EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNY EGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Kapitány Benedek

AZ IZOPERIMETRIKUS EGYENLŐTLENSÉG

BSc szakdolgozat

Témavezető:
Frenkel Péter
Algebra és Számelmélet Tanszék

Budapest, 2013

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Szélsőérték-feladatok már a primitív népeknél is felmerültek. Miért henger alakú a virágok szára, a fák törzse? Miért van a vízben lebegő buboréknak megközelítőleg gömb alakja? Miért tömörül körbe a rénszarvascsorda, ha farkasok támadnak rá? Ezeknek a kérdéseknek természetesen csak közvetve van kapcsolatuk a matematikával, de vannak kifejezetten matematikai jellegű problémák is. Milyen alakú az a földdarab, amely adott hosszúságú kerítéssel keríthető körbe, és maximális a területe? Milyen alakú ballont készítsünk léghajónkhoz, hogy burkolata a lehető legkisebb súlyt jelentse, adott térfogatú, a ballont megtöltő meleg levegő mellett?

Az ezen példákban rejlő matematikai feladatokat két típusba sorolhatjuk. Az egyik: bizonyos tulajdonsággal rendelkező geometriai alakzatok közül melyiknek legnagyobb a területe, illetve a térfogata. A másik: bizonyos tulajdonsággal rendelkező geometriai alakzatok közül melyiknek legkisebb a kerülete, illetve a felszíne. Mindkét feladatot izoperimetrikus problémának nevezzük, annak ellenére, hogy az *izoperimetrikus* szó maga egyenlő kerületűt jelent.

A görög matematikusok már időszámításunk kezdete előtt is foglalkoztak szélsőérték- feladatokkal. Eukleidész (cca. i.e. 300) már ismerte a téglalapok izoperimetrikus problémájának megoldását, Arkhimédész (i.e. 287-212) pedig ismerte az izoperimetrikus tétel állítását. Az alexandriai Papposz (cca. i.sz. 300) szintén ismerte az izoperimetrikus tételt, sőt, úgy vélte, be is bizonyította azzal, hogy belátta: a kör területe nagyobb, mint bármely vele azonos kerületű sokszögé. Eredményeit egészen a 18. századig nem is vonták kétségbe, amikor a Papposz nyomán szintén geometriai módszerrel dolgozó Jacob Steiner izoperimetrikus tételre adott bizonyításában Karl Weierstrass lényeges hibát fedezett fel.

Szakdolgozatomban bemutatom az izoperimetrikus tétel pontos bizonyítását, amely a tétel „felfedezése" után mintegy kétezer évvel született. A tétel n–dimenziós általánosítását is bebizonyítom, végül bemutatom az izoperimetrikus tétel néhány középiskolások számára is érthető vonatkozását.

1. fejezet
Az izoperimetrikus probléma két dimenzióban

Nyilvánvaló állításnak tűnik, hogy az adott hosszúságú görbék által körülzárt idomok közül a kör területe a legnagyobb, de ennek bizonyítása nem kézenfekvő. Kidolgozásához R. Courant – H. Robbins: Mi a matematika? [1] és Nicholas D. Kazarinoff: Geometriai egyenlőtlenségek [2] című könyvét vettem alapul.

1.1. **Tétel.** *Az adott kerületű konvex síkalakzatok közül a kör a legnagyobb területű.*

Bizonyítás:

(1) A Weierstrass–tétel segítségével belátjuk, hogy az adott K kerületű $2n$–szögek között létezik maximális területű, ha n rögzített.

(2) Belátjuk, hogy az azonos hosszúságú, $2n$ oldalú, zárt sokszögvonalak közül a szabályos $2n$–szög területe a legnagyobb.

(3) Belátjuk, hogy az adott K kerületű, szabályos $2n$ –szögek területének szuprémuma, midőn n befutja $\mathbb{N}$-et, a K kerületű kör területe.

(4) Végül belátjuk az eredeti állítást.

1.1.1. **Állítás.** *Az adott K kerületű $2n$–szögek területének $\exists$ maximuma, ha n rögzített.*

Bizonyítás:

Emlékeztetőül a Weierstrass–tétel: Legyen $A \subset \mathbb{R}^p, A \neq \emptyset$ korlátos és zárt, és legyen $f: A \to \mathbb{R}$ folytonos. Ekkor f korlátos az A halmazon, és az A–n felvett értékei között van legnagyobb és van legkisebb érték.

Esetünkben az A halmaz egyenlő azzal a Q halmazzal, amire:

$$Q = \{(a_1, b_1, \dots, a_{2n}, b_{2n}) \in \mathbb{R}^{4n} \mid (a_1, b_1), \dots, (a_{2n}, b_{2n}) \textit{ egy konvex, K kerületű (esetleg elfajuló) 2n-szög csúcsai pozitív körüljárás szerint, és } a_1=b_1=0\},$$

$Q \subset \mathbb{R}^{4n}$, mert a $2n$–szög koordinátáinak száma $4n$. Elfajuló $2n$–szög alatt azt értjük, hogy megengedjük az egyenes szöget és bizonyos csúcsok egybeesését.

A *Weierstrass–tétel* alapján tudjuk Q–ról, hogy

(1) ha Q korlátos és
(2) ha Q zárt, illetve
(3) ha folytonos a rajta értelmezett területfüggvény, akkor a területfüggvény felvett értékei között van maximum (és minimum is).

Bizonyítsuk a Q halmaz korlátosságát.
Az egyszerűség kedvéért minden $\underline{x} \in Q$ pontot azonosítsunk a koordinátái által megadott K kerületű konvex sokszöggel. Ekkor egy $\underline{x} \in Q$-ban minden csúcs legfeljebb K távolságra van a $(0,0)$ ponttól.

Bizonyítsuk a Q halmaz zártságát. (Ehhez kell, hogy Q tartalmazza a határát, amiről be kell látnunk, hogy csak K kerületű és konvex elemeket tartalmaz.)

Tehát ha $\underline{x_1}, \underline{x_2}, \dots \in Q,\ \underline{x_i} \to \underline{x}, (i \to \infty), akkor\ \underline{x} \in Q$, mert

(1) $\underline{x_i}$ bármely két adott szomszédos csúcsa közötti szakaszokból alkotott sorozat tart $\underline{x}$ megfelelő oldalához. Ezért $\underline{x_i}$ kerülete tart $\underline{x}$ kerületéhez, és mivel $\underline{x_i}$ kerülete konstans K, ezért $\underline{x}$ kerülete is K.
(2) $\underline{x_i}$ bármely három adott szomszédos csúcsa által meghatározott két oldalának szöge $\leq 180°$, ezért $\underline{x}$ megfelelő három csúcsa által meghatározott két oldalának szöge is $\leq 180°$, és így a határsokszög konvex.

Bizonyítsuk a területfüggvény folytonosságát.
Bármely $2n$–szög felbontható háromszögekre, a $2n$–szög egy adott csúcsából kiinduló összes átlójával. Egy ilyen háromszög csúcsainak koordinátái $(a_i, b_i), (a_j, b_j), (a_k, b_k)$

és az (a_i, b_i) csúcsból a másik kettőbe tartó vektorok $\underline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ és $\underline{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$, ahol $v_1 = a_j - a_i$, $v_2 = b_j - b_i$, $w_1 = a_k - a_i$, $w_2 = b_k - b_i$. Ekkor a háromszög területe $T = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix}\right|$, ami polinomfüggvény abszolútértéke, tehát folytonos. Ezért a $2n$–szög területfüggvénye is folytonos.

1.1.2. Állítás. *Az adott K hosszúságú, $2n$ oldalú, zárt sokszögvonalak közül a szabályos $2n$–szög területe a legnagyobb.*

Bizonyítás:

Az előzőekben beláttuk, hogy létezik maximális területű az adott K kerületű $2n$–szögek között. Nevezzük a keresett maximális területű $2n$–szöget P–nek. Azt szeretnénk belátni, hogy P szabályos sokszög, tehát

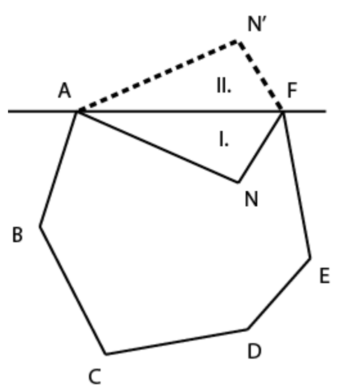
(1) P–nek konvex poligonnak kell lennie,

(2) a P poligon mind a $2n$ oldalának azonos hosszúságúnak kell lennie, illetve

(3) a P poligon minden csúcsának egy körön kell feküdnie.

Bizonyítsuk, hogy P-nek konvex poligonnak kell lennie.

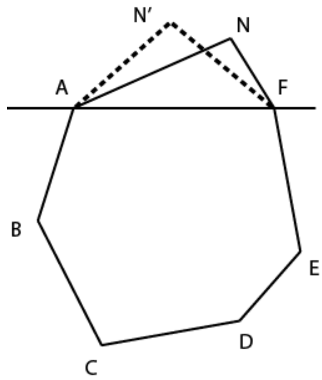
Vagyis P bármely két pontját összekötő egyenes szakasznak teljes hosszában P belsejében vagy P–n kell feküdnie. Ugyanis ha P nem lenne konvex, akkor húzható lenne egy olyan átló, mint a P poligon A és F pontja közötti AF szakasz (*1. ábra*), hogy P az AF egyenes egyik oldalán van.



1. ábra

Az ANF töröttvonal AF egyenesre vonatkozó $AN'F$ tükörképe az $ABCDEF$ töröttvonallal együtt olyan K kerületű poligont képez, amely nagyobb területet zár körül, mint az eredeti P poligon, mert magába foglalja az I. és II. jelzésű területeket is. Ez ellentmond annak a feltevésnek, hogy P zárja körül előírt K kerület mellett a legnagyobb területet. Tehát P–nek konvexnek kell lennie.

Bizonyítsuk be, hogy a P poligon mind a $2n$ oldalának azonos hosszúságúnak kell lennie.
Tegyük fel, hogy két szomszédos oldal, AN és NF, különböző hosszúságú. Ekkor levághatnánk P–ből az ANF háromszöget és azon $AN'F$ egyenlő szárú háromszöggel helyettesíthetnénk, amelyben $AN' + N'F = AN + NF$ (*2. ábra*). Lássuk be, hogy míg kerületük egyenlő, addig $AN'F$-nek nagyobb a területe.

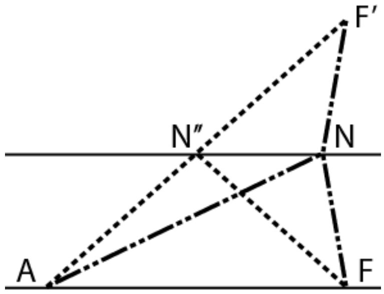


2. ábra

1.1.2.1.Lemma. *A közös alapú és kerületű háromszögek közül az egyenlő szárú háromszögnek van a legnagyobb területe.*

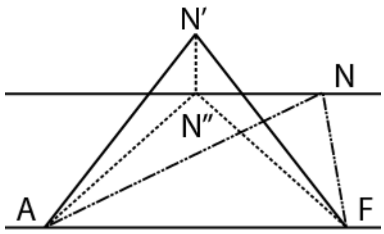
Bizonyítás:

Vegyünk egy tetszőleges N pontot úgy, hogy ne legyen rajta az AF egyenesen, és úgy, hogy $AN \neq NF$. Az N'' pont legyen rajta az N ponton átmenő, AF egyenessel párhuzamos egyenesen, úgy, hogy $AN'' = FN''$. Végül tükrözzük F-et az $N'N''$ egyenesre, és az így kapott pont legyen F' (*3. ábra*).



3. ábra

Ekkor az $AF'N$ háromszögben a háromszög–egyenlőtlenséget felhasználva látható, hogy $AN''F$ kerülete kisebb, mint ANF kerülete, mert AF mindkét háromszögnek oldala, $AN'' + N''F = AF'$ és $FN = NF'$. Eközben $AN''F$ és ANF területe egyenlő.



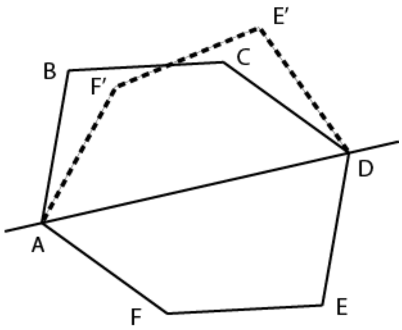
4. ábra

Vegyük most az $AN'F$ egyenlőszárú háromszöget, ahol AF az alap és aminek kerülete ANF kerületével egyenlő (*4. ábra*). Mivel tudjuk, hogy ANF kerülete nagyobb, mint $AN''F$–é, ezért tudjuk, hogy $AN''F$ kerülete kisebb, mint $AN'F$–é. Mivel ezek azonos alapú egyenlőszárú háromszögek, ezért $AN'' < AN'$, ezért N' az N'' fölött helyezkedik el. Ebből következik, hogy $AN'F$ területe nagyobb, mint $AN''F$ területe, és így nagyobb, mint ANF területe.

Tehát, ha nem azonos hosszúságú a P poligon minden oldala, akkor a javításaként egy azonos kerületű és nagyobb területű P' poligont kapnánk, ami ellentétben áll azzal a feltevésünkkel, hogy P az optimális $2n$–szög. Ezért P minden oldalának egyenlő hosszúnak kell lennie.

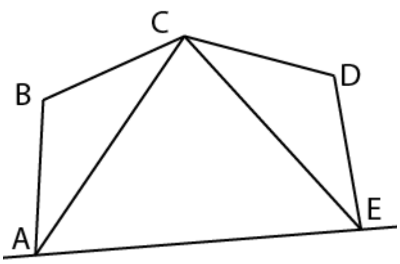
Bizonyítsuk, hogy P minden csúcsa egy körön fekszik.

Először azt bizonyítjuk, hogy bármely két szemközti csúcsot összekötő átló két egyenlő részre osztja a területet. Tegyük fel, hogy két nem egyenlő részre osztja, ekkor a nagyobbik területet (példánkban az $ADEF$ négyszöget) az AD egyenesre tükrözve olyan szintén K kerületű poligont kapnánk, amelyik nagyobb területet zárna körül, mint P (*5. ábra*). Ezzel beláttuk, hogy bármely két szemközti csúcsot összekötő átló két egyenlő részre osztja a területet.



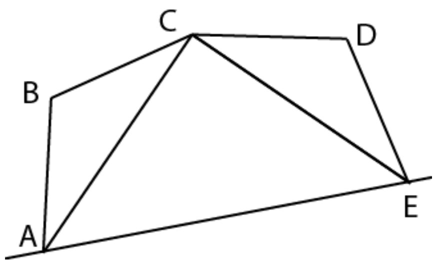
5. ábra

Legyen R a P valamely két szemközti csúcsát összekötő, n szakaszból álló egyik íve P–nek. Elég belátni, hogy R csúcsai a két végpontja feletti Thalesz–körön vannak. Ehhez arra van szükség, hogy az R két végpontját valamely másik csúcsával összekötő két szakasz szöge, pl. a *6. ábrán* $ACE\measuredangle$, minden esetben derékszög legyen.



6. ábra

Ebből már következik, hogy a csúcsok félkörön vannak. Tegyük fel, hogy $ACE\measuredangle$ nem 90°. Ekkor az 6. *ábra* kicserélhető egy másik, 7. *ábrával*, amelyben az ABC és CDE



7. ábra

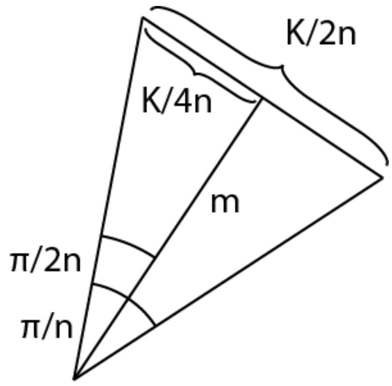
háromszögek területe és az $ABCDE$ töröttvonal hossza nem változott, míg ACE háromszög területe megnőtt azáltal, hogy $ACE\measuredangle$-et derékszögűvé tettük, mivel azon háromszögek közül, amelyeknek adott két oldala, a derékszögűnek a legnagyobb a területe (a derékszög az adott két oldal szöge). Így a *7. ábra* nagyobb területet ad, mint az eredeti, ami viszont ellentmondás, ezért $ACE\measuredangle$-nek (és R minden csúcsához tartozó ilyen szögnek) derékszög- nek kell lenni. Tehát R csúcsai valóban a két végpontja feletti Thalesz–körön vannak.

Ezzel beláttuk, hogy az adott K hosszúságú $2n$ oldalú zárt sokszögvonalak közül a szabályos $2n$–szög területe a legnagyobb, vagyis: minden Q $2n$–szögre $\frac{t(Q)}{k^2(Q)} \leq \frac{t(P)}{k^2(P)}$, ahol P szabályos $2n$–szög.

1.1.3. Állítás. Az adott K kerületű szabályos $2n$–szögek területének szuprémuma, midőn n befutja $\mathbb{N}$-et, a K kerületű kör területe. Vagyis $\frac{t(P)}{k^2(P)} < \frac{t(körlap)}{k^2(körlap)} = \frac{\pi}{4\pi^2} = \frac{1}{4\pi}$.

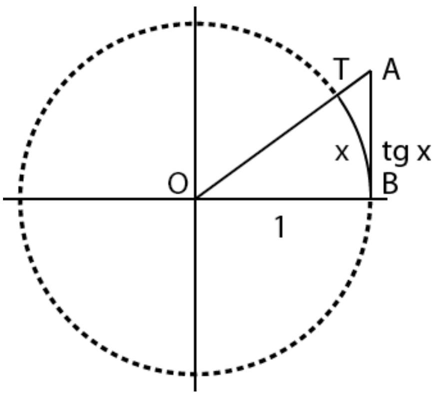
Bizonyítás:

A szabályos $2n$–szöget egybevágó háromszögekre osztjuk az átlóival. Egy ilyen háromszög (*8. ábra*) magassága $m = \frac{K}{4n} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n}$. Ebből a K kerületű szabályos $2n$–szög területe a következő: $2n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{K}{2n} \cdot \frac{K}{4n} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n} = K^2 \cdot \frac{1}{8n} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n} = \frac{K^2}{4\pi} \cdot x \cdot \operatorname{ctg} x,$ ahol $x = \frac{\pi}{2n}$.



8. ábra

Itt $x \cdot \operatorname{ctg} x < 1$, mert $x < \operatorname{tg} x$, ami $0 < x < \frac{\pi}{2}$ esetén a körcikk és a háromszög területére felírt $\frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2}$ egyenlőtlenségből következik (*9.ábra)*. Ekkor pedig $\frac{K^2}{4\pi} \cdot x \cdot \operatorname{ctg} x < \frac{K^2}{4\pi}$, amivel beláttuk az állítást.

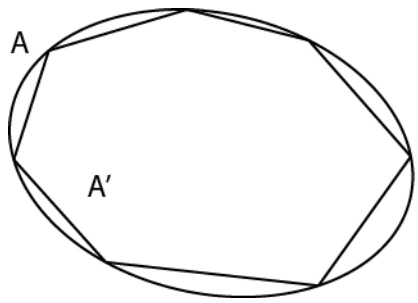


9. ábra

1.1.4. Állítás. *Adott hosszúságú görbék által körülzárt idomok közül a kör területe a leg- nagyobb. Vagyis: Minden $A \subset \mathbb{R}^2, A \neq \emptyset$ konvex és kompakt halmazra, ahol A nem egyetlen pont:* $\frac{t(A)}{k^2(A)} \leq \frac{\pi}{4\pi^2} = \frac{1}{4\pi}$.

Bizonyítás:

Legyen $A \subset \mathbb{R}^2, A \neq \emptyset$ konvex és kompakt. Mivel az A halmaz Jordan mérhető, ezért tudjuk, hogy az A–ba írt, egymásba nem nyúló téglalapok területének szuprémuma az A területe. Legyen A' bármely olyan $2n$–szög, aminek csúcsai az A halmaz határvonalának pontjai (*10. ábra*). Még be kell látnunk a következő lemmát.



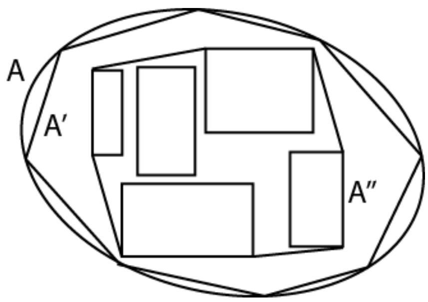
10. ábra

1.1.4.1. Lemma. Legyen $A \subset \mathbb{R}^2, A \neq \emptyset$ konvex és kompakt. Legyen A' bármely olyan $2n$–szög, aminek csúcsai az A halmaz határvonalának pontjai. Ekkor:

$$t(A) = \sup t(A')$$

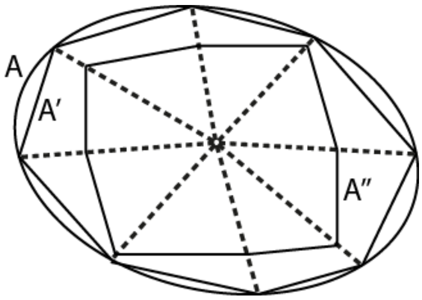
Bizonyítás:

Azt szeretnénk belátni, hogy minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik $A' : t(A') > t(A) - \varepsilon$. Legyen $\varepsilon > 0$. Vegyünk A–ban véges sok egymásba nem nyúló tengelypárhuzamos téglalapot, amelyek területösszege nagyobb, mint $t(A) - \varepsilon$, és legyen A'' ezen téglalapok uniójának konvex burka. (*11. ábra*).



11. ábra

Ha kiválasztjuk A'' egy belső pontját, és ezt a pontot A'' csúcsaival összekötve az A határvonalával vett metszetekben lesznek a kívánt A' csúcsai (12. ábra). Lehetséges, hogy A''-nek páratlan sok csúcsa van. Ekkor kiválasztunk egy tetszőleges pontot az egyik oldalán (az egyenesszög megengedett), és azt is A határvonalára vetítjük.
Ezzel beláttuk a lemmát.



12. ábra

Az 1.1.2 és 1.1.3. állításokból tudjuk, hogy ha $A'_{szabályos}$ az A'-vel egyenlő kerületű szabályos $2n$–szög, akkor $\frac{t(A')}{k^2(A')} \leq \frac{t(A'_{szabályos})}{k^2(A'_{szabályos})} \leq \frac{1}{4\pi}$.

A lemmából pedig következik, hogy $\frac{t(A)}{k^2(A)} \leq sup \frac{t(A')}{k^2(A')} \leq sup \frac{t(A'_{szabályos})}{k^2(A'_{szabályos})} = \frac{1}{4\pi}$.

2. fejezet
Az izoperimetrikus probléma n dimenzióban

A 2–dimenziós tétel mintájára megfogalmazhatjuk a tételt n dimenzióban is: minden $A \subset \mathbb{R}^n, A \neq \emptyset$ konvex és kompakt halmazra $\frac{|A|^{n-1}}{F^n(A)}$ az n–dimenziós gömb esetén a legnagyobb, ahol $|A|$ az A halmaz térfogata, $F(A)$ az A felszíne. Ezeket a következőképpen definiáljuk:

2.0.1. Definíció. $|A|$ az A Jordan–mérhető halmaz Jordan–mértéke, $|A|_b$ az A kolátos halmaz belső Jordan–mértéke.

2.0.2. Definíció. *Egy A konvex és kompakt halmaz $F(A)$ felszíne egyenlő az A halmaz ε sugarú környezete mértékének (térfogatának) az $\varepsilon = 0$ helyen vett, ε szerinti jobboldali deriváltjával.* (Ez a jobboldali derivált mindig létezik. Ezt nem bizonyítjuk.)

Ha veszünk egy a élű kockát, láthatjuk, hogy a definíció működik: $((a+2\varepsilon)^3)' = 3(a+2\varepsilon)\cdot 2$, ami az $\varepsilon = 0$ helyen ugyanannyi, mint a lapok területének összege.

Hogy az n–dimenziós tételt pontosabban megfogalmazzuk, bevezetjük γ_n–t.

2.0.3. Definíció. A γ_n az n dimenziós, origó középpontú, egységsugarú gömb térfogata, vagyis $\gamma_n = |B(\underline{O}, 1)|$.

Az n dimenziós gömb térfogatát és felszínét megvizsgálva a következő táblázatot kapjuk:

Dimenzió	Térfogat	Felszín
2	$r^2\pi$	$2r\pi$
3	$\frac{4}{3}r^3\pi$	$4r^2\pi$
.		
.		
n	$r^n\gamma_n$	$nr^{(n-1)}\gamma_n$

Amiből látható, hogy adott n–hez tartozó felszín az adott n–hez tartozó térfogat deriváltja, vagyis: $nr^{n-1}\gamma_n = \frac{d}{dr}(r^n\gamma_n) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(r+\varepsilon)^n\gamma_n - r^n\gamma_n}{\varepsilon}$.

Így már felírhatjuk az n dimenziós izoperimetrikus egyenlőtlenséget.

2.1. Tétel (Az n dimenziós izoperimetrikus egyenlőtlenség). *Minden* $A \subset \mathbb{R}^n$, $A \neq \emptyset, F(A) \neq 0, |A| \neq 0$ *konvex és kompakt testre* $\frac{|A|^{n-1}}{F^n(A)} \leq \frac{(\gamma_n)^{n-1}}{(n\gamma_n)^n} = \frac{1}{n^n\gamma_n}$,

illetve az egyszerűség kedvéért az inverze: $\frac{F^n(A)}{|A|^{n-1}} \geq \frac{(n\gamma_n)^n}{(\gamma_n)^{n-1}} = n^n\gamma_n$.

Bizonyítás:

(1) Először bebizonyítunk egy segédállítást.

(2) Ennek segítségével bebizonyítjuk a Prékopa–Leindler egyenlőtlenséget.

(3) A Prékopa–Leindler egyenlőtlenség segítségével bebizonyítjuk a Brunn–Minkowski egyenlőtlenséget.

(4) A Brunn–Minkowski egyenlőtlenség segítségével bebizonyítjuk az n–dimenziós izoperimetrikus tételt.

2.1.1. Állítás (Segédállítás). *Ha adottak* $A, B \neq \emptyset$, $A, B \subseteq \mathbb{R}$ *korlátos halmazok és* $0 \leq \lambda \leq 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$ *szám, akkor* $|\lambda A + (1-\lambda)B|_b \geq \lambda|A|_b + (1-\lambda)|B|_b$. *Itt a halmazok közötti* $+$ *jel a Minkowski összeget jelöli:* $A, B \subset \mathbb{R}^n, A + B = \{a + b | a \in A, b \in B\}$.

Bizonyítás:

Minden ε–hoz létezik $A_0 \subseteq A$, úgy, hogy létezik $\min(A_0)$ és $|A|_b - |A_0|_b < \varepsilon$, mert létezik $a \in A : a - \inf A < \varepsilon$. Ugyanígy: minden ε-hoz létezik $B_0 \subseteq B$, hogy létezik $\max(B_0)$ és $|B|_b - |B_0|_b < \varepsilon$, mert létezik $z \in B : (\sup B) - z < \varepsilon$.
Ekkor igaz, hogy

$$\lambda A + (1-\lambda)B \supseteq \lambda A_0 + (1-\lambda)B_0 \supseteq$$
$$(\lambda \min(A_0) + (1-\lambda)B_0) \cup (\lambda A_0 + (1-\lambda)\max(B_0)).$$

Kihasználva, hogy az unió két tagja a $(\lambda \min(A_0)\,, (1-\lambda)\max(B_0))$ ponttól eltekintve diszjunkt, következik, a halmazok belső mértékét véve, hogy

$$|\lambda A + (1-\lambda)B|_b \geq (1-\lambda)|B_0|_b + \lambda|A_0|_b \geq (1-\lambda)(|B|_b - \varepsilon) + \lambda(|A|_b - \varepsilon) =$$
$$(1-\lambda)|B|_b + \lambda|A|_b - \varepsilon$$

Mivel ez minden $\varepsilon > 0$-ra igaz, beláttuk az állítást.

2.1.2. Állítás (Prékopa-Leindler). *Ha adottak $f, g, m : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ korlátos, kompakt tartójú, tehát adott intervallumon kívül azonosan nulla függvények, $0 \leq \lambda \leq 1$, minden $x, y \in \mathbb{R}^n$ és $m(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq f(x)^\lambda g(y)^{1-\lambda}$, akkor*

$$(\mathrm{F})||m||_1 \geq (\mathrm{A})||f||_1^\lambda \cdot (\mathrm{A})||g||_1^{1-\lambda},$$

ahol $||f||_1 := \int_{\mathbb{R}^n} f$, és $(F)||m||_1$ az m felső Riemann–integrálja $\mathbb{R}^n$-en, $(A)||f||_1$ és $(A)||g||_1$ pedig f és g alsó Riemann–integráljai $\mathbb{R}^n$-en.

Bizonyítás:

Teljes indukcióval bizonyítunk.

1. Belátjuk, hogy az állítás igaz $n = 1$ esetben.
2. Az $n \geq 2$ esetben az $f, g, m : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ függvények alapján elkészítjük az új, $f^\circ, g^\circ, m^\circ : \mathbb{R}^{n-1} \to [0, \infty)$ függvényeket. Belátjuk, hogy ha f, g, m – re igaz az előfeltevés, akkor $f^\circ, g^\circ, m^\circ$-re is.

3. Feltesszük, hogy $(n-1)$ –re, tehát $\mathbb{R}^{n-1}$-ben igaz az állítás, és belátjuk, hogy ekkor n–re, tehát $\mathbb{R}^{n}$-ben is igaz.

Bizonyítsuk be, hogy az állítás igaz az $n = 1$ esetben.
A következőkben belátjuk, hogy ha Riemann–integrálható függvényekre igaz a Prékopa–Leindler állítás, akkor tetszőlegesekre is. Ha f, g, m teljesíti az állítás feltételét, akkor minden olyan mérhető f', g', m' is teljesiti, amelyekre $f' \leq f,\ g' \leq g,\ m' \geq m$. Ha minden ilyen f', g', m' -re igaz a Prékopa–Leindler egyenlőtlenség, akkor f, g, m –re is, hiszen f alsó integrálja az ilyen f'-k integráljainak szuprémuma, g alsó integrálja az ilyen g'-k integráljainak szuprémuma, és m felső integrálja az ilyen m'-k integráljainak infímuma. Tehát feltehetjük, hogy f, g, m Riemann–integrálható.

Ha $f \equiv 0$ vagy $g \equiv 0$, akkor $||m||_1 \geq 0^{\lambda} ||g||_1^{1-\lambda} = 0$, ha $0 < \lambda \leq 1$. Ha $\lambda = 0$, akkor $m(y) \geq g(y)$ esetén $||m||_1 \geq ||g||_1$–nek kell teljesülni, ami igaz.
Továbbra is $n = 1$ esetben, ha $f, g \not\equiv 0$, feltehetjük, hogy $\sup f = \sup g = \sup m = 1$. Azért tehetjük fel, mert minden f, g és m átskálázható a következőképpen. Először f–et megszorozzuk egy α számmal, aztán g-t egy β számmal, hogy így a szuprémuma mindkét függvénynek 1 legyen. Majd m–et is megszorozzuk az $\alpha^{\lambda}\beta^{1-\lambda}$ számmal, és ahol így $m > 1$ ott a függvényértéket 1-re cserélem – ezt azért tehetem meg, mert a bizonyítandó állításban az m–et tartalmazó kifejezésnek kell nagyobbnak lennie, tehát ha így igaz az állítás, akkor az eredeti m–re is igaz.

Ha $f(x) > t$, $g(y) > t$, akkor az állítás előfeltételéből következik, hogy

$$m(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq f(x)^{\lambda} g(y)^{1-\lambda} > t^{\lambda} t^{1-\lambda} = t.$$

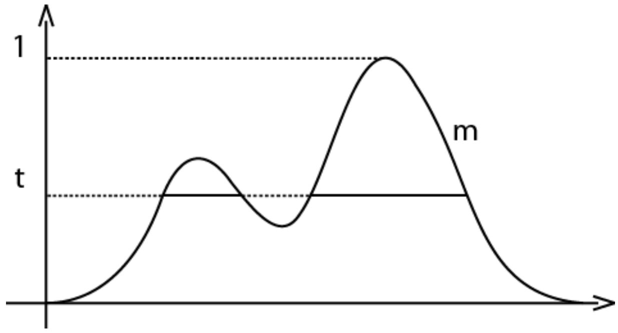
Tehát, ha $f(x) > t$, $g(y) > t$, akkor $m(\lambda x + (1-\lambda)y) > t$, amiből következik, hogy

$$\{\lambda x + (1-\lambda)y \mid f(x) > t \text{ és } g(y) > t\} \subseteq \{\, z \mid m(z) > t\},$$

ahol $z = \lambda x + (1-\lambda)y$. A Minkowski összeg definíciója alapján a bal oldal felbontható:

$$\lambda\{x \mid f(x) > t\} + (1-\lambda)\{y \mid g(y) > t\} \subseteq \{\, z \mid m(z) > t\}.$$

A Lebontási (Fubini) tétel alapján $||m||_1 = \int_0^1 |\{m > t\}|_b \, dt$ (*13. ábra*).



13. ábra

Ekkor az előzőek alapján felírhatjuk, hogy

$$||m||_1 = \int_0^1 |\{m > t\}|_b \, dt \geq \text{(A)} \int_0^1 |\lambda\{f > t\} + (1-\lambda)\{g > t\}|_b dt.$$

A Segédállítás segítségével alakítjuk tovább a kifejezést:

$$\text{(A)} \int_0^1 |\lambda\{f > t\} + (1-\lambda)\{g > t\}|_b dt \geq (A) \int_0^1 (|\lambda\{f > t\}|_b + |(1-\lambda)\{g > t\}|_b) dt \geq \lambda \, \text{(A)} \int_0^1 |\{f > t\}|_b dt + (1-\lambda) \, \text{(A)} \int_0^1 |\{g > t\}|_b dt = \lambda (A) ||f||_1 + (1-\lambda)(A)||g||_1 \geq (A)||f||_1^{\lambda} (A)||g||_1^{1-\lambda}.$$

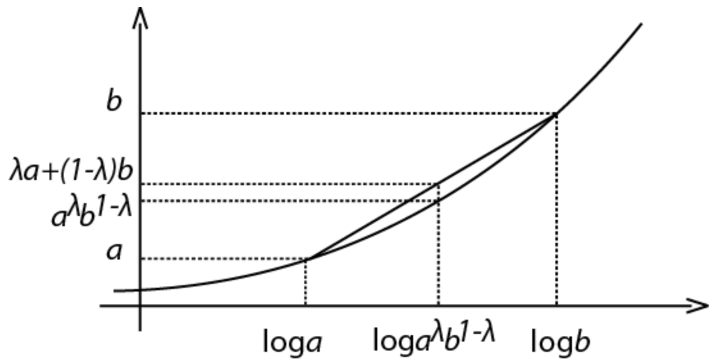
Amivel beláttuk a Prékopa–Leindler egyenlőtlenséget $n = 1$ esetben. Az utolsó egyenlőtlenség a súlyozott számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenségből következik.

2.1.2.1.Állítás. *A súlyozott számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenség állítása a következő:* $0 \leq \lambda \leq 1$, $a, b \geq 0 \Rightarrow \lambda a + (1-\lambda) b \geq a^{\lambda} b^{1-\lambda}$.

Bizonyítása:

Az állítás az exponenciális függvény konvexitásából következik. Ha tekintjük az exponenciális függvény grafikonjának x tengelyén a $(\log a)$ és $(\log b)$ pontokat, illetve a kettejük által meghatározott szakaszt $(1-\lambda):\lambda$ arányban osztó pontot, tehát a $\lambda \log a + (1-\lambda) \log b = \log a^{\lambda} b^{1-\lambda}$ pontot, akkor azt találjuk, hogy az ezen osztóponthoz tartozó függvényérték, azaz $a^{\lambda} b^{1-\lambda}$, mindig kisebb a függvénygrafikon $(\log a, a)$, $(\log b, b)$ pontjai által meghatározott szakasz azon pontjának y–koordinátájánál, amelynek x–koordinátája szintén $\log a^{\lambda} b^{1-\lambda}$ (*14.ábra*).

Mivel hasonló háromszögek oldalainak aránya megegyezik, ezért ez a pont $(1-\lambda):\lambda$ arányban osztja az $(a,0)$ és a $(b,0)$ pontok által meghatározott szakaszt, tehát az y– koordinátája $\lambda a+(1-\lambda)b$. Így beláttuk, hogy $\lambda a+(1-\lambda)b \geq a^{\lambda}b^{1-\lambda}$.



14. ábra

Bizonyítsuk be a Prékopa–Leindler egyenlőtlenséget $n \geq 2$ esetben.

Az $n \geq 2$ esetben készítsük el az $f^{\circ}, g^{\circ}, m^{\circ} : \mathbb{R}^{n-1} \to [0,\infty)$ függvényeket , ahol

$$f^{\circ}(x_1,\dots,x_{n-1}) = \text{(A)} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,\dots,x_{n-1},x_n)\, dx_n \ ,$$

$$g^{\circ}(x_1,\dots,x_{n-1}) = \text{(A)} \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1,\dots,x_{n-1},x_n)\, dx_n \ ,$$

$$m^{\circ}(x_1,\dots,x_{n-1}) = \text{(F)} \int_{-\infty}^{\infty} m(x_1,\dots,x_{n-1},x_n)\, dx_n \ .$$

Lássuk be, hogy ha f, g, m–re igaz az előfeltevés, akkor $f^{\circ}, g^{\circ}, m^{\circ}$-re is.

Tehát azt kell belátnunk, hogy, ha az $f, g, m : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ korlátos, kompakt tartójú függvények, $0 \leq \lambda \leq 1$, minden $x, y \in \mathbb{R}^n$ és

$$m(\lambda x+(1-\lambda)y) \geq f(x)^{\lambda} g(y)^{1-\lambda},$$

akkor minden $x, y \in \mathbb{R}^{n-1}$ esetén is igaz a tétel előfeltétele, tehát az $f^{\circ}, g^{\circ}, m^{\circ} : \mathbb{R}^{n-1} \to [0,\infty)$ korlátos, kompakt tartójú függvények és

$$m^{\circ}(\lambda x+(1-\lambda)y) \geq f^{\circ}(x)^{\lambda} g^{\circ}(y)^{1-\lambda}.$$

Válasszuk x_n-et ξ-nek, ekkor

$$m^{\circ}(\lambda x+(1-\lambda)y) = \text{(F)} \int_{-\infty}^{\infty} m(\lambda x+(1-\lambda)y, \xi)\, d\xi.$$

Vegyük észre, hogy az integrálás szempontjából az x és az y ekkor nem változók, csak a ξ, tehát az $n = 1$ eset szerint járhatunk el:

$$m(\lambda x + (1-\lambda)y, \lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_2) = m\big(\lambda(x,\xi_1) + (1-\lambda)(y,\xi_2)\big) \geq f(x,\xi_1)^\lambda g(y,\xi_2)^{1-\lambda}.$$

Bal oldalon felső integrált, jobb oldalon alsó integrált véve a reláció megmarad:

$$(\mathrm{F}) \int_{-\infty}^{\infty} m(\lambda x + (1-\lambda)y, \xi)\, d\xi \geq \left((\mathrm{A}) \int_{-\infty}^{\infty} f(x,\xi)\, d\xi\right)^\lambda \left((\mathrm{A}) \int_{-\infty}^{\infty} g(y,\xi)\, d\xi\right)^{1-\lambda},$$

vagyis:

$$m^\circ(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq f^\circ(x)^\lambda g^\circ(y)^{1-\lambda}.$$

A bizonyítás folytatásához lássunk még be egy segédlemmát.

2.1.2.2.Lemma. H*a* $m: \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ *korlátos, kompakt tartójú függvény, akkor* $(F)\int_{\mathbb{R}^n} m \geq (F)\int_{\mathbb{R}^{n-1}} (F)\int_{\mathbb{R}} m.$

Bizonyítás:

Az m felső integráljáról tudjuk, hogy

$$(\mathrm{F})\, ||m||_1 = \inf_{\hat{m} \geq m, R-inthó} ||\hat{m}||_1.$$

A Lebontási (Fubini) tétel miatt

$$(\mathrm{F}) \int_{\mathbb{R}^n} m = \inf_{\hat{m} \geq m, R-inthó} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{m} = \inf_{\hat{m} \geq m, R-inthó} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (F)\int_{\mathbb{R}} \hat{m}, \text{ és}$$

$$\inf_{\hat{m} \geq m, R-inthó} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (F)\int_{\mathbb{R}} \hat{m} \geq (F)\int_{\mathbb{R}^{n-1}} (F)\int_{\mathbb{R}} m,$$

mert csak egy változó szerint integrálunk.

Térjünk vissza újra a Prékopa–Leindler egyenlőtlenséghez.

Most már kimondhatjuk, hogy az indukciós feltétel szerint, ha

$$m^\circ(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq f^\circ(x)^\lambda g^\circ(y)^{1-\lambda},$$

akkor

$$(F)\int_{\mathbb{R}^{n-1}} m^\circ \geq \left((A)\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f^\circ\right)^\lambda \left((A)\int_{\mathbb{R}^{n-1}} g^\circ\right)^{1-\lambda}.$$

Ekkor a 2.1.2.2. Lemma alapján tudjuk, hogy

$$(F)\int_{\mathbb{R}^{n-1}} m^\circ \leq (F)\int_{\mathbb{R}^n} m,$$

illetve tudjuk, hogy

$$(A)\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f^\circ \geq (A)\int_{\mathbb{R}^n} f.$$

Tehát

$$\left((A)\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f^{\circ}\right)^{\lambda} \geq \left((A)\int_{\mathbb{R}^{n}} f\right)^{\lambda},$$

mert $\lambda \geq 0$. Ugyanezért tudjuk, hogy

$$\left((A)\int_{\mathbb{R}^{n-1}} g^{\circ}\right)^{1-\lambda} \geq \left((A)\int_{\mathbb{R}^{n}} g\right)^{1-\lambda}.$$

Tehát mindezek alapján

$$(F)\int_{\mathbb{R}^{n}} m \geq (F)\int_{\mathbb{R}^{n-1}} m^{\circ} \geq \left((A)\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f^{\circ}\right)^{\lambda}\left((A)\int_{\mathbb{R}^{n-1}} g^{\circ}\right)^{1-\lambda} \geq$$
$$\left((A)\int_{\mathbb{R}^{n}} f\right)^{\lambda}\left((A)\int_{\mathbb{R}^{n}} g\right)^{1-\lambda},$$

vagyis

$$(F)\int_{\mathbb{R}^{n}} m \geq \left((A)\int_{\mathbb{R}^{n}} f\right)^{\lambda}\left((A)\int_{\mathbb{R}^{n}} g\right)^{1-\lambda},$$

amivel beláttuk a Prékopa–Leindler egyenlőtlenséget. A bizonyítás menetében Brascamp és Lieb 1976-ban megjelent bizonyítására támaszkodtam.

2.1.3. Állítás (Brunn-Minkowski egyenlőtlenség). Ha $A, B \neq \emptyset$, $A, B \subset \mathbb{R}^n$ Jordan–mérhető, akkor $\sqrt[n]{|A+B|} \geq \sqrt[n]{|A|} + \sqrt[n]{|B|}$.

Bizonyítás:

Feltehető, hogy A, B kompaktak. Legyen $0 \leq \lambda \leq 1$ úgy, hogy $A = \lambda A_0$, $B = (1-\lambda)B_0$ jelöléssel $|A_0| = |B_0|$. Ekkor

$$\sqrt[n]{|A+B|} = \sqrt[n]{|\lambda A_0 + (1-\lambda)B_0|} \geq \sqrt[n]{|A_0|^{\lambda}|B_0|^{1-\lambda}},$$

a Prékopa–Leindler egyenlőtlenség miatt, amit $|A_0|$-re, $|B_0|$-re és $|\lambda A_0 + (1-\lambda)B_0|$-re, mint $||f||_1$-re, $||g||_1$-re és $||m||_1$-re alkalmazunk. Az f az A_0 indikátorfüggvénye, tehát $f\colon \mathbb{R}^n \to [0,1]$, ami A_0 pontjaiban 1-et, minden más pontban 0-t vesz fel. Hasonlóan g a B_0 indikátorfüggvénye, m pedig $|\lambda A_0 + (1-\lambda)B_0|$ indikátorfüggvénye.

Mivel $|A_0| = |B_0|$, ezért

$$\sqrt[n]{|A_0|^{\lambda}|B_0|^{1-\lambda}} = \sqrt[n]{|A_0|^{\lambda}|A_0|^{1-\lambda}} = \sqrt[n]{|A_0|}.$$

Ezt súlyozott összeggé bontjuk:

$$\sqrt[n]{|A_0|} = \lambda\sqrt[n]{|A_0|} + (1-\lambda)\sqrt[n]{|A_0|} = \lambda\sqrt[n]{|A_0|} + (1-\lambda)\sqrt[n]{|B_0|}.$$

És mivel $A, B \subset \mathbb{R}^n$, ezért $|A| = \lambda^n|A_0|$ és $|B| = (1-\lambda)^n|B_0|$, tehát

$$\lambda\sqrt[n]{|A_0|} + (1-\lambda)\sqrt[n]{|B_0|} = \sqrt[n]{|A|} + \sqrt[n]{|B|},$$

amivel beláttuk az állítást.

2.1.4. Tétel (Az n–dimenziós izoperimetrikus egyenlőtlenség). Minden $A \subset \mathbb{R}^n$, $A \neq \emptyset, F(A) \neq 0, |A| \neq 0$ *konvex és kompakt testre* $\frac{F^n(A)}{|A|^{n-1}} \geq \frac{(n\gamma_n)^n}{(\gamma_n)^{n-1}} = n^n\gamma_n$.

Bizonyítás:

A bizonyítás a Brunn–Minkowski egyenlőtlenség implementációja. Tehát, ha $A \neq \emptyset,\ A, B \subset \mathbb{R}^n$ mérhető, akkor tudjuk, hogy $\sqrt[n]{|A+B|} \geq \sqrt[n]{|A|} + \sqrt[n]{|B|}$.

A B halmaz legyen az egységsugarú gömb egy konstansszorosa, vagyis $B \coloneqq \varepsilon B\big(\underline{0}, 1\big) = B(\underline{0}, \varepsilon)$, illetve ekkor $|B| = \varepsilon^n\gamma_n$. Az $A + B$ halmaz tehát az A–nak ε sugarú környezete.

Ekkor $|A\ \varepsilon - környezete| \geq (\sqrt[n]{|A|} + \varepsilon\sqrt[n]{\gamma_n})^n$, és $\varepsilon = 0$–ra egyenlőség áll fenn.

A kifejezést az $\varepsilon = 0$ helyen, ε szerint deriválva a következőt kapjuk:

$$F(A) \geq n|A|^{\frac{n-1}{n}}\sqrt[n]{\gamma_n}\ ,$$

ami maga az izoperimetrikus egyenlőtlenség.

Ezzel tehát beláttuk a tételt.

3. Fejezet
Középiskolai vonatkozások

Az előző fejezetekben bemutatott izoperimetrikus tételek bőven túlmutatnak a középiskolai tananyagon. Mégis, találhatóak a témakörnek olyan vonatkozásai, amelyek akár az alsóbb osztályok tanulói számára is befogadhatóak. Mindenféleképpen ezek közé sorolandó a téglalapok izoperimetrikus tétele, illetve a háromszögek izoperimetrikus tételei is. Az utóbbiakra több megoldást is adunk, ezek nehézségi szintjüktől függően különböző osztályok számára lehetnek megfelelőek.

3.1. Állítás. *Az egységnyi területű téglalapok közül a négyzetnek van a legkisebb kerülete.*

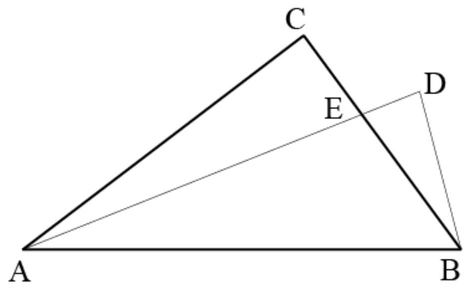
Bizonyítás:

Tegyük fel, hogy adott egy téglalap, és ennek a területét válasszuk területegységnek. Jelöle a téglalap alapját x. Ebből következik, hogy a magassága $\frac{1}{x}$, illetve a kerülete $2\left(x+\frac{1}{x}\right)$. Az egységnyi területű négyzet kerülete 4. Írjuk fel az állítást: $2\left(x+\frac{1}{x}\right) \geq 4$, ha $x > 0$. Vagyis $x+\frac{1}{x} \geq 2$, ha $x > 0$, ahol egyenlőség csak az $x = 1$ esetben áll fenn. Átalakítva ezt az egyenlőtlenséget, már ismert helyes egyenlőtlenséget kapunk: $(x-1)^2 \geq 0$, ha $x > 0$, ami nyilvánvaló állítás, mert valós szám négyzete nem lehet negatív.

3.2. Tétel. *Két, egyenlő alapú és kerületű háromszög közül annak nagyobb a területe, amelynél a másik két oldal különbsége kisebb. Ha a különbség ugyanakkora, akkor a területek is ugyanakkorák.* (Ez az 1.1.2.1. Lemma általánosítása).

Első bizonyítás:

Geometriai úton látjuk be az állítást. Tekintsük a *15. ábrát*.

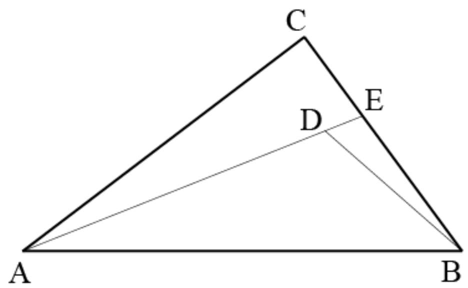


15. ábra

Az ABC és az ABD általános háromszögek kerülete egyenlő, közös alapjuk az AB szakasz, és egy félsíkban vannak. Tehát $AC + BC = AD + BD$. Ha $AC = AD$ és $CB = BD$, akkor ABC és ABD egybevágóak, tehát egyenlő a területük, és a szárak hosszának különbsége is egyenlő. Ha $AC = BD$ és $CB = AD$, akkor tengelyesen szimmetrikusak, ezért egyenlő a területük, valamint a szárak hosszának különbsége is egyenlő. Minden más esetben $BD < BC$ és $AD > AC$ vagy $BD > BC$ és $AD < AC$. A továbbiakban csak az első esettel foglalkozunk, mert a második eset egyszerűen a tükörképe. Ebben az első esetben nyilvánvalóan mindig ABD-ben nagyobb a szárak hosszának a különbsége. Azokkal a helyzetekkel sem foglalkozunk külön, amikor a C és a D csúcsok az AB szakasz oldalfelező merőlegesének két oldalán helyezkednek el, mert az egyik háromszög tükrözésével olyan helyzetet kapunk, ahol mindkét csúcs az oldalfelező azonos oldalán helyezkedik el, és nem változik sem a háromszög területe, sem a szárak hosszának különbsége.

Lássuk be, hogy az AD szakasz metszi a BC szakaszt egy $E \neq D$ pontban. Indirekt módon tegyük fel, hogy nincs ilyen metszéspont. Ekkor vagy D van az ABC belsejében, vagy annak határán, avagy C esik ABD belsejébe vagy annak határára.

Ha D esik ABC belsejébe, akkor E pont a BC oldal és AD meghosszabbításának a metszéspontja (*16. ábra*).



16. ábra

Ekkor a háromszög egyenlőtlenségből következik, hogy $AC + CE > AD + DE$ illetve, hogy $DE + EB > BD$. A két egyenlőtlenséget összeadva azt kapjuk, hogy

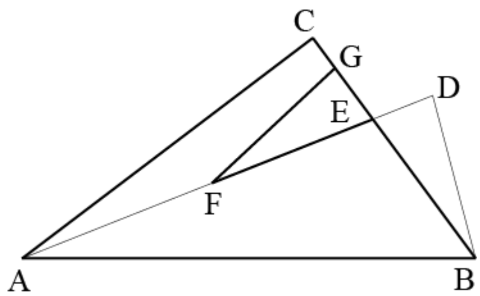
$$AC + CE + EB + DE > AD + DE + BD,$$

vagyis $AC + CB > AD + BD$, ami viszont ellentmond annak a kiindulási feltevésünknek, hogy $AC + BC \geq AD + BD$.

Ha D az ABC határán fekszik, tehát ha $D = E$, akkor ugyanezzel a módszerrel, az előzőhöz hasonlóan, ellentmondásra jutunk.

Ezzel beláttuk, hogy D az ABC-n kívül van. Tegyük fel, hogy C esik ABD belsejébe, vagy annak határára. Az előzőekkel analóg módon itt is ellentmondásra jutunk. Ezzel beláttuk, hogy AD metszi BC szakaszt egy $E \neq D$ pontban.

Legyen F az AE szakasz olyan pontja, amelyre $EF = EB$. Létezik ilyen F pont, tehát $AE > EB$, mert $EAB\measuredangle < CAB\measuredangle < CBA\measuredangle$. Ugyanígy G az E és C pontokon fekvő egyenes egy olyan pontja, amire $GE = ED$ (17. *ábra*).



17. ábra

Lássuk be, hogy G pont E és C között fekszik. Észrevehetjük, hogy az eddigiek miatt EFG háromszög egybevágó EDB–vel, tehát $FG = BD$. Illetve a feltétel miatt továbbra is $AC + BC = AD + BD$. Ezekből láthatjuk, hogy

$$AC + BC = AF + FD + FG = AF + BG + FG = AF + BC \pm CG + FG,$$

vagyis $AC = AF \pm CG + FG$, ahol a mínusz előjel akkor érvényes, ha G az E és C között fekszik, a plusz pedig akkor, ha EC–nek a C-n túli meghosszabbításán.
Az $AC = AF + CG + FG$ eset azonban nem lehetséges, mert két pont között a legrövidebb út az egyenes, ezért G az E és a C pontok között van.
Ezzel be is láttuk az eredeti állítást, mert

$$T(ABC) = T(ABE) + T(FEG) + T(AFGC) = T(ABE) + T(EBD) + T(AFGC) = T(ABD) + T(AFGC).$$

Tehát $T(ABC) > T(ABD)$.

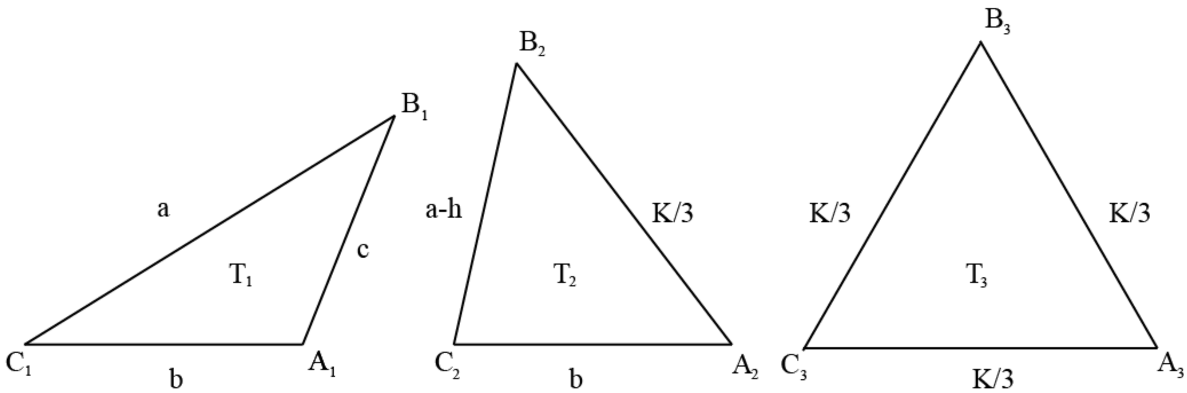
Második bizonyítás:

Algebrai úton látjuk be az állítást, úgy, hogy feltesszük, hogy már ismert a Heron – képlet, vagyis a $T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, s = \frac{a+b+c}{2}$ állítás bizonyítása.
Ha két egyenlő alapú, egyenlő kerületű háromszöget veszünk, akkor az s és a c nem befolyásolja a területük arányát, elegendő az $(s-a)(s-b)$ –vel foglalkoznunk.
Az ABC háromszög esetében, mivel $s - a + s - b = c$, ezért $s - a$ és $s - b$ egyike nagyobb, másika kisebb, mint $\frac{c}{2}$. A számegyenesen mindkét pontnak a $\frac{c}{2}$ –től való távolsága $x = \left|\frac{c}{2} - (s-a)\right| = \left|\frac{c}{2} - (s-b)\right| = \left|\frac{a-b}{2}\right|$. Ugyanígy járhatunk el az $A'B'C'$ háromszögnél is, amelyikről tudjuk, hogy a két szár hosszának különbsége kisebb, mint ABC-ben, tehát $x' < x$. Ezek alapján felírhatjuk a következő egyenlőségeket:
$(s-a)(s-b) = \left(\left(\frac{c}{2}\right) + x\right)\left(\left(\frac{c}{2}\right) - x\right) = \left(\frac{c}{2}\right)^2 - x^2$ és $(s-a')(s-b') = \left(\frac{c}{2}\right)^2 - x'^2$,
és mivel $\left(\frac{c}{2}\right)^2 - x^2 < \left(\frac{c}{2}\right)^2 - x'^2$, ezért ezzel be is láttuk az állítást.

3.3. Tétel. *Az adott kerületű háromszögek közül az egyenlő oldalú háromszögnek legnagyobb a területe.*

Bizonyítás:

Jacob Steiner geometriai konstrukciójának segítségével látjuk be az állítást. [2] Vegyük az $A_1B_1C_1$ háromszöget, kerülete legyen K, területe legyen T_1, oldalai a, b, c, ahol $a \geq b \geq c$ (*18. ábra*). Ezen kívül legyen $h = \frac{K}{3} - c$, ahol nyilvánvaló, hogy



$h \geq 0$.

18. ábra

Szerkesszünk egy olyan $A_2B_2C_2$ háromszöget, amelynek alapja b, a másik két oldala $\frac{K}{3}$ és $a - h$. A területe legyen T_2. A kerülete ennek is K–val egyenlő, mert

$$(a - h) + \frac{K}{3} + b = a + \left(\frac{K}{3} - h\right) + b = a + b + c.$$

Vegyük észre, hogy az $A_1B_1C_1$ háromszög a és c oldalainak különbsége nagyobb, vagy egyenlő, mint $A_2B_2C_2$ két megfelelő oldalának, tehát $a - h$-nak és $\frac{K}{3}$ –nak a különbségének az abszolútértéke. (Azért van szükség az abszolútértékre, mert attól függően, hogy az a vagy a c hossza van közelebb $\frac{K}{3}$ –hoz lesz az előbbi különbség pozitív vagy negatív.)

Tehát $a - c \geq |(a - h) - \frac{K}{3}|$, amiből behelyettesítés és rendezés után a feladat kezdeti feltételeinek megfelelő $\frac{K}{3} \geq c$, illetve $a \geq \frac{K}{3}$ egyenlőtlenségeket kapjuk.

Az előző, 3.2. Tétel alkalmazható az $A_1B_1C_1$ és az $A_2B_2C_2$ háromszögekre, ezért $T_2 \geq T_1$.

Szerkesszük meg most az $A_3B_3C_3$ egyenlő oldalú háromszöget, amelynek egy oldala $\frac{K}{3}$, és amelynek kerülete így K, területe pedig legyen T_3. Az $A_3B_3C_3$ háromszögre és és az $A_2B_2C_2$ háromszögre is alkalmazható a 3.2. Tétel, ezért $T_3 \geq T_2$. Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha mindkét háromszög egyenlő oldalú. Következésképpen $T_3 \geq T_1$, és ezzel beláttuk a tételt.

Köszönetnyilvánítás

Köszönetet mondok konzulensemnek, Frenkel Péternek, aki nélkülözhetetlen segítőm volt a szakdolgozat megírásában - szempontrendszert, látásmódot adott, és korlátlanul rendelkezésemre állt. Köszönöm az érthető, rendszerezett magyarázatokat, amelyek segítségével eligazodhattam ebben a bonyolult témakörben.

Ezúton mondok még köszönetet középiskolai matematikatanáromnak, Kötél Tamásnak, illetve egyetemi professzoraimnak és tanáraimnak, akik segítették a tanárrá válásomat.

Irodalomjegyzék

[1] R. Courant – H. Robbins: *Mi a matematika?* Gondolat könyvkiadó, Budapest, 1966. 369-371

[2] Nicholas D. Kazarinoff: *Geometriai egyenlőtlenségek.* Gondolat könyvkiadó, Budapest, 1980. 28-30, 44-64

[3] H. J. Brascamp – E. H. Lieb: *On extensions of the Brunn-Minkowski and Prékopa-Leindler theorems, including inequalities for log concave functions, and with an application to the diffusion equation.* J. Functional Analysis 22, American Mathematical Society, USA, (1976), no. 4, 366-389