

A Malfatti-probléma vizsgálata síkon és gömbön

Szakedolgozat

Készítette: **Laczi Petra**

Matematika BSc, Matematika tanári szakirány

Témavezető: **Dr. Rózsahegyiné Vásárhelyi Éva** egyetemi docens

Konzulens: **Lénárt István**

Matematikatanítási és Módszertani Központ



Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Budapest, 2013

Tartalomjegyzék

Bevezetés	3
1. Gian Francesco Malfatti	4
1.1. Malfatti élete és munkássága	4
1.2. A Malfatti-probléma története	5
2. Malfatti-körök az Euklideszi-síkon	6
2.1. Steiner geometriai megoldása	6
2.2. Hart bizonyítása Steiner geometriai szerkesztésére	7
2.3. Petersen bizonyítása Steiner megoldására	13
2.4. Schellbach megoldása	20
3. Malfatti-körök a gömbön	25
3.1. Az Euklideszi- és a gömbi geometria	25
4. Malfatti-körök a síkbeli végtelen tartományban	29
5. A Malfatti-körök által kapott nevezetes pontok	32
5.1. Ajima-Malfatti pontok	32

Bevezetés

Dolgozatomban a Malfatti által megfogalmazott geometriai feladatot tárgyalom. Munkám elején röviden összefoglalom Gian Francesco Malfatti életrajzát, munkásságát, majd röviden arról írok, hogy az általa felvetett kérdésre, kik által és milyen válaszok, bizonyítások születtek. Az évtizedek során felhalmozódott színes szakirodalomból kiemelten foglalkozom a legkorábbiakkal, ezek közül is a Steiner által publikált geometriai megoldásra adott bizonyításokkal. Hart, Schellbach és Petersen más-más eszközöket használó bizonyításait részletezem.

A 3. fejezetben kitérek a feladat gömbön való megoldására. A gömbháromszögben való vizsgálódás során merült fel az a kérdés, hogy a Malfatti-körök hogyan szerkeszthetők meg egy szakasz és két félegyenes által határolt végtelen tartományban. Így, a következő fejezetben erre térek ki, Hart bizonyítását felhasználva.

Végül, a háromszög két nevezetes pontját definiálom, melyek szoros összefüggésben állnak a Malfatti-körökkel.

1. fejezet

Gian Francesco Malfatti

1.1. Malfatti élete és munkássága



Gian Francesco Malfatti olasz matematikus, aki 1731. szeptember 26-án született egy vidéki kis faluban, a Trentohoz közeli Alaban. Tanulmányait Veronában kezdte a jezsuiták iskolájában, majd a bolognai egyetemen folytatta, ahol mentorai voltak Vincenzo Riccati, F. M. Zanotti és G. Manfredi. 1754-ben költözött Ferrarába, s az ottani egyetem professzoraként tanított. Ferrarában hunyt el 1807-ben.

A felvilágosodás korában, a romantika születésének hajnalán, Malfatti igen aktív szellemi életet folytatott. Az 1770-ben kiadott "De aequationibus quadrato-cubicis disquisitione analytica" írásával vált híressé. A matematika több területével is foglalkozott, emellett fontos szerepet vállalt az Új Olasz Enciklopédia megírásában, mely 1779-ben látott napvilágot. Alapító tagja a ferrarai egyetem matematikai intézetének. A több évtizeden keresztül vitatott, Malfatti-probléma néven elterjedt geometriai felvetést 1803-ban közölte az "On a stereotomy problem" című tanulmányban.

1.2. A Malfatti-probléma története

A Malfatti által közölt geometriai feladatnak két változata van. Malfatti eredeti kérdése az volt, hogy hogyan lehet egy háromszögbe három kört pakolni, úgy, hogy azok a lehető legnagyobb területét fedjék a háromszögnek. Erre született az a válasz, hogy a köröknek páronként érinteniük kell egymást és egy-egy körnek a háromszög két-két oldalát is érintenie kell.

Ez a válasz téves volt. Lob and Richmond 1930-ban bebizonyította, hogy egy szabályos háromszögben nem a Malfatti által adott módszerrel lehet három körrel a optimálisan lefedni a területet. Később, 1967-bn Goldberg mutatta meg, hogy soha nem a Malfatti körök pakolása a legjobb, ekkor a probléma átalakult körpakolási feladattá. A kérdés már az volt, hogy hogyan rendezzünk el n darab kört, hogy azok a lehető legnagyobb területét fedjék a háromszögnek. Ez a témakör ma is sok megoldatlan problémát rejt magában.

A másik része a feladatnak, maga a megszerkesztése a Malfatti-köröknek. Jacob Steiner svájci matematikus adott egy geometriai megoldást bizonyítás nélkül. Steiner szerkesztési folyamatára érkezett Andrew Searle Hart megoldása, még a 19. században. Ugyanebben az időszakban a szerkesztési problémával sokán mások is foglalkoztak, többek között Arthur Cayley és Karl Schellbach.

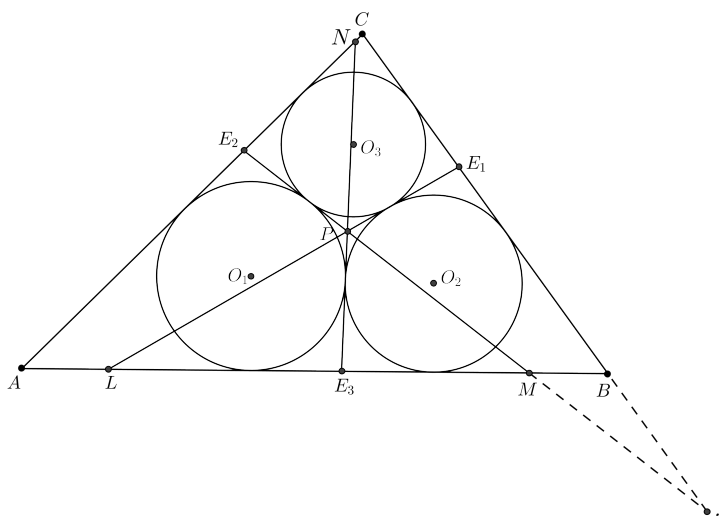
Érdekesség, hogy Malfatti mellett más, a japán Ajima Naonobu is felvetette ezt a problémát. Malfattitól teljesen függetlenül - körülbelül egy időben vele - vizsgálta a szóbanforgó köröket, s megoldást is talált rájuk.

2. fejezet

Malfatti-körök az Euklideszi-síkon

2.0.1. Feladat. Adott ABC háromszögön belül szerkesszünk három, egymást páronként érintő kört, melyek külön-külön a háromszög két oldalát is érintik.

2.1. Steiner geometriai megoldása



2.1. ábra. Steiner geometriai megoldása

- Először szerkesszük meg az ABC háromszög beírt körének középpontját, ez legyen O .
- Szerkesszünk kört az AOB , BOC és AOC háromszögekbe.

- Ezek érintési pontjai a háromszög oldalain rendre legyenek: E_1 , E_2 és E_3 . E pontok rajta vannak két kör közös érintőjén (amelyek, társérintői a szögfelezőknek). Ezen társérintők egy pontban metszik egymást, ez legyen a P pont.
- A P pont lesz a három keresett Malfatti-kör hatványpontja, illetve ezek által olyan háromszögeket kaptunk (CJE_2 , LBE_1 , NAE_3), amelyeknek az oldalai érinteni fogják a Malfatti-köröket, így ezekbe köröket szerkesztve, megkaptuk a keresett három kört (2.1 ábra).

2.2. Hart bizonyítása Steiner geometriai szerkesztésére

Mielőtt ismertetném Hart megoldását, előbb felsorolok néhány - a bizonyításhoz szükséges - definíciót és tételt:

2.2.1. Definíció (Társérintő). Adott két kör, melyeknek 4 közös érintőjük közül kettőt társérintőnek (asszociáltnak) mondunk, ha azonos fajúak, azaz mindkettő belső vagy külső érintő.

2.2.2. Tétel (Hatványpont). *Rögzítsünk egy k kört és egy k -án kívüli P pontot. Húzzunk P ponton át egy szelőt. A szelő és a kör metszéspontjai legyenek A és B pontok. Ekkor a $PA \cdot PB$ szorzat nem függ a szelő megválasztásától.*

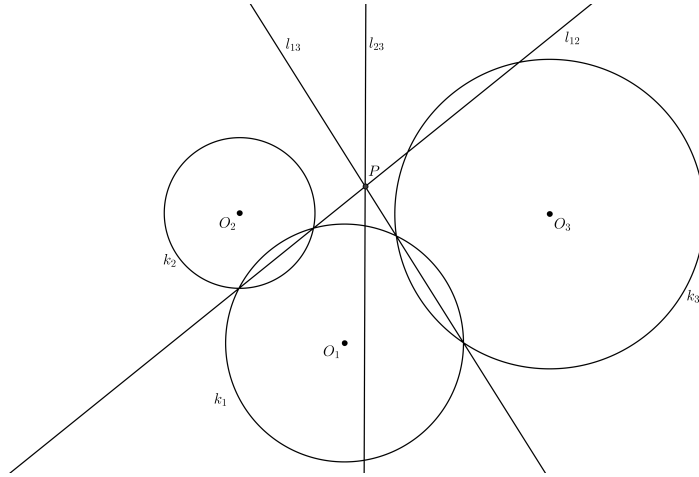
2.2.3. Definíció (Hatvány). A P pontnak a k körre vonatkozó hatványa:

$$h_k(P) = PA \cdot PB$$

2.2.4. Definíció (Hatványvonal). Azoknak a P pontoknak a mértani helye a síkon, amelyeknek két adott körre vonatkozó hatványai megegyeznek, egy egyenes.

2.2.5. Tétel (Két körre vonatkozó hatványvonal). *A hatványvonal, ha a két kör nem koncentrikus - ebben az esetben nem koncentrikusak - , akkor a két kör centrálisára merőleges.*

2.2.6. Tétel (Három kör hatványpontja). *Ha három kör középpontjai nem egy egyenesen vannak, akkor hatványvonalaik egy pontra illeszkednek.*



2.2. ábra. Három kör hatványpontja

Bizonyítás: A k_1 , k_2 és k_3 kör középpontjai nem kollineáris pontok. Legyen l_{12} a k_1 -nek és k_2 -nek, az l_{13} pedig a k_1 -nek és a k_3 -nak közös hatványvonala. Az l_{12} és l_{13} metszéspontja legyen P . Ekkor

$$\left. \begin{array}{l} M \in l_{12} \Rightarrow h_{k_1}(M) = h_{k_2}(M) \\ M \in l_{13} \Rightarrow h_{k_1}(M) = h_{k_3}(M) \end{array} \right\} \Rightarrow h_{k_2}(M) = h_{k_3}(M) \Rightarrow M \in l_{23}$$

□

2.2.7. Tétel (1.segédttétel). *Ha két külső érintő, melyek két különböző k_1 , k_2 és k_2 , k_3 körpárra vonatkoznak és egy belső érintő, amely a harmadik k_1 és k_3 körpárra vonatkozik, ugyanabban a pontban metszik egymást, akkor ezek társérintői is egy pontban futnak össze.*

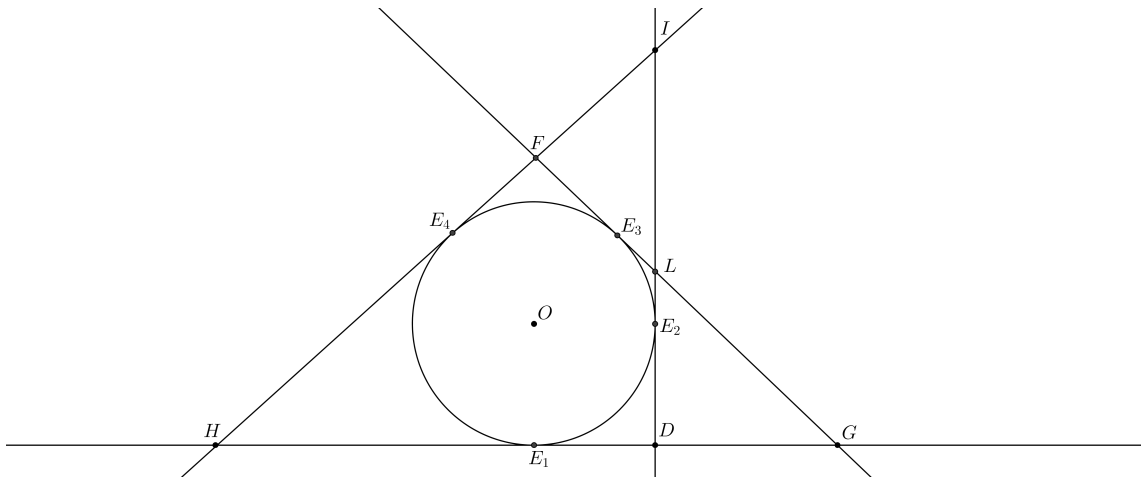
Bizonyítás: A segédttétel bizonyításához előbb belátjuk a következőt (2.3 ábra):

$$DG + DI = FI + FG$$

Mivel az egy pontból húzott érintő szakaszok hossza megegyezik, ezért felírhatók az alábbi egyenlőségek:

$$DG = GE_1 - DE_1, \quad FI = IE_4 - FE_4$$

$$DI = IE_2 + E_2D, \quad FG = FE_3 + E_3G$$



2.3. ábra.

Vagyis:

$$DG + DI = GE_1 - DE_1 + IE_2 + E_2D \quad FI + FG = IE_4 - FE_4 + FE_3 + E_3G$$

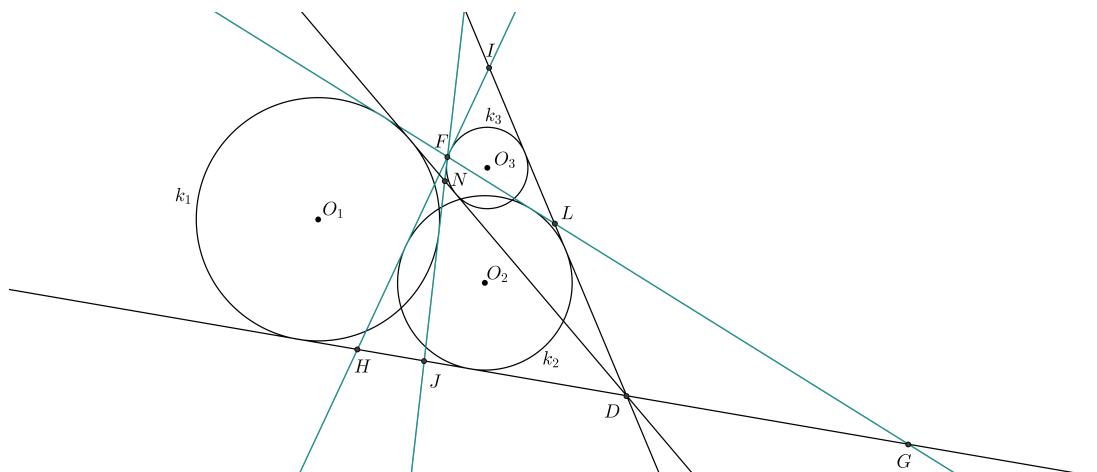
Továbbá:

$$DE_1 = E_2D, \quad FE_4 = FE_3$$

Így:

$$GE_1 + IE_2 = IE_4 + E_3G$$

egyenlőséget kapjuk, ami meg nyilván igaz: $GE_1 = E_3G$, illetve $IE_2 = IE_4$ egyenlőségek miatt.



2.4. ábra.

Ezután jöhet a segédtétel bizonyítása (2.4 ábra). Legyen az F pont a két külső érintő társérintőinek a metszéspontja. F pontból húzzunk érintőt a k_3 körhöz, így elég belátnunk, hogy ez az egyenes a k_1 kört is érinti. A k_3 köré írható négyzetből adódóan, és az előbb belátott egyenlőség alapján:

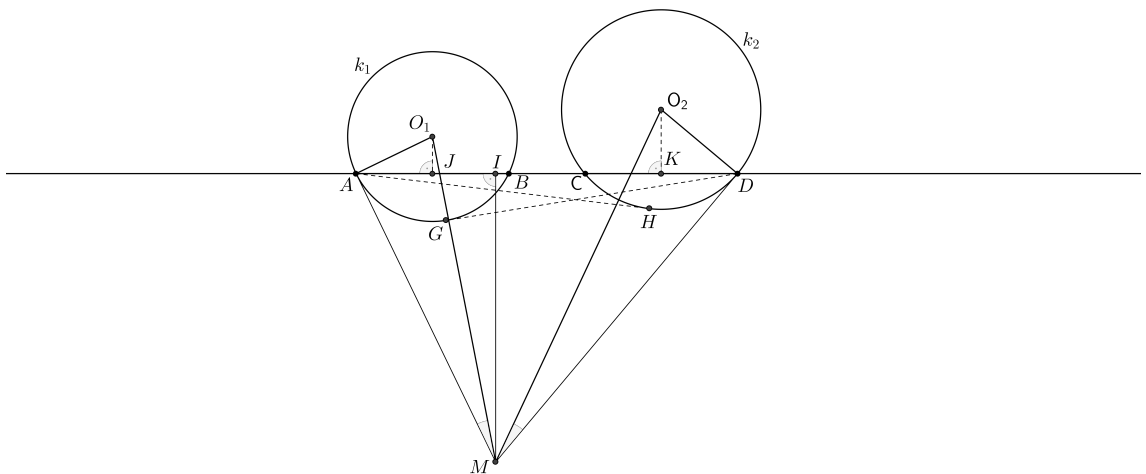
$$FN + ID = IF + ND, \quad DG + DI = FI + FG$$

majd kivonás után:

$$DG + FG = FN + ND$$

összefüggést kapjuk, mely szerint a $DGFN$ négyszög érintőnégyyszög. A DG , a DF és az FG oldalak érintik a k_1 kört, így a negyedik oldalnak, az FN -nek is érintenie kell a kört. Ezzel pedig beláttuk, hogy az F pontból a k_3 körhöz húzott érintő, a k_1 kört is érinti. \square

2.2.8. Tétel (2.segédtétel). *Ha két (k_1 és k_2) körön az AD szelő egyenlő hosszú húrokat metsz ki, ($AB = CD$) akkor a szelők két végpontjába húzott érintők metszéspontjából a két kör egyenlő szög alatt látszik.*



2.5. ábra.

Bizonyítás: Legyen az I az M , a J az O_1 és a K az O_2 vetülete az AD szelőn (2.5 ábra). Ekkor az AMI és az AO_1J háromszögek hasonlóak: mindkettő derékszögű és befogóik párhuzamosak. Ugyanez elmondható a DMB és a DO_2K háromszögekről is. Ezek alapján kapjuk az alábbi összefüggéseket:

$$\frac{AM}{MI} = \frac{AO_1}{O_1J}, \quad \frac{IM}{MD} = \frac{DK}{DO_2}$$

Szorzás után:

$$\frac{AM}{MD} = \frac{AO_1}{O_2D}$$

Vagyis az AO_1M és a DO_2M háromszögek hasonlóak, amiből az következik, hogy az $AMO_1\angle = DMO_2\angle$. Ezek a szögek pedig, pontosan a fele azoknak a szögeknek, amelyek alatt a két kör látszik, így az állítást bebizonyítottuk. \square

2.2.9. Tétel (3.segéd-tétel). *Az előző tételünk feltételei mellett, ha a D pontból érintőt húzunk a k_1 és az A pontból a k_2 körhöz, az érintő pontok által kapott szakaszok egyenlő hosszúak:*

$$DG = AH$$

Bizonyítás: A hatvány definíciója alapján (2.5 ábra):

$$h_{k_2}(A) = AD \cdot CD \quad h_{k_1}(D) = DA \cdot BA$$

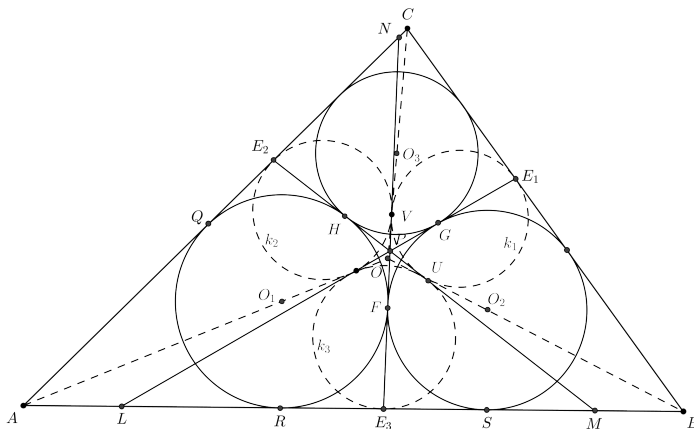
és mivel a $CD = BA$ ezért $h_{k_2}(A) = h_{k_1}(D)$, ebből pedig következik hogy $DG = AH$ \square

Most térjünk rá az eredeti feladat megoldására.

Bizonyítás: Legyen az F, G, H a keresett három kör (o_1, o_2, o_3), három érintési pontja, ahogyan a 2.6 ábrán látható. Az F, G és H pontokba húzott érintők, a páronként vett körök hatványvonalai, ezért ezek egy pontban, a három kör hatványpontjában, P -ben metszik egymást. Az R és az S legyen az a két pont, ahol a háromszög AB oldalát érinti az o_1 és az o_2 kör. Az E_1, E_2, E_3 pontok legyenek azoknak a köröknek (k_1, k_2, k_3) az érintési pontjai az ABC háromszög oldalain, amelyek az ABC háromszög három szögfelező egyenese által képzett OAB, OBC és OBA háromszögekbe írható (O a szögfelezők metszéspontja). Ekkor

$$E_3M - E_3L = RM - SL = MH - LG = PM - PL.$$

Így az $E_3M - E_3L = PM - PL$ egyenlőség alapján az E_3 pontban érinti az LM oldal az LPM háromszögbe írt kört (k_3). Hasonlóan ugyanez elmondható a k_2 és k_3 körökről, melyek az AC és a CB oldalakat érintik az E_2 és E_3 pontokban.



2.6. ábra.

Most vizsgáljuk a k_1 , k_2 és o_3 köröket. Ezeknek az E_1L , E_2M és az E_3N érintői a P pontban metszik egymást. Az 1. segédtételből pedig következik, hogy akkor ezek társérintői is egy pontban futnak össze, vagyis a k_1 és k_2 körök második közös belső érintője a BC és AC közös érintők metszéspontján, C -én halad át. Ezzel a gondolatmenettel a k_2 , k_3 és k_1 , k_3 körök második közös belső érintői átmennek az A és B csúcsokon. A 2. és 3. segédtételek felhasználásával belátjuk, hogy ezek a belső érintők nemcsak átmennek a háromszög csúcsain, hanem felezik is azokat. Az alábbiakban csak az A csúcsnál lévő belső érintőről bizonyítom be, hogy szögfelező, de ugyanez alkalmazható a többi csúcsra is. Belátom tehát, hogy a k_1 és k_3 körök második közös belső érintője a B csúcsnál lévő szög szögfelezője.

$$HU = MH - MU = MR - ME_3 = RE_3 = FE_3$$

$$FV = FN - VN = NQ - NE_2 = E_2Q = E_2H$$

A fenti két egyenlőséget összeadva:

$$HU + E_2H = FE_3 + FV \Rightarrow E_2U = E_3V$$

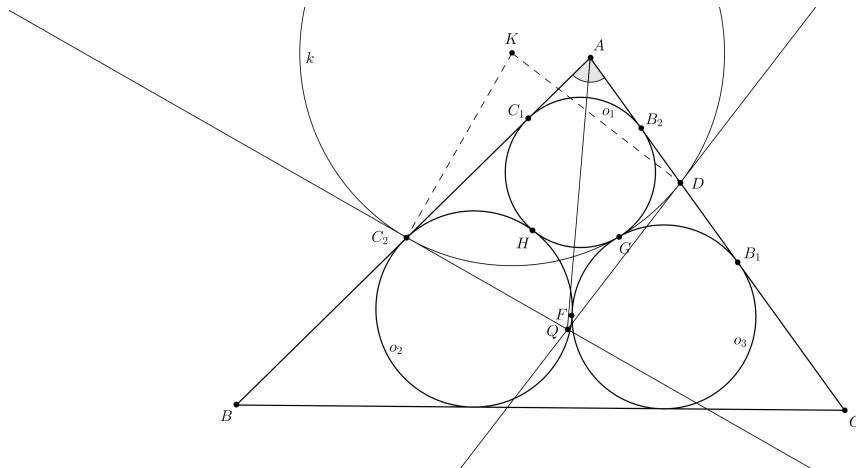
Használva a 3. segédtételt, az előbbi egyenlőségből következik, hogy az E_2 és az E_3 által meghatározott szakasz egyenlő húrokat metsz ki a k_2 és k_3 körökből. Így a 2. segédtétel

alapján, a k_2 és k_3 körök egyenlő szög alatt látszanak, az E_2 és az E_3 pontokba húzott érintők metszéspontjából, s ez a metszéspont az A csúcs. Vagyis a közös belső érintője a két körnek, felezi az A csúcsnál lévő szöget. \square

2.3. Petersen bizonyítása Steiner megoldására

Bizonyítás: Legyen ABC háromszög három Malfatti-köre: o_1 , o_2 és o_3 (2.7 ábra). Ezek érintési pontjai: F , G és H . A körök érintési pontjai legyenek az AC oldalon B_1 és B_2 , az AB oldalon pedig C_1 és C_2 .

Rajzoljuk meg azt a kört, amelyik érinti az o_1 és o_3 köröket a G érintési pontjukban, s átmegey a C_2 ponton. Ez a kör legyen k , közepe pedig K . A k kör és a CA oldal metszéspontja legyen D . Rajzoljuk meg a k kör érintőjét a C_2 pontba és a D pontba. Ezen egyenesek metszéspontja legyen Q .



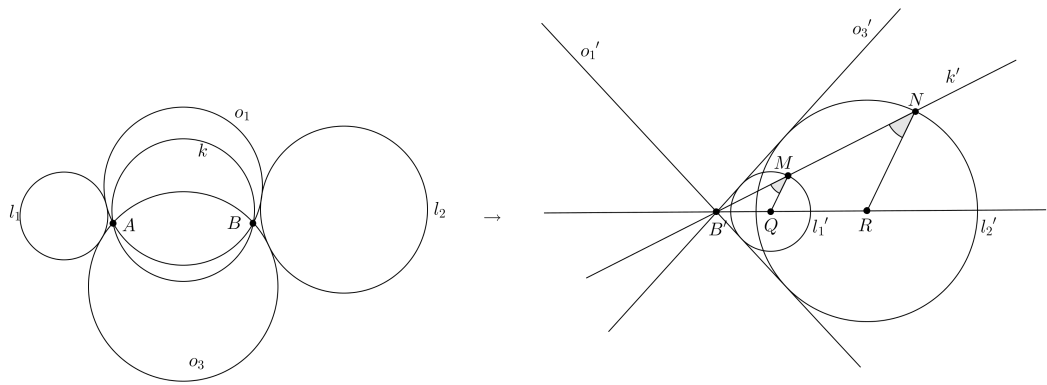
2.7. ábra.

2.3.1. Állítás.

$$AC_2Q\angle + ADQ\angle = 180^\circ$$

Bizonyítás: A bizonyításhoz inverziót alkalmazunk. Először bebizonyítjuk, a feladattól független négy körből álló rendszerre a következőt (2.8 ábra).

A k_1 és k_2 olyan körök, amelyek az A és B pontokban metszik egymást, ekkor minden k körből - amely szintén átmegey az A és B pontokon - egyenlő szög alatt látszik az összes l_1 és l_2 kör, amelyek érintik a k_1 és k_2 köröket.



2.8. ábra.

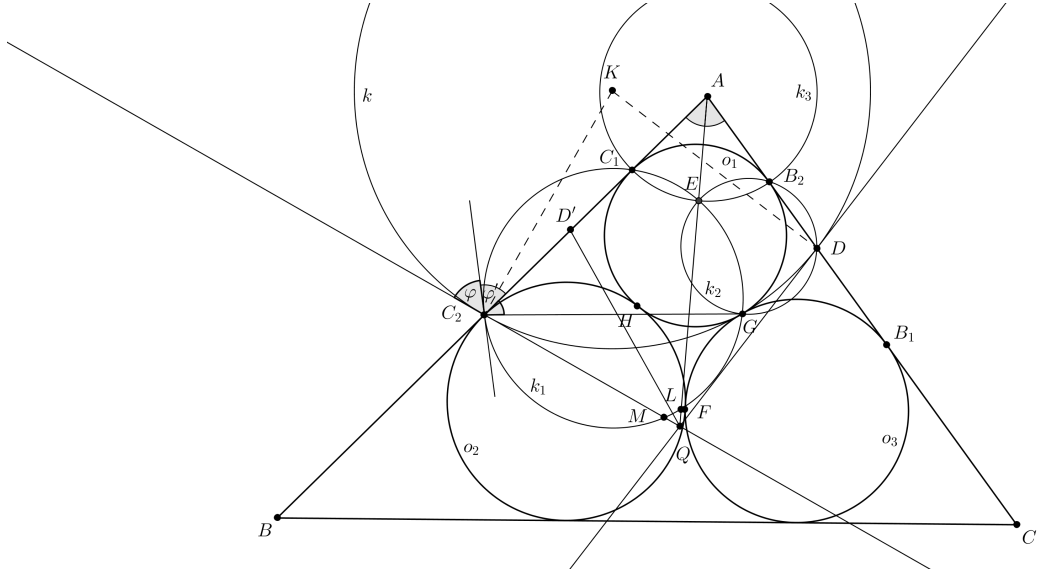
A középi inverziót alkalmazva:

- $o_1 \rightarrow o'_1$ egyenes
- $o_3 \rightarrow o'_3$ egyenes
- $k \rightarrow k'$ egyenes
- $B \rightarrow B'$ pont
- $l_1 \rightarrow l'_1$ kör
- $l_2 \rightarrow l'_2$ kör

Láthatjuk, hogy a $B'MQ$ és $B'RN$ háromszögek hasonlóak így $B'MQ\angle = B'RN\angle$. Bárhogyan választanám meg a k' egyenest, a körök középpontjával egyenlő szöget zárna-nak be. Ha a körök közül az egyik az ellentétes szögtartományba esik, akkor a szögek kiegészítik egymást. Mivel az inverzió szögtartó, ezért az eredeti körökből álló rendszerre is igaz ugyanez. Tehát minden k körből egyenlő szög alatt látszik az összes olyan l_1 és l_2 kör amelyek érintik a k_1 és k_2 köröket.

Visszatérve az eredeti feladathoz, ha megfeleltetjük a következőket: az o_1 , o_3 , és a k marad, az AB szakasz egybeesik a H érintési ponttal, az l_1 -nek megfeleltetjük az o_2 kört, az l_2 -nek pedig az AC oldalt (ebben az esetben az AC oldal egy elfajuló, végtelen középi kör), akkor az előző állítással bebizonyítottuk, hogy $AC_2Q\angle + ADQ\angle = 180^\circ$.

□



2.9. ábra.

Megjegyezzük még, hogy a $KC_2Q\angle = 90^\circ = QDK\angle$, és $AC_2Q\angle + ADQ\angle = 180^\circ$ a KC_2QD és az AC_2QD négyzeteket vizsgálva pedig az alábbi egyenlőséget kapjuk.

$$C_2MD\angle = C_2AD\angle$$

2.3.2. Állítás. Az AQ egyenes szögfelező, vagyis $C_2AQ\angle = QAD\angle$.

Bizonyítás: Vegyük fel a D' -öt az AB oldalon, úgy hogy $QC' = QC_2$. Ekkor igaz, hogy az $AD'Q$ és az ADQ háromszögek hasonlóak (2.9 ábra):

- Két oldaluk egyenlő: $AQ = QA$ és $QD' = QD$ ($QC_2 = QD$, mivel ugyanazt a kört érintik)
- Egy szögük megegyezik: $AD'Q\angle = ADQ\angle$, mivel $D'C_2Q$ háromszög egyenlő szárú:

$$D'C_2Q\angle = C_2D'Q\angle \rightarrow C_2D'Q\angle + ADQ\angle = 180^\circ$$

vagyis

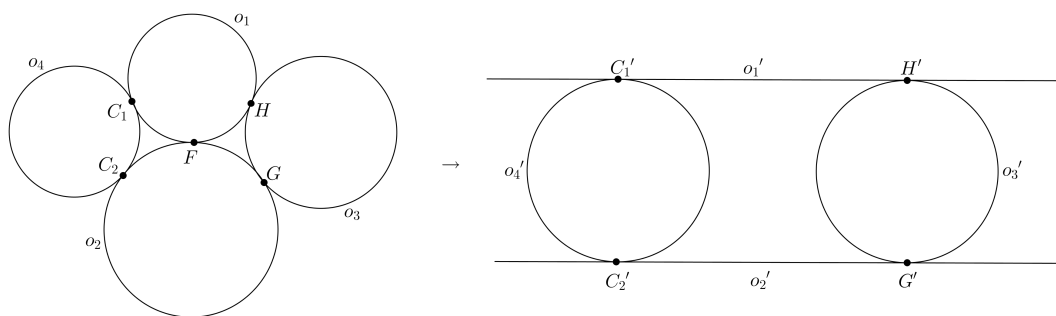
$$C_2D'Q\angle + AD'Q\angle = 180^\circ \rightarrow AD'Q\angle = ADQ\angle$$

Mivel az $AD'Q$ és az ADQ hasonlóak, ezért $C_2AQ\angle = QAD\angle$ □

2.3.3. Állítás. Az F , G , C_1 és C_2 egy körön vannak (2.9 ábra).

Bizonyítás: Ismét inverziót alkalmazva bizonyítjuk, előbb függetlenül a feladattól, majd a feladatban szereplő pontokat, köröket és egyeneseket megfelelően a bebizonyított rendszer elemeinek. A könnyebbség kedvéért ahol tudom, ugyanazokat a jelöléseket használom.

Adott két egymást F pontban érintő o_1 , o_2 kör. Az o_3 kör érinti mindkét kört G -ben és H -ban, az o_4 kör szintén érinti az adott köröket C_1 -ben és C_2 -ben. F középpű inverzió alkalmazása után (2.10 ábra),



2.10. ábra.

- $o_1 \rightarrow o_1'$ egyenes
- $o_2 \rightarrow o_2'$ egyenes
- $o_3 \rightarrow o_3'$ kör
- $o_4 \rightarrow o_4'$ kör
- F , G , H , C_1 és C_2 pontokból rendre: F' , G' , H' , C_1' , C_2'

Az inverzió után állíthatjuk, hogy az F' , G' , H' , C_1' , C_2' pontok egy téglalap csúcsán helyezkednek el, és mivel a téglalap köré kör írható, ezért ez a négy pont rajta van egy körön.

A C_1C_2 egyenest feleltetjük meg az o_4 körnek, ezen kívül minden mást ugyanolyan névvel nevezünk. A F , G , C_1 és C_2 pontokra illeszkedő kör legyen k_1 . \square

Rajzoljunk egy k_2 kört a G , D és B_2 pontokra. A k_1 és k_2 az F ponton kívüli metszéspontja legyen E . Legyen k_3 az az A középpű kör, amelyik átmegy a C_1 és B_2 pontokon.

2.3.4. Állítás. *Az E pont rajta van a k_3 körön.*

Bizonyítás: Mivel a k_1 körön fekszenek a C_1, C_2, F, E pontok, ezért ezek által meghatározott húrnégyszögből következik (2.9 ábra):

$$C_1EF\angle = 180^\circ - C_1C_2F\angle$$

Ugyenezen okok miatt a k_2 és k kör pontjaira:

$$B_2EF\angle = 180^\circ - B_2DF\angle$$

$$C_2FD\angle = 180^\circ - \frac{C_2AD\angle}{2}$$

Az első kettőt összeadva kapjuk:

$$C_1EF\angle + B_2EF\angle = 360^\circ - (C_1C_2F\angle + B_2DF\angle)$$

$$C_1EF\angle + B_2EF\angle = 360^\circ - C_1EB_2\angle$$

$$C_1EB_2\angle = C_1C_2F\angle + B_2DF\angle$$

$$C_1C_2F\angle + B_2DF\angle = 360^\circ - C_2AD\angle - C_2FD\angle$$

Végül:

$$C_1EB_2\angle = 360^\circ - C_2AD\angle - 180^\circ + \frac{C_2AD\angle}{2} = 180^\circ - \frac{C_2AD\angle}{2}$$

$$C_1EB_2\angle = 180^\circ - \frac{C_2AD\angle}{2} \Rightarrow E \in k_3$$

□

Legyen L az AQ egyenes és a k_1 kör metszéspontja. M pedig, a C_2Q és a k_1 kör metszéspontja.

2.3.5. Állítás.

$$C_1C_2 = MC_2$$

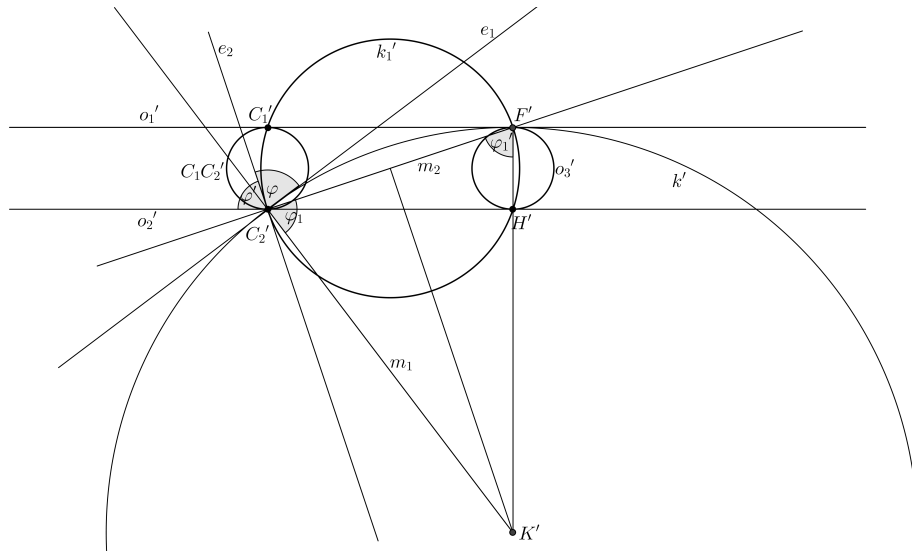
Bizonyítás: A bizonyításban ismét inverziót fogunk használni. Bebizonyítjuk, hogy a $\varphi = \varphi'$, ahol φ a C_2 pontbeli k és k_1 körök érintői által bezárt szög, a φ' pedig a k_1, C_2 belüli érintője az AB oldallal.

Végezzünk H középi inverziót (2.11 ábra).

- $o_1 \rightarrow o'_1$ egyenes

- $o_3 \rightarrow o'_3$ egyenes
- $C_1C_2 \rightarrow C_1C'_2$ kör. Ez utóbbi kettőnél látjuk, hogy az o'_2 megegyezik az inverzió előtti C_1C_2 egyenessel, vagyis ez a két alakzat az inverzióban szerepet cseréltek.
- $k \rightarrow k'$ kör.
- $k_1 \rightarrow k'_1$ kör.
- Az o_2 kör mivel érinti az o_1 és o_3 köröket, és nem megy át a H ponton, ezért olyan o'_2 kör lesz, amely érinti a két párhuzamos o'_1 és o'_3 egyenest.

Vizsgáljuk az így kapott rendszert:



2.11. ábra.

Felvesszük a következő egyeneseket:

- e_1 egyenes legyen a k' kör érintője a C'_2
- e_2 egyenes legyen a k'_1 kör érintője a C'_2
- m_1 egyenes legyen az e_1 egyenesre állított merőleges a C'_2 pontba
- m_2 egyenes legyen a C'_2F' szakasz

Ekkor az m_2 szakasz a k'_1 kör átmáróje (a $C'_1C'_2G'F'$ téglalap miatt), illetve felezőme-
rőlegese a k' kör K' középpontjába fut.

A φ az inverzió után, az e_1 és az e_2 egyenesek által bezárt szög.

$$m_2 \perp e_2 \quad m_1 \perp e_1 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \varphi_1$$

A φ' az e_2 és az e'_3 egyenesek által bezárt szög. Vagyis:

$$\varphi_1 = \varphi'_1$$

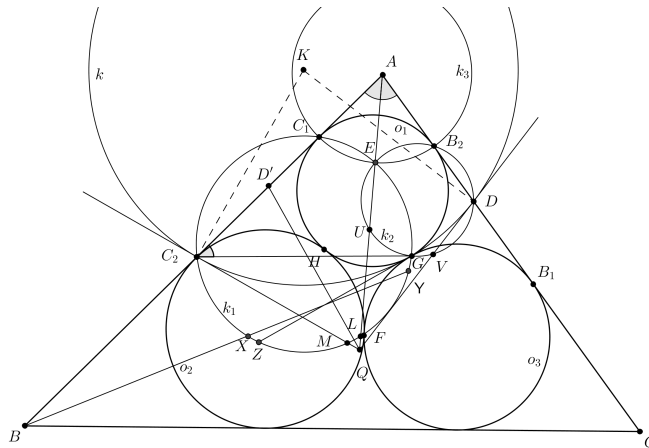
Összevetve a két egyenlőséget:

$$\varphi = \varphi_1 = \varphi'_1 = \varphi'$$

Mivel az inverzió szögtartó, ezért az inverzió előtti rendszerben is

$$\varphi = \varphi' \quad \Rightarrow \quad C_1C_2 = KC_2$$

□



2.12. ábra.

Bebizonyítottuk, hogy a $C_1C_2 = MC_2$, ahol a C_2M része az Q pontból k körhöz húzott érintőnek. Pontosan ugyanezzel a bizonyítási lépésekkel beláthatjuk, hogy a k_2 körben az $EU = DV$, mivel $DV = DG$. Az U pont, az AQ és a k_2 kör metszéspontja (E párja), a V pedig a DQ és a k_2 kör metszéspontja (D párja)(2.12)

Ha a B csúcsból szögfelezőt húzunk, amely X és Y pontokban metszi a k_1 kört, akkor hasonlóan, az eddigi gondolatmenetekhez, levezethető, hogy az

$$XY = C_2C_1 = C_2M = EL$$

Ennek a részletes bizonyítását nem vezetem le, ugyanolyan módon történne, mint fentebb.

Az eddigiekben, az o_1 , k_2 és k_3 köröket vizsgálva kaptuk:

$$AE = AC_1, \quad C_2C_1 = EL$$

A B csúcsból indulva, ugyan így megtalálhattuk volna:

$$C_2C_1 = EL \quad C_2C_1 = XY$$

Húzzunk érintőt a G pontba, az o_1 és az o_3 körökhöz. Ez adja a GZ szakaszt.

$$GZ = C_2C_1$$

mivel, ha a C_1 pontba is érintőt húzunk az o_1 körhöz (ez az AB oldal), akkor láthatjuk, hogy ezen érintők szimmetrikusak az o_1 és k_1 körök középpontjait összekötő egyenesre. Végül:

$$C_2C_1 = EL = C_2M = XY = GZ$$

Vagyis ezekhez a szakaszokhoz kört rajzolva kapjuk k_5 kört. Ennek a körnek ugyanaz a középpontja, mint a k_2 körnek és beírt köre, az A és B csúcsnál lévő szögfelezők által kapott háromszögnek (AOB). Sőt, érinti az o_1 és o_3 kört a G pontban.

Hasonló módon előállíthatjuk az AOC és a BOC háromszögek beírt köreit, így ez bizonyítja a Steiner által megadott szerkesztést.

□

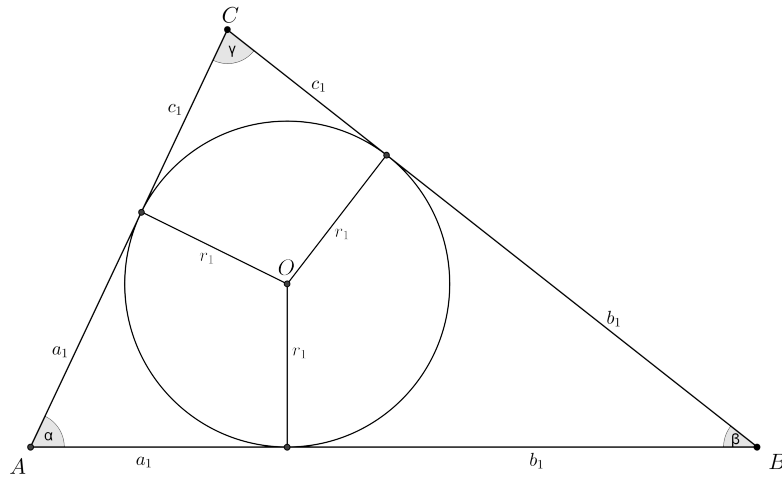
2.4. Schellbach megoldása

A feladat ugyanaz:

2.4.1. Feladat. Adott ABC háromszögön belül szerkesszünk három, egymást páronként érintő köröket, melyek külön-külön a háromszög két oldalát is érintik.

Bizonyítás: Adott az ABC háromszög a , b és c oldalakkal. A keresett három Malfatti-kör középpontjai: P , Q , R és a sugaraik: p , q , r . Ezen körök által meghatározott szakaszok a háromszög oldalain (a csúcsok és az érintési pontok közötti távolságok) pedig: u , v , w . A háromszög beírt körének legyen a középpontja O , sugara pedig r_1 . A beírt kör által

meghatározott szakaszok a háromszög oldalain rendre legyenek: a_1 , b_1 és c_1 . Jelöljük a terület felét a szokásos módon s -sel (2.13 ábra).



2.13. ábra.

Ekkor $s = a_1 + b_1 + c_1$ vagyis $s = a_1 + a = b_1 + b = c_1 + c$ átrendezve:

$$a_1 = s - a \quad b_1 = s - b \quad c_1 = s - c$$

A Héron-képlet alapján a terület négyzete: $s(s - a)(s - b)(s - c) = sa_1b_1c_1$.

A beírt kör sugara alapján a terület négyzete: $(r_1s)^2$ vagyis

$$r_1^2 = \frac{a_1b_1c_1}{s}$$

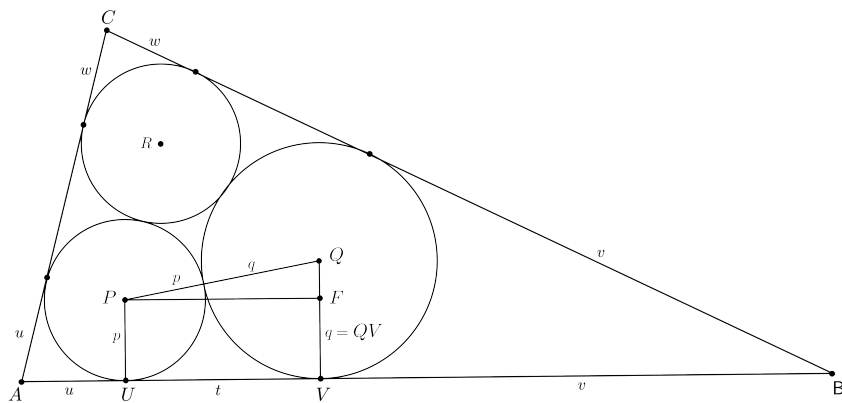
A $CAB\angle$ szög alatt látszik a háromszög beírt köre (O középpontú) és a keresett Malfatti-körök egyike (P középpontú). Ezért felírható az alábbi arányosság:

$$\frac{p}{r_1} = \frac{u}{a_1}$$

$$p = \frac{r_1}{a_1}u \quad q = \frac{r_1}{b_1}v$$

Az U és V pontok legyenek a P és Q középpű körök érintési pontjai a c oldalon (2.14 ábra). Ezek távolsága legyen: t . A P pontból merőlegest állítunk a QV szakaszra, a metszéspont legyen F . Az így kapott PFQ derékszögű háromszögre, Pitagorasz-tétele alapján felírható a következő egyenlőség:

$$PQ^2 = PF^2 + FQ^2 \text{ vagyis } (p + q)^2 = t^2 + (p - q)^2$$



2.14. ábra.

Kifejezve t -t:

$$t = 2\sqrt{pq}$$

Ebbe behelyettesítve a fenti értékeket:

$$t = 2\sqrt{\frac{r_1}{a_1}u\frac{r_1}{b_1}v} \quad t = 2\sqrt{uv}\sqrt{\frac{r_1^2}{a_1b_1}}$$

Mivel azonban $r_1^2 = \frac{a_1b_1c_1}{s}$, ezért a képletünk:

$$t = 2\sqrt{uv}\sqrt{\frac{c_1}{s}}$$

Ez alapján felírhatóak az alábbi egyenlőségek a háromszög oldalaira:

$$a = v + w + 2\sqrt{vw}\sqrt{\frac{a_1}{s}}$$

$$b = w + u + 2\sqrt{wu}\sqrt{\frac{b_1}{s}}$$

$$c = u + v + 2\sqrt{uv}\sqrt{\frac{c_1}{s}}$$

Legyen $s = 1$. Ekkor

$$a = v + w + 2\sqrt{vw}\sqrt{a_1}$$

$$b = w + u + 2\sqrt{wu}\sqrt{b_1} \tag{2.1}$$

$$c = u + v + 2\sqrt{uv}\sqrt{c_1}$$

Mivel $s = 1$, ezért: $a + b + c = 2$. A háromszögegyenlőtlenség miatt pedig $a \leq b + c$, ekkor az $a \leq 1$ egyenlőtlenséget kapom. Ugyanígy a b -re és a c -re is teljesül: $b < 1, c < 1$. Természetesen: $0 < u, v, w < 1$ is teljesül. Legyenek $\lambda, \mu, \tau, \psi, \varphi, \chi$ olyanok, hogy:

$$\begin{aligned}\sin^2 \lambda &= a, & \sin^2 \mu &= b, & \sin^2 \tau &= c, \\ \sin^2 \psi &= u, & \sin^2 \varphi &= v, & \sin^2 \chi &= w.\end{aligned}$$

A $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ trigonometrikus azonosság miatt és az $1 = a_1 + a = b_1 + b = c_1 + c$ egyenlőségek alapján:

$$\cos^2 \lambda = a_1, \quad \cos^2 \mu = b_1, \quad \cos^2 \tau = c_1$$

A (2.1) egyenletekbe behelyettesítve a fenti szögfüggvényeket az alábbi egyenleteket kapjuk:

$$\begin{aligned}\sin^2 \varphi + \sin^2 \chi + 2 \sin \varphi \sin \chi \cos \lambda &= \sin^2 \lambda \\ \sin^2 \chi + \sin^2 \psi + 2 \sin \chi \sin \psi \cos \mu &= \sin^2 \mu \\ \sin^2 \psi + \sin^2 \varphi + 2 \sin \psi \sin \varphi \cos \tau &= \sin^2 \tau\end{aligned}\tag{2.2}$$

Legyen R az ABC háromszög körülírt körének sugara. Ekkor, a szinusz-tétel szerint:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

ahol az α, β, γ a háromszög szögei. Ha $R = \frac{1}{2}$, akkor $\sin \alpha = a, \sin \beta = b, \sin \gamma = c$ ezt a koszinusz tételben felhasználva:

$$\sin^2 \gamma = \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - 2 \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma$$

$$\gamma' = 180^\circ - \gamma$$

$$\sin^2 \gamma' = \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + 2 \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma'$$

A γ' -re igaz még, hogy $\gamma' = \alpha + \beta$ (mivel $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$), így észrevehetjük a (2.2) egyenleteiből a következő összefüggéseket:

$$\begin{aligned}\varphi + \chi &= \lambda, & \chi + \psi &= \mu, & \psi + \varphi &= \tau \\ \psi &= \sigma - \lambda, & \phi &= \sigma - \mu, & \lambda &= \sigma - \tau, & \sigma &= \frac{\lambda + \mu + \tau}{2}\end{aligned}$$

□

A fentiek alapján a következő lépésekkel juthatunk el a Malfatti-körökhöz, feltéve, hogy az $s=1$:

- Kiszámítjuk a λ -t, a μ -t és a τ -t, a $\sin^2 \lambda = a$, $\sin^2 \mu = b$, $\sin^2 \tau = c$ egyenletekből.
- Ezekből megkapjuk: $\sigma = \frac{\lambda + \mu + \tau}{2}$.
- Amely egyenlőségből: $\psi = \sigma - \lambda$, $\phi = \sigma - \mu$, $\lambda = \sigma - \tau$.
- Majd végül: $\sin^2 \psi = u$, $\sin^2 \varphi = v$, $\sin^2 \chi = w$ egyenletekből megkaptuk a Malfatti-körök sugarait. Melyek által megszerkeszthetők a Malfatti-körök.

3. fejezet

Malfatti-körök a gömbön

Az alábbiakban a Malfatti-körök létezését vizsgálom a gömbön, ehhez elsősorban a két geometria alapvető különbségeit használom fel.

3.1. Az Euklideszi- és a gömbi geometria

Az Euklideszi geometria Hilbert-féle axiómarendszere öt csoportból áll. Ezek az illeszkedési, rendezési, egybevágósági, folytonossági és a párhuzamossági axiómák. Alapfogalomnak számítanak a pont, az egyenes, a sík és az illeszkedés fogalma. Ezen axiómák, mindegyike - kivéve a párhuzamossági axiómát - érvényes a gömbön.

- **Illeszkedési axiómák**

Meghatározza a pont, az egyenes és a sík egymáshoz való viszonyát.

- **Rendezési axiómák**

Az elválasztás fogalmát vezetik be, melyből következnek például a félegyenes, szakasz, félsík, féltér, sokszög, szögtartomány, konvexitás fogalmak.

- **Egybevágósági axiómák**

Bevezetik az alakzatok egybevágósági voltát, így ezen új fogalmak születnek: derékszög, egybevágósági transzformáció.

- **Folytonossági axiómák**

Ennek köszönhetően mondhatjuk "ugyanolyannak" az egyeneseket. Ezekből származnak a távolság, a szögmérés, a terület, a kerület, a térfogat és a felszín fogalmak is.

3.1.1. Axióma (Párhuzamossági axióma). *Legyen e egyenes és egy rá nem illeszkedő P pont, S az általuk meghatározott sík: S . Ekkor pontosan egy olyan f egyenes van az S síkban, ami tartalmazza a P pontot, de nincs közös pontja az e egyenessel. Formálisan:*

$$e, P \in S, P \notin e \Rightarrow \exists! f \in S, \text{ amelyre } P \in f \text{ és } f \cap e = \emptyset$$

Megkapjuk a gömbi geometriát, ha a párhuzamossági axiómát kicseréljük a Riemann-féle axiómára:

3.1.2. Axióma (Riemann). *Bármely két egyenes metszi egymást.*

Az így kapott axiómarendszer definíciója:

3.1.3. Definíció. *Egyszeres elliptikus geometriának* nevezzük azt a geometriai elméletet, melyben a Riemann-féle axiómát feltételezzük, és emellett bármely két különböző egyenes pontosan egy pontban metszi egymást, de közülük (külön-külön) egyik sem különíti el a sík pontjait két idegen halmazra (nem szeparálja a síkot). *Kétszeres elliptikus geometriának* nevezzük azt a geometriai elméletet, melyben a Riemann-féle axiómát feltételezzük, és emellett bármely két különböző egyenes pontosan két különböző pontban metszi egymást, és a sík minden egyenese szeparálja a síkot.

Tehát a fentiek alapján megfogalmazható, hogy a gömbi és a sík geometria fő különbsége a párhuzamosság. Ez alapján sejthetjük hogy a Malfatti-probléma hasonlóan működik a gömbi, más néven a kétszeres elliptikus geometriában. G Horváth Ákos "Malfatti's problem on the hyperbolic plane" [3] című cikkében az bizonyítja, hogy a Malfatti-körök megszerkeszthetőek a hiperbólikus, azaz, az egyszeres elliptikus síkon is. Ebben a cikkben olvashatjuk a részletes bizonyítását annak, hogy a Hart-féle bizonyítás és a Schellbach megoldás is megállja a helyét a hiperbólikus síkon. Ezt felhasználva Hart bizonyítását részletezem a gömbi geometriában.

A cikk szerint az előbb említett bizonyítás két állításon alapul. (Ezek ekvivalensek a 2. fejezet 1., 2., és 3. segédteteleivel.)

3.1.4. Állítás. *Ha egy P pontból két körhöz húzott érintő szakaszok összege vagy különbsége egyenlő a két kör egy közös érintőjének hosszával, akkor a P pont rajta van a két kör egy közös érintőjén.*

Bizonyítás: A síkbeli bizonyítás két tényen alapul: az érintőnégyszögek szemközti oldalai összegének kapcsolatán, illetve az egy pontból húzott érintő szakaszok egyenlőségén. Mivel mindkét állítás a gömbön is igaz, ezért a gömbi bizonyítás ekvivalens a síkbeli bizonyítással. \square

3.1.5. Állítás. *Ha két kör egy egyenesből egyenlő hosszú húrokat metsz ki, akkor a kimetszett szakaszok két végpontjába húzott érintők metszéspontjából a két kör egyenlő szög alatt látszik. A 2.5 ábra jelölései alapján az A végpontból a k_2 körhöz húzott érintő szakasz hossza megegyezik a D pontból a k_1 körhöz húzott érintő szakasz hosszával.*

Bizonyítás: Hasonló a helyzet, mint az előbbi bizonyításban. A síkban felhasználtuk az arányosságot, illetve a hatvány definícióját, ezek mind igaz állítások a gömbön is. Így - mint az előbb - a gömbi bizonyítás ekvivalens a síkbelivel. \square

A teljes bizonyítást nem részletezem, mivel ugyanolyan elven működik ahogyan a síkon, ez olvasható a 2.6 pontban.

Steiner szerkesztési lépései alapján:

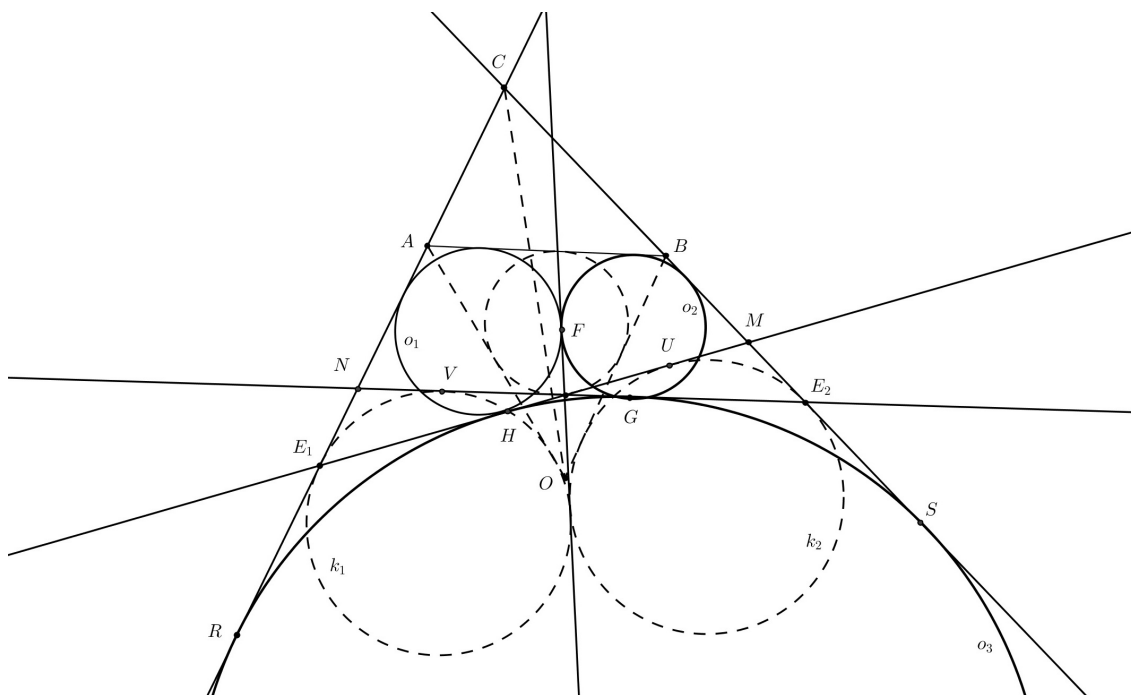
- Először szerkesszük meg az ABC gömbháromszög beírt körének középpontját, ez legyen O .
- Szerkesszünk köröket az AOB , BOC és AOC gömbháromszögekbe.
- Ezek érintési pontjai a háromszög oldalain rendre legyenek: E_1 , E_2 és E_3 . Ezek a pontok rajta vannak két kör közös érintőjén (amelyek, társérintői a szögfelezőknek, s legyenek: e, f, g). Az e , f és g két pontban metszik egymást, s a gömbháromszög tartományában lévő legyen a P pont.
- A P pont lesz a három keresett Malfatti-kör hatványpontja, illetve ezek által úgy kapunk újabb háromszögeket, hogy két oldal a gömbháromszög két oldala, a harmadik oldal pedig a egyik érintő (e vagy f vagy g)s ezekbe az újabb gömbháromszögekbe köröket szerkesztve, megkaptuk a keresett három Malfatti-kört.

Meggondolható, hogy a gömbön minden háromszög kiegészíthető gömbkétszögre (meghosszabbítva a gömbháromszög két oldalát). Ekkor a gömbkétszög két gömbháromszögből áll s mindkettőbe szerkeszthetünk Malfatti-köröket. Felmerül a kérdés, hogy mi történik a síkon, ha ott próbálkozunk a meghosszabbított oldalakhoz köröket szerkeszteni?

4. fejezet

Malfatti-körök a síkbeli végtelen tartományban

Ahogy az előző fejezet végén említettem, megvizsgálom a háromszög két oldalának meghosszabbításával kapott végtelen tartományt, s ebben vizsgálom a Malfatti-körök megszerkesztését.



4.1. ábra.

Bizonyítás: A bizonyítás alatt Hart gondolatmenetét követem:

Legyenek a keresett Malfatti-körök (o_1, o_2, o_3) érintési pontjai F, G, H . Az F, G és H pontokba húzott érintők, a páronként vett körök hatványvonalai, ezért ezek egy pontban, a három kör hatványpontjában, P -ben metszik egymást. Az E_1, E_2, E_3 pontok legyenek azoknak a köröknek (k_1, k_2, k_3) az érintési pontjai az AB szakaszon és a két végpontból kiinduló félegyeneseken, amelyek az előbb említett végtelen tartományban (AB szakasz és a két végpontból kiinduló félegyenes) a C csúcsnál lévő, az AB és az A -ból induló félegyenes, és az AB és a B -ből induló félegyenes szögfelező egyenese által képzett tartományokba írhatóak (ezen tartományokat két szögfelező és egy oldalegyenes határolja). Legyen O a szögfelezők metszéspontja. Az R és az S legyen az a két pont, ahol a háromszög AC és BC oldalát érinti az o_3 kör.

Most vizsgáljuk a k_1, k_2 és o_3 köröket. Ezeknek az E_1L, E_2M és az E_3N érintői a P pontban metszik egymást. A 2. fejezet 1. segédtételéből pedig következik, hogy akkor ezek társérintői is egy pontban futnak össze, vagyis a k_1 és k_2 körök második közös belső érintője a B -ből és az A -ból induló félegyenesek metszéspontján, C -én halad át. Ezzel a gondolatmenettel a k_2, k_3 és k_1, k_3 körök második közös belső érintői átmennek az A és B csúcsokon.

A 2. fejezet 2. és 3. segédtételeinek felhasználásával belátjuk, hogy ezek a belső érintők nemcsak átmennek a háromszög csúcsain, hanem felezik is azokat. Az alábbiakban csak egy konkrét csúcsnál lévő belső érintőről bizonyítom be hogy szögfelező, de ugyanez alkalmazható a többi csúcsra is. Belátom tehát, hogy a k_1 és k_2 körök második közös belső érintője a C csúcsnál lévő szög szögfelezője.

$$HU = MH - MU = MS - ME_2 = SE_2 = E_2G$$

$$GV = NG - NV = NR - NE_1 = RE_1 = E_1H$$

A két végpontot összeadva:

$$HU + E_1H = E_2G + GV \Rightarrow E_1U = E_2V$$

Így a a 2. fejezet 3. segédtételéből következik, hogy az E_1 és az E_2 által meghatározott szakasz egyenlő húrokat metsz ki a k_1 és k_2 körökből. Tehát ismét, a 2. fejezet 2. segédtétele alapján, a k_1 és k_2 körök egyenlő szög alatt látszanak, az E_1 és az E_2 pontokba húzott érintők metszéspontjából, s ez a metszéspont a C csúcs. Vagyis a közös belső érintője a két körnek, felezi az A csúcsnál lévő szöget. Ezzel beláttuk az állítást. \square

Steiner szerkesztése alapján:

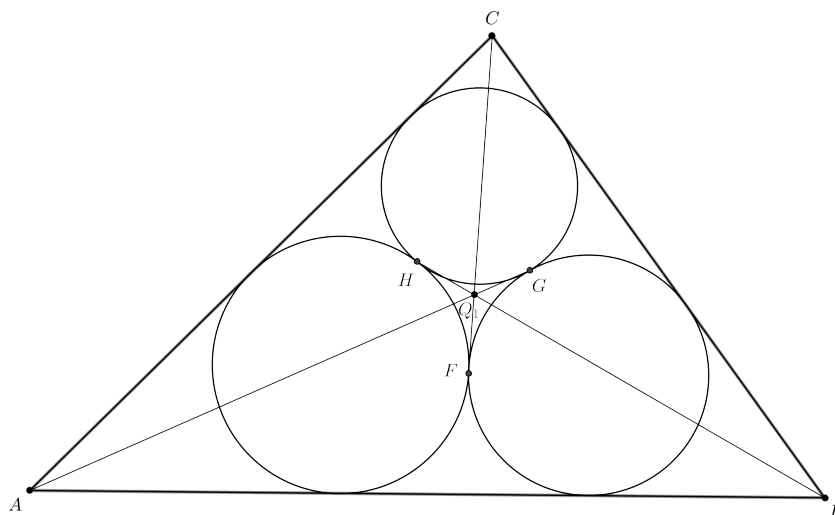
- Először szerkesszük meg az ABC háromszög, CA és CB oldalak meghosszabbításával kapott végtelen tartomány beírt körének középpontját, ez legyen O .
- Szerkesszünk köröket az oldalakkal és a szögfelezőkkel kapott tartományokba, amelyek két szögfelezőből és egy oldalegyenesből állnak.
- Ezek érintési pontjai az egyeneseken rendre legyenek: E_1 , E_2 és E_3 . Ezek a pontok rajta vannak két kör közös érintőjén (amelyek, társérintői a szögfelezőknek). Ezek az érintők egy pontban metszik egymást ez a pont legyen P .
- A P pont lesz a három keresett Malfatti-kör hatványpontja, illetve ezek által úgy kapunk újabb tartományokat, hogy az egyik oldal az egyik érintő a másik kettő pedig az AB szakasz és a két végpontból kiinduló félegyenesek által meghatározott tartomány két oldala. Ezekbe újabb köröket szerkesztve, megkaptuk a keresett három Malfatti-kört.

5. fejezet

A Malfatti-körök által kapott nevezetes pontok

5.1. Ajima-Malfatti pontok

5.1.1. Definíció. Legyen ABC háromszög Malfatti-köreinek érintési pontjai: F , G és H . Egy csúcsra és a vele szemközti érintési pontra illeszkedő egyenesek egy pontban metszik egymást. Ez a Q_1 pont a háromszög első Ajima-Malfatti pontja.

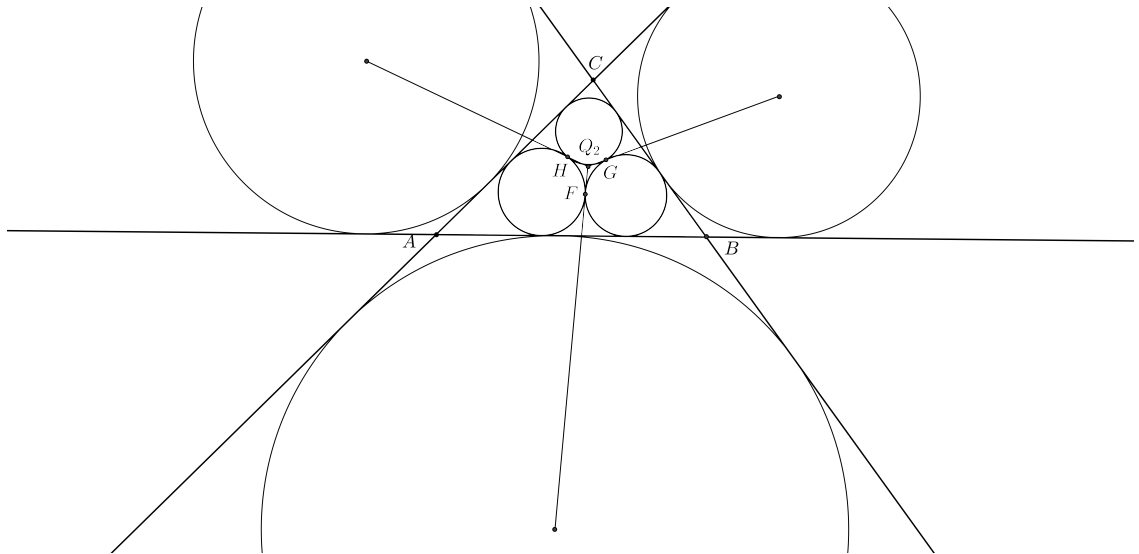


5.1. ábra.

5.1.2. Megjegyzés. $A Q_1$ baricentrikus koordinátái:

$$\left(\frac{1}{\cos \frac{\alpha}{4}}\right)^4 : \left(\frac{1}{\cos \frac{\beta}{4}}\right)^4 : \left(\frac{1}{\cos \frac{\gamma}{4}}\right)^4$$

5.1.3. Definíció. Legyen ABC háromszög Malfatti-köreinek érintési pontjai szintén F , G és H . A háromszög hozzáírt köreinek középpontjaira és az érintési pontokra illeszkedő egyenesek egy pontban, Q_2 -ben metszik egymást. Ez a pont a háromszög második Ajima-Malfatti pontja.



5.2. ábra.

5.1.4. Megjegyzés. $A Q_2$ baricentrikus koordinátái:

$$\frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} - \frac{1}{t_1} : \frac{1}{t_3} + \frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} : \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_3}$$

ahol

$$t_1 = 1 + 2 \left(\sec \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\beta}{4} \cos \frac{\gamma}{4} \right)$$

$$t_2 = 1 + 2 \left(\sec \frac{\beta}{4} \cos \frac{\gamma}{4} \cos \frac{\alpha}{4} \right)$$

$$t_3 = 1 + 2 \left(\sec \frac{\gamma}{4} \cos \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\beta}{4} \right)$$

Irodalomjegyzék

- [1] Maklári József: Körérintési szerkesztések és alkalmazásaik, Tankönyvkiadó, (1970) 110-114.
- [2] Hajós György: Bevezetés a geometriába, Nemzeti tankönyvkiadó, (1999)
- [3] Akos G. Horváth: Malfatti's problem on the hyperbolic plane, <http://arxiv.org/abs/1204.5014> (2013)
- [4] Marco Andreatta, András Bezdek and Jan P. Boron'ski: The Problem of Malfatti: Two Centuries of Debate, The Mathematical Intelligencer, Vol. 33, (2010) 72-76.
- [5] Milorad R. Stevanović: The Problem of Malfatti: Triangle Centers Associated with the Malfatti Circles, Forum Geometricorum Vol. 3 (2003) 83.
- [6] I.A.Sakmar: Malfatti-Steiner Problem, forrás: <http://sections.maa.org/florida/proceedings/2004/sakmar.pdf>
- [7] <http://www2.washjeff.edu/users/MWoltermann/Dorrie/30.pdf>
- [8] <http://en.wikipedia.org/wiki/GianFrancescoMalfatti>