Versenyfeladatok

Középiskolai versenyfeladatok megoldása és rendszerezése

Szakdolgozat

Készítette: Nováky Csaba

Témavezető: Dr. Fried Katalin

Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Kar

Matematika Alapszak Tanári Szakirány

2013

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Szakdolgozatom legfontosabb célja az, hogy összegyűjtsek olyan versenyfeladatokat, amelyek a középiskolások gondolkodását fejlesztik, javítják a problémamegoldó képességüket. Emellett az is célom, hogy megmutassam, hogy a matematika milyen szép. Kevés olyan feladat van, amelyre csak egyféle megoldás létezik, legtöbbször számtalan, egymástól lényegesen különböző megoldása van egy feladatnak. Ezeknek a megoldásoknak a felfedezése nagyon hasznos, hiszen fejlesztik a problémamegoldó képességet, ami nem csak a matematika tudományán belül, hanem az élet bármilyen területén hasznos. Vegyük például azt a nagyon egyszerű esetet – ami velem is gyakran előfordul –, hogy elmegyek vásárolni, és rengeteg aprópénzem van. Mivel az aprót a zsebemben tartom, és nem pénztárcában, ezért kényelmetlen néha leülni, így vásárláskor az az egyik fő szempontom, hogy minél több aprópénztől „szabaduljak meg". Ekkor a kasszánál tulajdonképpen egy diofantoszi problémát kell megoldani, hogyan tudok minél több aprópénztől megválni, ha ismerem a pénzek mennyiségét és értékét.

Természetesen nem csak a vásárlásnál hasznosítható a matematikai tudás. Az emberek nagy százaléka hajlamos azt hinni, hogy a matematikus csak számol. Ez természetesen nem igaz. A számolás a számológépek, számítógépek feladata. A matematikus és a matematika tudománya a problémák modellezésével foglalkozik. Ez egy absztrakt tudomány, az ember alkotta, mert szüksége volt rá. A régi kor emberének fontos feladata volt, hogy meg tudja számolni, hány haszonállata van. Először az ujjait használta, minden egyes állatot egy-egy ujjának feleltetett meg, innen is származik valószínűleg a 10-es számrendszerünk. Ám ha több, mint 10 állatot akart számon tartani, akkor szüksége volt a természetes számok bevezetésére. Később műveleteket végzett ezekkel a számokkal, ha az egyik állat egy utódot hozott létre, a meglévő számhoz hozzáadott egyet, ha elpusztult egy jószág, kivont egyet az összegből. Később szüksége lett a szorzás műveletére is, ha azt akarta megszámolni, hogy egy 4 oszlop széles és 5 sor hosszú istállóba hány lovat tud betenni. Visszafelé gondolkozva megszületett az osztás művelete is, majd hasonlóan a többi művelet. Ez azt bizonyítja, hogy az embereknek szükségük volt a matematikára.

Jövőbeli tanárként éppen az az egyik célom, hogy a diákokkal megszerettessem a matematikát. Tisztában vagyok vele, hogy nem mindenki rajong a versenyfeladatokért, és nem lehet mindenkitől elvárni, hogy nehéz feladatokat oldjon meg. Ezért a szakdolgozatomban a feladatok megoldását részletesen írtam le, tettem bele egészen könnyű és nehezebb feladatokat is. Néhány feladatnál többféle teljesen különböző megoldást is megadtam, valamint a feladatok által inspirálva alkottam néhány új feladatot is. Egyik legkedveltebb témaköröm a sorozatok, így az ilyen típusú feladatokból található a legtöbb, de emellett összegyűjtöttem egyenleteket, egyenlőtlenségeket, geometriai feladatokat, oszthatósággal kapcsolatos feladatokat, valamint olyan feladatokat, amelyek megoldásához az algebra és az analízis eszközeit használtam fel. Mivel középiskolásokat szeretnék elsősorban tanítani, ezért a feladatokhoz felhasznált ismeretek nem lépik túl a középiskola szintjét.

Középiskolásként gyakran jártam matematikaversenyekre, ahol többé-kevésbé jó eredményeket sikerült elérnem. Emlékszem arra, amikor országos versenyeken zártam előkelő helyen, mennyire felemelő érzés volt. Ezt az érzést szeretném megismertetni azokkal, akiknek eddig nem volt lehetőségük vagy kedvük a versenyzésre, esetleg nem szeretik a matematikát.

Szakdolgozatomban először a sorozatokról írok részletesen, ahol van KÖMAL-os feladat, de szerepelnek az elemi matematika nevű kurzuson tárgyalt problémák is. A legtöbb feladatot általánosítottam, próbáltam nehezebb példákat konstruálni, több megoldást megadni. Igyekeztem minél szemléletesebb módszerekkel dolgozni, hogy a középiskolások érdeklődését is felkeltsem. Ezt követően az egyenletekkel és egyenletrendszerekkel foglalkoztam, matematikaórán talán ezzel találkoznak a leggyakrabban a középiskolás diákok, így fontosnak tartom, hogy az egyenleteket nagy magabiztossággal kezeljék, eljutva a helyes megoldásig. Ezután egy egyenlőtlenséggel is foglalkoztam egy példán keresztül, melynek megoldásához szükség van a számtani-mértani közepek közti összefüggésről tanult ismeretekre is, mint ahogy igaz ez a következő témakörre is, ami a geometria. A dolgozatom végén gyűjtöttem néhány oszthatósági problémát. A feladatok megoldása előtt írtam néhány gondolatot arról, hogy hogyan jöhetünk rá a megoldásra, és milyen eszközökre van szükségünk.

Sorozatok

A sorozatok rengeteg helyen előfordulnak a matematikában. Vannak véges és végtelen sorozatok is. Van, hogy valahányadik elemét szeretnénk meghatározni egy sorozatnak, de előfordul az is, hogy egy sorozat elemeinek összegéről szeretnénk megmondani, hogy mennyi. Egy sorozatot megadhatunk hozzárendelési szabállyal explicit és implicit, rekurzív és direkt módon, vagy felsorolással, de előfordulhat az is, hogy a sorozatot olyan logika szerint adjuk meg, amely folytatható, ám nem adható meg képlettel. Ilyen például az a sorozat, amelyben a pi szám tizedes jegyeit soroljuk fel.

Az első feladat egy számtani sorozatról szól, ám egy kis nehézséget okoz az, hogy tulajdonképpen ez két számtani sorozat egymásutánja.

KÖMAL C. 1143.

Egy számsorozat induló elemei a 2, 4, 6, stb. páros számok. Egy bizonyos elemtől kezdve a sorozat $d = 3$ *differenciájú számtani sorozattal folytatódik. Melyik ez az elem, ha a sorozat első 50 elemének összege 2985?*

A megoldásra úgy juthatunk a legkönnyebben, ha felhasználjuk a számtani sorozatokról ismert összefüggéseket. A legfontosabb feladat, hogy meghatározzuk az első sorozat utolsó elemét, hiszen innentől kezdve két számtani sorozatra bonthatjuk a sorozatot.

Másik megoldási lehetőség a „favágós" próbálkozós módszer. Ha egy logika szerint haladunk a próbálkozás során, hamar eredményre juthatunk.

Megoldás:

Legyenek a 2-es differenciájú sorozat elemei: a_i, ahol i nullánál nagyobb és 50-nél kisebb egész szám, a_k ennek a sorozatnak az utolsó eleme. A 3-as differenciájú sorozat elemeit jelöljük b_j-vel, ahol j nullánál nagyobb egész szám, b_l ennek a sorozatnak az utolsó eleme. S_k-

val jelölöm az első sorozat összegét, S_l-lel a második sorozat összegét. Tudjuk, hogy $a_1 = 2$, $d_1 = 2$, $d_2 = 3$, $n = k + l = 50$, valamint azt is, hogy $S_k + S_l = 2985$.

Számtani sorozatokra tudjuk, hogy a következő összefüggések igazak:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \qquad a_n = a_1 + (n-1)d$$

Ezekből következik:

$$S_n = \frac{n(2a_1 + (n-1)d)}{2}$$

Tudjuk, hogy:

$$a_k = a_1 + (k-1)d_1$$

Azaz:

$$a_k = 2 + (k-1)2 = 2k$$

Az első sorozat összege a képlet alapján:

$$S_k = \frac{k(2a_1 + (k-1)d_1)}{2}$$

Behelyettesítve a következő értékeket kapjuk:

$$S_k = \frac{k(4 + (k-1)2)}{2} = \frac{2k^2 + 2k}{2} = k^2 + k$$

Ekkor a következő elem a 3-as differenciájú sorozat első eleme lesz, egyben a kérdéses elem is, azaz:

$$a_{k+1} = a_k + d_2$$

Tehát:

$$a_{k+1} = 2k + 3$$

A második sorozat összegképlete a következő:

$$S_l = \frac{l(2a_{k+1} + (l-1)d_2)}{2}$$

Behelyettesítve a kifejezéseket kapjuk:

$$S_l = \frac{l(2\cdot(2k+3) + (l-1)3)}{2} = \frac{4kl + 6l + 3l^2 - 3l}{2}$$

Mivel tudjuk, hogy $S_n = S_k + S_l = 2985$, $k + \mathrm{l} = 50$, így a 2 egyenletből álló egyenletrendszert felírva megoldhatjuk:

$$S_n = S_k + S_l = k^2 + k + \frac{4kl + 6l + 3l^2 - 3l}{2}$$

$$k + l = 50 \Rightarrow l = 50 - k$$

Az első egyenletbe l helyére behelyettesítve 50-k-t kapjuk:

$$S_n = k^2 + k + \frac{4k(50-k) + 6(50-k) + 3(50-k)^2 - 3(50-k)}{2}$$

Felbontva a zárójeleket kapjuk:

$$2985 = k^2 + k + \frac{200k - 4k^2 + 300 - 6k + 7500 - 300k + 3k^2 - 150 + 3k}{2}$$

$$2985 = k^2 + k + \frac{-k^2 - 103k + 7650}{2}$$

Az egyenlet mindkét oldalát szorozzuk meg 2-vel:

$$5970 = 2k^2 + 2k - k^2 - 103k + 7650$$

Nullára rendezve kapjuk:

$$0 = k^2 - 101k + 1680$$

A másodfokú egyenlet megoldóképletével kapjuk:

$$k_{1,2} = \frac{101 \pm \sqrt{101^2 - 4 \cdot 1680}}{2} = \frac{101 \pm \sqrt{3481}}{2} = \frac{101 \pm 59}{2}$$

$k_1 = 80$

$k_2 = 21$

Mivel k értéke 0-nál nagyobb és 50-nél kisebb kell, hogy legyen, ezért csak a $k_2 = 21$ lesz a megoldás.

Ez azt jelenti, hogy az első sorozat utolsó eleme a 21. elem.

A keresett elem a 22., ezt a következő összefüggés alapján kaphatjuk meg:

$$a_{k+1} = a_k + d_2 = a_1 + (k-1) \cdot d_1 + d_2 = 2 + (21-1) \cdot 2 + 3 = 45$$

Tehát a keresett tag a 45.

Ebben a feladatban látható, hogy egy egyszerűnek tűnő, két egymást követő számtani sorozatból álló sorozatot viszonylag bonyolultan tudunk felírni. Valószínűleg ebben az esetben hamarabb megkapnánk a megoldást, ha egyszerűen elkezdjük próbálgatni a megoldásokat aszerint, hogy a sorozat hányadik elemétől változik a differencia. Érdemes úgy próbálkozni, hogy ha a végeredmény, amit kapunk, kisebb a kérdéses összegnél, akkor feltételezzük, hogy a sorozat alacsonyabb sorszámú eleme lesz a megoldás – ha az összeg nagyobb a vártnál, akkor nagyobb sorszámú elemmel próbálkozunk. Ez a megoldás akkor alkalmazható, ha a középiskolás diák, aki a feladatot meg szeretné oldani, még nem tanult a sorozatokról, de ügyesen ki tudja számolni (például párosítással) az összegeket. Ezeket a próbálkozásokat felírva:

1. próba: Legyen $k = 25$, hiszen ez a sorozat közepét éppen megelőző elem, ekkor két egyenlő részre osztjuk a számokat. Ebben az esetben kapjuk:

   $a_1 = 2$ $a_{25} = 50$ $S_k = 650$

   $a_{26} = b_1 = 53$ $a_{50} = b_{25} = 125$ $S_l = 2225$

   $S = 2875$, ez az összeg kisebb, mint 2985, ezért próbáljunk ki egy kisebb számot.

2. próba: Legyen $k = 13$, ez középen van 1 és 25 között. Ekkor:

   $a_1 = 2$ $a_{13} = 26$ $S_k = 182$

   $a_{14} = b_1 = 29$ $a_{50} = b_{37} = 137$ $S_l = 3071$

   $S = 3253$, ez nagyobb, mint 2985, ezért a k értéke 13 és 25 között lesz.

3. próba: Legyen $k = 19$, hiszen ez az átlaga 13-nak és 25-nek:

   $a_1 = 2$ $a_{19} = 38$ $S_k = 380$

   $a_{20} = b_1 = 41$ $a_{50} = b_{31} = 131$ $S_l = 2666$

   $S = 3046$, ez ismét nagyobb a kérdéses összegnél, így k értékét növelni kell.

4. próba: Legyen $k = 22$, ekkor:

   $a_1 = 2$ $a_{22} = 44$ $S_k = 506$

   $a_{23} = b_1 = 47$ $a_{50} = b_{28} = 128$ $S_l = 2450$

   $S = 2956$, ez az érték kisebb, mint 2985, ezért válasszuk k értékét 22-nél kisebbnek, de 19-nél nagyobbnak, tehát már csak a 20 és 21 maradt.

5. próba: Legyen $k = 21$, ekkor

   $a_1 = 2$ $a_{21} = 42$ $S_k = 462$

$a_{22} = b_1 = 45$ $a_{50} = b_{29} = 129$ $S_l = 2523$

$S = 2985$, tehát megtaláltuk a helyes eredményt.

Egy másik ötlet az, ha feltesszük, hogy a sorozatunk egy 50 elemű, 2-es differenciájú sorozat, ennek az összege 2550 lenne, ami 435-tel kisebb a 2985-nél. Tudjuk, hogy a sorozat valahányadik elemétől kezdve 3-as differenciájú sorozat lesz. Ettől a tagtól kezdve a sorozat növekményének növekedése 1, 3, 6, 10, stb. (háromszögszámok) lesz, vagyis azt kell megtalálnunk, hogy hányadik háromszögszám a különbség. Tudjuk, hogy az n-edik háromszögszám a következő összefüggéssel adható meg:

$$\binom{n+1}{2}$$

Tehát a következő egyenletet kell megoldanunk:

$$\binom{n+1}{2} = 435$$

$$\frac{(n+1)\cdot n}{2} = 435$$

$$n^2 + n - 870 = 0$$

A másodfokú egyenlet megoldóképletével kapjuk:

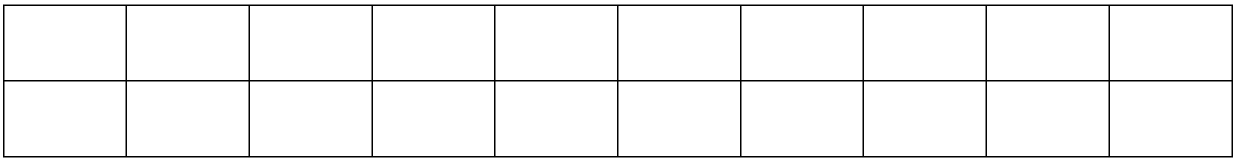
$$n_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4\cdot 870}}{2} = \frac{-1 \pm 59}{2}$$

Mivel n pozitív, ezért csak az n = 29 megoldás. Ez azt jelenti, hogy 29 elemű a 3-as differenciájú sorozat, ebből következően 21 elemű a 2-es differenciájú sorozat, melynek utolsó eleme a 42, tehát a 22. elemtől (45) kezdődően a sorozat 3-as differenciájú.

Ehhez a megoldáshoz szükség volt a háromszögszámok ismeretére.

A következő feladat is egy sorozatra vezető feladat:

Hányféleképpen fedhető le egy 2 · *n-es téglalap hézag és átfedés nélkül 1 · 2-es téglalapokkal (dominókkal)?*



Ezt a feladatot érdemes először kis *n*-ekre vizsgálni. Ezek alapján kapunk egy sorozatot, aminek vagy sikerül megadnunk a képletét, vagy nem. Utóbbi esetben célravezető az a gondolat, hogy mi lenne akkor, ha már csak az utolsó 2 · 2-es téglalapot szeretnénk lefedni. Nem árt ismerni a Fibonacci- sorozatot ehhez a feladathoz. Ha pedig eddig nem ismertük, a feladat megoldása alapján majd megismerkedünk vele.

Megoldás:

2 lefedés különböző, ha létezik legalább egy olyan dominó, melynek az elhelyezése más. A dominókat egymástól nem különböztetjük meg.

Először vizsgáljuk meg az egyszerűbb eseteket! Nézzük meg, mi a helyzet *n* = 1, 2, 3, 4, 5-re.

Világos, hogy egy dominó helyzete vagy függőleges, vagy vízszintes lehet, valamint ha elhelyeztünk már egy dominót vízszintesen, akkor annak az oszlopába egy másik dominót is vízszintesen kell, hogy lerakjunk.

n = 1 esetén triviális, hogy 1 féle módon fedhető le a téglalap.

n = 2 esetén le lehet fedni két függőleges irányban elhelyezett (álló) dominóval, vagy két vízszintes irányban elhelyezett (fekvő) dominóval. Ez összesen 2 lehetőség.

n = 3 esetén lehet 3 álló, vagy 2 fekvő és 1 álló, de az utóbbi 2 különböző elrendezésben lehetséges, így ez 3 féleképpen fedhető le.

n = 4 esetén lehet 4 álló, vagy 4 fekvő, vagy 2 fekvő és 2 álló, az utóbbi 3 különböző módon lehetséges, így ebben az esetben a megoldásunk 5 lesz.

$n = 5$ esetén lehet 5 álló, vagy 4 fekvő és 1 álló, ebből 3 féle lefedés lehetséges, 2 fekvő és 3 álló, ebből 4 különböző lefedés létezik, más nem lehet, ez összesen 8 féle lefedés.

A feladat hátralévő részében hívjuk blokknak a 2 egymás alatt fekvő dominóból álló alakzatot.

Az egyszerűbb esetekben a lefedések számai a következőképpen alakultak:

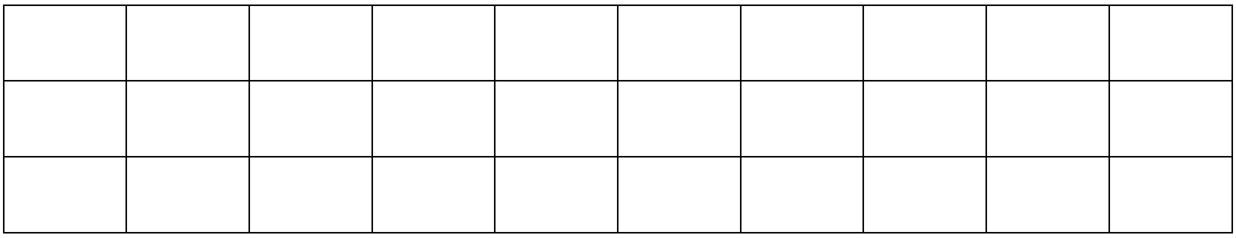
1 2 3 5 8

Ismerős lehet ez a sorozat, hiszen észrevehető, hogy a 3. elemétől minden eleme úgy kapható meg, hogy az előző két elemét összegezzük. Ez lényegében a Fibonacci-sorozat. Az első két elem 1 és 1, a további elemeket az előző kettő összegeként kapjuk. Tehát próbáljuk meg bebizonyítani, hogy egy $2 \cdot n$-es téglalap hézag és átfedés nélkül $1 \cdot 2$-es dominókkal az n-edik Fibonacci-szám féleképpen fedhető le.

Tegyük fel, hogy a $2 \cdot n$-es téglalapot $2 \cdot (n - 1)$-ig fedtük le, akkor a maradék $1 \cdot 2$-es helyre csak egy álló helyzetben lévő dominót rakhatunk, tehát ez 1 lehetőség. Ez mindig megtehető, hiszen vagy álló, vagy fekvő dominót helyeztünk el, ha fekvő dominót rakunk le, akkor kell annak oszlopába is egy másik fekvő dominó, így kapunk egy blokkot, hiszen más esetben sérülne a hézagmentes feltétel. Ha a $2 \cdot n$-es téglalapot már lefedtük $2 \cdot (n - 2)$-ig, akkor a hátralévő $2 \cdot 2$-es helyre vagy 2 álló dominót, vagy egy blokkot helyezhetünk el. Ha 2 álló dominót raknánk, akkor az első dominó elhelyezése után olyan esetet kapnánk, amit az előzőben már megszámoltunk. Ezért csak azzal kell foglalkoznunk, hogy ha a $2 \cdot 2$-es helyre egy blokkot teszünk, ekkor diszjunkt esetekkel foglalkozunk. Ez mindösszesen csak 1 lehetőség. Ezért tehát az utolsó helyre annyi módon helyezhető el a dominó, ahányféleképpen lefedtük a $2 \cdot (n - 2)$-es téglalapot, plusz ahányféleképpen lefedtük a $2 \cdot (n - 1)$-es téglalapot. Tehát a $2 \cdot n$-es téglalap mindig az $(n - 2)$-es téglalap lefedése plusz az $(n - 1)$-es téglalap lefedése lesz, amely pont a Fibonacci-sorozatot adja (a második elemétől).

Ehhez hasonló a következő feladat:

Hányféleképpen fedhető le egy $3 \cdot n$*-es téglalap hézag és átfedés nélkül* $1 \cdot 3$*-as téglalapokkal (dominókkal)?*



A megoldási ötlet nagyon hasonló az előző feladatéhoz, érdemes itt is először kis n-ekre megnézni, milyen sorozatot kapunk. Ha nem találunk rá a képletre, érdemesebb azt vizsgálni, amikor már lefedtük az egész téglalapot, kivéve az utolsó $3 \cdot 3$-as részt.

A rekurzív sorozatok ismerete ennél a feladatnál fontos.

Megoldás:

Nézzük meg kis n-ek esetén!

Nyilvánvaló, hogy egy $3 \cdot 1$-es téglalap egyféleképpen fedhető le $1 \cdot 3$-as dominóval.

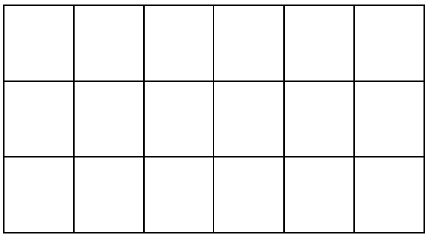
$n = 2$ esetén csak két álló dominót helyezhetünk el, így ez is csak egyféle lefedés.

$n = 3$ esetén viszont látható, hogy lehet 3 álló vagy 3 fekvő dominó is, mellyel lefedjük, tehát ebben az esetben a lefedések száma: 2.

$n = 4$-re lefedhető 4 álló dominóval, vagy 3 fekvő (blokk) és egy állóval, ezt kétféleképpen tehetjük meg, összesen ez tehát 3 különböző megoldást ad.

$n = 5$ esetén lehet 5 álló dominónk, vagy 3 fekvő és 2 álló, ezt 3 féleképpen tehetjük meg, tehát ez 4-féle lefedés.

$n = 6$-ra lehet 6 álló dominónk, vagy egy blokk és 3 álló (4 lehetőség), vagy 2 blokk (1 lehetőség), összesen ez 6 lehetőség.



A sorozatunk első néhány eleme:

1 1 2 3 4 6 9 13 19…

Észrevehető, hogy a sorozat n-edik elemét úgy kapjuk meg, ha összeadjuk az előtte álló és a hárommal előtte álló elemet. Bizonyítsuk be ezt a sejtést!

Tegyük fel, hogy $3 \cdot (n - 1)$ elemet már lefedtünk a_{n-1} féleképpen. Ekkor az utolsó dominót már csak álló helyzetben rakhatjuk le, tehát ez a_{n-1} féle lehetőség. Ha $3 \cdot (n - 2)$ elemet lefedtünk a_{n-2} féleképpen, akkor már csak két álló dominót tudunk elhelyezni, de amikor az első dominót lerakjuk, megkapjuk azt az esetet, amikor $3 \cdot (n - 1)$ téglalapot fedtünk le, de ezt már összeszámoltuk az előző esetnél. Tehát a $3 \cdot (n - 2)$ téglalap lefedése nem adott újabb lefedési lehetőséget. Ha $3 \cdot (n - 3)$ téglalapot lefedtünk a_{n-3} féleképpen, akkor a maradék $3 \cdot 3$-as téglalapot vagy 3 álló dominóval, vagy egy blokkal fedhetjük le. Ha 3 álló dominót választanánk, ismét átmennénk az előző lefedési lehetőségekbe, amiket már összeszámoltunk. Így csak az a lehetőségünk maradt, hogy egy blokkal fedjük le a megmaradt $3 \cdot 3$-as téglalapot. Ezt egyféleképpen tehetjük meg. Így az összes esetet kiszámoltuk, hiszen ha $3 \cdot (n - 4)$-et fednénk le a_{n-4} féleképpen, akkor utána ha álló dominót teszünk, átmegyünk a $3 \cdot (n - 3)$-as lefedésbe, ha blokkot teszünk, akkor azt már összeszámoltuk a $3 \cdot (n - 1)$-es lefedésnél. A lefedések száma tehát:

$a_n = a_{n-1} + a_{n-3}$, ha $n > 3$.

Ezzel igazoltuk a sejtésünket.

Ugyancsak sorozatokhoz vezet a következő feladat is. Látni fogjuk, hogy bár a probléma különböző, a megoldási módszer mégis nagyon hasonló az előző feladatokéhoz.

Hányféleképpen juthatunk fel egy n-fokú lépcsőn, ha egy lépésben egy vagy két fokot juthatunk feljebb?

Érdemes először kis n-ekre vizsgálódni. Ha a megoldást megsejtjük, akkor utána próbáljuk meg azt bebizonyítani. Célra vezet, ha azt vizsgáljuk meg, hogy az n – 2-edik fokra már valahogy feljutottunk, és onnan hányféle módon léphetünk a tetejére.
A rekurzív sorozatok ismerete szükséges lehet a feladat megoldásához.

Megoldás:
Vizsgáljuk meg itt is az egyszerűbb eseteket (n = 1, 2, 3, 4, 5)
n = 1-re nyilván 1 feljutás lehetséges.
n = 2-re vagy két egyes, vagy egy kettes lehet, ez 2 lehetőség.
n = 3-ra lehet 3 egyes, vagy egy kettes és egy egyes, ez 2 féleképpen lehet, tehát ez összesen 3-féle lehetőség.
n = 4-re lehet 4 egyes, vagy két kettes, vagy egy kettes és két egyes, ez 3 féleképpen lehet, összesen ez 5 féle feljutást eredményez.
n = 5-re lehet 5 egyes, vagy 2 kettes és 1 egyes (3 féle lehetőség), vagy 1 kettes és 3 egyes (4 féle lehetőség), összesen ez tehát 8 féle feljutás.
2 eset lehetséges: az utolsó lépésünk vagy egy egyes lesz, vagy egy kettes. Hasonlóan itt is tegyük fel, hogy eljutottunk az n – 1-edik lépcsőfokhoz. Ekkor az utolsó lépésünk már csak egy egyes lehet, hiszen már csak 1 lépcső van hátra. Ha az n – 2-edik lépcsőfokig jutottunk el, akkor az utolsó lépésünk lehet egy kettes, vagy két egyes, de ebbe beleszámolnánk azt, amikor az n – 1-edik lépcsőfokig jutottunk el. Tehát ha az utolsóelőtti lépcsőfokról és az azelőtti lépcsőfokról való feljutást összeszámoljuk, majd ezeket összegezzük, megkapjuk az összes lehetséges feljutást az n-fokú lépcsőn. Habár nem tudjuk, hogy hányféleképpen jutottunk fel az n – 2-edik illetve az n – 1-edik lépcsőfokra, de tudjuk, hogy az n-edikre a

kettő összege féleképpen juthatunk fel, tehát az n-edik lépcsőfokra való feljutások száma az $(n + 1)$-edik Fibonacci-szám lesz.

A következő feladatokat ezek mintájára találtam ki:

Hányféleképpen juthatunk fel egy n-fokú lépcsőn, ha egy lépésben egy vagy három fokot juthatunk feljebb?

Megoldás:
A gondolatmenet teljesen azonos az előző feladatéval. Itt azt az esetet nézzük, amikor valahogy már feljutottunk az $n - 1$-edik fokra. Ekkor csak egy egyest léphetünk, tehát egyféleképpen juthatunk fel. Ha az $n - 2$-edik fokig jutottunk fel, akkor két egyest kell lépnünk, de ezt megtettük az $n - 1$-edik fokról is, hiszen ugyanoda jutunk. Ha az $n - 3$-adik fokon állunk, akkor léphetünk 3 egyest, vagy egy 3-ast. A 3 egyessel már egy előbb összeszámolt megoldást kapunk, így csak az az új megoldás, ha egy hármast lépünk. Az $n - 4$-edik fokról nem juthatunk fel másképp, csak úgy, ha érintjük az előbb már összeszámoltakat, és ez igaz minden alsóbb lépcsőfokra. A megoldások száma, ha a_n-nel jelöljük az n-edik fokra való feljutást: $a_n = a_{n-3} + a_{n-1}$, ha $n > 3$.

Hányféleképpen juthatunk fel egy n-fokú lépcsőn, ha egy lépésben maximum három fokot juthatunk feljebb?

Ez a feladat közelebb áll a valósághoz, hiszen ha egy ember tud 1 fokot és 3 fokot is lépni a lépcsőn, akkor valószínűleg tud 2 fokot is lépni. Mi változik vajon a feladat megoldásában? Világos, hogy a gondolatmenet itt sem fog változni.

Megoldás:

Az utolsó lépésünk lehetett egyes, kettes, és hármas. Tegyük fel, hogy az $n - 1$-edik lépcsőfokra feljutottunk, ezt a_{n-1} féleképpen tehettük meg, innen már csak egyet léphetünk, tehát ez a_{n-1}-féle megoldás. Ha az $n - 2$-edik lépcsőfokig jutottunk a_{n-2} féleképpen, akkor innen léphetünk két egyest, de ezt már összeszámoltuk az előbb, vagy léphetünk egy kettest, ez új lehetőség. Ha az $n - 3$-adik fokon vagyunk, ide a_{n-3} féleképpen juthatunk fel. Innen léphetünk 3 egyest, ezt már összeszámoltuk az előbb, léphetünk egy kettest majd egy egyest, de akkor az $n - 1$-edik fokra jutunk, amit már szintén számoltunk. Léphetünk egy egyest és utána egy kettest, de ekkor az $n - 2$-edik fokra jutunk fel, amit az előbb már összeszámoltunk. Az egyetlen új lehetőség tehát az, ha egy hármast lépünk. Az $n - 4$-edik fokra felérvén nem tudunk új lehetőséget kapni, hiszen onnan vagy az $n - 3$, $n - 2$, $n - 1$-edik fokra lépünk, mivel 4-et nem léphetünk. Az összes lehetőségünk tehát: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$, ha $n > 3$.
A sorozat első néhány eleme: 1 2 4 7 13 24 44 …

A feladat tovább általánosítható, ha megengedünk egy akármilyen nagy lépést.

Hányféleképpen juthatunk fel egy n-fokú lépcsőn, ha bármekkora lépést tehetünk a feljutásunk során?

Ebben az esetben az előző feladatok mintájára várható, hogy a következő összefüggést fogjuk kapni:
$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + a_{n-4} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1.$
Ezzel az a gond, hogy meg kell határozni az összes lépcsőfokra való feljutások számát, így nem jutunk előrébb. Ebben az esetben ne rekurzívan oldjuk meg a feladatot, hanem próbáljuk meg a lehetőségeket összeszámolni a lépések száma szerint.
A kombinatorikai kiválasztás fogalmát használjuk ehhez a megoldáshoz.

Megoldás:

n = 1-re nyilván csak egy egyessel juthatunk fel, tehát az 1 a sorozat első eleme.

n = 2-re két egyes vagy egy kettessel juthatunk fel, tehát a 2. elem a 2.

n = 3-ra fel lehet jutni 3 egyessel, egy kettessel és egy egyessel 2 féleképpen, és egy hármassal, ezért a 4 adódik.

n = 4 esetén fel lehet jutni 4 egyessel, 1 hármassal és egy egyessel 2 féleképpen, 2 kettessel egyféleképpen, 2 kettessel és 2 egyessel 3 féleképpen, valamint léphetünk 4-est is. Ez esetben a megoldás 8 lesz.

A lépések száma szerint vizsgáljuk meg a lehetőségeket.

1 lépésből mindig egyféleképpen juthatunk fel.

2 lépésből úgy juthatunk fel, hogy az n-edik lépcsőfok kivételével bármelyik fokra léphetünk elsőnek, majd utána az n-edikre lépünk. Ezt $n-1$ féle módon tehetjük meg.

3 lépésből az $n-1$ lépcsőfokból kettőt kell kiválasztani, ahová lépünk, ezért a 3 lépésből való feljutások száma:

$$\binom{n-1}{2}$$

Ha 4 lépésből akarunk feljutni, 3 fokot kell kiválasztani, ezért adódik:

$$\binom{n-1}{3}$$

Látható, hogy a következő összeget akarjuk meghatározni:

$$\sum_{k=0}^{n-1} = \binom{n-1}{k}$$

Tudjuk, hogy ez a Pascal-háromszög $n-1$-edik sorában lévő számok összege, amely egyenlő 2^{n-1}-nel. Tehát az n fokú lépcsőre való feljutások száma abban az esetben, ha 1-től n-ig akármekkorát léphetünk, 2^{n-1} lesz.

Láthattuk, hogy a kombinatorikai problémák vezethetnek rekurzív és explicit módon megadott sorozatokhoz is. A következő feladatban egy rekurzív sorozat explicit képletét határozzuk meg.

Adjuk meg az $u_0 = 1$, $u_1=3$, $u_{n+1} = u_n + 2u_{n-1}$ *rekurzív módon megadott sorozat explicit képletét!*

Először érdemes a sorozat első pár elemét felírni, és keresni közöttük összefüggést. Próbáljuk meg a sorozatot két mértani sorozat lineáris kombinációjaként meghatározni! A kezdő értéket elfelejtve csak a rekurziót kielégítő szép megoldást keressük. Legyen az $a_n = q^n$, hiszen ekkor ha az első három tagra teljesül a rekurzió, akkor minden elemre teljesül: $q^2 = c_1q^1 + c_2q^0$, ekkor $q^n = c_1q^{n-1} + c_2q^{n-2}$.

Fontos ismerni ehhez a feladathoz a mértani sorozatok tulajdonságait, a másodfokú egyenleteket, egyenletrendszereket.

Megoldás:

Először határozzuk meg a sorozat első néhány elemét:

$u_0 = 1$, $u_1 = 3$, $u_2 = 5$, $u_3 = 11$, $u_4 = 21$, $u_5 = 43$, $u_6 = 85$, $u_7 = 171$ …

Látható, hogy a sorozatban csak páratlan számok szerepelnek, ez igaz lesz minden tagra, hiszen az első két tag páratlan, és minden további tagot úgy kapunk, hogy az egyik páratlan szám kétszereséhez hozzáadunk egy páratlan számot. Az is észrevehető, hogy a sorozatok elemei körülbelül kétszeresei a megelőző elemnek (±1).

Ezt a következő módon írhatjuk fel: $u_{n+1} = 2u_n + (-1)^n$.

Ez továbbra is rekurzív módon megadott sorozat, hiszen az n + 1-edik elem meghatározásához szükség van az n-edik elem kiszámítására is.

Az $u_{n+1} = u_n + 2u_{n-1}$ módon megadott sorozat egy másodrendű homogén lineáris rekurzió.

Másodrendű, mert 2 elemre van szükségünk a következő tag kiszámításához. Homogén, hiszen nincsen benne konstans tag, lineáris, mert az n + 1-edik elemet az előző elemek egy lineáris függvénye határozza meg.

Egy másodrendű homogén lineáris rekurzióval definiált sorozat explicit képletét meg tudjuk határozni egy eljárás segítségével. A homogenitásból és a linearitásból következik, hogy ha egy sorozat kielégíti a rekurziót, akkor kielégíti annak számszorosa is, valamint ha két sorozat teljesítette a rekurziót, akkor azoknak összege is teljesíti. Ebből következik, hogy két megfelelő sorozat bármely lineáris kombinációja is megfelelő. Tehát az adott rekurziót kielégítő sorozatok kétdimenziós vektorteret alkotnak a valós számok teste fölött. Mivel ezt a sorozatot az első két eleme határozza meg, ezért ha találok két olyan sorozatot, melyek egymásnak nem számszorosai, akkor azok első két elemével előállíthatjuk az összes lehetséges számpárt, így a lehetséges sorozatok első két elemét is, vagyis bázist keresünk a kérdéses vektortérben. Tehát ezzel az eljárással az összes megfelelő sorozat előállítható két sorozat lineáris kombinációjából. A két sorozatot mértani sorozatként keressük, hiszen ha az első néhány elemre teljesül a rekurzió, akkor teljesülni fog az összes elemre is. Ez azt jelenti, hogy $u_n = \alpha q^n$, ha a sorozat első eleme α, a két szomszédos elem hányadosa $(u_{n+1}/u_n) = q$. Erre a sorozatra a rekurzió a következő képletet adja:

$\alpha q^{n+1} = \alpha q^n + 2\alpha q^{n-1}$.

Ha α, $q \neq 0$, akkor az egyenlet mindkét oldalát α-val elosztva kapjuk:

$q^{n+1} = q^n + 2q^{n-1}$

Szorozzuk be mindkét oldalt q-val!

$q^{n+2} = q^{n+1} + 2q^n$

Most osszunk le q^n-nel. Ez megtehető, mert $q^n = 0$ csak akkor, ha $q = 0$, de ettől az esettől most eltekintünk.

$q^2 = q + 2$

A másodfokú egyenlet megoldóképletével megoldva a következő q értékeket kapjuk:

$$q_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-2)}}{2}$$

$q_1 = 2$

$q_2 = -1$

Tehát két speciális mértani sorozat, mely kielégíti a rekurziót, a következő:

$u_n = 2^n$ és $u_n = (-1)^n$

Az adott másodrendű homogén lineáris rekurziót kielégítő sorozatok általános képlete a következő:

$u_n = \alpha_1 2^n + \alpha_2(-1)^n$

A feladatban $u_0 = 1$ és $u_1 = 3$ szerepel. Tehát $n = 0$-ra és $n = 1$-re kapjuk:

$1 = \alpha_1 + \alpha_2$

$3 = 2\alpha_1 - \alpha_2$

Összeadva a két egyenletet kapjuk:

$4 = 3\alpha_1$, azaz

$$\alpha_1 = \frac{4}{3} \qquad \alpha_2 = -\frac{1}{3}$$

Tehát a sorozat explicit képlete a következő:

$$u_n = \frac{4}{3} 2^n - \frac{1}{3}(-1)^n$$

Közös nevezőre hozva a törteket:

$$u_n = \frac{4 \cdot 2^n - (-1)^n}{3}$$

Átalakítva:

$$u_n = \frac{2^{n+2} + (-1)^{n+1}}{3}$$

Nézzünk erre néhány példát, hogy ellenőrizzük a képlet helyességét!

$$u_2 = \frac{2^{2+2} + (-1)^{2+1}}{3} = 5 \qquad u_3 = \frac{2^{3+2} + (-1)^{3+1}}{3} = 11 \qquad u_4 = \frac{2^{4+2} + (-1)^{4+1}}{3} = 21$$

Látható, hogy a felírt összefüggés helyesnek bizonyult az első néhány szám esetén. Azért hasznos ez a feladatmegoldási módszer, mert az explicit képletre nehéz lett volna rájönni pusztán abból, hogy a sorozat elemei közti kapcsolatot vizsgáljuk. Például előre nem könnyen sejthető, hogy 3-mal kell osztani. Az explicit képlet meghatározása azért fontos, mert ha a sorozat 2013. elemét kell meghatározni, akkor az explicit képlettel egy egysoros számítás lesz, rekurzió esetén viszont meg kellene határozni a sorozat első 2012 elemét, amely időigényes. Hasonlóan lehet kiszámolni a híres Fibonacci-sorozat explicit képletét is.

Néhány szó a Fibonacci- sorozatról:

A sorozatot már 1150-ben megemlíti két indiai matematikus, Gopala és Hemacsandra, akik a szanszkrit költészet elméleti kérdéseit vizsgálva ütköztek egy összegre bontási problémába (hányféleképpen lehet rövid és hosszú szótagokkal kitölteni egy adott időtartamot, ha egy hosszú szótag két rövidnek felel meg?). Nyugaton tőlük függetlenül találta meg 1202-ben Fibonacci, aki Liber Abaci (Könyv az abakuszról) című művében egy képzeletbeli nyúlcsalád növekedését adta fel gyakorlófeladatként: hány pár nyúl lesz *n* hónap múlva, ha feltételezzük, hogy:

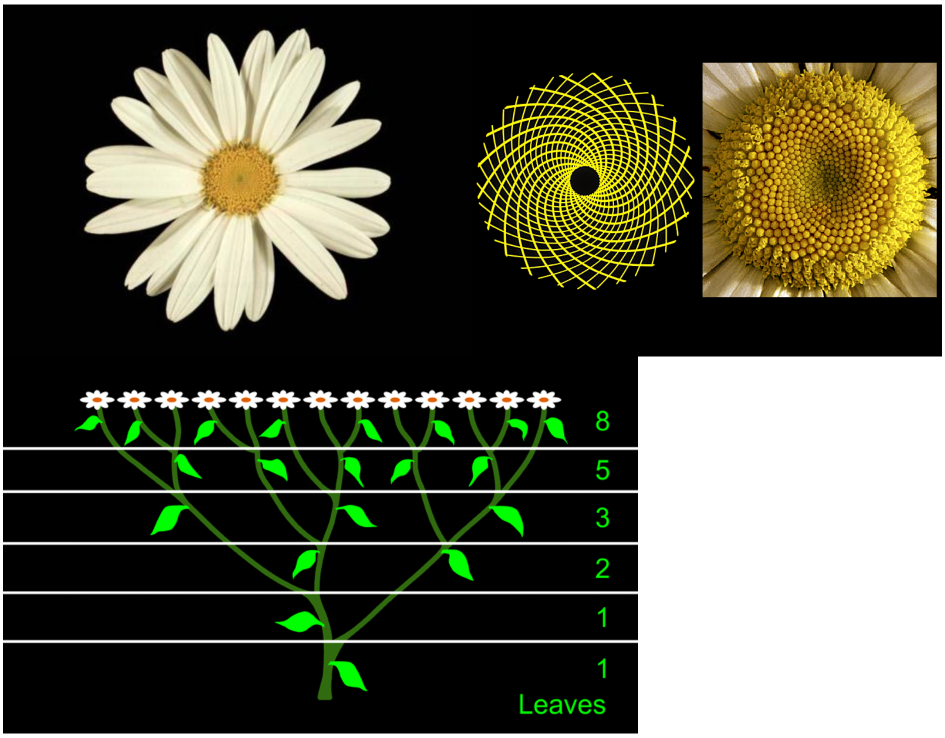
- az első hónapban csak egyetlen újszülött nyúl-pár van;
- az újszülött nyúl-párok két hónap alatt válnak termékennyé;
- minden termékeny nyúl-pár minden hónapban egy újabb párt szül;
- és a nyulak örökké élnek?

A nyúlpárok száma így az egyes hónapokban 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, és ez még csak egy év volt. A sorozat tagjainak rekurzív képzési szabálya nagyon egyszerű, de az úgynevezett explicit képlet is ismert.

Ez nem mértani sorozat, a hányados tehát nem állandó, azonban ahogy egyre nagyobb tagokat veszünk, a szomszédos tagok hányadosa konvergál az ókor óta ismert 1,618...-hoz, a nevezetes aranyszámhoz, amely az aranymetszést kifejező szám. Egy szakasz akkor van az aranymetszésnek megfelelően kettéosztva, ha a hosszabbik darabja úgy aránylik a rövidebbhez, mint az egész a hosszabbhoz. Ez az érték pontosan:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Számos természeti képződményben felismerhetőek az aranymetszés, illetve a Fibonacci-sorozat elemei: puhatestű-házakban (aranyspirál), napraforgóban, sőt az emberi testben is. A napraforgó tányérjában ülő magok spirálok mentén helyezkednek el. Az óramutató járása szerinti spirálok száma nem azonos az ellentétes spirálok számával, hanem két szomszédos Fibonacci számnak felelnek meg.



A Fibonacci-sorozat elemeinek explicit képlete:

$$F_n = \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^n - \left(1-\sqrt{5}\right)^n}{\sqrt{5}\cdot 2^n}$$

A következő feladatban többféle módszerrel határozom meg az első *n* négyzetszám összegét. Érdemes figyelni, hogy milyen sok irányban el lehet indulni a feladat megoldása során.

Határozzuk meg az első n négyzetszám összegét!

$$0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2 = ?$$

Először írjuk fel az első néhány négyzetszám összegét, és próbáljuk meg megsejteni a képletet, majd lássuk be, hogy a képlet helyes.

1. megoldás:

Az első néhány négyzetszám:

0 1 4 9 16 25 36 49 64 81 100 121 144…

Az első néhány négyzetszám összege:

0 1 5 14 30 55 91 140 204 285 385 506 650…

Az első néhány négyzetszám összegének 6-szorosa:

0 6 30 84 180 330 546 840 1224 1710 2310 3036 3900

Észrevehető, hogy ezek a számok a második tagtól kezdve oszthatók rendre 3-mal, 5-tel, 7-tel, … $2n + 1$-gyel.

Írjuk fel ezeket a számokat három szám szorzataként!

0 $1\cdot2\cdot3$ $2\cdot3\cdot5$ $3\cdot4\cdot7$ $4\cdot5\cdot9$ $5\cdot6\cdot11$ $6\cdot7\cdot13$ $7\cdot8\cdot15$ $8\cdot9\cdot17$ $9\cdot10\cdot19$...

Látható, hogy a szorzatok a következő képletet adják: $n(n + 1)(2n + 1)$.

Mivel a négyzetszámok összegének 6-szorosára igaz ez az összefüggés, ezért az első n négyzetszám összege:

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Erről a képletről most be kéne látni, hogy igaz.

Állítás: Az első n négyzetszám összege:

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Bizonyítás teljes indukcióval:

n = 1-re 1, n = 2-re 5, n = 3-ra 14, tehát az első néhány n-re ez teljesül.

Ha $n = m$-re teljesül, akkor az indukciós feltevésünk a következő:

$$\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

Lássuk be, hogyha teljesül m-re, akkor teljesül m + 1-re is!

$$\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}+(m+1)^2=0^2+1^2+\ldots+m^2+(m+1)^2$$

Hozzunk közös nevezőre:

$$\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}+\frac{6(m+1)^2}{6}=0^2+1^2+...+m^2+(m+1)^2$$

Emeljünk ki (m + 1)-et:

$$\frac{(m+1)[m(2m+1)+6(m+1)]}{6}=0^2+1^2+\ldots+m^2+(m+1)^2$$

Ennek alapján azt kapjuk, hogy:

$$\frac{(m+1)(2m^2+7m+6)}{6}=0^2+1^2+...+m^2+(m+1)^2$$

Bontsuk 3m és 4m összegére a 7m-et!

$$\frac{(m+1)(2m^2+4m+3m+6)}{6}=0^2+1^2+...+m^2+(m+1)^2$$

Alakítsuk szorzattá a második zárójelben lévő kifejezést!

$$\frac{(m+1)(2m(m+2)+3(m+2)}{6}=0^2+1^2+\ldots+m^2+(m+1)^2$$

m + 2-t kiemelve kapjuk:

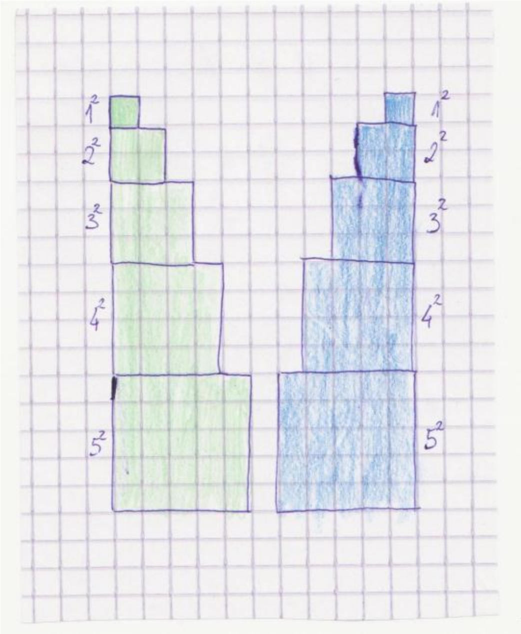
$$\frac{(m+1)(m+2)+(2m+3)}{6}=0^2+1^2+\ldots+m^2+(m+1)^2$$

Ez pontosan az n = m + 1-re vonatkozó állítás, tehát az indukciós feltevésünk teljesül, a képlet helyes.

A következő megoldás geometriailag közelíti meg a problémát. Néha a geometriai megoldások sokkal szemléletesebbé teszik a feladatot, így könnyebb rájönni a helyes összefüggésre.

1. megoldás:

Rajzoljuk le a négyzeteket a következőképpen:



Ebben a nagy téglalapban a keresett összeg kétszer is szerepel a színes részekként, továbbá a közbezárt fehér négyzetek is pontosan ugyanazt az összeget adják. Az ábra alján középen 5 darab egységnégyzet van, a két 4 · 4-es négyzet között egy 4 · 3-as téglalap van, a 3 · 3-as négyzetek között 3 darab 5 egységnyi széles oszlop. A 2 · 2-es négyzetek között 2 db, egység alapú, 7 egység szélességű négyzet látható. A tetején pedig 9 egységnégyzetből áll a sor.
Innen kiszámolható a kimaradt fehér négyzetek száma a következő csoportosítással:

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5^2 = 25$

$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2 = 16$

$1 + 3 + 5 = 3^2 = 9$

$1 + 3 = 2^2 = 4$

$1 = 1^2 = 1$

Tudjuk, hogy az első n páratlan szám összege az n-edik négyzetszámmal egyenlő. Ezt beláthatjuk a számtani sorozat összegképletének segítségével. A számtani sorozatunk a következő: az első elem az $a_1 = 1$, a differencia $d = 2$. Az első n elem összege:

$$S_n = \frac{[2a_1 + (n-1)d] \cdot n}{2} = \frac{[2 \cdot 1 + (n-1) \cdot 2] \cdot n}{2} = \frac{(2 + 2n - 2) \cdot n}{2} = n^2$$

A képlet megtalálásához már csupán a nagy téglalap területét kell megkeresni.
Ennek egyik oldala $(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + n)$, ez az első n pozitív szám összege, a másik oldala $(2 \cdot n + 1)$, tehát a területe ezek szorzata lesz:

$T = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + n) \cdot (2 \cdot n + 1)$

Az első n szám összegét határozzuk meg hasonlóan, mint az első n páratlan szám összegét. Itt $a_1 = 1$ és $d = 2$.

$$S_n = \frac{[2\cdot 1+(n-1)\cdot 1]\cdot n}{2} = \frac{(2+n-1)\cdot n}{2} = \frac{(n+1)\cdot n}{2}$$

Tehát kapjuk, hogy:

$$0+1+\ldots+(n-1)+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Így a téglalap területe a következő lesz:

$$T = \frac{n(n+1)}{2}\cdot(2n+1)$$

Ez az összeg a háromszorosa a fehér négyzetek területének.

$$3(1^2+2^2+\ldots+n^2) = \frac{n(n+1)}{2}\cdot(2n+1)$$

A keresett képlet tehát:

$$1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Most lássunk egy algebrai megoldást is az első n négyzetszám összegére. Itt a binomiális tétel segítségével csoportosítjuk ügyesen a tagokat, majd azokat összegezve a megjelenik az első n négyzetszám összege.

3. megoldás:

Írjuk fel a binomiális tétel segítségével egymás alá az első n + 1 köbszámot, majd alakítsuk át őket a következőképpen:

$$1^3 = (0+1)^3 = 0^3 + 3\cdot 0^2\cdot 1^1 + 3\cdot 0^1\cdot 1^2 + 1^3$$

$$2^3 = (1+1)^3 = 1^3 + 3\cdot 1^2\cdot 1^1 + 3\cdot 1^1\cdot 1^2 + 1^3$$

$$3^3 = (2+1)^3 = 2^3 + 3\cdot 2^2\cdot 1^1 + 3\cdot 2^1\cdot 1^2 + 1^3$$

$$4^3 = (3+1)^3 = 3^3 + 3\cdot 3^2\cdot 1^1 + 3\cdot 3^1\cdot 1^2 + 1^3$$

$$\vdots$$

$$n^3 = (n-1+1)^3 = (n-1)^3 + 3\cdot(n-1)^2\cdot 1^1 + 3\cdot(n-1)^1\cdot 1^2 + 1^3$$

$$(n+1)^3 = (n+1)^3 = n^3 + 3\cdot n^2\cdot 1^1 + 3\cdot n^1\cdot 1^2 + 1^3$$

Összeadva az egyenlőségeket kapjuk:

$$1^3+2^3+...+n^3+(n+1)^3=0^3+1^3+...+n^3+3(0^2+1^2+...+n^2)+3(0+1+...+n)+(1+1+...+1)$$

Látható, hogy megjelennek különböző sorozatösszegek ebben a felírásban. Megjelenik az első n köbszám összege, az első n négyzetszám összege, az első n szám összege, illetve n + 1 darab egyes összege. Az egyenlet jobb és baloldalán egyaránt megjelenik az első n köbszám összege, így azt az egyenlet mindkét oldalából kivonva kapjuk:

$$(n+1)^3=3(0^2+1^2+...+n^2)+3(0+1+...+n)+(1+1+...+1)$$

A 0 + 1 + 2 + … + n az első n szám összege, ez kiszámítható a számtani sorozat összegképletével.

Ezt írjuk be a fenti egyenletbe:

$$(n+1)^3=3(0^2+1^2+\ldots+n^2)+3\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)$$

Kifejezve az első n négyzetszám összegét:

$$\frac{1}{3}\left(n^3+3n^2+3n+1-3\frac{n(n+1)}{2}-n-1\right)=0^2+1^2+...+n^2$$

Felbontva a zárójelet, a következőt kapjuk:

$$\frac{1}{3}n^3+n^2+n+\frac{1}{3}-\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n}{3}-\frac{1}{3}=0^2+1^2+\ldots+n^2$$

Hozzunk közös nevezőre!

$$\frac{2n^3+6n^2+6n+2-3n(n+1)-2n-2}{6}=0^2+1^2+...+n^2$$

Vonjuk össze a számlálóban lévő tagokat:

$$\frac{2n^3+3n^2+n}{6}=0^2+1^2+...+n^2$$

n-et kiemelve kapjuk:

$$\frac{n(2n^2+3n+1)}{6}=0^2+1^2+...+n^2$$

Alakítsuk szorzattá a számlálóban szereplő zárójelben lévő tényezőt a gyöktényezős alak segítségével!

$$2n^2+3n+1=0 \Rightarrow n_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{4} \Rightarrow n_1=-\frac{1}{2}, n_2=-1$$

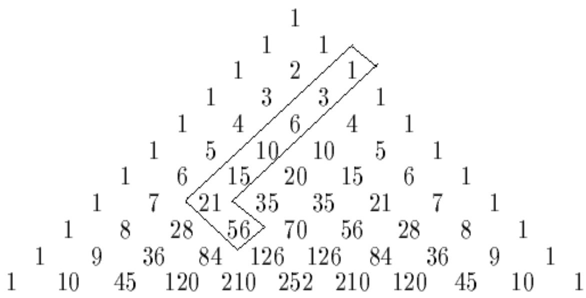
Tehát:

$$2n^2+3n+1=2\left(n+\frac{1}{2}\right)(n+1)=(2n+1)(n+1)$$

Tehát az első n négyzetszám összege:

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 0^2 + 1^2 + \ldots + n^2$$

A következő megoldásban egy ügyes átalakítással, majd a Pascal-háromszög segítségével határozzuk meg a kérdéses összeget.



4. megoldás:

Alakítsuk át a n^2-et a következő módon:

$$n^2 = n^2 - n + n = 2\frac{n(n-1)}{2} + n = 2\binom{n}{2} + \binom{n}{1}$$

A feladat: meghatározni az első n négyzetszám összegét, tehát:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 2\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{2} + \sum_{k=1}^{n}\binom{k}{1}$$

Mivel $k = 1$ esetén megjelenik az 1 alatt a 2 kifejezés, amelyet megállapodás szerint 0-nak tekintünk.

Nézzük meg, mit is jelent ez a Pascal-háromszögben!

Tudjuk, hogy „ferdén” nézve a 2. oszlopot az n alatt a 2 összefüggést kapjuk. Látható, hogy az egymás utáni számok összege a következő sor és következő oszlop eleme lesz (lásd ábra). Ebből következik, hogy:

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{2} = \binom{n+1}{3}$$

És:

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{1} = \binom{n+1}{2}$$

Az összefüggéseket felhasználva, azt kapjuk hogy:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 2\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2} = 2\frac{(n+1)n(n-1)}{3\cdot 2\cdot 1} + \frac{(n+1)n}{2\cdot 1} = \frac{2(n+1)n(n-1) + 3(n+1)n}{6} =$$

$$= \frac{n(n+1)(2n-2+3)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Látható, hogy a második megoldás szemléletes. Ha egy problémát le tudunk rajzolni, gyakran könnyebb rájönni a helyes összefüggésre. Itt azonban kellettek hozzá más ismeretek is, pl. az első *n* páratlan szám összege, az első *n* szám összege. A harmadik megoldásunkban fel kellett használni a sorozatokról tanult ismereteinket, a binomiális tételt, majd algebrai átalakításokkal juthattunk el a megoldásig. Ezzel szemben a 4. megoldásban a Pascal-háromszögben tett észrevétel jelentősen lerövidíti a feladat megoldását, de ismerni kell a kombinatorikai összefüggéseket.

5. megoldás

Ebben a megoldásban felhasználjuk azt, hogy a képlet, amit keresünk, egy harmadfokú polinommal kifejezhető. Tudjuk, hogy ez a polinom kis *x*-ek esetén milyen értékeket vesz fel:

$1^2 = 1$

$1^2 + 2^2 = 5$

$1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$

$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$

A harmadfokú polinomot jelöljük a következőképpen, ahol *a, b, c, d* valós számok.

$an^3 + bn^2 + cn + d$

A következő egyenletek adódnak:

$a + b + c + d = 1$

$8a + 4b + 2c + d = 5$

$27a + 9b + 3c + d = 14$

$64a + 16b + 4c + d = 30$

Írjuk fel az együtthatók mátrixát, majd oldjuk meg az egyenletrendszert a Gauss-elimináció segítségével!

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & 5 \\ 27 & 9 & 3 & 1 & 14 \\ 64 & 16 & 4 & 1 & 30 \end{array}\right)$$

Az első sort vonjuk ki a második, harmadik és negyedik sorból.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & 1 & 0 & 4 \\ 26 & 8 & 2 & 0 & 13 \\ 63 & 15 & 3 & 0 & 29 \end{array}\right)$$

A 3. sorból kivonva a második sor kétszeresét, valamint a 4. sorból kivonva a második sor háromszorosát, a következőt kapjuk:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & 1 & 0 & 4 \\ 12 & 2 & 0 & 0 & 5 \\ 42 & 6 & 0 & 0 & 17 \end{array}\right)$$

A negyedik sorból most vonjuk ki a harmadik sor háromszorosát:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & 1 & 0 & 4 \\ 12 & 2 & 0 & 0 & 5 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

A negyedik sor alapján kapjuk, hogy $6a = 2$, amiből $a = 1/3$ adódik. A harmadik sor alapján: $12a + 2b = 5$, azaz $4 + 2b = 5$, tehát $b = ½$. A második sorba helyettesítve kapjuk: $7a + 3b + c = 4$, a és b értékét behelyettesítve $23 + 6c = 24$, tehát $c = 1/6$. Az első sor alapján $a + b + c + d = 1$, ebből kapjuk, hogy $d = 0$.

Tehát a harmadfokú polinom, amit keresünk, a következő:

$$\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

Szorzattá alakítva kapjuk, hogy:

$$\frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Látható, hogy a képlet egyezik az előző módszerek segítségével megkapottal.

A következő feladatunk nem lesz más, mint az előző feladat mintájára meghatározni az első n köbszám összegét.

Határozzuk meg az első n köbszám összegét!

Először itt is a binomiális tétel segítségével írjuk fel az összegeket, hasonlóan, mint az első n négyzetszám összegének meghatározásánál.

1. megoldás:

Felhasználva az előző feladatban kiszámolt első n négyzetszám összegét, hasonló eljárással határozzuk meg itt is! Írjuk fel az első n + 1 szám negyedik hatványát a következőképpen:

$$1^4 = (0+1)^4 = 0^4 + 4\cdot 0^3 \cdot 1^1 + 6\cdot 0^2 \cdot 1^2 + 4\cdot 0^1 \cdot 1^3 + 1^4$$
$$2^4 = (1+1)^4 = 1^4 + 4\cdot 1^3 \cdot 1^1 + 6\cdot 1^2 \cdot 1^2 + 4\cdot 1^1 \cdot 1^3 + 1^4$$
$$3^4 = (2+1)^4 = 2^4 + 4\cdot 2^3 \cdot 1^1 + 6\cdot 2^2 \cdot 1^2 + 4\cdot 2^1 \cdot 1^3 + 1^4$$
$$4^4 = (3+1)^4 = 3^4 + 4\cdot 3^3 \cdot 1^1 + 6\cdot 3^2 \cdot 1^2 + 4\cdot 3^1 \cdot 1^3 + 1^4$$
$$\vdots$$
$$n^4 = (n-1+1)^4 = (n-1)^4 + 4\cdot (n-1)^3 \cdot 1^1 + 6\cdot (n-1)^2 \cdot 1^2 + 4\cdot (n-1)^1 \cdot 1^3 + 1^4$$
$$(n+1)^4 = (n+1)^4 = n^4 + 4\cdot n^3 \cdot 1^1 + 6\cdot n^2 \cdot 1^2 + 4\cdot n^1 \cdot 1^3 + 1^4$$

Adjuk össze az egyenlőségeket!

$$1^4 + ... + (n+1)^4 = 0^4 + ... + n^4 + 4(0^3 + ... + n^3) + 6(0^2 + ... + n^2) + 4(0 + ... + n) + (1 + ... + 1)$$

Az első n szám negyedik hatványának összege megjelent a jobb és bal oldalon is, ezért vonjuk ki azt az egyenlet mindkét oldalából, az ismert sorozatok összegének képletét pedig helyettesítsük be!

$$(n+1)^4 = 4(0^3 + ... + n^3) + 6\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) + 4\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) + n + 1$$

Fejezzük ki az egyenletből az első n köbszám összegét! Ehhez először bontsuk fel a külső zárójeleket.

$$(n+1)^4 = 4(0^3 + ... + n^3) + n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) + n + 1$$

Emeljünk ki (n + 1)-et!

$$(n+1)^4 = 4(0^3 + ... + n^3) + (n+1)[n(2n+1) + 2n+1]$$

$(2n + 1)$-et kiemelve kapjuk:

$$(n+1)^4 = 4(0^3 + ... + n^3) + (n+1)(2n+1)(n+1)$$

Átrendezve az egyenletet:

$$\frac{(n+1)^4 - (n+1)^2(2n+1)}{4} = 0^3 + ... + n^3$$

$(n + 1)^2$-et kiemelve:

$$\frac{(n+1)^2[(n+1)^2 - (2n+1)]}{4} = 0^3 + ... + n^3$$

Bontsuk fel a belső zárójeleket!

$$\frac{(n+1)^2(n^2 + 2n + 1 - 2n - 1)}{4} = 0^3 + ... + n^3$$

Összevonás után kapjuk:

$$\frac{(n+1)^2 n^2}{4} = 0^3 + ... + n^3$$

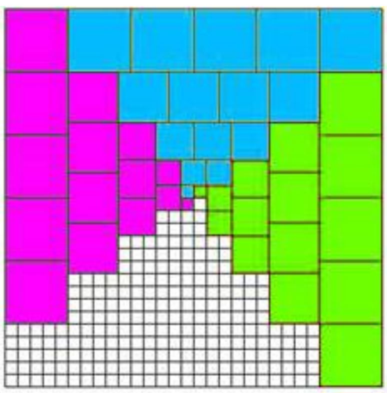
Azaz:

$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = 0^3 + \ldots + n^3$$

Látható, hogy azt az összefüggést kaptuk, miszerint az első n szám összegének négyzete megegyezik az első n köbszám összegével.

Próbáljuk meg ezt a problémát is szemléltetni!

2. megoldás



Az ábrán látható, hogy a fehér egységnégyzetek összterülete az egész alakzat negyedét teszik ki, valamint az is látszik, hogy ez éppen az első n (az ábrán: első 5) köbszám összegét adja megoldásul.

A feladat kiszámolni a négyzet területét, majd a végeredményt elosztani 4-gyel.

Tudjuk, hogy az alsó sorban n^2 db fehér négyzet van, mellette pedig n db egységnégyzet oldalhosszúságú zöld négyzet. Ebből következik, hogy a négyzet oldalának hossza $n^2 + n$, tehát a területe:

$$T = (n^2 + n)^2$$

Így a fehér négyzetek területe ennek negyede lesz, tehát az első n köbszám összege:

$$(1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3) = \frac{(n^2 + n)^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Az első módszerrel rekurzív módon meghatározható az első n szám magasabb hatványának összege, hiszen ha a k-adik hatványokat keressük, és kiszámoltuk már a k – 1-edik hatványok összegét, akkor csupán fel kell írni a binomiális tétel segítségével az első n + 1 szám k + 1-edik hatványát, majd az oszlopokat hasonló eljárással összegezve és rendezve megkapjuk a helyes végeredményt. A második módszer általánosítása nehezebb, hiszen egy modellt kell alkotni a matematikai problémához. Ez a modell minden különböző kitevő esetén más és más lesz.

Egyenletek, egyenletrendszerek

Egyenletekkel gyakran találkoznak a középiskolások. Fontos, hogy az egyenleteket nagy magabiztossággal kezeljék, és eljussanak a helyes megoldásra. A szöveges feladatokat leggyakrabban egyenletekkel vagy egyenletrendszerekkel oldjuk meg, ezért különösen hasznos, hogy egy problémát meg tudjunk fogalmazni a matematika nyelvén.

Az első feladatban egy négyzetgyökös egyenletet oldunk meg. Fontos ismerni a négyzetgyökös kifejezés kikötését és azonosságait.

KÖMAL C. 1138. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán.

$$\sqrt{4-x(4-x)}-\sqrt{4-x}=4$$

Először észrevehetjük, hogy a 4 – *x* több helyen is előfordul az egyenletben. Tudjuk, hogy egy négyzetszám gyöke egyenlő a szám abszolútértékével. Ha ezt nem vesszük észre, és azonnal négyzetre emeljük mindkét oldalt, akkor egy másodfokúnál magasabb fokú egyenletet kapunk, ami ugyan megoldható, de jóval nehezebben, mint a következő módszerrel.

Megoldás:

Először a kikötést írjuk fel, hiszen tudjuk, hogy negatív valós számnak nincs valós négyzetgyöke.

$$4-x(4-x)\geq 0 \qquad\qquad 4-x\geq 0$$

$$4-4x+x^2\geq 0 \qquad\qquad 4\geq x$$

$$(x-2)^2\geq 0$$

Ez bármely *x* értékre teljesül.

Beírva a nevezetes azonosságot az egyenletbe kapjuk:

$$\sqrt{(x-2)^2}-\sqrt{4-x}=4$$

$$|x-2|-\sqrt{4-x}=4$$

Az abszolút érték miatt két eset lehetséges. Az egyik lehetőség:

$x-2\geq 0$, tehát:

$4\geq x\geq 2$

Ebben az esetben a következő egyenletet kell megoldanunk:

$x-2-\sqrt{4-x}=4$

Átrendezve kapjuk, hogy:

$x-6=\sqrt{4-x}$

Itt fontos újra kikötést tennünk, hiszen az egyenlet jobb oldala nemnegatív, ezért az egyenlet bal oldala is nemnegatív kell, hogy legyen.

$x-6\geq 0$

$x\geq 6$

Mivel $x\leq 4$, ezért ellentmondást kaptunk, tehát nem létezik ilyen x érték.

Nézzük meg a másik esetet!

$x-2<0$

$x<2$

A megoldandó egyenlet a következő:

$-x+2-\sqrt{4-x}=4$

Átrendezve kapjuk, hogy:

$-x-2=\sqrt{4-x}$

Az egyenlet jobb oldala nemnegatív, ezért a bal oldalnak is nemnegatívnak kell lennie.

$-x-2\geq 0$

$-2\geq x$

Emeljük az egyenlet mindkét oldalát négyzetre!

$x^2+4x+4=4-x$

Nullára rendezve az egyenletet kapjuk:

$x^2+5x=0$

Emeljünk ki x-et!

$x(x+5)=0$

Egy szorzat akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla. Tehát vagy x = 0, vagy x + 5 = 0, amiből x = –5 adódik. A kikötés miatt x = 0 nem lesz helyes megoldás, így az egyetlen megoldása az egyenletnek x = –5 lesz.

Nézzünk példát egy olyan egyenletrendszerre, amely nem lineáris.

OKTV 2008/2009 1. forduló II. kategória 1. feladat

Határozzuk meg az alábbi egyenletrendszer valós megoldásait!

$$x^3 + y^3 = x$$

$$3x^2y + 3xy^2 = y$$

Érdemes észrevenni azt, hogy az első és a második egyenlet bal oldalán szereplő kifejezések összege egy nevezetes azonosságot adnak.

Megoldás:

Ha a két egyenletet összeadjuk, akkor a következő összefüggést kapjuk:

$$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = x + y$$

Azaz:

$$(x + y)^3 = x + y$$

A köbre emelésnek a valós számok halmazán három fixpontja (amikor $f(x) = x$) van: -1, 0, 1. Azt kapjuk tehát, hogy $x + y$ értéke lehet -1, 0, vagy 1.

I. Ha $x + y = 0$, akkor $y = -x$.

Ezt behelyettesítve az első egyenletbe, azt kapjuk, hogy:

$$-x^3 + x^3 = x$$

$$0 = x_1$$

$$0 = y_1$$

II. Ha $x + y = 1$, akkor $y = 1 - x$.

Helyettesítsük be az első egyenletbe:

$$x^3 + (1 - x)^3 = x$$

Felbontva a zárójelet, a következő adódik:

$$x^3 + 1 - 3x + 3x^2 - x^3 = x$$

Rendezve:

$$3x^2 - 4x + 1 = 0$$

A másodfokú egyenlet megoldóképletével kapjuk x további értékeit:

$$x_{2,3} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{6}$$

$x_2 = 1$ $\quad$ $y_2 = 0$

$x_3 = \frac{1}{3}$ $\quad$ $y_3 = \frac{2}{3}$

III. Ha $x + y = -1$, akkor $y = -x - 1$.

Ezt beírva az első egyenletbe a következőt kapjuk:

$$x^3 - 1 - 3x - 3x^2 - x^3 = x$$

Rendezve:

$$3x^2 + 4x + 1 = 0$$

A megoldóképletbe helyettesítve:

$$x_{4,5} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{6}$$

$x_4 = -\frac{1}{3}$ $\quad$ $y_4 = -\frac{2}{3}$

$x_5 = -1$ $\quad$ $y_5 = 0$

Tehát az egyenletrendszer megoldásai a következő (x ; y) számpárok:

(0 ; 0) $\quad$ (1 ; 0) $\quad$ (1/3 ; 2/3) $\quad$ (–1/3 ; 2/3) $\quad$ (–1 ; 0)

Ennek mintájára találtam ki a következő feladatot:

Határozzuk meg a következő egyenletrendszer valós megoldásait!

$$9x^2 + 16y^2 - 24xy - 18x + 24y + 9 = 0$$

$$2x^2 + 3y^2 - 5xy + 3x - 6y + 1 = 0$$

Ez egy kicsit trükkösebb feladat, hiszen első ránézésre nem biztos, hogy látszik, milyen módszerrel induljunk el. Érdemes az első egyenletet magában vizsgálni, átalakítjuk úgy, hogy a vegyes szorzat eltűnjön.

Megoldás:

Az első észrevételünk az, hogy az első egyenletet átalakíthatjuk a következő módon:

$$(3x-4y)^2-18x+24y+9=0$$

Alakítsuk ezt tovább úgy, hogy kiemelünk –6-ot a –18*x* + 24*y* tagokból:

$$(3x-4y)^2-6(3x-4y)+9=0$$

Legyen 3*x* – 4*y* = *a*. Ekkor:

$$a^2-6a+9=0$$

Azaz:

$$(a-3)^2=0$$

Tehát azt kapjuk, hogy *a* = 3, így:

$$3x-4y=3$$

Fejezzük ki *x*-et!

$$x=\frac{4y+3}{3}$$

Ezt behelyettesítve a 2. egyenletbe kapjuk:

$$2\left(\frac{4y+3}{3}\right)^2+3y^2-5\frac{4y+3}{3}y+3\frac{4y+3}{3}-6y+1=0$$

A zárójelet felbontva és a szorzásokat elvégezve kapjuk:

$$\frac{32y^2+48y+18}{9}+3y^2-\frac{20y^2+15y}{3}+4y+3-6y+1=0$$

Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát 9-cel!

$$32y^2+48y+18+27y^2-60y^2-45y-18y+36=0$$

Összevonva a tagokat kapjuk:

$$-y^2-15y+54=0$$

Ezt megoldva a másodfokú egyenlet megoldóképletével, azt kapjuk, hogy:

$$y_{1,2}=\frac{15\pm\sqrt{225+4\cdot 54}}{-2}=\frac{15\pm 21}{-2}$$

$$y_1=3 \qquad y_2=-18$$

$y_1 = 3$ esetén:

$$x_1=\frac{4\cdot 3+3}{3}=5$$

$y_2 = -18$ esetén:

$$x_2 = \frac{4 \cdot (-18) + 3}{3} = -23$$

Egyenlőtlenség

A feladatok egy részében előfordul, hogy nem egyenletet, hanem egyenlőtlenséget kell megoldanunk. Ilyen típusú feladatok hasznosak lehetnek, amikor alsó vagy felső korlátot keresünk, vagy egy kifejezés maximumát, minimumát akarjuk meghatározni.
A következő feladatban négy ismeretlen között fennálló összefüggést kell belátni.

OKTV 2008/2009 I. Kategória 2. feladat:
Legyenek az a, b, c, d számok pozitív valós számok. Igazolja, hogy:
$$\sqrt{a \cdot b} + \sqrt{c \cdot d} \le \sqrt{(a+d) \cdot (b+c)}$$

Az egyenlőtlenségeknél is nagyon fontos a kikötéseket szem előtt tartani, ám mivel itt minden ismeretlen pozitív, ezért nem kell különböző eseteket vizsgálni. A feladat megoldásához felhasználjuk a számtani-mértani közepek közti összefüggést.

Megoldás:
A feladat szerint a, b, c, d pozitív valós számok, ezért a kifejezések mindkét oldalon értelmezve vannak a valós számok körében.
Mivel az egyenlőtlenség jobb és baloldala is pozitív, ezért négyzetre emelhetjük az egyenlőtlenséget, hiszen az $f(x) = x^2$ függvény szigorúan monoton a pozitív valós számok halmazán.
$$ab + 2\sqrt{abcd} + cd \le (a+d) \cdot (b+c)$$
Bontsuk fel a zárójeleket a jobb oldalon!
$$ab + 2\sqrt{abcd} + cd \le ab + ac + bd + cd$$
Az egyenlőtlenség mindkét oldalából ab-t és cd-t kivonva kapjuk a következőt:
$$2\sqrt{abcd} \le ac + bd$$
Kettővel elosztva:
$$\sqrt{abcd} \le \frac{ac+bd}{2}$$

Ez az összefüggés éppen az *ac* és *bd* számpárokra adott számtani-mértani közepek közötti összefüggés.

Geometria

A geometria valószínűleg a legősibb ága a matematikának. Nagy szerepe van az építészetben, művészetben. Érdekes, hogy a geometria milyen szoros kapcsolatban áll a matematika többi ágával. Például a szerkeszthetőségi problémákat, mint például a „kör négyszögesítése", szabályos *n*-szög szerkesztése stb. algebrai eszközökkel oldották meg. A következő feladatban egy olyan példát mutatok, amely geometriai probléma ugyan, de megoldásához felhasználható a számtani-mértani közepek közti egyenlőtlenség.

KÖMAL B. 4485.

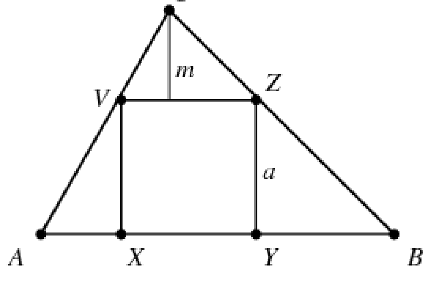
Legfeljebb mekkora részét fedheti le egy háromszögnek egy olyan négyzet, amelynek minden csúcsa a háromszög valamelyik oldalán van?

Először érdemes egy szép ábrát rajzolni, szemléltethetjük a kérdést, és leolvashatóak az adatok. Szükséges hasonló háromszögeket keresni, majd azok oldalak arányaiból rájönni a háromszög és négyzet közti összefüggésre. Végül érdemes a számtani-mértani közepek közti összefüggést használni a becsléshez.

Megoldás:

Mivel a négyzetnek 4 csúcsa van és a háromszögnek 3 oldala, ezért a négyzet egyik oldala a háromszög egyik oldalán kell, hogy elhelyezkedjen.

Legyen a háromszög a következő:



Tudjuk, hogy az *ABC* háromszög hasonló a *VZC* háromszöghöz, mivel a *VZ* oldal párhuzamos *AB*-vel, tehát szögei egyenlők. Így felírhatjuk a következő arányt: a *VZC* háromszög magassága (m) úgy aránylik a $VZ = a$ oldalhoz, mint az *ABC* háromszög magassága ($a + m$) az *AB* oldalhoz. Legyen az *AX* szakasz hossza e, az *YB* szakasz hossza f. Azaz:

$$\frac{m}{a} = \frac{m+a}{e+a+f}$$

Átrendezéssel kapjuk, hogy:

$$m(e+a+f) = a(m+a)$$

Fejezzük ki $e + f$-et!

$$e+f = \frac{a(m+a)}{m} - a$$

A jobb oldalt átalakítva:

$$e+f = \frac{am+a^2-ma}{m}$$

$$e+f = \frac{a^2}{m}$$

Észrevehetjük, hogy ha egymás mellé toljuk az *AXV* és *YBZ* háromszögeket az *XV* és *YZ* oldalaik mentén, akkor egy olyan háromszöget kapunk, amely szintén hasonló az *ABC* háromszöghöz, magassága a, alapja pedig a^2/m. A négyzet által levágott 3 háromszög területét kiszámíthatjuk a következő módon:

$$T_{VZC} = \frac{a \cdot m}{2} \qquad T_{AXV} + T_{YBZ} = \frac{\frac{a^2}{m} \cdot a}{2}$$

Tehát a levágott háromszögek összterülete a következő lesz:

$$T_{háromszögek} = \frac{a \cdot m + \frac{a^2}{m} \cdot a}{2}$$

A számtani-mértani közepek közti összefüggéssel ezt alulról becsülhetjük a következőképpen:

$$\frac{a \cdot m + \frac{a^2}{m} \cdot a}{2} \geq \sqrt{a \cdot m \cdot \frac{a^2}{m} \cdot a}$$

Az egyenlőtlenség jobb oldalát kiszámítva azt kapjuk, hogy:

$$\sqrt{a \cdot m \cdot \frac{a^2}{m} \cdot a} = \sqrt{a^4} = a^2$$

Azt kaptuk tehát, hogy a levágott háromszögek területe legalább a négyzet területével kell, hogy megegyezzen. Egyenlőség abban az esetben teljesül, ha:

$$a \cdot m = \frac{a^2}{m} \cdot a$$

$$a \cdot m^2 = a^3$$

$$m^2 = a^2$$

$$m = a$$

Tehát egyenlőség abban az esetben áll fenn, ha a *VZC* háromszög magassága megegyezik a hozzá tartozó alappal, ami egyben a négyzet oldala is. Ebben az esetben a levágott háromszögek területösszege éppen egyenlő lesz a négyzet területével, tehát a négyzet által maximálisan lefedhető terület éppen az *ABC* háromszög területének felét teszi ki.

Ebben a feladatban jól látható, hogy geometriai problémák megoldásához hasznosak lehetnek az algebra, illetve az analízis eszközei. A maximális területszámítások esetén nagyon gyakori a számtani-mértani közepek közti összefüggés felhasználása a megoldás során. Egyébként a feladatot megoldhatjuk úgy is, hogy a négyzet oldalát a háromszög magasságával és alapjával kifejezve függvényként írjuk fel a négyzet területét, majd ennek a függvénynek a maximumát vagy minimumát keressük – például deriválással. Végül a két területet egymással elosztva megkapjuk a keresett területarányt.

Oszthatósági feladatok

Oszthatósági feladatokkal is már régóta foglalkozik az emberiség. Sokszor fontos meghatároznunk azt, hogy két szám hányadosa egész szám -e, vagy keletkezik maradék. A következő feladat négyzetszámok összegéről szól, egyébként – mint látni fogjuk – a sorozatok témaköréhez is kapcsolódhat egy oszthatósági feladat.

KÖMAL B. 4472.

Bizonyítsuk be, hogy hét egymást követő egész szám négyzetének az összege nem lehet négyzetszám.

Először érdemes a számokat ügyesen felírni egy paraméterrel, majd az összegről belátni, hogy miért nem lehet négyzetszám. A megoldásban felhasználjuk a négyzetgyök 2 irracionalitásának egyik bizonyításának gondolatát.

Megoldás:

Jelöljük a középső számot k-val. Ekkor a hét egymást követő négyzetszám összege a következő lesz:

$$(k-3)^2+(k-2)^2+(k-1)^2+k^2+(k+1)^2+(k+2)^2+(k+3)^2=7k^2+28$$

Kiemelve 7-et kapjuk:

$$7k^2+28=7(k^2+4)$$

A négyzetszámok 7-tel osztva a következő maradékokat adják:

$(7k-3)^2$	$m = 2$
$(7k-2)^2$	$m = 4$
$(7k-1)^2$	$m = 1$
$(7k)^2$	$m = 0$
$(7k+1)^2$	$m = 1$

$(7k + 2)^2$ $\quad\quad$ $m = 4$

$(7k + 3)^2$ $\quad\quad$ $m = 2$

Ezért egy négyzetszám +4 a következő maradékokat adhatja: 1, 4, 5, 6

Ebből az következik, hogy $k^2 + 4$ nem lesz osztható semmilyen k-ra sem 7-tel.

Mivel $7(k^2 + 4)$ osztható 7-tel, de $k^2 + 4$ nem osztható 7-tel, így a $7(k^2 + 4)$ kifejezés nem lesz osztható 49-cel. Egy négyzetszámban viszont minden prímhatvány páros kitevőn szerepel, ebben a 7 az elsőn van, ami páratlan, így 7 egymást követő négyzetszám összege sohasem lehet négyzetszám.

A következő feladatot egy régebbi OKTV-s feladat alapján aktualizáltam.

1996-os OKTV feladat alapján:
A 2013-at felbontottuk néhány pozitív egész szám összegére. Milyen maradékot ad 6-tal osztva a számok köbeinek összege?

Érdemes vizsgálni az $a^3 - a$ alakú számokat, majd ezek összegét vizsgálva felírjuk az összefüggést.

Bármely a egész számra az $a^3 - a$ osztható 6-tal, mert
$a^3 - a = a(a^2 - 1) = (a - 1)a(a + 1)$ (1) alakra hozható.
Ilyen formában jól látszik, hogy az egyenlőség jobb oldala osztható 3-mal, mert 3 egymást követő egész szám közül pontosan egy 3-mal osztva 0 maradékot ad, valamint van köztük legalább 1 páros szám, így a 2-vel való osztási maradéka is 0. Mivel (2, 3) = 1, így a szorzatuk, a 6 is osztója a vizsgált szorzatnak. Eszerint tehát egy egész szám és annak köbe ugyanazt a maradékot adja 6-tal osztva. Vizsgáljuk meg a 2013-at a fent végiggondolt azonosság alkalmazásával:
Tegyük fel, hogy a $2013 = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ módon áll elő a számok összegeként. Ekkor felírható a következő egyenlőség:

$$(a_1^3 - a_1) + (a_2^3 - a_2) + (a_3^3 - a_3) + \ldots + (a_n^3 - a_n) = a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3 - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \quad (2)$$

Tudjuk, hogy $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ számok összege a feltevés alapján 2013, tehát:

$$(a_1^3 - a_1) + (a_2^3 - a_2) + (a_3^3 - a_3) + \ldots + (a_n^3 - a_n) = a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3 - 2013 \qquad (3)$$

Az (1) azonosság alapján megállapítható, hogy a (3) egyenlőség bal oldalának minden tagja osztható 6-tal, tehát az összegük is. Ebből következik, hogy a jobb oldal is 0 maradékot ad 6-tal osztva. Ez csak úgy lehetséges, ha a jobb oldalon álló különbség mindkét tagja ugyanazt a maradékot adja, azaz 2013 kongruens $a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3$-nel modulo 6. A 2013 6-tal osztva 3 maradékot ad, tehát tetszőleges számok esetén, ha a számok összege 2013, köbösszegük is 3 maradékot ad.

Összegzés

Láthattuk, hogy egy-egy feladatot hány különböző módszerrel oldhatunk meg, és azt is észrevehettük, hogy mennyire szoros kapcsolat van a matematika különböző ágai között. Fontosnak tartom, hogy a középiskolások ne csak egy megoldást lássanak egy adott problémára, hanem átfogó képet kapjanak a matematika szerkezetéről. Így sokkal érhetőbbé válhat számukra egy témakör, és jobban elhiszik, hogy a matematika tudománya mennyire egymásra épül. Ha hiányzik a jó, biztonságos, erős alap, nem lehet arra palotát építeni. A matematika épületén belüli jártasság éppen ezért nagyon fontos, így leendő tanárként az lesz a célom, hogy a matematikát érthetően, a diákok számára is élvezetesen magyarázzam, hagyjam, hogy a diákjaim kedvükre kalandozzanak, egy-egy problémához több példát és ellenpéldát is keressenek.

Irodalomjegyzék:

http://www.origo.hu/tudomany/20100325-fibonaccisor-matematika-az-elovilagban.html

http://hu.wikipedia.org/wiki/Fibonacci-sz%C3%A1mok

http://db.komal.hu/KomalHU/cikk.phtml?id=198801

http://hu.wikipedia.org/wiki/Oszt%C3%B3sz%C3%A1m-f%C3%BCggv%C3%A9ny

http://matek.fazekas.hu/portal/feladatbank/egyeb/feladatok/oktv.html

http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Hrasko_Andras/elte/em4/em4_2012nov28_30.pdf

http://www.cs.elte.hu/blobs/diplomamunkak/mattan/2011/matusik_edina.pdf