ ideális pontok hozzávételével kaphatunk, amelyek az ideális egyenest alkotják. Az $x = v$ egyenesekhez a (∞), az $y = mx + b$ egyenesekhez az (m) ideális pontot vesszük hozzá.

5. fejezet

Blokkrendszerek

Ebben a fejezetben alapvetően Marialuisa J. de Resmini [4] és Frank de Clerck [3] jegyzeteire támaszkodunk.

5.1. Steiner rendszerek

5.1.1. Motiváció és definíció

1844-ben W. S. B. Woolhouse feltett egy híres kérdést a The Lady's and Gentleman's Diary című nem matematikai magazinban, amely a következő volt:
Adja meg egy n elemű halmaz esetén azon kombinációk számát, mely az n elemet p elemű csoportokba sorolja oly módon, hogy bármely q elemű halmaz pontosan az egyik kombinációban fordulhat elő!
Néhány évvel később Kirkman is felvetett egy kérdést ugyanebben a magazinban, amit 15 iskoláslány problémának hívnak, és így szól:
15 iskoláslány egy héten keresztül öt hármas csoportban sétál. Adjunk meg egy olyan beosztást, amiben bármely két lány heti egy alkalommal kerül össze!
Így kezdődött a Steiner rendszerek elmélete.
Hogy miért Steiner rendszer? Mert ő is feltette Woolhouse kérdését alig eltérő formában 1853-ban. A kérdés feltevése a következő definíciót sugallja:

5.1. Definíció. Egy $S(t, k, v)$ *Steiner rendszer*, ahol $2 \leq t \leq k \leq v$, egy olyan illeszkedési struktúra v ponttal, b blokkal, hogy minden blokk mérete k, és t pont határoz meg egyértelműen egy blokkot.

Ha $t = k$, akkor minden $t = k$ elemű részhalmaz blokk kell legyen, azaz $b = \binom{v}{k}$. Ha $v = k$, akkor egyetlen blokk van, maga a v pontú alaphalmaz.

Ezen triviális eseteket elkerülendő, a továbbiakban feltesszük, hogy $2 \leq t < k < v$. Nyilvánvalóan látszik, hogy az $S(t, k, v)$ három paramétert tartalmaz, ám a definícióban négy paraméter szerepel. Ennek oka, hogy ezek ismeretében b már kiszámítható. Ugyanis ha van v pont és t pont határoz meg egyértelműen egy blokkot, akkor válasszunk ki a v pontból t-t. Erre $\binom{v}{t}$ lehetőségünk van. Ez azonban még nem jó, hiszen minden blokk k pontból áll, így minden blokkot annyiszor számoltunk, ahányszor k pontból kiválasztható t pont. Ezek száma $\binom{k}{t}$. A blokkok száma tehát egy $S(t, k, v)$ Steiner rendszerben:

$$b = \frac{\binom{v}{t}}{\binom{k}{t}}. \tag{5.1}$$

Most, hogy tudjuk, hogy összesen hány blokk van, felvetődik a kérdés, hogy kevesebb pont esetén mondhatunk-e valamit. A válasz bizonyos pontszámra igen, hiszen $t < v$ és definíció szerint t ponton pontosan egy blokk megy át. Valójában akkor tudunk valamit mondani, j pont esetén a j ponton átmenő blokkok számáról, ha $0 \leq j \leq t$, hiszen csak picit kell átalakítani az összes blokkok számára kapott képletet. Egészítsük ki a j pontot t ponttá. Erre $\binom{v-j}{t-j}$ lehetőség van és ugyanazt a blokkot $\binom{k-j}{t-j}$-szer kapjuk meg, mert egy blokkból ennyiféleképpen választhatjuk ki a kiegészítő $t - j$ pontot. Legyen b_j a j ponton átmenő blokkok száma. Ekkor

$$b_j = \frac{\binom{v-j}{t-j}}{\binom{k-j}{t-j}}. \tag{5.2}$$

Nyilvánvaló, hogy $b_0 = b, b_t = 1$ és $b_1 = r$, ahol r a pontok fokszáma (azaz az egy ponton átmenő blokkok száma).

5.1.2. Mikor létezhet Steiner rendszer?

Azt már tudjuk, hogy egy Steiner rendszert a három paramétere t, k, v határoz meg. Legyenek most t és k adottak. Arra vagyunk kíváncsiak, hogy milyen v-k esetén létezhet ilyen Steiner rendszer, azaz mely v-k esetén teljesülnek az (5.1) és az (5.2) oszthatóságok.
Először kis t és k értékekre számoljuk ki a lehetséges értékeket. Vizsgálódásaink során az egy pontra illeszkedő blokkok számát, vagyis a $b_1 = r$ paramétert nézzük (5.2) alapján.

5.2. Példa. $(t, k) = (2, 3)$. Az $S(2, 3, v)$ alakú blokkrendszereket Steiner hármasrendszereknek nevezzük. Jelölése: $STS(v)$. Ebben az esetben a szükséges feltételek:

$$\begin{aligned} b &= \frac{\binom{v}{2}}{\binom{3}{2}} && (5.3) \\ b_1 &= \frac{\binom{v-1}{2-1}}{\binom{3-1}{2-1}} && (5.4) \end{aligned}$$

A binomiális együtthatókat kiszámolva a következőket kapjuk:

$$\begin{aligned} b &= \frac{v(v-1)}{6}, && (5.5) \\ b_1 &= \frac{v-1}{2}. && (5.6) \end{aligned}$$

Ezt kongruenciákra átírva:

$$\begin{aligned} v(v-1) &\equiv 0 \pmod 6, && (5.7) \\ (v-1) &\equiv 0 \pmod 2. && (5.8) \end{aligned}$$

Végigpróbálgatva a számokat 0-tól 5-ig a következő lehetséges eredmények adódnak:

$$\begin{aligned} v &\equiv 1 \pmod 6, && (5.9) \\ v &\equiv 3 \pmod 6. && (5.10) \end{aligned}$$

Ezek a feltételek elégségesek, ahogy majd a Skolem konstrukciókból látjuk.

5.3. Példa. $(t, k) = (2, 4)$. Ebben az esetben a szükséges feltételek:

$$\begin{aligned} b &= \frac{\binom{v}{2}}{\binom{4}{2}}, && (5.11) \\ b_1 &= \frac{\binom{v-1}{2-1}}{\binom{4-1}{2-1}}. && (5.12) \end{aligned}$$

A binomiális együtthatókat kiszámolva a következőket kapjuk:

$$\begin{aligned} b &= \frac{v(v-1)}{12}, && (5.13) \\ b_1 &= \frac{v-1}{3}. && (5.14) \end{aligned}$$

Ezt kongruenciákra átírva:

$$\begin{aligned} v(v-1) &\equiv 0 \pmod{12}, && (5.15) \\ (v-1) &\equiv 0 \pmod 3. && (5.16) \end{aligned}$$

Végigpróbálgatva a számokat 0-tól 11-ig a következő lehetséges eredmények adódnak:

$$\begin{aligned} v &\equiv 1 \pmod{12}, && (5.17) \\ v &\equiv 4 \pmod{12}. && (5.18) \end{aligned}$$

Hanani belátta, hogy ezek a feltételek elégségesek is.

5.4. Példa. $(t, k) = (2, 5)$. Ebben az esetben a szükséges feltételek:

$$b = \frac{\binom{v}{2}}{\binom{5}{2}}, \tag{5.19}$$

$$b_1 = \frac{\binom{v-1}{2-1}}{\binom{5-1}{2-1}}. \tag{5.20}$$

A binomiális együtthatókat kiszámolva a következőket kapjuk:

$$b = \frac{v(v-1)}{20}, \tag{5.21}$$

$$b_1 = \frac{v-1}{4}. \tag{5.22}$$

Ezt kongruenciákra átírva:

$$v(v-1) \equiv 0 \pmod{20}, \tag{5.23}$$

$$(v-1) \equiv 0 \pmod{4}. \tag{5.24}$$

Végigpróbálgatva a számokat 0-tól 19-ig a következő lehetséges eredmények adódnak:

$$v \equiv 1 \pmod{20}, \tag{5.25}$$

$$v \equiv 5 \pmod{20}. \tag{5.26}$$

Hanani, Wilson és Ray-Chaudhuri bebizonyították, hogy ezek elégséges feltételek is. Az eddig vizsgált három (t, k) pár esetén k vagy prím vagy prímhatvány volt. A következő eset a $(t, k) = (2, 6)$. Ekkor

$$v \equiv 1 \pmod{30}, \tag{5.27}$$

$$v \equiv 6 \pmod{30}, \tag{5.28}$$

$$v \equiv 16 \pmod{30}, \tag{5.29}$$

$$v \equiv 21 \pmod{30}. \tag{5.30}$$

és nem ismert olyan tétel amely biztosítaná $S(2, 6, v)$ rendszer létezését bármilyen a fentieknek eleget tevő v esetén. Valójában elég nagy v-re léteznek ilyen rendszerek.

5.5. Tétel. *Ha a*

$$v - 1 \equiv 0 \pmod{k-1} \tag{5.31}$$

$$v(v-1) \equiv 0 \pmod{k(k-1)} \tag{5.32}$$

kongruenciák teljesülnek és v elég nagy k-hoz képest, akkor létezik $S(2, k, v)$.

Az előbbi tételt Wilson-tételnek nevezik. Azonban például az $S(2,6,46)$ létezése még mindig nyitott kérdés. Azt tudjuk, hogy nem létezik $S(2,6,36)$ amely a 6 rendű affin sík lenne, viszont $S(2,6,31)$ éppen az 5 rendű projektív sík, azaz $n = 5$. Az előző fejezetben tárgyaltuk a véges affin és projektív síkokat. Ezen síkok tulajdonságai között szerepeltek olyanok, melyek a pontjaik, illetve egyeneseik számát határozták meg. Ezeket felhasználva nyilvánvaló, hogy a projektív és az affin síkok az $S(2, n+1, n^2+n+1)$ és $S(2, n, n^2)$ rendszerek, amelyek léteznek bármely n prímhatvány esetén, hiszen például véges testre tudunk síkot építeni. A 4. fejezetben éppen azt láttuk be, hogy $S(2, n+1, n^2+n+1)$ n-edrendű projektív sík, hiszen az itteni tulajdonságok **P1.**, **PT1.** és **PT3.**-nak felelnek meg. Hasonló a helyzet affin síkokra is.

5.2. Steiner hármasrendszerek néhány konstrukciója

Mielőtt rátérnénk a Steiner hármasrendszerek konstrukcióira, előtte szeretnénk bemutatni egy általános jelenséget, amely minden objektumra bekövetkezik, különösen Steiner rendszerekre. Ha már bebizonyítottuk, hogy létezik egy $S(t,k,v)$, valamely t, k és v esetén, akkor adódik a kérdés, hogy hány nem izomorf rendszer van adott v-re. A kérdés elég bonyolult. Steiner hármasrendszerekről a következő eredmények ismeretesek:

- Egyetlen egy, ha $v = 3, 7, 9$. Ezek rendre a triviális rendszer, a Fano-sík és az amőbasík.
- Kettő, ha $v = 13$.
- Nyolcvan, ha $v = 15$.
- Nagyon sok, ha $v \geq 19$.

A nem izomorf $STS(v)$-k száma gyorsan tart végtelenbe, ha v tart végtelenbe. Ezt szokták kombinatorikus robbanásnak nevezni. Gyakran próbáljuk megszámolni a nem izomorf rendszereket plusz tulajdonságok segítségével. Sok konstrukció használ kisebb rendszereket, hogy létrehozzon egy nagyobbat. Célszerű tehát meghatározni a legkisebb Steiner hármasrendszert. Ha $v = 3$, akkor a triviális $S(2,3,3)$ adódik, három ponttal és pontosan egy blokkal. Ez az egyetlen eset, amikor a pontok száma több mint a blokkok száma. Ha $v = 7$, akkor az egyetlen $S(2,3,7)$ a Fano-sík. Ez az egyetlen négyzetes Steiner rendszer. Megkapható a korábban az

1.fejezetben látott módon vagy Kirkman $v \to 2v+1$ konstrukciója segítségével a triviális $v = 3$ esetből. Ha $v = 9$, akkor $S(2,3,9)$ egy affin sík. Ezt a triviális $STS(3)$-ból kaphatjuk, ha a Skolem $v = 6m+3$ konstrukciót $m = 1$-re alkalmazzuk.

5.2.1. Kirkman $v \to 2v+1$ konstrukciója

Megmutatjuk, hogy bármilyen v-re, ha létezik $S = STS(v)$, akkor tudunk konstruálni $STS(2v+1)$-et, amely S-et részrendszerként tartalmazza. Ehhez szükségünk van a részrendszer precíz definíciójára.

5.6. Definíció. Pontoknok egy olyan részhalmaza, amely tartalmazza azokat a blokkokat, amelyek legalább két pontjára illeszkednek *részrendszernek* nevezzük.

5.7. Állítás. *Ha $S = STS(v)$ részrendszere $T = STS(w)$-nek, akkor $w \geq 2v+1$.*

Bizonyítás. Legyen $p \in T \setminus S$ és tekintsük a p-t az $s \in S$ pontokkal összekötő blokkokat (hármasokat). Ezek páronként különbözőek, így számuk legfeljebb a p-n átmenő blokkok száma T-ben, azaz $r = \frac{w-1}{2}$. Másrészt ezek száma $|S|$, így $v \leq \frac{(w-1)}{2}$, azaz $w \geq 2v+1$. ∎

Ez azt mutatja, hogy a most következő Kirkman konstrukcióban az $STS(v)$ a lehető legnagyobb részrendszere $STS(2v+1)$-nek.

Legyen adott egy $STS(v)$. Tegyük fel, hogy ez kibővíthető egy $STS(2v+1)$ rendszerré. Ekkor ezen rendszer blokkjainak száma (5.1) alapján:

$$\frac{(2v+1)2v}{6}. \tag{5.33}$$

Ebből $STS(v)$ blokkjainak száma:

$$\frac{v(v-1)}{6}. \tag{5.34}$$

Legyen $x \in STS(v)$. Ekkor az x ponton átmenő nem $STS(v)$-beli blokkok száma:

$$\frac{v+1}{2}. \tag{5.35}$$

Az összes $STS(v)$-t metsző blokkok száma:

$$\frac{v(v+1)}{2}. \tag{5.36}$$

Az $STS(2v+1)$-nek $v+1$ darab pontja van $STS(v)$-n kívül. Ezekre a K_{v+1} teljes gráfként gondolunk. Elsőben tanultuk, hogy ha n páros, akkor K_n élkromatikus

száma $n-1$. Ez azt jelenti, hogy K_{v+1} felbontható v db diszjunkt teljes párosításra, mert $v \equiv 1$ vagy $3 \pmod 6$, így $v+1$ párossága miatt a színosztályok teljes párosítások. Ezután színezzük be $STS(v)$ pontjait v különböző színnel, azon színekkel, amelyeket az élek színezésénél használtunk. $STS(v)$ minden pontja illeszkedjen azokra a blokkokra, amelyet úgy kapunk, hogy „meghosszabbítjuk" azokat az éleket, melyek ugyanolyan színűek, mint a pont.
Most nézzünk egy példát:

5.8. Példa. $S = STS(3)$ pontjai $\{1,2,3\}$, ez az egyetlen blokk. Maradék pontok: $\{4,5,6,7\}$ egy K_4 teljes gráf csúcsai.
Az élek színezése:

$$\begin{array}{lll} \text{1. szín:} & \{4{,}5\}; & \{6{,}7\} \\ \text{2. szín:} & \{4{,}6\}; & \{5{,}7\} \\ \text{3. szín:} & \{4{,}7\}; & \{5{,}6\} \end{array}$$

Az egyes színekhez S egy-egy pontját (például az i. színhez az „i" pontot) rendeljük hozzá. Így a blokkok $\{4,5,1\},\{6,7,1\},\{4,6,2\},\{5,7,2\},\{4,7,3\},\{5,6,3\}$ továbbá a kiindulási $\{1,2,3\}$ lesznek. Nem nehéz ellenőrizni, hogy így a Fano-síkot kapjuk.

5.2.2. Skolem módszere a $v = 6m+3$ esetre

Ebben az esetben a blokkok száma:

$$b = \frac{\binom{v}{t}}{\binom{k}{t}} = \frac{v(v-1)}{6} = \frac{(6m+3)(6m+2)}{6} = \frac{3(2m+1)2(3m+1)}{6} = \\ = (2m+1)(3m+1) \qquad (5.37)$$

Megkonstruálunk egy $STS(v)$-t a $0,1,2\ldots,6m+2$ pontokon. Először három sorba rendezzük őket úgy, hogy minden sorban $2m+1$ pont legyen:

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & \cdots & 2m-1 & 2m \\ 2m+1 & 2m+2 & 2m+3 & \cdots & 4m & 4m+1 \\ 4m+2 & 4m+3 & 4m+4 & \cdots & 6m+1 & 6m+2 \end{array}$$

Most megadjuk a blokkokat. $2m+1$ blokkot úgy kapunk, hogy vesszük az előző táblázat oszlopait, azaz a

$$\{j, \quad j+2m+1, \quad j+4m+2\} \quad j = 0,1,\ldots,2m.$$

hármasokat. Továbbá, bármely sorból is vegyünk egy $\{a,b\}$ párt, az egyértelműen meghatároz egy c pontot a következő sorból, úgy, hogy

$$2c \equiv a+b \pmod{2m+1} \qquad (5.38)$$

vagy ami ezzel ekvivalens

$$c \equiv (m+1)(a+b) \pmod{2m+1} \tag{5.39}$$

Jegyezzük meg, hogy az alsó sor után következő sor a felső. Vegyük észre, hogy c nem lehet ugyanabban az oszlopban mint a vagy b, hiszen azokat a blokkokat már korábban figyelembe vettük. Ezen blokkok voltak azok, melyeket az egy oszlopban lévő pontok alkottak. A kongruenciából ugyanis következik, hogy ha két pont egy oszlopban van, akkor a harmadik is. Mivel $\binom{2m+1}{2} = m(2m+1)$ pár van minden sorban, így kapunk $3m(2m+1)$ ponthármast, amelyek a korábbiakkal együtt éppen a szükséges blokkok számát adják. A konstrukció - a kongruencia miatt - garantálja, hogy minden pár pontosan egyszer fordul elő.

Most mutatunk két konkrét példát:

5.9. Példa. Tekintsük az $m = 1$ esetet. Ekkor a blokkok száma:

$$b = (2 \cdot 1 + 1)(3 \cdot 1 + 1) = 3 \cdot 4 = 12$$

A pontok száma: $v = 6 \cdot 1 + 3 = 6 + 3 = 9$.
Rendezzük el a pontokat az algoritmus alapján:

$$\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{array}$$

Most határozzuk meg a blokkokat: Három blokkot adnak a táblázat oszlopai. Kell még $12 - 3 = 9$ blokk. Ezek olyan $\{a, b, c\}$ hármasok, ahol a és b ugyanabban a sorban vannak, c pedig a következőben a ciklikusság figyelembevételével, és teljesül rá, hogy

$$c \equiv 2(a+b) \pmod{3}.$$

Mivel a és b szerepe szimmetrikus, feltehetjk, hogy $a < b$. Legyen $a = 0$ és $b = 1$. Ekkor

$$c \equiv 2 \pmod{3} \qquad \text{és} \qquad 3 \leq c \leq 5.$$

A kongruencia miatt egyetlen ilyen c létezik és ez a $c = 5$. Tehát az első olyan blokkunk, ami nem a táblázat oszlopaiban szereplő pontokra illeszkedik: $\{0, 1, 5\}$. Vegyük azt a blokkot, melynek két pontja 6 és 8. Ekkor a harmadik c pontra a korábbiakból következően teljesül, hogy

$$c \equiv 1 \pmod{3} \qquad \text{és} \qquad 0 \leq c \leq 2.$$

Azaz $c = 1$.

A többi blokkot ugyanígy kaphatjuk meg. Az összes blokk tehát:

$$\begin{array}{ccc} \{0,3,6\} & \{1,4,7\} & \{2,5,8\} \\ \{0,1,5\} & \{0,2,4\} & \{1,2,3\} \\ \{3,4,8\} & \{3,5,7\} & \{4,5,6\} \\ \{6,7,2\} & \{6,8,1\} & \{7,8,0\} \end{array}$$

Észrevehetjük, hogy így az amőbasíkot kapjuk.

5.10. Példa. Legyen most $m = 2$. Ekkor a blokkok száma:

$$b = (2 \cdot 2 + 1)(3 \cdot 2 + 1) = 5 \cdot 7 = 35$$

A pontok száma: $v = 6 \cdot 2 + 3 = 12 + 3 = 15$.

Az algoritmus alapján a következő táblázatba rendezhetők a számok:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \end{array}$$

Most határozzuk meg a blokkokat: Mivel öt oszlop van, ezek megadnak 5 blokkot. Kell még $35 - 5 = 30$ blokk. A többi {a,b,c} hármas akkor alkot egy blokkot, ha a és b egy sorban vannak és

$$c \equiv 3(a + b) \pmod 5. \tag{5.40}$$

A blokkok közül válasszuk példaként azt, amelyikben benne van az 1 és a 2. A harmadik c pontra teljesülnie kell az alábbi feltételeknek:

$$c \equiv 4 \pmod 5 \qquad \text{és} \qquad 5 \le c \le 9.$$

Tehát $c = 9$. A többi blokk itt is hasonlóan kapható meg, akárcsak az előző példában. Az összes blokk tehát:

$$\begin{array}{ccccc} \{0,5,10\} & \{1,6,11\} & \{2,7,12\} & \{3,8,13\} & \{4,9,14\} \\ \{0,1,8\} & \{0,2,6\} & \{0,3,9\} & \{0,4,7\} & \{1,2,9\} \\ \{1,3,7\} & \{1,4,5\} & \{2,3,5\} & \{2,4,8\} & \{3,4,6\} \\ \{5,6,13\} & \{5,7,11\} & \{5,8,14\} & \{5,9,12\} & \{6,7,14\} \\ \{6,8,12\} & \{6,9,10\} & \{7,8,10\} & \{7,9,13\} & \{8,9,11\} \\ \{10,11,3\} & \{10,12,1\} & \{10,13,4\} & \{10,14,2\} & \{11,12,4\} \\ \{11,13,2\} & \{11,14,0\} & \{12,13,0\} & \{12,14,3\} & \{13,14,1\} \end{array}$$

Így tehát 15 pontú Steiner hármasrendszert kapunk. Jegyezzük meg, hogy ilyet kaphatnánk a Kirkman féle $v \to 2v+1$ konstrukcióval is, de a két Steiner hármasrendszer nem izomorf. Ennek ugyanis nincs 7 pontú részrendszere, mert ha lenne, akkor valamelyik sorban 3 elem lenne, például $0, 1, a$. Ekkor viszont a következő sorban is 3 elem kellene, hogy legyen $3, 3a$ és $3a+3$ (ezek különbözőek, ha $a \neq 0, 1$). Ezt folytatva a részrendszernek a harmadik sorban is legalább 3 eleme lenne. Ugyanez az okoskodás lenne lemásolható, ha az első sorban nem $0, 1, a$, hanem tetszőleges három elem lenne. Igazából az derül ki, hogy csak egy blokk, vagy az egész $STS(15)$ lehet részrendszer.

5.2.3. Skolem konstrukciója a $v = 6m + 1$ esetre

Ebben az esetben a blokkok száma:

$$b = \frac{\binom{v}{t}}{\binom{k}{t}} = \frac{v(v-1)}{6} = \frac{(6m+1)(6m)}{6} = m(6m+1) \tag{5.41}$$

Az előzőhöz hasonlóan megkonstruáljuk $STS(v)$-t a $0, 1, 2 \ldots, 6m$ pontokon úgy, hogy három sorba rendezzük őket oly módon, hogy minden sorban $2m$ pont legyen:

$$\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & \cdots & m-1 & m & m+1 & \cdots & 2m-1 \\ 2m & 2m+1 & \cdots & 3m-1 & 3m & 3m+1 & \cdots & 4m-1 \\ 4m & 4m+1 & \cdots & 5m-1 & 5m & 5m+1 & \cdots & 6m-1 \end{array}$$

A tömb két részre van osztva és hiányzik a $6m$. Ennek a blokkok konstruálásában lesz szerepe. A blokkok a következők lesznek:

- m darab blokkot ad az első m oszlop, azaz

  $$\{i, \qquad 2m+1, \qquad 4m+i\},$$

  ahol $0 \leq i \leq m-1$

- a következő $\frac{6m+1-1}{2} = 3m$ blokkot a $6m$ ponton keresztül a következő pontokat tartalmazó blokkok adják:

  $$\{m+i, \quad 2m+i, \quad 6m\} \quad , \quad \{3m+i, \quad 4m+i, \quad 6m\} \quad , \quad \{5m+i, \quad i, \quad 6m\},$$

  ahol $0 \leq i \leq m-1$

- azok az $\{a, b, c\}$ hármasok, ahol a és b a tömb ugyanazon sorában vannak és c pedig ciklikusan a következőben úgy, hogy

- ha $a+b$ páros és $2c \equiv a+b \pmod{2m}$, akkor c a sor bal felében van
- ha $a+b$ páratlan és $2c \equiv a+b-1 \pmod{2m}$, akkor c a sor jobb felében van

Így éppen annyi blokkot konstruáltunk, amennyit kellett. Nem túl bonyolult belátni, hogy minden blokk pontosan egyszer fordul elő.

5.11. Példa. Legyen $m = 1$. Ekkor a blokkok száma:

$$b = 1 \cdot (6 \cdot 1 + 1) = 7. \tag{5.42}$$

A pontok száma: $v = 6m + 1 = 6 \cdot 1 + 1 = 6 + 1 = 7$.
A konstrukció során használandó táblázat:

$$\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{array}$$

Az első oszlop által alkotott blokk: $\{0, 2, 4\}$.
A 6 jelű ponton át a következő három blokk adódik:

$$\{1, 2, 6\}, \{3, 4, 6\}, \{5, 0, 6\}.$$

A hiányzó három blokk pedig: $\{0, 1, 3\}, \{2, 3, 5\}, \{4, 5, 1\}$. Természetesen ez a konstrukció is a Fano-síkot adja.

5.12. Példa. Legyen $m = 2$. Ekkor a blokkok száma:

$$b = 2 \cdot (6 \cdot 2 + 1) = 26. \tag{5.43}$$

A pontok száma: $v = 6m + 1 = 6 \cdot 2 + 1 = 12 + 1 = 13$.
A konstrukció során használandó táblázat:

$$\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 & 11 \end{array}$$

A táblázatban az elválasztó vonaltól balra lévő oszlopok által alkotott blokkok: $\{0, 4, 8\}, \{1, 5, 9\}$.
A 12 jelű ponton át a következő hat blokk adódik:

$$\{2, 4, 12\}, \{6, 8, 12\}, \{10, 0, 12\}, \{3, 5, 12\}, \{7, 9, 12\}, \{11, 1, 12\}.$$

A maradék 18 blokk közül pedig az egyiken megmutatjuk, hogy ha ismerjük két olyan pontját, amelyik a táblázatnak ugyanabban a sorában van, akkor hogyan számoljuk ki a harmadikat.
Legyen az $\{a, b, c\}$ hármas esetén $a = 4$ és $b = 7$. Mivel $4 + 7 = 11$ páratlan, így a konstrukció szerint

$$2c \equiv 10 \pmod 4 \qquad \text{és} c \in \{10, 11\}.$$

A két lehetséges esetet

$$2 \cdot 10 \equiv 10 \pmod 4, \qquad \text{azaz} \qquad 20 \equiv 10 \pmod 4,$$

valamint

$$2 \cdot 11 \equiv 10 \pmod 4, \qquad \text{azaz} \qquad 22 \equiv 10 \pmod 4$$

ellenőrizve adódik, hogy az egyetlen lehetséges c érték a $c = 11$.
A maradék 17 blokk teljesen hasonlóan számolható a konstrukció alapján. A hiányzó 18 blokk tehát:

$$\begin{array}{cccccc}
\{0,1,6\} & \{0,2,5\} & \{0,3,7\} & \{1,2,7\} & \{1,3,4\} & \{2,3,6\} \\
\{4,5,10\} & \{4,6,9\} & \{4,7,11\} & \{5,6,11\} & \{5,7,8\} & \{6,7,10\} \\
\{8,9,2\} & \{8,10,1\} & \{8,11,3\} & \{9,10,3\} & \{9,11,0\} & \{10,11,2\}
\end{array}$$

6. fejezet

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Szőnyi Tamásnak, aki mindig rendelkezésemre állt és konzultációink alkalmával elkalauzolt a matematika ezen részébe. Lelkes magyarázatai a szakdolgozatom témáján túlmutatóak voltak, lehetővé téve, hogy a matematika egy nagyobb részébe kapjak bepillantást, mint amelyet a szakdolgozatom felölel.

Köszönettel tartozom Héger Tamásnak a különböző matematikai képszerkesztő programok javaslatáért, illetve az „Ideális egyenessel bővített amőbasík" nevű ábráért, melyet készségesen a rendelkezésemre bocsájtott.

Végül, de nem utolsó sorban, szeretném megköszönni szaktársamnak és jó barátomnak Auffenberg Andrásnak a LaTeX-ban nyújtott segítséget, illetve a szakdolgozat elkészítése során nyújtott támogatását.

Irodalomjegyzék

[1] Kárteszi Ferenc : *Bevezetés a véges geometriákba*, Akadémia Kiadó, Budapest 1973

[2] Kiss György - Szőnyi Tamás : *Véges geometria*, Polygon Kiadó, Szeged 2001

[3] Frank de Clerck: *An introduction the theory of the designs*, ELTE, Budapest 1992

[4] Marialuisa J. de Resmini : *An introduction to Steiner systems*, ELTE 1992

[5] Verhóczki László: *Projektív geometria* (internetes egyetemi jegyzet), http://www.cs.elte.hu/geometry/vl/JegyT.htm

[6] Új matematikai mozaik: Montágh Balázs: *Salakmotor-versenyek és véges síkok*, TypoTEX Kiadó, Budapest 2002, Szerk.: Hraskó András

[7] Új matematikai mozaik: Bérczi Gergely, Gács András, Szőnyi Tamás: *Véges projektív síkok*, TypoTEX Kiadó, Budapest 2002, Szerk.: Hraskó András

[8] http://hu.wikipedia.org

[9] http://home.fazekas.hu/ lsuranyi/Grafok/Grafok4afeladatok.htm

[10] Lovász László, Pelikán József, Vesztergombi Katalin: *Diszkrét matematika*, TypoTEX Kiadó, Budapest 2006