Csoportok és gráfjaik bemutatása középiskolai szakkörön

Németh Péter
matematika-fizika szakos hallgató
ELTE TTK

Témavezető:
Dr. Hermann Péter
egyetemi docens
ELTE TTK Algebra és Számelmélet Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem Budapest, 2013.

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

1.1. A szakdolgozat felépítése

A csoportelmélet egy szép és érdekes téma, amit úgy gondolom, hogy szakköri szinten át lehet adni a diákoknak, mivel többségük találkozott már csoporttal, igaz nem tudták, hogy az a struktúra igazából egy csoport. Gondolok itt az egész számok összeadására, kivonására, vagy akár azokra a geometriai transzformációkra, amik a szabályos sokszöget helyben hagyják (diédercsoport). Szakdolgozatom célja, hogy bemutassam, és felépítsem a csoportelméletet középiskolásoknak szemléltető ábrák, és példák segítségével egészen az alapokról elindulva. Elméleti bevezetővel kezdem a dolgozatom, amely főként olyan tételeket tartalmaz, amelyeket oktatnak az egyetemen, bár ebből a mi évfolyamunk nem tanult mindent. A második részben van az, ami az új anyagot képezi, a csoport szorzástáblájától kezdve egészen a gráfokig. Utolsó fejezetem szerepe a szakdolgozat lezárása, és egy kis kitekintés. Megismerkedhetünk egy kicsit a topológikus térrel, és egy rajta vett csoporttal. Ebben a fejezetben főleg a szemlélet a jellemző, már nem a precíz matematikai tárgyalásé a főszerep. Ennek oka, hogy sok szakdolgozatot olvastam, amelynél úgy éreztem, hogy halad-halad előre és egyszer csak jön a köszönetnyilvánítás, vagy adott esetben az irodalomjegyzék.

1.2. Köszönetnyilvánítás

Itt az elején szeretném megragadni az alkalmat, és megköszönni témavezetőmnek Hermann Péter tanár úrnak kitartó és odaadó munkásságát, amellyel segített engem a szakdolgozatom elkészítésében. Mikor már kezdtem feladni, akkor mindig bíztatott, hogy csináljam, és bármilyen kérdésem volt mindig szinte azonnal készségesen válaszolt, mindig kaptam tőle pluszba olyan példát, amin elgondolkodva segített jobban elmélyíteni az anyagot. Nagyon szépen köszönöm a családomnak, és barátaimnak a sok bíztatást és segítséget. Úgy gondolom ezen dolgok nélkül nem sikerült volna.

2. fejezet

Elméleti bevezető

2.1. A csoport fogalma

Kezdjük is el a csoport definiálásával:

2.1.1. Definíció. *Csoportnak* nevezünk egy olyan G nem üres halmazt, a rajta értelmezett $\otimes$ bináris művelettel együtt, amely teljesíti a következő ún. *csoport-axiómákat*:

i) asszociativitás: $\forall x, y, z \in G$ esetén
$$x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z$$

ii) egységelem: létezik egy egyértelműen meghatározott e (kétoldali) egységelem, amelyre fennáll:
$$g \otimes e = e \otimes g = g \quad \forall g \in G$$

iii) inverzek: a csoport minden g elemének létezik egy egyértelműen meghatározott és g^{-1}-el jelölt (kétoldali) inverze, amelyre teljesül:

$$g \otimes g^{-1} = g^{-1} \otimes g = e$$

Ezt úgy mondjuk, hogy G csoport az adott: $\otimes$ műveletre nézve, jelölés: (G,$\otimes$) csoport. Későbbiekben már elhagyjuk a jelölésben a műveletet, és egyszerűen csak G csoportról beszélünk.
Ugyanakkor később be fogjuk még látni, hogy mind az inverz, mind az egységelem egyértelmű.
Megállapodás: Mielőtt példákat néznénk, addig általánosítjuk, és egyszerűsítjük a bináris műveletre használt jelölést: $a \otimes b = c$ helyett egyszerűen csak így jelöljük: $ab = c$, és úgy mondjuk, hogy a elem *szorozva* b elemmel.

2.1.2. Megjegyzés. Az axiómákban nem szerepel a kommutativitás. Azonban ez nem jelenti azt, hogy nincs olyan csoport, amely kommutatív lenne. Az olyan csoportokat, amelyekre teljesül a kommutativitás *kommutatív*, vagy *Abel-csoportnak* nevezzük (Niels Abel után). Egyébként szokás a *felcserélhető* szót is használni.

Vizsgálódjunk tehát, és nézzünk példákat halmazokra, hogy melyek alkotnak csoportot, illetve, ha csoportot alkotnak, akkor kommutatív-e?

2.1.3. Példa. Csoportot alkotnak-e az egész számok halmaza($\mathbb{Z}$) az összeadás műveletére nézve?

i) Az egész számok összeadása asszociatív, tehát teljesül az 1. axióma.
ii) Ebben a halmazban az egységelem a 0, mivel $\forall a \in \mathbb{Z}$-re teljesül:

$$0 + a = a + 0 = a.$$

iii) Továbbá ellenőrizzük le a 3. axiómát is: $\forall b \in \mathbb{Z}$-hez vegyük a $-b$ elemet, ami eleme a csoportnak, hiszen a negatív számok is egész számok

$$b + (-b) = (-b) + b = 0$$

vagyis b inverze $-b$. Jelölésben: $b^{-1} = -b$.

Vagyis beláttuk, hogy az egész számok halmaza *csoport* az összeadás műveletére nézve. Ezt a csoportot speciálisan úgy is szokták hívni, hogy *additív csoport*. Természetesen ez egy kommutatív csoport is hiszen $\forall a, b, \in \mathbb{Z}$-re igaz, hogy $a + b = b + a$.

2.1.4. Példa. Nézzük a 2×2-es invertálható mátrixok halmazát, a mátrixszorzás, mint műveletre nézve.

i) A mátrixszorzás asszociatív, vagyis ez az axióma teljesül.
ii) Mivel olyan mátrixokat vettünk, amelyek invertálhatóak, innen tudjuk, hogy létezik az inverz, második axióma is teljesül.
iii) Egységelem van, méghozzá:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ez tehát *csoport*, de nem kommutatív csoport, hiszen a mátrixszorzás általában nem kommutatív.

2.1.5. Példa. Sok általános iskolás esik bele abba a hibába, hogy törtet törttel úgy ad össze, hogy a számlálót a számlálóval, nevezőt a nevezővel $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$. Vajon amit csinálnak az egy csoport, ha $\forall a, b, c, d, \in \mathbb{Z}$?

i) Látjuk, hogy a műveletre zárt ez a halmaz, továbbá azt is, hogy asszociatív.
ii) Az egységelemnek a 0 számot vehetjük.
iii) A gondot az inverz okozza, ugyanis tekintsünk egy olyan számot amely: $\frac{a}{0}$ alakú. Ez a "szám" benne van a halmazban, nem értelmezhető, és nem tudni éppen ezért, hogy mi az inverze.

Vagyis ez nem csoport.

A példák után teszünk kettő megállapítást, amit ki is mondunk tétel formájában. Először is levezetjük az egységelem és az inverz egyértelműségét.

2.1.6. Tétel. *A G csoportnak egyetlen egységeleme van.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy több egység elem van: e_1 és e_2 a két egységelem. Vizsgáljuk meg az
$e_1 \cdot e_2$ szorzatot! Mivel e_1 (kétoldali) egységelem, így ezzel e_2-t (balról) szorozva e_2-t kapjuk az egységelem definiáló tulajdonsága miatt. Ugyanígy, adódik ha e_1-et szorozzuk balról e_2-vel, akkor a szorzat értéke e_1. Tehát $e_1 = e_2$. □

2.1.7. Tétel. *A G csoport minden elemének egyértelműen létezik inverze.*

Bizonyítás. Legyen $a \in G$ és a_1^{-1}, a_2^{-1} a inverzei. Ekkor határozzuk meg $a_1^{-1}aa_2^{-1}$ szorzat értékét! Használjuk az asszociativitási szabályt vagyis, hogy bármilyen zárójelezéssel ugyanazt az eredményt adja. Nézzük most a kétféle zárójelezés eredményét:

$$(a_1^{-1}a)a_2^{-1} = ea_2^{-1} = a_2^{-1}$$

$$a_1^{-1}(aa_2^{-1}) = ea_1^{-1} = a_1^{-1}$$

$$a_1^{-1} = a_2^{-1}$$

Vagyis a két inverz megegyezik. □

2.2. Nevezetes csoportok

2.2.1. Számcsoportok

Additív csoportok

Tekintsük rendre az egész, racionális, valós, komplex számok halmazát az összeadás műveletére nézve. Ezek mind csoportot alkotnak, méghozzá Abel-csoportot. Mind a négy esetben a 0 az egységelem, és egy tetszőleges x elem inverze a $-x$ elem. Ezek mind végtelen elemű csoportok. Jelölés sorban: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.
Speciálisan tekintsük a *modulo n maradékosztályokat* az összeadásra nézve szintén additív csoport, ugyanaz igaz erre a csoportra, mint az összes egész szám alkotta additív csoportra. Ez egy n-tagú csoport. Jele: $\mathbb{Z}_n$

Multiplikatív csoportok

A racionális, valós, és a komplex számok halmazából, ha kivesszük a 0 elemet, akkor a szorzás műveletére csoportot alkotnak. Egységelem az 1, valamint egy tetszőleges x elem inverze az $\frac{1}{x}$.
Vegyünk egy *modulo n* vett *redukált maradékrendszert*, ez a halmaz is csoportot alkot. Elemszáma $\varphi(n)$.

2.2.2. Részcsoport, Generált részcsoport, Ciklikus csoport

2.2.1. Definíció. H halmaz *részcsoportja* a G csoportnak, ha $H \subseteq G$ vagyis minden $a, b \in H$ eleme G-nek, és H maga is csoport G műveletére nézve. Jele: $H \leq G$

Következmény:

i) Minden csoportnak vannak részcsoportjai, például az egységelemből álló egyelemű halmaz.
ii) Minden csoport részcsoportja önmagának. $G \leq G$
iii) Két részcsoport metszete is részcsoport. Uniója akkor és csakis akkor, ha egyik tartalmazza a másikat.

2.2.2. Definíció. Legyenek a, b egy csoport elemei. Ha a csoport *összes* eleme előállítható csak a-t és b-t (valamint ezek inverzeit) tartalmazó szorzatként, akkor a-t és b-t a csoport generátorainak nevezzük.

2.2.3. Definíció. Ha egy csoport minden eleme kifejezhető egyetlen a generátor hatványaival, akkor ezt a csoportot *Ciklikus csoportnak* nevezzük.

2.2.4. Definíció. Egy tetszőleges G csoport rendjén a G csoport elemszámát érjük. Jelölés: $|G|$

2.2.5. Definíció. Legyen G csoport, $g \in G$, ekkor g *csoportelem rendje* az a legkisebb pozitív $n \in \mathbb{Z}$ számot érjük, amelyre $g^n = 1$. Ha nincs ilyen n kitevő, akkor g végtelen rendű.

2.2.6. Definíció. Tetszőleges G csoport esetén az $X \subseteq G$, $X \neq \emptyset$ által *generált részcsoport* a *legszűkebb* X-et tartalmazó részcsoportja G-nek. Jele: $\langle X \rangle$.
Az X részhalmazt G *generátorrendszerének* nevezzük, ha $\langle X \rangle = G$

2.2.3. Permutációcsoportok

2.2.7. Definíció. Egy H halmaz permutációján az önmagára vett bijektív leképezést értjük.

Itt szeretném bevezetni a *homomorfizus* és ennek speciális esete az *izomorfizmus* fogalmát.

2.2.8. Definíció. Legyen G csoport a $\otimes$ műveletére nézve, és H csoport a $\times$ műveletre nézve. Ekkor az $f : G \to H$ leképezést *csoporthomomorfizmusnak* vagy röviden csak *homomorfizmusnak* nevezzük, ha *művelettartó* minden $a, b \in G$-re, azaz:

$$f(a \otimes b) = f(a) \times f(b)$$

2.2.9. Megjegyzés. Ha f kölcsönösen egyértelmű, akkor f *izomorfizmus*.

2.2.10. Tétel. *Bármely adott véges, n-edrendű csoporthoz található egy vele izomorf, n elemű permutációcsoport.*

Szimmetrikus csoport

2.2.11. Definíció. Adott véges halmaz önmagára való összes leképezései csoportot alkotnak. Neve: *Szimmetrikus csoport*. Ha az adott halmaz n elemű, akkor az adott Szimmetrikus csoportot S_n-el jelöljük.

2.2.12. Megjegyzés. Általában, ha egy adott $a_1, a_2, \ldots a_n$ halmazt kell leképeznünk önmagára, akkor a_1 számára n lehetőség van a kép kiválasztására, $n-1$ lehetőség a_2-re, és így tovább egészen a_n-ig aminek összesen 1 lehetősége marad. Így S_n szimmetrikus csoport $n(n-1)(n-2)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$ különböző permutációt tartalmaz. Vagyis S_n rendje $n!$.

Alternáló csoport

2.2.13. Definíció. Egy n elemű halmaz páros permutáció, a permutációszorzásra nézve csoportot alkot. Neve: *Alternáló csoport*. Jele: A_n. Elemszáma: $\frac{1}{2} \cdot n!$

2.2.4. Diédercsoport

2.2.14. Definíció. Tekintsünk egy szabályos n-szöget, és vegyük azokat a geometriai transzformációkat, amelyek a szabályos sokszögünket helyben hagyják. A csoport neve: *Diédercsoport*. Jele: D_n. Elemszáma: $2n$.

2.2.15. Megjegyzés. D_n Diédercsoportot 2 elem generálja: egy $\frac{2\pi}{n}$ szögű f forgatás, és egy t tükrözés (vannak könyvek, ahol a tükrözést a sokszög lapjának $180°$-os forgatásaként írják, de ez lényegében ugyanaz).

$$D_n = \{1, f, f^2, \dots, f^{n-1}, t, ft, f^2, \dots, f^{n-1}t\}$$

2.2.16. Megjegyzés. A Diédercsoport nem kommutatív! Vagyis $ft \neq tf$, azonban az igaz D_n-ben, hogy $f^k t = f^{n-k} t$

Klein csoport

2.2.17. Definíció. *Klein-csoportnak* nevezzük azt a négyelemű csoportot, amely a kételemű csoport önmagával vett direkt szorzataként áll elő. A Klein-csoport egyben a negyedrendű Diédercsoport (D_2).

2.2.18. Megjegyzés. Klein-csoport érdekessége, hogy az egységelemen kívül a többi elem rendje 2. Valamint ez a legkisebb nem ciklikus csoport.

2.2.5. Kvaterniócsoport

2.2.19. Definíció. A Q *kvaterniócsoport* elemei a következő kvaterniók halmaza a kvaternioszorzás műveletére nézve:

$$Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\},$$

ahol $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ és

$ij = k$	$ji = -k$
$jk = i$	$kj = -i$
$ki = j$	$ik = -j$

2.2.6. Invariáns részcsoportok

2.2.20. Definíció. Legyen G tetszőleges csoport, és $H \leq G$. Ekkor az $x \in G$, xH részhalmazokat G-ben H *szerinti bal oldali mellékosztályoknak* nevezzük.

2.2.21. Megjegyzés. Természetesen nem csak balról lehet szorozni, hanem jobbról is. A jobbról vett szorzatot *jobboldali mellékosztályoknak* nevezzük.

2.2.22. Tétel. (Lagrange tétele) *Legyen G véges csoport. Ekkor G bármelyik H részcsoportjának elemszáma osztója G elemszámának.*

$$|G| = |H| \cdot |G : H|$$

Bizonyítás. H különböző mellékosztályai diszjunktak, és azonos számú, $|H|$ darab elemet tartalmaznak. Minden G-beli x elem benne van az egyik mellékosztályban, például a xH-ban, hiszen $xe = x$, ahol e a H és G csoport egységeleme. A teljes G halmaz elemszáma egyenlő a különböző mellékosztályok elemszámának összegével, hiszen átfedés nincs köztük, de kitöltik a teljes halmazt. Ezeknek a mellékosztályoknak a száma: $|G : H|$, így: $|G : H| \cdot |H| = |G|$ $\square$

2.2.23. Definíció. Legyen G csoport, és $N \leq G$ részcsoport. N-et *normálosztónak*, vagy *normális részcsoportnak*, vagy *invariáns részcsoportnak* nevezzük, ha $gN = Ng$ teljesül $\forall g \in G$-re. Vagyis a jobb- és baloldali mellékosztályok megegyeznek. Jele: $N \triangleleft G$

2.2.24. Definíció. Legyen $(G, \cdot)$ csoport és $N \triangleleft G$ normálosztó. Ekkor a G
N-el jelölt *faktorcsoport* elemei az N szerinti mellékosztályok és a faktorcsoport $\otimes$ műveletét az alábbi képlet szerint értelmezzük:

$$(xN) \otimes (yN) = (xy)N.$$

2.2.25. Definíció. Minden olyan nem Abel-féle csoportot, amelyben az összes részcsoport invariáns, *Hamilton-csoportnak* nevezzük.

2.2.26. Megjegyzés. A Q kvaterniócsoport nyolcadrendű Hamilton csoport. Megmutatható, hogy bármely véges Hamilton-csoport a kvaterniócsoport és Abel-csoportok direkt szorzataként származtatható.

3. fejezet

Csoportok gráfjai

3.1. Csoport definiálása generátorokkal és relációkkal

3.1.1. Definíció. Generátorok és inverzeik egy véges sorozatát *szónak* nevezzük. Jelölése: W.

3.1.2. Definíció. Ha W egy nem üres szó a G csoportban úgy, hogy

$$W = e,$$

akkor ez az egyenlőség a G-nek egy *relációja*.

3.1.3. Megjegyzés. Mivel a W szó G generátorainak egy szorzata a $W = e$ egyenlőséget a G egy *generátorrelációjának* is nevezzük.

3.1.4. Definíció. Azokat a csoportokat, amelyekben nincsenek relációk *szabad csoportoknak* nevezzük. Jele: F.

3.1.5. Definíció. Tekintsük G összes nem-triviális relációiból álló halmazt, azaz az $A = \{R_k = e\}$, ahol $k = 1, 2, \dots$ és válasszunk ki (ha lehetséges) egy B részhalmazt úgy, hogy a B-beli relációkból következzék az összes A-beli reláció. A relációk egy ilyen B halmazát a G csoportot *definiáló relációk* halmazának nevezzük.

3.1.6. Megjegyzés. Ha A tartalmaz legalább egy $R = e$ relációt, akkor tartalmaz végtelen sokat, továbbá az is igaz, hogy B létezik ha A nem üres.

3.1.7. Tétel. *Ha adott az $R_k = e$ relációk egy B halmaza, amelyekben minden egyes R_k a generátorszimbólumok egy adott halmazának valamely nem üres szava, akkor létezik olyan G csoport, amelyre nézve a B definiáló relációk egy halmaza.*

Most nézzünk egy alkalmazást:

3.1.8. Tétel. *Egy forgatással (f) és tükrözéssel (t) generált D_n Diédercsoport*

$$f^n = e,\ t^2 = e,\ (ft)^2 = e$$

definiáló relációiból csak akkor következik

$$tf = ft,$$

ha $n = 1$ vagy $n = 2$. Vagyis ha $n > 2$, akkor a D_n Diédercsoport nem kommutatív.

Bizonyítás. Ha a Diédercsoportunk kommutatív, akkor $tf = ft$, vagyis:

$$e = (ft)^2 = (ft)(ft) = (ft)(tf) = ft^2f = f^2.$$

Ekkor két eset van:

1. eset: $n = 2k$ alakú, akkor

$$f^2 = e,\ t^2 = e,\ (ft)^2 = e$$

Ezek a relációk a D_2 Diédercsoportot definiáló relációk.

2. eset: $n = 2k + 1$ alakú, akkor

$$f^2 = e = f^n = f^{2k+1} = f^{2k}f = ef = f$$

$$\Rightarrow f = e,\ t^2 = e$$

Ezzel pedig a D_1-et definiáló relációkat kaptuk. $\square$

3.2. A csoport szorzástáblája

A csoport szorzástáblája a közönséges aritmetikai szorzás során használt táblázathoz. A csoport elemeit a legfelső sorában valamint ugyanolyan sorrendben bal oldali oszlopában helyezi el. A táblázat belsejében pedig a megfelelő szorzatok állnak. Nézzünk is rá két példát.

3.2.1. Példa. Elsőnek nézzük meg a C_3 Ciklikus csoport szorzástábláját.

	e	g	g^2
e	e	g	g^2
g	g	g^2	e
g^2	g^2	e	g

3.2.2. Példa. Nézzük meg a D_3 csoport szorzástábláját.

	e	f	f^2	t	tf	tf^2
e	e	f	f^2	t	tf	tf^2
f	f	f^2	e	tf^2	t	tf
f^2	f^2	e	f	tf	tf^2	t
t	t	tf	tf^2	e	f	f^2
tf	tf	tf^2	t	f^2	e	f
tf^2	tf^2	t	tf	f	f^2	e

3.2.3. Tétel. *Egy véges csoport akkor és csak akkor kommutatív, ha a szorzástáblájában a főátlóra szimmetrikusan elhelyezkedő szorzatok ugyanazt a csoportelemet reprezentálják.*

3.2.4. Tétel. *Legyen $G = \{e, g_1, g_2, \dots g_{n-1}\}$ n-edrendű csoport, és legyen $x \in \{e, g_1, g_2, \dots g_{n-1}\}$ tetszőleges rögzített csoportelem ($h \neq e$), akkor a szorzatok mindkét*

$$xe, xg_1, xg_2, \dots xg_{n-1}\ ;\ ex, g_1x, g_2x, \dots g_{n-1}x$$

halmaza tartalmazza mind az n csoportelemet, csak esetleg más sorrendben.

3.2.5. Megjegyzés. Most szeretnék még pár meggondolást, tulajdonságot megtenni ebben a megjegyzésben.

i) A rendszerben pontosan annyi különböző elem van, mint ahány sora, (vagy oszlopa) van a négyzetes elrendezésnek.

ii) Minden sor és minden oszlop minden elemet pontosan egyszer tartalmaz.

iii) Az egységelemet tartalmazó sor/oszlop elrendezése azonos lesz a felső sor/bal oszlop elrendezésével.

iv) Az egységelemek a főátlóra szimmetrikusan helyezkednek el.

v) Legyen a-t tartalmazó sor és b-t tartalmazó oszlop metszéspontján az egységelem az e. Az a-t tartalmazó oszlopot jelöljük x-el a sort pedig v-vel, a b-t tartalmazó oszlop legyen y sora pedig legyen u. Ekkor a-t tartalmazó sor és b-t tartalmazó oszlop metszéspontja, az ux szorzat ba-val lesz egyenlő.

3.3. Csoport gráfja

A matematikában azokat a gráfokat, amelyek egy csoport struktúráját reprezentálják *Cayley-gráfoknak* vagy *Cayley-diagrammoknak* nevezzük.

3.3.1. Definíció. Adott G csoport és tetszőleges H generátorhalmaz esetében a Cayley-gráf $\Gamma = \Gamma_c(G, H)$ a következő színezett, irányított gráf:

i) Minden $g \in G$ elem megfelel egy $v_g \in V$ csúcsnak a gráfban.

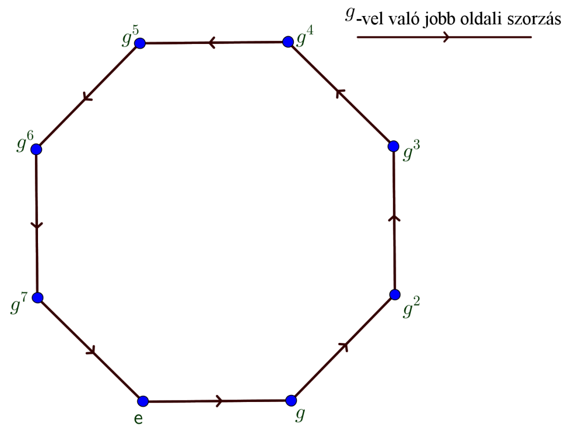
ii) Minden $h \in H$ elem megfelel egy c_h színnek.

iii) Minden $g \in G$ és $h \in H$ esetében a v_g és a v_{gh} csúcsok között létezik egy c_h színű él.

3.3.2. Megjegyzés. Természetesen az e egységelemnek bármelyik csúcsot választhatom, valamint az éleket nem kell egyenesekkel ábrázolni.

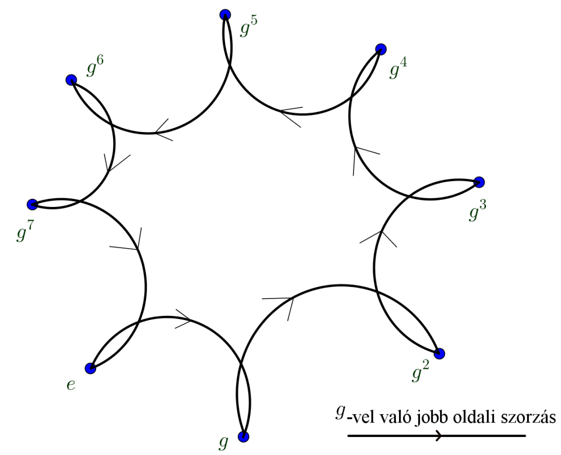
Mielőtt tovább mennénk, nézzünk pár példát, hogy hogyan is kell elképzelni ezeket a gráfokat.

3.3.3. Példa. Elsőnek nézzük meg a C_8 Ciklikus csoport Cayley-gráfját. Természetesen



3.1. ábra. C_8 Ciklikus csoport

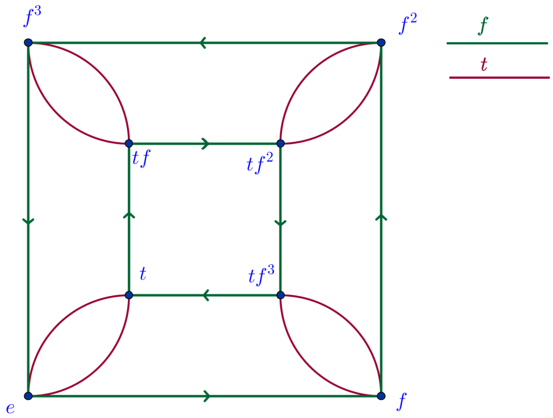
nem szükséges szabályos sokszögnek rajzolni a gráfot, az alábbi gráf ugyanúgy reprezentálja a C_8 Ciklikus csoportot: Természetesen az ábrákból már látszik,



3.2. ábra. C_8 Ciklikus csoport

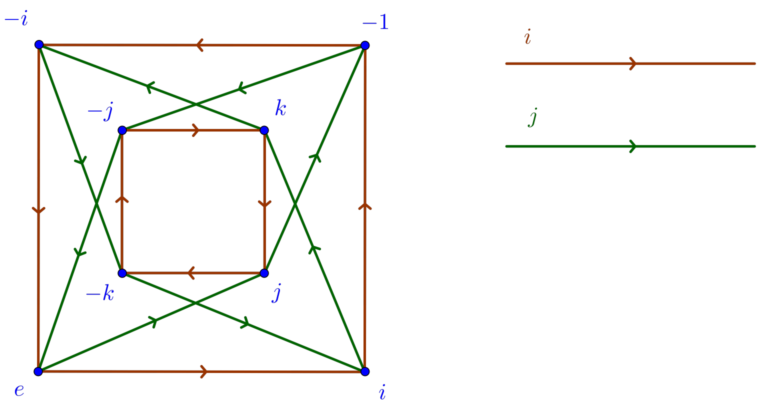
hogy egy tetszőleges n esetén hogyan néz ki a C_n Ciklikus csoport.

3.3.4. Példa. Most nézzük meg a D_4 Diéder csoportot.



3.3. ábra. D_4 Diéder csoport

3.3.5. Példa. Végül tekintsük meg a Q kvaterniócsoport gráfját.

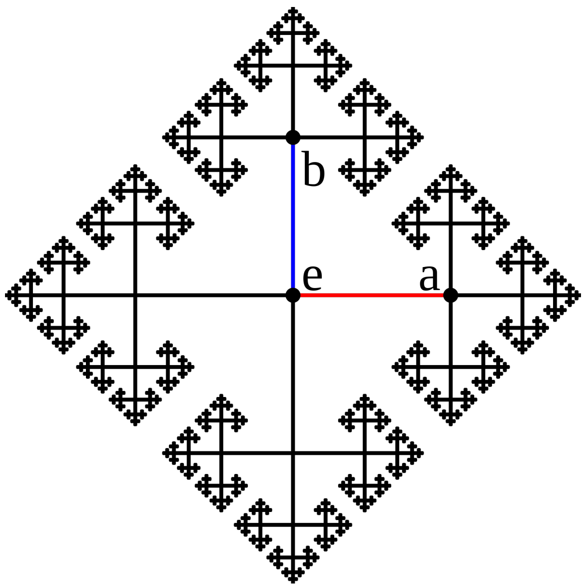


3.4. ábra. Q kvaterniócsoport

Most tegyünk meg egy pár megjegyzést a Cayley-gráfokról.

3.3.6. Megjegyzés. A Cayley-gráf összefüggő, ha H generátorhalmaz valóban generálja a G csoportot. Többszörös élek a másodrendű elemeknél fordulnak elő. Csakis egy esetben kaphatunk körmentes gráfot, vagy más néven Cayley-fát, ha G

szabad-csoport, hiszen ekkor minden $g \in G$ elem előáll a generátorelemek egyértelmű kombinációjaként, ezt a gráfot szokás még *Bethe-hálónak* is hívni. Ábrája pedig a két generátorral megadott szabad csoportnak itt látható:



3.5. ábra. Szabad csoport

3.3.1. Gráfautomorfizmus

3.3.7. Definíció. A gráfautomorfizmus egy gráf önmagára való izomorfizmusa, vagyis legyen $G := (V, E)$ gráf. Egy $f : V \to V$ bijektív függvény gráfautomorfizmus, ha

$$\{u, v\} \in E \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E$$

3.3.8. Definíció. (csúcs-tranzitivitás) Ha $G = (V, E)$ gráfnak $\forall u, v \in V$ csúcspárra létezik olyan $\phi : V \to V$ gráfautomorfizmusa, amelyre $\phi(u) = v$, akkor a G gráf *csúcs-tranzitív*.

3.3.9. Definíció. Legyen G egy csoport. Egy G-hatás az X halmazon nem más, mint egy kétváltozós függvény: $G \times X \to X$, amit szorzással fogunk jelölni, $(\forall g, h \in G),\ (\forall x \in X)$:

i) $g(hx) = (gh)x \in X$

ii) $ex = x$

3.3.10. Definíció. Legyen G egy csoport, ami hat egy X halmazon! Egy $x \in X$ elem egy $g \in G$ transzformáció fixpontja, ha $gx = x$, minden $g \in G$-re. Az x elem pályája:

$$(G)x = \{gx \mid g \in G\} \subseteq X.$$

Jelölése: $(G)x$

Az x stabilizátora pedig:

$$G_x = \{g \in G \mid gx = x\} \subseteq G.$$

Jelölése: G_x.

3.3.11. Megjegyzés. G_x részcsoportja G-nek.

3.3.12. Tétel. $|G| = |(G)x| \cdot |G_x|$

3.3.13. Lemma. (Burnside-lemma) *Ha G csoport hat X halmazon, akkor a csoportbéli transzformációk fixpontjainak az összegét kiszámolhatjuk úgy is, hogy minden pontnál megszámoljuk, hogy hány transzformációnak a fixpontja. Jelölje $\mathcal{P}$ a G általi pályák halmazát:*

$$\sum_{x \in X} |G_x| = \sum_{x \in X} \frac{|G|}{|(G)x|} = \sum_{q \in \mathcal{P}} \sum_{x \in q} \frac{|G|}{|q|} = |G| \sum_{q \in \mathcal{P}} \sum_{x \in q} \frac{1}{|q|} = |G| \sum_{q \in \mathcal{P}} \frac{|q|}{|q|} = |G| \cdot |\mathcal{P}|$$

átrendezve:

$$\frac{1}{|G|} \sum_{x \in X} |G_x| = |\mathcal{P}|$$

Most pedig következzen egy feladat, amelyhez felhasználhatjuk a Burnside-lemmát.

3.3.14. Feladat. Egy téglalap (alakú zászló) fel van osztva n darab sávra. Mindegyik sávot befestjük valamilyen színre. Összesen k-féle festékünk van. Hányféleképpen színezhetjük a zászlót, ha két színezést akkor tekintünk különbözőnek, ha nem vihetők át egymásba a téglalap valamilyen szimmetriája (tengelyes vagy középpontos tükrözés) révén?

3.3.15. Megoldás. Legyen X az összes színezett zászlónk halmaza. Ezen a halmazon hat a D_2 Diédercsoport. Két színezés akkor megkülönböztethetetlen $\Longleftrightarrow$, ha egy pályán vannak. Vagyis a különböző pályák számának a meghatározása a cél.

Tudjuk, hogy $|D_2| = 4$, vagyis van benne egy helybenhagyás, egy vízszintes és egy függőleges tükrözés, és egy $180°$-os forgatás (=középpontos tükrözés). Belátható, hogy a függőleges tükrözés, és a helyben hagyás fixál minden zászlót, vagyis az összes lehetséges eset itt: k^n. Ugyanígy a forgatással, és a vízszintes tükrözéssel kapott esetek száma is megegyezik, annyi különbséggel, hogy itt két esettel állunk szemben, ha n páros, illetve ha páratlan.

i) Ha n páros, akkor az első $\frac{n}{2}$ sávba tetszőlegesen választhatok színt, ez pedig meghatározza a második felét a zászlónak. Ebben az esetben $k^{\frac{n}{2}}$ féle lehetőségünk van. Így az összes esetet megadhatjuk a Burnside-lemma segítségével:

$$\frac{1}{|G|}\sum_{x\in X}|G_x| = |\mathcal{P}|$$

$$\frac{1}{4}\cdot(2k^n + k^{\frac{n}{2}})$$

ii) Ha n páratlan, akkor az utolsó sávot tetszőlegesen színezhetjük, és felette páros darabszámú sáv van, az előbbiekből kiindulva a darabszám: $k^{\frac{n-1}{2}} \cdot k =$

$k^{\frac{n+1}{2}}$, vagyis összesen:

$$\frac{1}{4} \cdot (2k^n + k^{\frac{n+1}{2}})$$

3.3.16. Állítás. A Cayley-gráfnak nincs más automorfizmusa, mint a csoport elemeivel való szorzások. Azaz: ha f egy automorfizmus, akkor létezik olyan b eleme a csoportnak, hogy a csoport minden g elemére $f(g) = bg$ teljesül.

Bizonyítás. Vegyük a Cayley gráfot: $\Gamma = \Gamma(G, H)$, ahol G csoport, H pedig a generátorhalmaz. Mivel H generálja G-t ezért a Γ összefüggő. Ekkor létezik $b \in G$, amelyre $f_b : \Gamma \to \Gamma$, hogy $f_b : g \mapsto bg$ minden $g \in G$. Könnyen látható, hogy $f_b \in Aut(\Gamma)$ és $b \mapsto f_b$ egy injektív homomorfizmus $G \to Aut(\Gamma)$, ekkor megkapjuk G-t mint $Aut(\Gamma)$ részcsoportja. Ha egy automorfizmus 1 csúcsot helyben hagy, akkor az összeset helyben hagyja. Ilyen a triviális automorfizmus. Legyen σ egy automorfizmusa a Cayley-gráfnak G csoportban, amely az egységelemet a b-be viszi, vegyük f_b automorfizmust: $\sigma \cdot f_b^{-1}$-el, ez b-t fixen hagyja, vagyis triviális automorfizmus. $\square$

3.3.17. Megjegyzés. A fenti állítás csak irányított Cayley-gráfokra igaz.

3.3.2. Lovász-sejtés

Most következzen egy magyar vonatkozású sejtés, amely a volt intézetigazgatónk, Lovász László nevéhez fűződik.

3.3.18. Állítás. Most tegyünk meg két állítást Cayley-gráfokra vonatkozólag.

i) Minden irányított és irányítatlan Cayley-gráf is csúcs-tranzitív.

ii) Cayley-gráf összefüggő, az irányított Cayley-gráf erősen összefüggő.

3.3.19. Sejtés. (Lovász-sejtés Cayley-gráfokra) Minden véges, összefüggő Cayley-gráf tartalmaz Hamilton-kört.

3.3.20. Sejtés. (erős Lovász-sejtés) Az öt ismert kivételen kívül minden véges, összefüggő csúcs-tranzitív gráf tartalmaz Hamilton utat.

3.3.21. Megjegyzés. A sejtés nem igaz irányított Cayley-gráfokra.

4. fejezet

Csoportok a mindennapi életben

4.1. Városi utcák csoportja

4.1.1. Definíció. Most, hogy már bevezettük a csoportok gráfját beszéljünk a D_∞ vagyis a végtelen Diérdercsoportról, ami az egész számok egybevágósági transzformációiból áll, vagyis vesszük az eltolás és a $0°$-ra való tükrözést:

$$D_\infty = \{f, t : t^2 = (tf)^2 = e\}$$

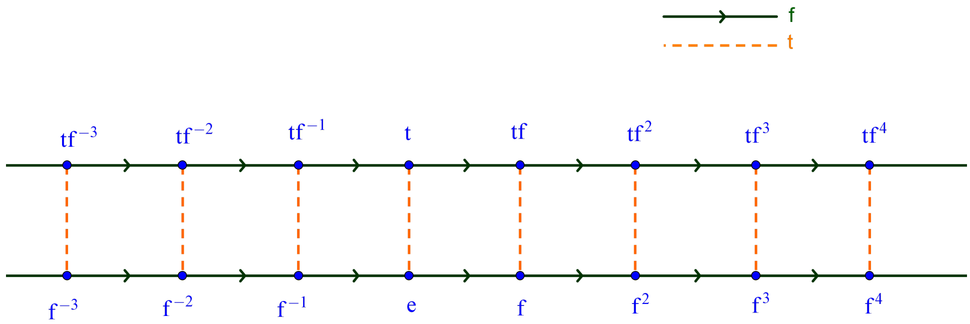
Ezt a csoportot megkaphatjuk úgy is mint két Ciklikus csoport direkt szorzata:

$$D_\infty = C_2 \times C_\infty$$

.

4.1.2. Megjegyzés. Dyck tétele szerint D_∞-nek mindegyik véges D_n Diédercsoport faktora.

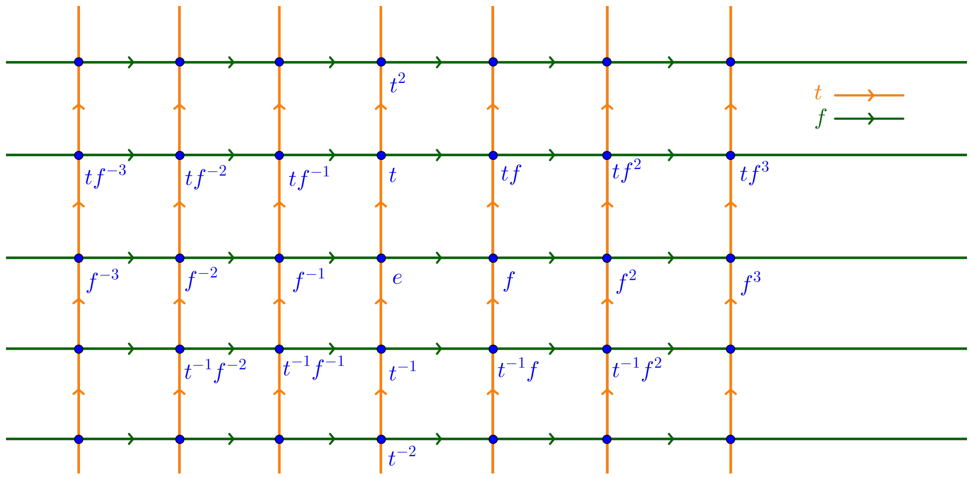
Nézzük is meg ennek a csoportnak a gráfját:



4.1. ábra. D_∞ Diéder csoport

Ezt a gráf úgy néz ki, mint két mellékutcákkal összekötött egyirányú utca.

4.1.3. Definíció. Tekintsük a $C_\infty \times C_\infty = C_\infty^2$ csoportot. Ezt a csoportot nevezzük a *városi utcák csoportjának.*



4.2. ábra. C_∞^2 Városi csoportja

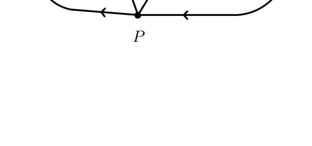
4.2. Útcsoportok

4.2.1. Topológia

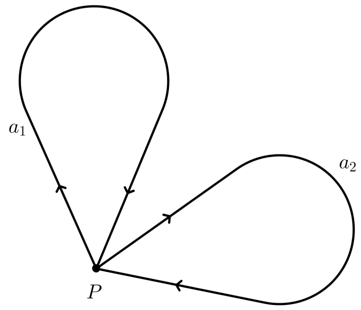
A topológia (régiesen: "helyzetgeometria") a geometriának az az ága, amely a geometriai alakzatok összekötésének módjával foglalkozik, és ugyanakkor olyan tulajdonságokat, mint például a hosszúság, figyelmen kívül hagy. A topológia a geometriai alakzatoknak a folytonos (vagyis szakítás, lyukasztás stb. nélküli) deformációk (pl.:nyújtások, csavarások stb.) közben is megmaradó, vagyis invariáns tulajdonságaival foglalkozik.

4.2.1. Definíció. Zárt utakat tekintünk, amelyek a tér egy fix P pontjában kezdődnek illetve végződnek. A P ponton átmenő a_1 és a_2 utakat egyenlőnek fogjuk nevezni, ha a_1-et folytonos változtatással a_2-be tudjuk deformálni. Az utak ilyen egyenlőségét *homotópiának* nevezzük és a_1 valamint a_2 egyenlő utakat *homotópikusnak* hívjuk.

4.2.2. Megjegyzés. Elsőre úgy tűnhet, hogy a P-n áthaladó összes zárt út egyenlő, vagyis homotópikus. Ha az "üres" térben vesszük fel a P pontot akkor ez igaz. De ha a térben már vannak "akadályok" akkor ez már igaz. Például szorítkozzunk a síkra és kössük ki, hogy egyetlen út sem haladhat át a sík egy fix körlemezén. Ekkor bármely olyan zárt a_1 út folytonosan összehúzható a P kezdőpontjára, amely nem tartalmazza ezt a rögzített kört, viszont a kört magába foglaló a_2 út nem húzható össze folytonosan P kezdőpontjára, és nem deformálható a_1-be anélkül, hogy a tiltott tartományon ne haladnánk át. Ezt szemlélteti az alábbi ábra:



Feladatunk találni egy csoportot a topologikus térben, melynek elemei a homotópikus utak osztályai. Ehhez szükségünk lesz egy bináris műveletre.



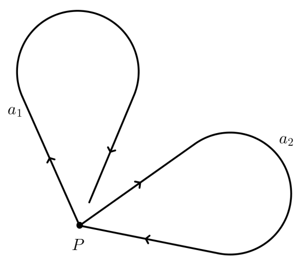
Most nézzük is meg szemléltető ábrák segítségével, hogyan is néz ki a választott bináris műveletünk:

4.2.3. Definíció. Vegyünk egy P pontot a háromdimenziós térben, és tekintsük a P-n átmenő a_1 és a_2 zárt utakat.

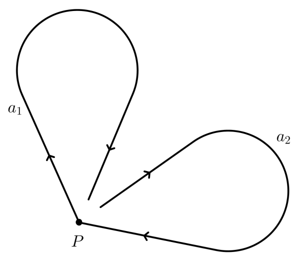
a) Szakítsuk el a_1 végpontját P-től.

b) Szakítsuk el a_2 kezdőpontját P-től.

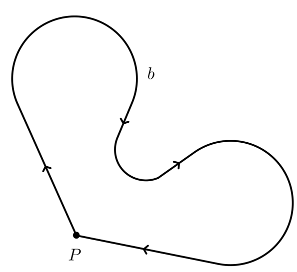
c) Kössük össze a_1 végpontját a_2 kezdőpontjával, eredményül a zárt b utat kapjuk.



(a) lépés



(b) lépés



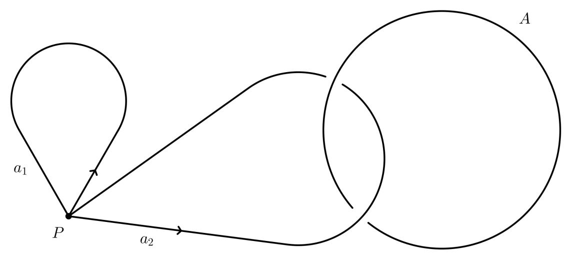
(c) lépés

4.2.4. Megjegyzés. A b-t a_1 és a_2 szorzatának hívjuk, és $a_1a_2 = b$ alakban írjuk. Könnyen belátható, hogy ez a művelet asszociatív.

Most vezessük be az "akadályt" a térben. Az útjaink a háromdimenziós tér bármely pontján áthaladhatnak, kivéve egy speciális zárt görbe pontjain. A meghatározottság kedvéért a görbét tekintsük körnek, és jelöljük most A-val. Azokat a pontokat, amelyek nem a tiltott görbe pontjai sokaságnak nevezzük. Azokat a zárt utakat tekintjük, amelyek a sokaság valamely P pontjában kezdődnek, illetve a sokaság pontjain haladnak át. Legalább két lényegesen különböző helyzet adódhat. Ezeket az alábbi ábránkon a_1 és a_2 útjaink reprezentálják

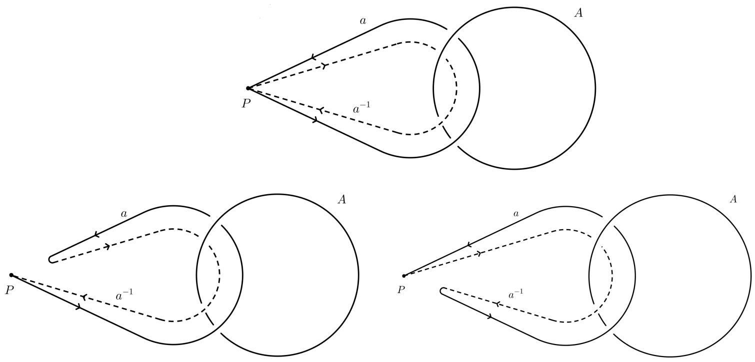
1) Az a_1 út folytonosan összehúzható P-re.

2) Az a_2 út nem húzható folytonosan össze a P-re anélkül, hogy át ne hatoljunk az A görbén.

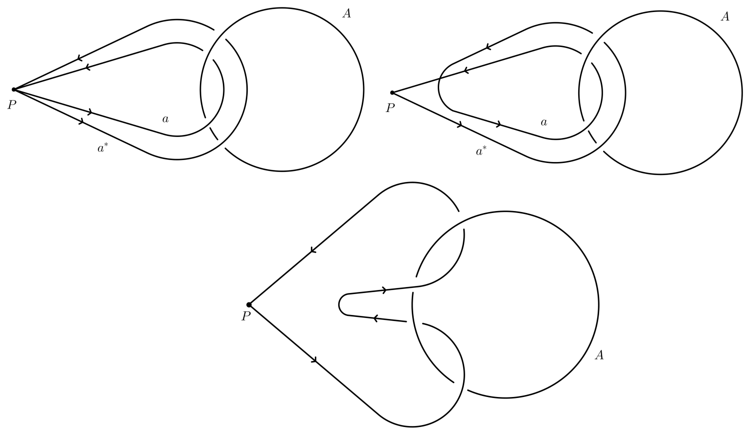


A P-re összehúzható utakat $[e]$-nek hívjuk, a másik homotópia-osztályba vannak az a_2-re folytonosan összehúzható utak (ezek P-re nem húzhatók össze) ezeket $[a]$ jelöli.

4.2.5. Definíció. Egy útnak azt tekintjük inverzének, amit az irány megváltoztatásával kapunk. Bármely homotópikus útnak $[g]$ osztályához található $[g]^{-1}$ osztály, hogy $[g]$ bármely útja $[g]^{-1}$ útjával vett szorzata az $[e]$ útját adja. Belátható, hogy tetszőleges g útra a gg^{-1} és a $g^{-1}g$ az $[e]$-hez tartozó utak. Tekintsük például az alábbi ábrán lévő a utat (az a^{-1} és az a valójában egybeesik, csak szemléltetési célból van külön).

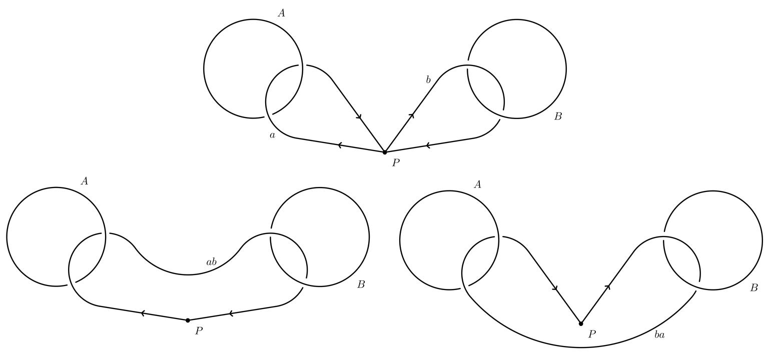


4.2.6. Definíció. Vizsgáljuk még meg az aa vagyis a^2 által reprezentált utak osztályát. Az $[a]$ osztály két különböző útjának szorzatát vesszük, ezeket az utakat az alábbi ábrán a és a^* jelöli.

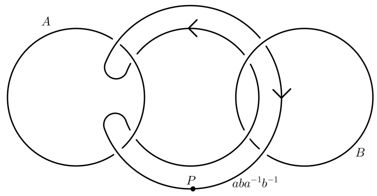


4.2.7. Megjegyzés. A második ábrán látható út átdeformálható a harmadik ábrán látható útba, de se $[e]$-be, se $[a]$-ba nem deformálható. Az a^2 út új osztályba tartozik, amelyet $[a^2] = [a]^2$ jelöli. Ennek létezik $[a^{-2}] = [a]^{-2}$ inverze.
Hasonló módon megkonstruálható az $[a^3]$, $[a^{-3}]$, $[a^4]$, $[a^{-4}]$, $[a^5] \ldots$. A sokaság összes homotópia-osztályának halmaza csoportot alkot.

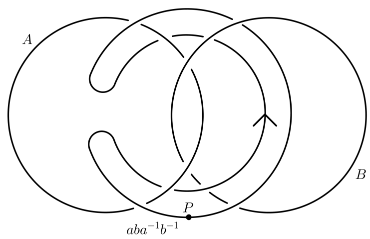
4.2.8. Megjegyzés. Hasonlóan érdekes lehet megvizsgálni a két kör által meghatározott sokaságokat. Először néhány szemléltető ábra arról az esetről melyben a két kör diszjunkt.



Látható, hogy az $aba^{-1}b^{-1}$ út nem húzható össze P-re, tehát $ab \neq ba$. Tehát a csoport nem kommutatív.



Másodszor nézzük azt meg, ha a két kör egymást áthurkolja. Ebben az eset-

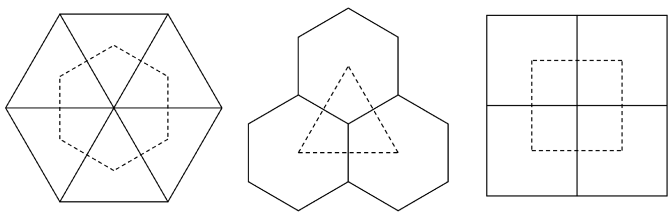


ben belátható az ábra alapján, hogy az $aba^{-1}b^{-1}$ folytonosan deformálható P-be, vagyis az $[e]$ osztályba tartozik, vagyis kommutatív. Segítségként hasonlítsuk össze a második csoportnak az ábráját, az előző nem kommutatív csoportnak az ábrájával.

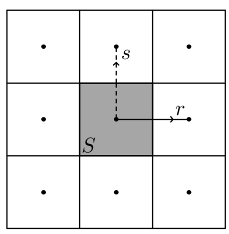
4.3. Csoportok és tapétatervek

Csoportok tanulmányozása lényegében a struktúra és relációk tanulmányozását jelenti. Éppen ezért gyakran találkozhatunk olyan mintával, amely ismétlődve befedi az egész síkot, és ez valamilyen csoportnak felel meg. A legrégebbi csoport-reprezentációt a tizenharmadik században, a mórok készítették, ekkor építették ugyanis a granadai Alhambrát. Mivel ezeket a csoportokat, gyakran tapétákra festették, ezért ezeket a csoportokat szokás tapétacsoportoknak hívni. Összesen 24 tapétacsoport van, közülük hétnek a gráfja csak a végtelen sávban ismétlődik, a maradék 17 pedig az egész síkra kiterjed. Ebben a fejezetben csak az utóbbiakkal foglalkozunk.

Ha az egész síkot szabályos sokszöggel szeretnénk befedni, akkor belátható, hogy az alábbi három eset van, melyből az első kettő egymás duálisa, míg a harmadik önmagának duálisa.

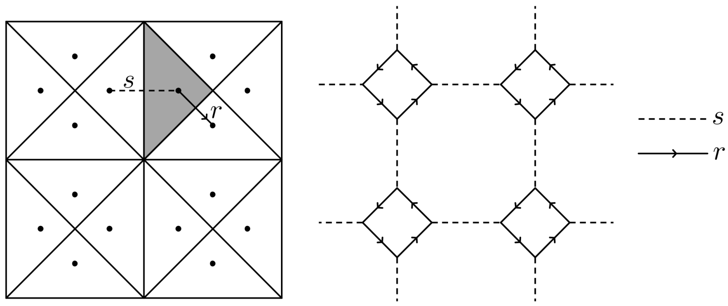


4.3.1. Definíció. Megmutatjuk, hogy ez miért is alkot csoportot. Az egyszerűség kedvéért csak a harmadik ábrával mutatjuk meg. Ehhez az alábbi ábrát mellékelem, ezen illusztrálom, hogy ez tényleg csoport.

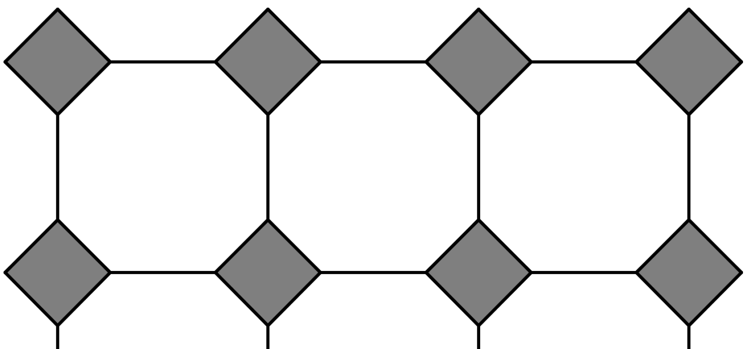


4.3.2. Definíció. Látható, hogy itt s és r generátorok különböző irányú eltolást jelentenek. Ha az ábrára nézünk, láthatjuk, hogy ez igazából a mutatott városi utcák csoportjával izomorf.

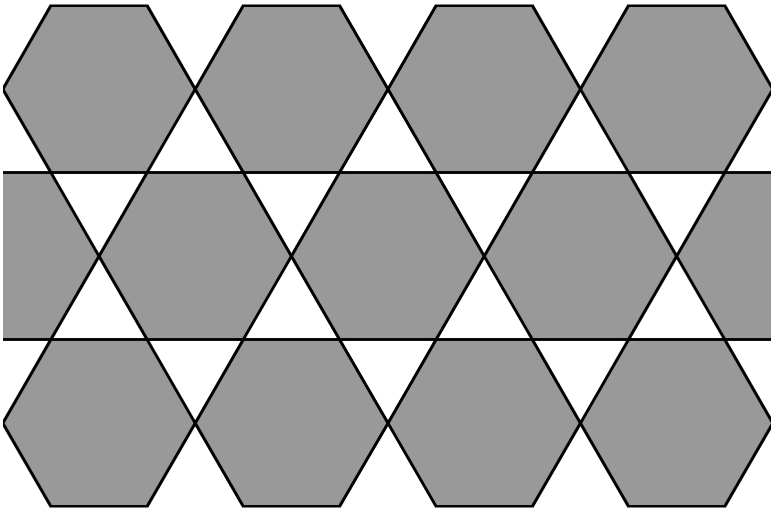
A következő tapétacsoportban egy derékszögű háromszöget tekintünk, melyet szintén két elem generál: egy r : $90°$-os forgatás a derékszögű csúcs körül, és egy s átfogóra való tükrözés. Ennek az ábrája itt látható: Ennek a csoportnak a



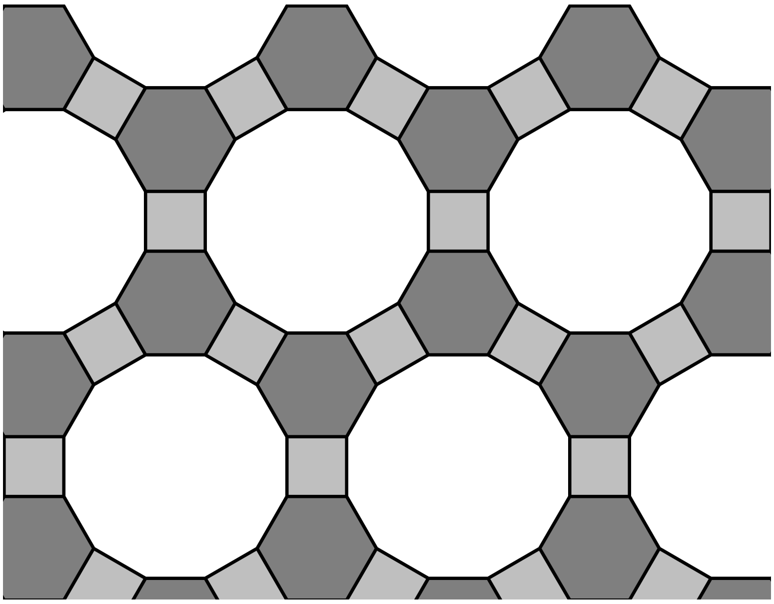
relációi: $r^4 = s^2 = (rs)^4 = e$. Ennek a csoportnak elkészítettem a tapétatervét, ami itt látható:



4.3.3. Példa. Utolsónak vegyünk egy $60°$-os rombuszt, melynek két generátora: $r = 120°$-os forgatás az egyik $120°$-os csúcs körül, a másik generátor $s = 120°$-os forgatás a másik $120°$-os csúcs körül. Ennek relációi: $r^3 = s^3 = e$. Ennek már csak a tapétatervét mellékelem:



Lezárásként pedig egy látványos tapétatervvel szeretném befejezni a szakdolgozatom.



Irodalomjegyzék

[1] Israel Grossman–Wilhelm Magnus: Csoportok és gráfjaik, Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1972

[2] Fuchs László: Algebra, egyetemi jegyzet

[3] Kiss Emil: Bevezetés az algebrába, TypoTeX 2007

[4] Bántai Péter: Csoportelmélet, jegyzet fizikus hallgatóknak

[5] W. Magnus, A. Karrass, D. Solitar: Combinatorial group theory, *Wiley-Interscience*, 1966

[6] http://hu.wikipedia.org/

[7] http://www.ams.org/mathscinet