Versenyfeladatok

Bács-Kiskun Megyei Matematikaverseny és KÖMAL feladatok megoldása, elemzése

Készítette: Perity Dóra

Témavezető: Somfai Zsuzsa

2013.

Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Kar

Matematika Alapképzés

Tanári Szakirány

TARTALOMJEGYZÉK

BEVEZETÉS

A matematika mindig is nagyon közel állt a szívemhez. Tanár-szakos hallgatóként azt gondolom, hogy a tanári pálya az egyik legszebb hivatás. Matematikát tanítani pedig különösen szép: önmagába rejti azt a kihívást, hogy miként mutassuk meg a diákoknak, hogy ez a tudomány nem csak törtszámok, vektorok, girbegurba függvények és logaritmikus egyenletek összessége, hanem egy gondolkodásmód, melynek elsajátítása az élet minden területén hasznossá válhat. Mindezek mellett viszont egy tanárnak az is feladata, hogy a már érdeklődő és tehetséges diákokra felfigyeljen, lelkesedésüket megtartsa, sőt fokozza, és segítsen nekik további sikerélményeket szerezni. Erre kiváló lehetőséget adnak az országban megrendezett különböző szintű és nehézségű matematika versenyek.

Ezekre a versenyekre való felkészülés gyakran igényel a középiskolai alapórákon megszerzett tudáson felül fakultáción vagy szakkörön, esetleg önszorgalomból és kíváncsiságból megszerzett tapasztalatokat, melyekkel társaik talán csak az egyetemen találkoznak.

Egy-egy versenyen minden témakörnek szerepelnie kell ahhoz, hogy jól fel lehessen mérni, hogy a versenyzők mennyire tudják átlátni az összefüggéseket a matematika különböző területei között, kialakult-e bennük egy egységes kép.

Szakdolgozatomban egy konkrét témakörre, – a számomra kedves – algebra és számelmélet témakörére térek ki, ide tartozó versenypéldákat mutatok be.

Nagyon sok feladatot átnéztem a válogatás során. A feladatok egy részéhez megoldást vagy javítókulcsot is olvastam, de minden olvasott megoldást is átgondoltam, önállóan megoldottam és igyekeztem a magyarázatokat olyan részletességgel megfogalmazni, hogy az egy középiskolai diák számára biztosan érthető legyen.

Az első fejezetben egyszerűbb, megyei versenypéldákkal foglalkozom, melyek megoldásai elvekben több helyen hasonlítanak a javítókulcsban megadott megoldásokra, de ezeket is kiegészítettem, részletesebb, érthetőbb magyarázatokat adtam.

A későbbi fejezetekben, ahol lehetett, több megoldást is kerestem, főként a II. és IV. fejezetben, ahol igyekeztem az egyetemi ismeretanyagon alapuló tudás felhasználásával is megoldani a feladatokat.

Teljesen önálló feladataimat csillagozással jelölöm.

Két középiskolásoknak szervezett matematika verseny feladatai közül válogattam: kalocsai gimnáziumi emlékeim miatt a Bács-Kiskun Megyei Matematikaverseny, illetve egy jellegében ettől teljesen más országos verseny, a KÖMAL versenyfeladatai közül szemezgettem.

A Bács-Kiskun Megyei Matematikaverseny sok éves hagyományra tekint vissza. Szervezésére a Bolyai János Matematika Társulat Bács-Kiskun Megyei tagozata minden évben felkér egy megyei középiskolát. A verseny két fordulóból áll. A gimnáziumok és szakközépiskolák, továbbá ezen belül minden évfolyam külön kategóriát alkot. Az első forduló feladatsorát minden versenyző a saját középiskolájában írja meg, a kiírásban közölt közös időpontban. A dolgozatok javítását az adott középiskolák szaktanárai végzik, majd a kijavított dolgozatokat a szervező iskolának küldik tovább. A második fordulóban a dolgozatok eredménye alapján évfolyamonként körülbelül 50 diákot hívnak be három megyei középiskolába, ahol a második versenydolgozatot írják a versenyzők. Ezen feladatok javítását a szervező iskola szaktanárai végzik. Itt kerül sor az ünnepélyes eredményhirdetésre is. A díjazás a versenybizottság döntése alapján történik. A tanév végén a megbízott iskola egy füzetet állít össze, melyben szerepel a versenyfelhívás, minden évfolyam feladatsora, a javítókulcsok, a végeredmény és a legeredményesebb felkészítő tanárok névsora.

A KÖMAL egyetemi körökben is igen jól ismert, több mint 100 éves pontverseny, mellyel a matematika szakos hallgatók közül sokan már középiskolásként is találkoztak. Mi is a KÖMAL? Egy középiskolásoknak szóló matematikai újság (KÖzépiskolai MAtematikai Lapok), amely levelező formában hirdet meg tanévenként feladatmegoldó versenyt több kategóriában matematikából, fizikából, néhány év óta informatikából. A KÖMAL a versenyfeladatok mellett beszámol a hazai és nemzetközi versenyekről, cikkeket közöl érdekes matematikai és fizikai eredményekről, és ismertetőt ad új, a középiskolai matematika és fizika tananyagot érintő könyvekről. Több mint harminc éve minden feladat magyarul és angolul is megjelenik. 2000-től pedig a feladatok, a megoldások vázlatai, néhány cikk és a pontversenyek eredményei a folyóirat honlapján (www.komal.hu) is megjelennek. Egy adott verseny minden tanév szeptemberétől májusáig tart. A feladatokat különböző nehézségi szintű kategóriákba sorolják. A versenyzők postai vagy elektronikus úton küldhetik el megoldásaikat. A beküldött feladatokat javítják, pontozzák, a pontokat versenyzőnként összegzik. A verseny állását az internetes oldalon nyomon követhetik az érdeklődők. A versenysorozat végén a legeredményesebb versenyzők arcképét az újságban megjelentetik. A legjobbak tárgyjutalomban és oklevélben részesülnek.

Leendő tanárként szeretném, ha néhány év múlva sok tanítványom indulna el ezeken a versenyeken és szerezne olyan a sikerélményeket, amilyet csak egy sikeres matematika verseny adhat.

I. FEJEZET

Ebben a fejezetben a Bács-Kiskun megyei Matematikaverseny olyan feladatait mutatom be, melyek megoldásához a középiskolában megszerezhető tudás alapos ismerete, annak gyakorlott használata szükséges. Ezek a példák a szorgalmas, kevésbé önállóan gondolkodó, de a tanult eljárásokat jól alkalmazó diákok számára ideálisak.

A. Abszolút érték és gyökfogalom, kikötések

Bács-Kiskun Megyei Matematikaverseny 2008/2009
12. osztály, II. forduló

Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$\frac{|x^2+x\,|}{2}+\frac{2}{|x^2+x\,|}=2$$

egyenletet!

1., Megoldás *

Ebben a megoldásban az abszolút értékes egyenletek megoldásához tanult lépéseket követjük. Szétválasztjuk az eseteket.

Az abszolút érték alapján vizsgáljuk különböző a eseteket.

Először is kikötést teszünk.

$$|x^2+x|\neq 0$$

$$x^2+x\neq 0$$

$$x(x+1)\neq 0$$

Mivel egy szorzat értéke akkor és csak akkor nulla, ha az egyik tényezője nulla, így:

$$x\neq 0 \text{ és } x\neq -1$$

Az abszolút érték definíciója miatt:

$$|x^2+x|\geq 0$$

Tehát:

$$|x^2+x|>0$$

a., eset: Ha $x^2+x>0$

Azaz $x(x+1)>0$, ebből $x>0$ vagy $x<-1$.

Hozzuk közös nevezőre a bal oldalt.

$$\frac{(x^2+x)^2}{2(x^2+x)}+\frac{2\cdot 2}{2(x^2+x)}=2$$

$$\frac{(x^2+x)^2+4}{2(x^2+x)}=2$$

$$(x^2+x)^2+4=4(x^2+x)$$

Vezessünk be új ismeretlent: $a=(x^2+x)$

$$a^2-4a+4=0$$

$$(a-2)^2=0$$

$$a-2=0$$

$$a=2$$

Ebből:

$$2=(x^2+x)$$

$$x^2+x-2=0$$

Megoldva a másodfokú egyenletet:

$$x_1=1$$

$$x_2=-2$$

Mivel mindkét érték beletartozik a vizsgált tartományba, így mindkettő megoldás.

b., eset: Ha $x^2+x<0$

Azaz $x(x+1)<0$, ebből $-1<x<0$.

$$\frac{-(x^2+x\,)}{2}+\frac{2}{-(x^2+x\,)}=2$$

$$\frac{(x^2+x)^2}{-2(x^2+x)}+\frac{2\cdot 2}{-2(x^2+x)}=2$$

$$\frac{(x^2+x)^2+4}{-2(x^2+x)}=2$$

$$(x^2+x)^2+4=-4(x^2+x)$$

Vezessünk be új ismeretlent: $a=(x^2+x)$

$$a^2 + 4a + 4 = 0$$

$$(a+2)^2 = 0$$

$$a + 2 = 0$$

$$a = -2$$

Ebből:

$$-2 = (x^2 + x)$$

$$x^2 + x + 2 = 0$$

Mivel a diszkrimináns $D = 1 - 4 \cdot 2 = -7$ negatív, ezért ezen az ágon nincs valós megoldás.

<u>2., Megoldás</u>

Már kicsit gyakorlottabb szemmel vizsgálva a feladatot észrevehető, hogy nincs is szükség az abszolút érték vizsgálatára.

Legyen $y = \frac{|x^2+x|}{2}$. Az abszolút érték miatt azonnal látszik, hogy $y \geq 0$. Sőt $y > 0$, hiszen $|x^2 + x| \neq 0$.

Így tehát az $y + \frac{1}{y} = 2$ egyenletet kell megoldanunk.

<u>Tétel:</u> Ha $y > 0$, akkor $y + \frac{1}{y} \geq 2$. Az egyenlőség csak akkor áll fenn, ha $y = 1$.

Így:

$$1 = \frac{|x^2 + x|}{2}$$

$$2 = |x^2 + x|$$

Ebből:

$$2 = x^2 + x$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -2$$

$$-2 = x^2 + x$$

$$x^2 + x + 2 = 0$$

Mivel a diszkrimináns negatív, így ezen az ágon nem kapunk valós megoldást.

Mivel a diszkrimináns negatív, így ezen az ágon nem kapunk valós megoldást.

Mely valós x értékekre teljesül a következő egyenlőtlenség?

$$\frac{\mathbf{4x^2}}{(\mathbf{1}-\sqrt{\mathbf{1}+\mathbf{2x}})^2} < \mathbf{2x} + \mathbf{9}$$

Hány egész számot tartalmaz a megoldáshalmaz?

Megoldás

Első lépésként tegyünk kikötést. A négyzetgyök miatt

$$1 + 2x \geq 0$$

$$x \geq -\frac{1}{2}$$

A nevező miatt:

$$1 - \sqrt{1 + 2x} \neq 0$$

$$1 \neq \sqrt{1 + 2x}$$

$$x \neq 0$$

Ezek után:

$$\frac{4x^2}{\left(1-\sqrt{1+2x}\right)^2} = \left(\frac{2x}{1-\sqrt{1+2x}}\right)^2$$

Gyöktelenítsük a nevezőt célszerű bővítéssel!

$$\frac{2x}{1-\sqrt{1+2x}} = \frac{2x}{1-\sqrt{1+2x}} \cdot \frac{1+\sqrt{1+2x}}{1+\sqrt{1+2x}} = \frac{2x\left(1+\sqrt{1+2x}\right)}{1-(1+2x)} = \frac{2x\left(1+\sqrt{1+2x}\right)}{-2x}$$

$$= -(1 + \sqrt{1 + 2x})$$

Így a következőt kapjuk:

$$\left[-\left(1+\sqrt{1+2x}\right)\right]^2 < 2x + 9$$

$$1 + 2\sqrt{1 + 2x} + (1 + 2x) < 2x + 9$$

$$2\sqrt{1 + 2x} < 7$$

Négyzetre emelünk:

$$4(1+2x)<49$$

$$x<\frac{45}{8}$$

Így a keresett x-ek a $-\frac{1}{2}\leq x<\frac{45}{8}$ tartományba esnek, ahol $x\neq 0$.

A kapott egész megoldások tehát $\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\}$. 5 db van belőlük.

B. Trigonometrikus egyenletek, egyenlőtlenségek

Bács-Kiskun Megyei Matematikaverseny 2008/2009
12. osztály, I. forduló

Oldjuk meg a valós számok halmazán a

$$\sqrt{\boldsymbol{cosx}}+\sqrt{\mathbf{2}\boldsymbol{cosx}+\mathbf{2008}}=\sqrt{\sqrt{\mathbf{8}}\cdot\boldsymbol{cosx}+\mathbf{2008}}$$

egyenletet!

Megoldás

A gyökös kifejezések miatt az alábbi kikötéseket tesszük:

$$cosx\geq 0$$

Ez mellett az alábbi egyenlőtlenségek is teljesülnek:

$$2cosx+2008\geq 0$$

$$\sqrt{8}\cdot cosx+2008\geq 0$$

Emeljük négyzetre az eredeti egyenlet mindkét oldalát kihasználva az $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ azonosságot!

$$cosx+2\sqrt{cosx}\sqrt{2cosx+2008}+2cosx+2008=\sqrt{8}\cdot cosx+2008$$

$$(3-\sqrt{8})cosx+2\sqrt{cosx}\sqrt{2cosx+2008}=0$$

Mivel $3>\sqrt{8}$, ezért mindkét tag a baloldalon nem negatív. Az egyenlőség csak akkor teljesül, ha

$$cosx=0$$

Ekkor

$$x=\frac{\pi}{2}+k2\pi,\text{ ahol}(k\in Z)$$

Oldjuk meg a valós számok halmazán a

$$\frac{1}{sinx}+\frac{4}{\frac{1}{sinx}+2}=3$$

egyenletet!

Megoldás

A törtek miatt az alábbi kikötéseket tesszük:

$$sinx \neq 0$$

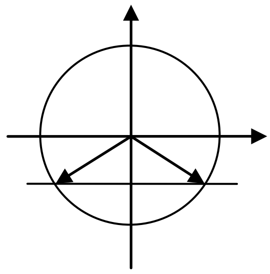
ebből: $x \neq k2\pi$, ahol $(k \in Z)$

És

$$\frac{1}{sinx}+2 \neq 0$$

$$\frac{1}{sinx} \neq -2$$

$$sinx \neq -\frac{1}{2}$$



ebből: $x \neq \frac{7\pi}{6}+l2\pi$ és $x \neq -\frac{\pi}{6}+m2\pi$, ahol $(l;\ m \in Z)$

Vezessünk be új ismeretlent: $a=\frac{1}{sinx}$

Így a megoldandó egyenlet:

$$a+\frac{4}{a+2}=3$$

$$a^2+2a+4=3a+6$$

$$a^2-a-2=0$$

Megoldva a másodfokú egyenletet az $a_1=-1$ és $a_2=2$ megoldásokat kapjuk.

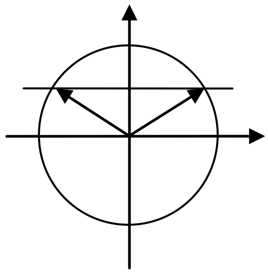
Az $a=\frac{1}{sinx}$ egyenletbe ezeket behelyettesítve:

$$-1 = \frac{1}{sinx}$$

$$sinx = -1$$

$x_1 = \frac{3\pi}{2} + p2\pi$, ahol $(p \in Z)$

Illetve



$$2 = \frac{1}{sinx}$$

$$sinx = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{\pi}{6} + q2\pi$$

$x_3 = \frac{5\pi}{6} + r2\pi$, ahol $(q;\ r \in Z)$

Az így kapott három érték megfelel a feltételeknek, ezért ezek az egyenlet megoldásai.

C. Paraméteres feladatok, algebrai azonosságok, teljes négyzet

Bács-Kiskun Megyei Matematikaverseny 2008/2009
12. osztály, I. forduló

Az x; y; z pozitív számok átlaga $\frac{2a}{3}$ -mal egyenlő, ahol a valós paraméter. Az x; y; z számok négyzeteinek átlaga $4a - 4$. Hogyan válasszuk meg az a paraméter értékét, hogy az xy; yz; zx számok átlaga a lehető legkisebb legyen és mennyi ez a minimum?

Megoldás

Mivel pozitív számokról beszélünk és ezek átlaga is pozitív, ezért ki kell kötni:

$$\frac{2a}{3} > 0$$

$$a > 0$$

és

$$4a - 4 > 0$$

$$a > 1$$

Tudjuk, hogy

$$\frac{x+y+z}{3}=\frac{2a}{3}$$

$$x+y+z=2a$$

illetve

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{3}=4a-4$$

$$x^2+y^2+z^2=12a-12$$

Kérdés $xy; yz; zx$ számok átlaga.

Ha az $x+y+z=2a$ egyenlet mindkét oldalát négyzetre emeljük. Mivel mindkét oldal pozitív, ezért ekvivalens átalakítást végzünk.

$$x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx=4a^2$$

$$12a-12+2xy+2yz+2zx=4a^2$$

$$2xy+2yz+2zx=4a^2-12a+12$$

$$xy+yz+zx=2a^2-6a+6$$

Ebből az átlag:

$$\frac{xy+yz+zx}{3}=\frac{2a^2-6a+6}{3}$$

A jobboldalt tovább alakítva kiemeléssel és teljes négyzetté alakítással:

$$\frac{xy+yz+zx}{3}=\frac{2\left[\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]}{3}$$

Ez akkor a minimális, ha $a-\frac{3}{2}=0$, azaz $a=\frac{3}{2}$.

Az a-ra kapott érték benne van az értelmezési tartományban.. Ez mellett, a paraméter mellett az legkisebb átlag értéke $\frac{1}{2}$.

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet!

$$(x^2 + 4x + 7)(y^4 + 4y^3 - 2y^2 - 12y + 14) = 15$$

Megoldás

A szorzat tényezőit teljes négyzetté alakítjuk felhasználva az

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

illetve

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$$

azonosságokat.

Ekkor:

$$((x + 2)^2 + 3)((y^2 + 2y - 3)^2 + 5) = 15$$

Mivel a négyzetes kifejezések nem negatívak, így az első tényező nem kisebb, mint három, a második tényező nem kisebb, mint öt. Ezért a szorzat akkor és csak akkor egyenlő 15-tel, ha a tényezők rendre 3 és 5, azaz $(x + 2)^2 = 0$ és $(y^2 + 2y - 3)^2 = 0$.

Tehát

$$x + 2 = 0$$

$$x = -2$$

és

$$y^2 + 2y - 3 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 + 4 \cdot 3}}{2}$$

$$y_1 = -3$$

$$y_2 = 1$$

Az egyenlet megoldásai az $(-2; -3)$ és a $(-2; 1)$ rendezett számpárok.

II. FEJEZET

Ebben a fejezetben számelmélet feladatokkal foglalkozom. Mivel a kongruencia fogalmát nem kötelező tanítani a középiskolában, így vizsgáljuk meg a megoldásokat ennek ismeretével illetve nélküle.

Bács-Kiskun Megyei Matematikaverseny 2006/2007
11. osztály, II. forduló

Igazoljuk, hogy a négyzetszámoknál 1-gyel nagyobb számok nem oszthatók sem 3-mal, sem 7-tel!

1., Középiskolai megoldás *

Legyen a négyzetszám x^2, ahol $x \in Z$.

Két dolgot állítunk: $3 \nmid x^2+1$

$7 \nmid x^2+1$

Induljunk el indirekt úton. Tegyük fel, hogy:

$$x^2+1=k\cdot 3$$

$$x^2=k\cdot 3-1$$

$$x^2=(k-1)\cdot 3+2$$

Azaz azt állítjuk, hogy x egy olyan négyzetszám, amely 3-mal osztva 2-t ad maradékul. Ez tudjuk, hogy nem igaz, hiszen a négyzetszámok 3-mal vett maradéka 0 vagy 1 lehet.

(Értékeléskor teljes értékű a megoldás, ha erre a tényre hivatkoznak diákok és nem bizonyítják, mert valószínű ismert tételnek tekintik.)

Nézzük, hogy szól a felhasznált összefüggés bizonyítás:

- Ha x osztható hárommal, nyilvánvaló, hogy a négyzete is osztható.
- Tegyük fel, hogy az x 3-mal osztva egyet ad maradékul, akkor felírható, hogy:

$$x=k\cdot 3+1$$

$$x^2=x\cdot x=x\cdot(k\cdot 3+1)=x\cdot k\cdot 3+x=3xk+3y+1=3(xk+k)+1$$

Tehát x^2 is 1-et ad maradékul.

- Ismételjük meg ezt, ha x 3-mal osztva kettőt ad maradékul:

$$x = k \cdot 3 + 2$$

$$x^2 = (3k + 2)^2 = 9\mathrm{k}^2 + 12\mathrm{k} + 4$$

$$x^2 = x \cdot x = x \cdot (k \cdot 3 + 2) = x \cdot k \cdot 3 + 2 \cdot x = 3xk + 2 \cdot (3k + 2) = 3xk + 6k + 4$$
$$= 3xk + 6k + 3 + 1$$

Tehát mindkét esetet megvizsgálva beláttuk, hogy minden hárommal nem osztható négyzetszám hárommal vett maradéka 1.

Most térjünk rá a feladat második részére.

Állításunk: $x^2 \neq (k - 1) \cdot 7 + 6$, azaz a négyzetszám 7-tel osztva nem adhat 6 maradékot.

Hét esetet vizsgálunk, aszerint, hogy egy x szám hányféle maradékot adhat héttel osztva.

- Ha x osztható 7-tel, akkor a négyzete is.
- $x = 7k + 1$
  $x^2 = (7k + 1)^2 = 7 \cdot 7k^2 + 2 \cdot 7k + 1$ Egyet kapunk maradékul.
- $x = 7k + 2$
  $x^2 = (7k + 2)^2 = 7 \cdot 7k^2 + 2 \cdot 7 \cdot 2k + 4$ Négyet kapunk maradékul.
- $x = 7k + 3$
  $x^2 = (7k + 3)^2 = 7 \cdot 7k^2 + 2 \cdot 7 \cdot 3k + 7 + 2$ Kettőt kapunk maradékul.
- $x = 7k + 4$
  $x^2 = (7k + 4)^2 = 7 \cdot 7k^2 + 2 \cdot 7 \cdot 4k + 14 + 2$ Kettőt kapunk maradékul.
- $x = 7k + 5$
  $x^2 = (7k + 5)^2 = 7 \cdot 7k^2 + 2 \cdot 7 \cdot 5k + 21 + 4$ Négyet kapunk maradékul.
- $x = 7k + 6$
  $x^2 = (7k + 6)^2 = 7 \cdot 7k^2 + 2 \cdot 7 \cdot 2k + 35 + 1$ Egyet kapunk maradékul.

Valóban, 6-os maradék nem állhat elő.

Kevesebb lépéssel is megkaphattuk volna: ha a $7k; 7k \pm 1; 7k \pm 2; 7k \pm 3$ eseteket tekintjük.

2. Egyetemi ismeretekkel *

Tegyük fel indirekt, hogy bármely négyzetszámnál eggyel nagyobb számok oszthatóak 3-mal, illetve 7-tel.

Azaz

$$x^2 + 1 \equiv 0 \ (mod\ 3)$$
$$x^2 + 1 \equiv 0 \ (mod\ 7)$$

Avagy:

$$x^2 \equiv -1\ (mod\ 3)$$
$$x^2 \equiv -1\ (mod\ 7)$$

Használjuk a kis-Fermat tételt!

<u>Tétel</u>: Ha p prím és $(a, p) = 1$, *akkor* $a^{p-1} \equiv 1\ (mod\ p)$.

Ebből

$$1 \equiv x^{3-1} = x^2$$

A feltevésünk értelmében:

$$x^2 \equiv -1\ (mod\ 3)$$

Ez ellentmondás, mivel $1 \not\equiv -1\ (mod\ 3)$

Továbbá:

$$1 \equiv x^{7-1} = x^6 (mod\ 7)$$

A feltevésünk értelmében:

$$x^2 \equiv -1\ (mod\ 7)$$
$$(x^2)^3 \equiv (-1)^{\ 3} \equiv -1\ (mod\ 7)$$
$$x^6 \equiv -1\ (mod\ 7)$$

Ez ellentmondás, mivel $1 \not\equiv -1\ (mod\ 7)$

Bács-Kiskun Megyei Matematikaverseny 2008/2009
11. osztály, I. forduló

Bizonyítsuk be, hogy 29 darab, közvetlen egymás után következő egész szám négyzetének összege nem lehet négyzetszám.

<u>1., Középiskolai megoldás</u>

Praktikus a következő képen jelölni a 29 számot: $x - 14 \dots x - 1;\ x;\ x + 1 \dots x + 14$

Állításunk: $n^2 \neq \sum_{i=-14}^{14} (x + i)^2$ (minden n-re, ahol x, n, i egész számok)

$$S = \sum_{i=-14}^{14} (x + i)^2 = (x - 14)^2 + \cdots (x - 1)^2 + x^2 + (x + 1)^2 + \cdots (x + 14)^2$$

$$S = 29x^2 + 2(1^2 + 2^2 + \cdots 14^2) = 29x^2 + 2030$$

(A kétszeres szorzatok kiestek.)

A négyzetszámok összegképletét alkalmazva: $1^2 + 2^2 + \cdots n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(Itt a megoldási útmutató megjegyzi, hogy ezt a képlet helyett számológéppel is kiszámolhatja a versenyző.)

Ismert tény, hogy egy négyzetszám 4-gyel osztva csak 0 vagy 1 maradékot adhat:

- Ha $x = 2k$ (páros), nyilvánvaló, hogy $x^2 = (2k)^2 = 4k^2$ osztható 4-gyel.
- Ha $x = 2k + 1$ (páratlan), akkor $x^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 2 \cdot 2k + 1$.

Egy a maradék.

Tehát ha x páros szám, akkor $29x^2$ osztható 4-gyel, viszont a 2030 2-es maradékot ad.

Ha x páratlan, akkor $\boldsymbol{29x^2 = 29 \cdot (4k^2 + 4k + 1) = 116k^2 + 116k + 29}$

$$S = 116k^2 + 116k + 29 + 2030 = 116k^2 + 116k + 2059 = 116k^2 + 116k + 2056 + 3$$

Azaz 4-gyel osztva 3 a maradék.

Így beláttuk, hogy valóban nem kaphatunk négyzetszámot.

<u>1., Egyetemi módszerrel *</u>

Indirekt tegyük fel, hogy 29 egymást követő szám négyzetének összege lehet négyzetszám.

$$a^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{29}^2$$

Az a^2 ekkor 0-val vagy 1-gyel kongruens moduló 4.

Az egymás után következő számok négyzete pedig felváltva 0-val vagy 1-gyel kongruens moduló 4.

Tehát két eset van:

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{29}^2 \equiv 1 + 0 + 1 + \cdots + 1 \equiv 1 + 14 \equiv 3 \ (mod\ 4)$$

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{29}^2 \equiv 0 + 1 + 0 + \cdots + 0 \equiv 0 + 14 \equiv 2 \ (mod\ 4)$$

Tehát mindkét lehetőséggel ellentmondáshoz jutottunk, 29 egymást követő szám négyzetének összege nem lehet négyzetszám.

Bács-Kiskun Megyei Matematikaverseny 2006/2007
10. osztály, II. forduló

Legyen n 2-nél nagyobb pozitív egész szám. Határozzuk meg az A szám utolsó számjegyét, ha $\boldsymbol{A = n^5 - 5n^3 + 4n + 3}$!

<u>1., Középiskolai megoldás *</u>

Átalakítjuk a kifejezést, először emeljünk ki n - et:

$$A = n^5 - 5n^3 + 4n + 3 = n(n^4 - 5n^2 + 4) + 3$$

Nézzük a zárójelben lévő kifejezést!

Legyen $x = n^2$

Így:

$$n^4 - 5n^2 + 4 = x^2 - 5x + 4$$

A diszkrimináns: $25 - 4 \cdot 4 > 0$, tehát létezik két valós gyöke.

Ekkor a $P(x) = ax^2 + \mathrm{b}x + \mathrm{c} = \mathrm{a}(\mathrm{x} - \mathrm{x}_1)(\mathrm{x} - \mathrm{x}_2)$ egyenlőség alapján bontsuk szorzattá a zárójelben lévő kifejezést. Ha „ránézésre" nem sikerül, akkor keressük meg az egyenlet gyökeit. Ezt vagy megoldó képlettel vagy a Viéte-formulákkal tehetjük meg.

Viéte-formulák:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{5}{1} = 5$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{4}{1} = 4$$

Kifejezzük x_1-et:

$$x_1 = 5 - x_2$$

Ebből:

$$(5 - x_2)x_2 = 4$$

$$x_2{}^2 - 5x_2 + 4 = 0$$

Megoldva a másodfokú egyenletet:

$$x_2 = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2}$$

Innen a két gyök $x_1 = 1;\ x_2 = 4$.

Tehát

$$n(n^4 - 5n^2 + 4) + 3 = n(n^2 - 1)(n^2 - 4) + 3$$

Ezt tovább alakítva:

$$A = (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) + 3$$

A kiemelt kifejezés 5 egymást követő egész szám szorzata, ami biztosan páros, és osztható 5-tel (hiszen közülük az egyik szám osztható 5-tel). Azaz a szorzat osztható 10-zel is, tehát nullára végződik, így az A szám végződése 3.

1., Egyetemi módszerrel *

Kérdés:

$$A = n^5 - 5n^3 + 4n + 3 \equiv ?\ (mod\ 10)$$

Használjuk fel a kis-Fermat tételt:

(FREUD-GYARMATI: Számelmélet, **T 2.4.1B**)

Tétel: Ha p prím, akkor bármely a egész számra $a^p \equiv a\ (mod\ p)$.

Ekkor

$$A = n^5 - 5n^3 + 4n + 3 \equiv n - 5n^3 + 4n + 3 \equiv 5n^3 + 5n + 3 \equiv 3 \ (mod \ \ 2)$$

És:

$$A = n^5 - 5n^3 + 4n + 3 \equiv n - 5n^3 + 4n + 3 \equiv 5n^3 + 5n + 3 \equiv 3 \ (mod \ \ 5)$$

(FREUD-GYARMATI: Számelmélet, **T 2.6.2**)

Tétel: (Kínai maradéktétel)

Legyen az $m_1, \dots, m_k$ modulusok páronként relatív prímek. Ekkor az

$$x \equiv c_1 \ (mod \ m_1)$$
$$x \equiv c_2 \ (mod \ m_2)$$
$$\vdots$$
$$x \equiv c_k \ (mod \ m_k)$$

szimultán kongruenciarendszer bármilyen $c_1, \dots, c_k$ egészek esetén megoldható, és a megoldások egyetlen maradékosztályt alkotnak modulo $m_1 m_2 \dots m_k$.

Ekkor

$$A \equiv 3 \ (mod \ \ 2)$$
$$A \equiv 3 \ (mod \ \ 5)$$

A fenti tétel értelmében:

$$A \equiv 3 \ (mod \ \ 10)$$

Tehát az *A* szám végződése 3.

Bács-Kiskun Megyei Matematikaverseny 2007/2008
10. osztály, I. forduló

Egy téglalap alakú sportpálya oldalainak méterben mért hosszát egy nem tízes alapú számrendszerben 101 és 230 jelöli, a téglalap méterben mért kerületének számmértéke ugyanebben a számrendszerben 1212. Hány m^2 a sportpálya területe ebben a számrendszerben?

1., Középiskolai megoldás

Legyen a a számrendszer alapszáma.

Így $101_a = a^2 + 1$ és $230_a = 2a^2 + 3a$

A téglalap kerülete: $2(101_a + 230_a) = 2(3a^2 + 3a + 1) = 6a^2 + 6a + 2$

Másrészt: $1212_a = a^3 + 2a^2 + a + 2$

Tehát:

$$a^3 + 2a^2 + a + 2 = 6a^2 + 6a + 2$$

$$a^3 - 4a^2 - 5a = 0$$

$$a(a^2 - 4a - 5) = 0$$

Mivel a nem lehet nulla, így az $a^2 - 4a - 5 = 0$ egyenlet megoldásait keressük.

$$a_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2}, \acute{\imath}gy\ a_1 = 5;\ a_2 = -1$$

A feladat szempontjából csak az $a_1 = 5$ felel meg. Ez alapján átírva a téglalap oldalait tízes számrendszerbe:

$$101_a = 5^2 + 1 = 26\ \acute{e}s\ 230_a = 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 = 65$$

Tehát $T = 26 \cdot 65 = 1690\ m^2$

Ezt írjuk vissza 5-ös alapú számrendszerbe: $1690 = 2 \cdot 5^4 + 3 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5$

$$T = 23230_5\ m^2$$

<u>1., Egyetemi módszerrel *</u>

Tudjuk:

$$101_a + 101_a + 230_a + 230_a = 1212_a$$

Az egyesek helyén szereplő értékek összege:

$$1_a + 1_a + 0_a + 0_a = 2_a$$

A tízesek helyén szereplő értékek összege:

$$0_a + 0_a + 3_a + 3_a = 1_a$$

Milyen számmal osztva ad a hat egy maradékot? Ez a szám az 5.

A százasok helyén szereplő értékek összege ezek alapján:

$$1_a + 1_a + 2_a + 2_a + 1(a\ fenti\ sorb\acute{o}l) = 2_a$$

Valóban 7 5-tel osztva 2-t ad maradékul. Maradt az egy.

Ez alapján a terület:

$$\begin{array}{rl} & \underline{230_5 \cdot 101_5} \\ & 230 \\ & 0000 \\ + & \underline{00230} \\ & 23230 \end{array}$$

$$T = 23230_5\ m^2$$

Bács-Kiskun Megyei Matematikaverseny 2007/2008
10. osztály, I. forduló

A 2☐0☐0☐7☐ tízes számrendszerbeli nyolcjegyű számban bizonyos jegyek helyét kihagytuk, ezekre a helyekre a 2008 szám jegyeit írhatjuk. Az így kapott számok közül hány lesz négyzetszám?

Megoldás *

Tudjuk, hogy a négyzetszámok végződése 0; 1; 4; 9; 6; 5 lehet. Tehát az egyik 0 biztosan a szám végére kell, hogy kerüljön.

Viszont ha egy szám nullára végződik, akkor osztható 10-zel. A 10-zel osztható négyzetszámoknak pedig 100-zal is oszthatónak kell lenniük, de ez a fenti szám esetében nem igaz, hiszen a százasok helyén nem 0, hanem 7-es áll.

Máshogy megfogalmazva, ha egy szám osztható 10-zel, akkor osztható 2-vel és 5-tel is, viszont ha négyzetszám, akkor oszthatónak kell lennie 2^2-nal és 5^2-nal is. Avagy a 2☐0☐0☐7-nek is osztója kell, hogy legyen a 2 és az 5. Persze ez nem igaz.

Tehát nincs ilyen négyzetszám.

Felmerülő kérdések

Honnan tudjuk, mire végződik egy négyzetszám?

Középiskolában végigpróbálgathatjuk, hogy bizonyos végződésű számok négyzete mire végződik. (1-es, 9-es1-esre; 2-es, 8-as 4-esre; 3-as, 7-es 9-esre; 4-es, 6-os 6-osra; 5-ös 5-ösre, 0-s 0-ra.)

Vagy kongruenciával:

$$\text{ha } n \equiv \pm 1 \ (mod\ 10),$$

$$\text{akkor } n^2 \equiv 1 \ (mod\ 10);$$

$$\text{ha } n \equiv \pm 2 \ (mod\ 10),$$

$$\text{akkor } n^2 \equiv 4 \ (mod\ 10);$$

$$\text{ha } n \equiv \pm 3 \ (mod\ 10),$$

$$\text{akkor } n^2 \equiv 9 \ (mod\ 10);$$

$$\text{ha } n \equiv \pm 4 \ (mod\ 10),$$

$$\text{akkor } n^2 \equiv 16 \equiv 6 \ (mod\ 10);$$

$$\text{ha } n \equiv 5 \ (mod\ 10),$$

$$\text{akkor } n^2 \equiv 25 \equiv 5 \ (mod\ 10).$$

Miután már tudjuk, hogy az utolsó helyre a 0 kerül, már csak $3! = 6$ darab lehetőségünk van, így azok a diákok, akik nem vizsgálják 100-zal való oszthatóságot, azok próbálgatással is megkaphatják az eredményt.

Bács-Kiskun Megyei Matematikaverseny 2007/2008
11. osztály, I. forduló

A háromjegyű 10-es számrendszerbeli $\overline{abc}$ számhoz keressük meg mindazokat az ugyancsak háromjegyű számokat, amelyek ugyanazokból a számjegyekből állnak, mint $\overline{abc}$, de bennük egyik jegy sem áll az eredeti helyi értéken. Az így kapott számokat és $\overline{abc}$ - t összeadva egy olyan számot kapnak, amely 2007-nél egy négyzetszámmal nagyobb. Melyik ez a négyzetszám?

1., Középiskolai megoldás *

Az $\overline{abc}$ számból a számjegyek felcserélésével (úgy, hogy az eredeti helyére egyik sem kerülhet) csak a $\overline{bca}$ és a $\overline{cab}$ számokat kapjuk.

$$\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = 111(a + b + c)$$

$$111(a + b + c) = 2007 + x^2$$

A baloldal osztható 3-mal, mivel 111 osztható 3-mal, így ez igaz kell, hogy legyen a jobb oldalra is, ami csak akkor teljesül, ha $x = 3y$. Így $x^2 = 9y^2$, és mivel 2007 is osztható 9-cel, ebből következik, hogy $(a + b + c)$ összegnek oszthatónak kell lenni 3-mal.

Mivel a feladat azt kéri, hogy úgy cseréljük fel a számjegyeket, hogy azok közül semelyik se kerüljön az eredeti helyére, ezért feltehetjük, hogy a számjegyek különbözőek. Így az $(a + b + c)$ összegre kapható legnagyobb érték a $7 + 8 + 9 = 24$. És mivel:

$$(a + b + c) = \frac{2007 + x^2}{111} > \frac{2007}{111} > 18$$

Ezért a lehetséges 2 eset:

$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$	$\boldsymbol{y^2}$	$\boldsymbol{x^2}$
21	36	324
24	73	657

(Az $(a+b+c)=3$ esetet kihagytuk, mivel az csak akkor fordulhat elő, ha mindhárom számjegy 1-es.)

Az így kapott két lehetséges eset közül csak az $x^2=18^2=324$ felel meg a feladat feltételeinek, hiszen négyzetszámot keresünk és $657=3\cdot 3\cdot 73$ nem az. Tehát a keresett négyzetszám a 324.

2., Egyetemi módszerrel *

Az alábbi egyenletből indulunk ki:

$$111(a+b+c)=2007+x^2$$

Tudjuk, hogy a baloldal osztható 111-gyel, azaz 3-mal és 37-tel is.

$$2007+x^2\equiv 0\ (mod\ 3)$$

$$x^2\equiv 0\ (mod\ 3)$$

ebből következik, hogy

$$x^2\equiv 0\ (mod\ 9)$$

és

$$2007+x^2\equiv 0\ (mod\ 37)$$

$$9+x^2\equiv 0\ (mod\ 37)$$

$$x^2\equiv 28\ (mod\ 37)$$

Tehát

$$x^2=k\cdot 37+28\equiv 0\ (mod\ 9)$$

$$k\cdot 1+1\equiv 0\ (mod\ 9)$$

$$k\equiv 8\ (mod\ 9)$$

Mivel $(a+b+c)\le 24$, ezért $111\cdot 24\ge 2007+x^2$.

Tehát $657\ge x^2$.

Ezek alapján a lehetséges esetek x^2- re:

$$8 \cdot 37 + 28 = 324$$

$$17 \cdot 37 + 28 = 657$$

Mivel négyzetszámot keresünk, ezért csak az $x^2 = 324$ a jó megoldás.

III. FEJEZET

A Bács-Kiskun megyei Matematikaverseny feladatai után vizsgáljunk meg pár KÖMAL példát is. Ide hasonlóan az első fejezethez olyan a számelmélet illetve az algebra témakörébe tartozó példákat válogattam, melyeket a biztos, középiskolai alapórákon megszerzett tudáson felül szakkörös, fakultációs tapasztalatokkal rendelkező tanulók könnyebben meg tudnak oldani.

A KÖMAL által rendszerezett feladatok közül, főleg a B jelűekkel (esetleg C jelűekkel) foglalkozom.

D. Számjegyek

KÖMAL
B. 4503.

Határozzuk meg azokat a négyjegyű négyzetszámokat, amelyeknek két első és két utolsó számjegye egyenlő.

1. Megoldás:

Keressük az $a^2 = \overline{xxyy}$ alakú számokat.

$$a^2 = 1000x + 100x + 10y + y$$

$$a^2 = 1100x + 11y$$

$$a^2 = 11(100x + y)$$

Tehát ha a^2 osztható 11-gyel, ami prímszám, akkor a is osztható vele.

Mivel a^2 négyjegyű, ezért az a biztosan 32 és 99 közé kell, hogy essen.

A feltételeknek megfelelő a^2 lehet:

$$33^2 = 1089$$

$$44^2 = 1936$$

$$55^2 = 3025$$

$$66^2 = 4356$$

$$77^2 = 5929$$

$$88^2 = 7744$$

$$99^2 = 9801$$

Ezek közül csak a $\mathbf{7744} = \overline{\boldsymbol{xxyy}}$**.**

<u>2. Megoldás: *</u>

A $a^2 = 11(100x + y)$ sortól kicsit máshogy.

Ebből az következik, hogy

$$11|(100x + y)$$

illetve, hogy $\frac{(100x+y)}{11}$ is négyzetszám.

Tehát egy olyan $\overline{x0y}$ alakú számot keresünk, mely 11-nek és egy négyzetszámnak a szorzata. Erről a négyzetszámról még azt is tudjuk, hogy 10 és 100 között van, illetve a tízesek helyén lévő 0 miatt számjegyeinek összege 10. Ezeknek a feltételeknek egyedül a 64 felel meg.

$$\overline{x0y} = 11 \cdot 64 = 704$$

$$x = 7$$

$$y = 4$$

Tehát a keresett szám:

$$\overline{xxyy} = 7744$$

KÖMAL
B 4492

Bizonyítsuk be, hogy ha az a és b természetes számok csak számjegyeik sorrendjében különböznek egymástól, akkor az 5a és 5b számok számjegyeinek összege egyenlő.

Megoldás

Legyen $a = \overline{a_n \dots a_2 a_1}$. A b szám csak a számjegyek sorrendjében különbözik az a-tól.

Gondoljuk végig, hogy hogyan kapnánk meg az $5a$ szám számjegyeinek összegét, ha a szorzást írásban csinálnánk. Az egyesektől haladva összeadjuk minden számjegy ötszörösének utolsó számjegyét az előző számjegy ötszörösének az első számjegyével.

Például $a = 123$. $(5a = 615)$

$$3 \cdot 5 = 15; 2 \cdot 5 = 10; 1 \cdot 5 = 5$$

Ekkor a számjegyek összege: $5 + (1 + 0) + (1 + 5) = 5 + 1 + 6 = 12$

Csoportosíthatjuk a tagokat máshogyan (kommutativitás):

$$(5 + 1) + (0 + 1) + 5 = 12$$

Tehát minden számjegynél nézzük meg az öttel való szorzása után kapott szám számjegyeinek az összegét:

$$1 \cdot 5 \to 5$$

$$2 \cdot 5 \to 1 + 0 = 1$$

$$3 \cdot 5 \to 1 + 5 = 6$$

$$4 \cdot 5 \to 2 + 0 = 2$$

$$5 \cdot 5 \to 2 + 5 = 7$$

$$6 \cdot 5 \to 3 + 0 = 3$$

$$7 \cdot 5 \to 3 + 5 = 8$$

$$8 \cdot 5 \to 4 + 0 = 4$$

$$9 \cdot 5 \to 4 + 5 = 9$$

$$0 \cdot 5 \to 0$$

Ismét a kommutativitásra hivatkozva, az összeg értéke nem függ a tagok sorrendjétől, tehát $5a$ és $5b$ számjegyeinek összege valóban megegyezik.

E. Osztó, Többszörös

KÖMAL
B 4493

Jelölje az n és k pozitív egészek legnagyobb közös osztóját (n,k), legkisebb közös többszörösét pedig [n,k]. Mutassuk meg, hogy tetszőleges a, b, c pozitív egészek esetén az [a,b], [b,c], [c,a] számok legnagyobb közös osztója megegyezik az (a,b), (b,c), (c,a) számok legkisebb közös többszörösével.

Megoldás: *

Állításunk tehát:

$$[(a;b);(b;c);(c;a)] = ([a;b];[b;c];[c;a])$$

Legyen az $a; b; c$ számok kanonikus alakja a következő:

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$$

$$b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_n^{\beta_n}$$

$$c = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \dots p_n^{\gamma_n}$$

Ekkor:

$$(a;b) = p_1^{min(\alpha_1+\beta_1)} p_2^{min(\alpha_2+\beta_2)} \dots p_n^{min(\alpha_n+\beta_n)}$$

$$(b;c) = p_1^{min(\beta_1+\gamma_1)} p_2^{min(\beta_2+\gamma_2)} \dots p_n^{min(\beta_n+\gamma_n)}$$

$$(c;a) = p_1^{min\,(\gamma_1+\alpha_1)} p_2^{min\,(\gamma_2+\alpha_2)} \dots p_n^{min\,(\gamma_n+\alpha_n)}$$

Illetve:

$$[a;b] = p_1^{max(\alpha_1+\beta_1)} p_2^{max(\alpha_2+\beta_2)} \dots p_n^{max(\alpha_n+\beta_n)}$$

$$[b;c] = p_1^{max(\beta_1+\gamma_1)} p_2^{max(\beta_2+\gamma_2)} \dots p_n^{max(\beta_n+\gamma_n)}$$

$$[c;a] = p_1^{max\,(\gamma_1+\alpha_1)} p_2^{max\,(\gamma_2+\alpha_2)} \dots p_n^{max\,(\gamma_n+\alpha_n)}$$

Nézzük a p_i prímosztót. Feltehetjük, hogy $\alpha_i \leq \beta_i \leq \gamma_i$.

Csak azt kell igazolnunk, hogy ekkor

$$max[min(\alpha_i;\ \beta_i)\ ;\ min(\ \beta_i; \gamma_i)\ ;\ min(\gamma_i; \alpha_i)]$$

$$= min[max(\alpha_i;\ \beta_i)\ ;\ max(\ \beta_i; \gamma_i)\ ;\ max(\gamma_i; \alpha_i)]$$

$$max[\alpha_i;\ \beta_i;\ \alpha_i] = min[\beta_i;\ \gamma_i;\ \gamma_i]$$

$$\beta_i = \beta_i$$

Tehát beláttuk az állítást.

F. <u>Egyenletek, egyenlőtlenségek</u>

KÖMAL
B 4508

Mutassuk meg, hogy ha $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ és $\boldsymbol{c}$ pozitív számok, akkor

$\boldsymbol{a^{3/4} + b^{3/4} + c^{3/4} > (a + b + c)^{3/4}}$**.**

<u>Megoldás</u>

Rendezzük át az egyenlőtlenséget! Osszuk el mindkét oldalt $(a + b + c)^{3/4}$-nel.

$$\frac{a^{3/4} + b^{3/4} + c^{3/4}}{(a + b + c)^{3/4}} > 1$$

$$\frac{a^{3/4}}{(a + b + c)^{3/4}} + \frac{b^{3/4}}{(a + b + c)^{3/4}} + \frac{c^{3/4}}{(a + b + c)^{3/4}} > 1$$

$$\left(\frac{a}{a + b + c}\right)^{3/4} + \left(\frac{b}{a + b + c}\right)^{3/4} + \left(\frac{c}{a + b + c}\right)^{3/4} > 1$$

Most alakítsuk át a jobb oldalt is!

$$1 = \frac{a}{a + b + c} + \frac{b}{a + b + c} + \frac{c}{a + b + c}$$

Tudjuk, hogy ha $0 < x < 1$, akkor

$$x^3 > x^4$$

$$x^{3/4} > x$$

Továbbá $\frac{a}{a+b+c}$; $\frac{b}{a+b+c}$; $\frac{c}{a+b+c}$ mind 0 és 1 közé esik, ezért az állításunk igaz.

G. Prím- és négyzetszámok

KÖMAL
B. 4522.

Határozzuk meg az összes olyan n egész számot, amelyre

$$|2n^3 - 6n^2 + 4n + 3|$$

prímszám.

Megoldás: *

Alakítsuk át a kifejezést!

$$|2n^3 - 6n^2 + 4n + 3| = |2n(n^2 + 2) - 3(2n^2 - 1)|$$

A második tag biztosan osztható 3-mal.

Az első tagot vizsgáljuk. Ha n osztható 3-mal, akkor kész vagyunk, megállapítottuk, hogy ez a tag is 3 többszöröse, tehát az egész kifejezés osztható 3-mal. Egyébként tudjuk, hogy n^2 1 maradékot ad 3-mal osztva ($n^2 \equiv 1$ (mod 3). Ekkor viszont: $n^2 + 2 \equiv 0\ (mod\ 3)$, így ismét azt kaptuk, hogy az abszolút értékben lévő kifejezés osztható 3-mal.

Tehát $|2n^3 - 6n^2 + 4n + 3|$ csak akkor lehet prím, ha egyenlő 3-mal.

$$|2n^3 - 6n^2 + 4n + 3| = 3$$

Ebből:

$$2n^3 - 6n^2 + 4n + 3 = \pm 3$$

Első eset:

$$2n^3 - 6n^2 + 4n + 3 = 3$$

$$2n^3 - 6n^2 + 4n = 0$$

$$2n(n^2 - 3n + 2) = 0$$

Mivel egy szorzat értéke akkor és csak akkor nulla, ha egyik tényezője nulla, ezért:

$$n = 0$$

vagy

$$n^2 - 3n + 2 = 0$$

Megoldva a másodfokú egyenletet az $n_1 = 1$ és az $n_2 = 2$ megoldásokat kapjuk.

Második eset:

$$2n^3 - 6n^2 + 4n + 3 = -3$$

$$2n^3 - 6n^2 + 4n = -6$$

$$n^3 - 3n^2 + 2n = -3$$

$$\mathrm{n}(\mathrm{n}^2 - 3\mathrm{n} + 2) = -3$$

Ez akkor teljesülhet, ha

1. eset

$n = -1$ és

$n^2 - 3n + 2 = 3$, de itt ellentmondásra jutunk: $(-1)^2 - 3(-1) + 2 \neq 3$

2. eset

$n = -3$ és

$n^2 - 3n + 2 = 1$, itt is ellentmondásra jutunk: $(-3)^2 - 3(-3) + 2 \neq 1$

3. eset

$n = 3$ és

$n^2 - 3n + 2 = -1$, és itt ellentmondásra jutunk: $3^2 - 3 \cdot 3 + 2 \neq -1$

4. eset

$n = 1$ és

$n^2 - 3n + 2 = -3$, de itt ellentmondásra jutunk: $1^2 - 3 + 2 \neq -3$

Tehát ezen az ágon nem találtunk több megoldást.

Összegezve tehát az $\mathrm{n}_1 = 1;\ \mathrm{n}_2 = 2;\ \mathrm{n}_3 = 0$ értékekre lesz a kifejezés prímszám.

KÖMAL
B 4506

Igazoljuk, hogy létezik végtelen sok pozitív egész szám úgy, hogy közülük semelyik véges soknak az összege nem négyzetszám.

Megoldás:

Érdemes a feladat megoldást azzal a kérdéssel indítani, hogy mely számok biztosan nem négyzetszámok. („Hogy lehetne elrontani?") Erre a legegyszerűbb válasz, hogy ha az egyik prímosztója páratlan hatványon szerepel. Tehát ha a 2-t, mint prímosztót tekintjük, akkor az alábbi szorzat értéke biztosan nem négyzetszám, hiszen az első tényezője egy olyan kettő-hatvány, mely páratlan kitevőn szerepel, a másik tényezője pedig páratlan szám.

$$2^{2n+1} \cdot (1+2m)$$

A feladat megadni végtelen sok olyan számot, melyek közül semelyik k darab összege nem négyzetszám. A fentiek alapján az ötlet: nézzük a 2^{2n+1} alakú számokat, minden n pozitív egészre.

Ekkor:

$$2^{2n_1+1} + 2^{2n_2+1} + \cdots + 2^{2n_k+1}$$

Emeljünk ki 2^{2n_1+1}-t, és mivel:

$$\frac{2^{2n_i+1}}{2^{2n_1+1}} = 2^{2n_i+1-(n_1+1)} = 2^{2(n_i-n_1)}$$

Így kapjuk:

$$2^{2n_1+1} \cdot (1 + 2^{2(n_2-n_1)} + \cdots + 2^{2(n_k-n_1)})$$

Ez valóban $2^{2n+1} \cdot (1+2m)$ alakú, tehát beláttuk az állítást.

IV. FEJEZET

Ebbe a fejezetben olyan KÖMAL feladatokkal foglalkozom, melyek megoldását lényegesen megkönnyíti valamely egyetemi kurzusokon elhangzó tétel vagy bizonyítás ismerete.

KÖMAL
B. 4488.

Mutassuk meg, hogy a 168 nem írható fel két racionális szám négyzetének összegeként.

Megoldás: *

Állításunk: $168 \neq x^2 + y^2$; ahol x, y $\in Q$. Bizonyítsuk be miért igaz ez az állítás.

Minden racionálisszám felírható két egész szám hányadosaként. Tehát átalakítva az állítást, ha $x = \frac{a}{b}$ és $y = \frac{c}{d}$ ahol a, b, c, d $\in Z$. Továbbá feltehető, hogy a és b, ill. c és d relatív prímek.

$$168 \neq \frac{a^2}{b^2} + \frac{c^2}{d^2}$$

(b és d nem nulla)

Indirekt tegyük fel, hogy az egyenlőség teljesül.

$$168 = \frac{a^2}{b^2} + \frac{c^2}{d^2}$$

Hozzuk közös nevezőre a jobb oldalt. Szorozzunk be a nevezővel.

$$168 = \frac{a^2d^2 + c^2b^2}{b^2d^2}$$

$$168 \cdot b^2d^2 = a^2d^2 + c^2b^2$$

$$168\ (bd)^2 = (ad)^2 + (cb)^2$$

1. eset

Ha sem ad sem cb nem osztható 3-mal, vagy közülük csak az egyik osztható 3-mal, akkor kész vagyunk, hiszen a jobb oldal 2-vel agy 1-gyel kongruens, míg a bal oldal a 168-as szorzó miatt osztható hárommal.

2. eset

Ha ad és cb számok is oszthatóak 3-mal, akkor $(ad)^2$ és $(cb)^2$ számok oszthatóak 9-cel. Ekkor, ha bd nem osztható 3-mal, akkor ismét ellentmondáshoz jutottunk, hiszen 168 3-mal osztható, de 9-cel nem, így nem teljesülhet az egyenlőség.

Ha bd osztható 3-mal osszunk le az ad és cb szorzatok kanonikus alakjaiban előforduló kisebbik három-hatvány négyzetével (ezt a számot egyszerűség kedvéért nevezzük k-nak). Mivel 168 3-mal osztható, de 9-cel nem, és mivel bd a négyzeten szerepel és a kanonikus alakjában a 3 páros hatványon kell, hogy szerepeljen, ezért $(bd)^2$ is osztható k-val.

Így a következőt kapjuk:

$$168\,\frac{(bd)^2}{k} = \frac{(ad)^2}{k} + \frac{(cb)^2}{k}$$

Jelöljük így:

$$168r^2 = p^2 + q^2$$

Ekkor újra az első esethez jutunk, hiszen a jobboldalon legalább az egyik tag nem osztható hárommal.

Tehát ellentmondáshoz jutottunk, 168 nem írható föl két négyzetszám összegeként.

Egyetemi módszerrel: *

Használjuk a két-négyzetszám tételt.

(FREUD-GYARMATI: Számelmélet, **T 7.5.1**)

Tétel: Legyen az n pozitív egész kanonikus alakja

$$n = 2^{\alpha} p_1^{\beta_1} \dots p_r^{\beta_r} q_1^{\gamma_1} \dots q_s^{\gamma_s}$$

Ahol a p_μ prímek $4k+1$, a q_ν prímek $4k-1$ alakúak, és a szereplő α, β_μ, γ_ν kitevők nem negatív egészek.

Az

$$x^2 + y^2 = n$$

diofantikus egyenlet akkor és csak akkor oldható meg, ha minden γ_ν páros.

Vizsgáljuk meg a 168 kanonikus alakját:

$$168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$$

Ahol $4 \cdot 1 - 1 = 3$ és $4 \cdot 2 - 1 = 7$. De mindkettő páratlan hatványon szerepel, így a 168 nem írható fel két négyzetszám összegeként.

KÖMAL
B 4514

Oldjuk meg a

$$\mathbf{36a^4+b^4=9c^4+4d^4}$$

egyenletet az egész számok halmazán.

Megoldás:

Vizsgáljuk az 5-tel való oszthatóságot!

Ha

$$x \equiv \pm 1 \ (mod\ 5)$$

$$x^4 \equiv (\pm 1)^4 \equiv 1 \ (mod\ 5)$$

Vagy:

$$x \equiv \pm 2 \ (mod\ 5)$$

$$x^4 \equiv (\pm 2)^2 \equiv 16 \equiv 1 \ (mod\ 5)$$

És persze:

$$x \equiv 0 \ (mod\ 5)$$

$$x^4 \equiv 0 \ (mod\ 5)$$

Ha ismerjük a kis Fermat-tételt, akkor ez azonnal adódik, sőt maga az ötlet is gyorsabban jön, hogy érdemes az ötös maradékokat vizsgálni.

Tétel: Ha p prím és $(a, p) = 1$, *akkor* $a^{p-1} \equiv 1 \ (mod\ p)$.

Tehát itt $x^4 \equiv 1 \ (mod\ 5)$, ha $5 \nmid x$.

Tegyük fel, hogy egyik szám sem osztható 5-tel.

Ekkor a fentiek alapján vizsgáljuk a két oldalt külön-külön.

Az a^4 és b^4 5-tel vett maradéka alapján a baloldal 5-tel vett lehetséges maradékai:

	$\mathbf{5 \mid a}$	$\mathbf{5 \nmid a}$
$\mathbf{5 \mid b}$	0	1
$\mathbf{5 \nmid b}$	1	2

Az c^4 és d^4 5-tel vett maradéka alapján a jobboldal 5-tel vett lehetséges maradékai:

	$\mathbf{5 \mid c}$	$\mathbf{5 \nmid c}$
$\mathbf{5 \mid d}$	0	-1
$\mathbf{5 \nmid d}$	-1	-2

Látható, hogy a táblázatok egyetlen közös eleme a nulla, és ez csak abban az esetben fordulhat elő, ha mind a négy keresett szám osztható 5-tel.

Vegyük azt az (a, b, c, d) megoldást, ahol $|a| + |b| + |c| + |d|$ minimális. Ekkor legyen $a_1 = \frac{a}{5}$; $b_1 = \frac{b}{5}$; $c_1 = \frac{c}{5}$; $d_1 = \frac{d}{5}$. Ezek egész számok és rájuk is teljesül az egyenlet, hiszen:

$$36\left(\frac{a}{5}\right)^4 + \left(\frac{b}{5}\right)^4 = 9\left(\frac{c}{5}\right)^4 + 4\left(\frac{d}{5}\right)^4$$

$$\frac{1}{625}(36a^4 + b^4) = \frac{1}{625}(9c^4 + 4d^4)$$

$$36a^4 + b^4 = 9c^4 + 4d^4$$

Viszont:

$$|a| + |b| + |c| + |d| \geq \frac{1}{5}(|a| + |b| + |c| + |d|) = |a_1| + |b_1| + |c_1| + |d_1|$$

Mivel azt mondtuk, hogy $|a| + |b| + |c| + |d|$ minimális, így az egyedüli megoldás a $(0; 0; 0; 0)$.

KÖMAL
C. 1145.

Bizonyítsuk be, hogy a páratlan számok és a 4-gyel osztható egész számok felírhatók két négyzetszám különbségeként, a 4-gyel nem osztható páros számok viszont nem.

1., Megoldás: *

Nézzük a négyzetszámok sorozatát: $0; 1; 4; 9; 16; 25; 36; \ldots$

Észrevehető, hogy a szomszédos számok különbsége rendre: $1; 3; 5; 7; 9; \ldots$

Az a sejtésünk, hogy minden páratlan szám felírható két szomszédos négyzetszám különbségeként és ezt könnyen igazolni is tudjuk:

$$a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$$

Az n-edik négyzetszámot tehát megkaphatjuk $n - 1$ szomszédos páratlan szám összegeként:

$$a_n = \sum_{i=0}^{n-2} 2i + 1$$

Most nézzük meg két tetszőleges négyzetszám különbségét:

$$a_n - a_k = \left(\sum_{i=0}^{n-2} 2i + 1\right) - \left(\sum_{i=0}^{k-2} 2i + 1\right) = \sum_{i=k-1}^{n-2} 2i + 1$$

Ellenőrzésképp nézzünk egy példát:

$$a_4 = 9 = \sum_{i=0}^{2} 2i + 1 = 1 + 3 + 5$$

$$a_6 = 25 = \sum_{i=0}^{4} 2i + 1 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$$

$$a_6 - a_4 = \sum_{i=3}^{4} 2i + 1 = 7 + 9 = 16$$

Alakítsuk tovább a kifejezést!

$$\sum_{i=k-1}^{n-2} 2i + 1 = (2(k-1) + 1) + (2k + 1) + \cdots + (2(n-2) + 1)$$

Összegképlet alapján:

$$\frac{(2(k-1) + 1) + (2(n-2) + 1)}{2}\big((n-2) - (k-1) + 1\big)$$

$$= \frac{2k - 1 + 2n - 3}{2}(n - k) = (k + n - 2)(n - k)$$

Ekkor, ha n és k azonos paritású, akkor a szorzat mindkét tényezője páros, tehát az eredmény osztható 4-gyel. Ha n és k különböző paritású, akkor a szorzat mindkét tényezője páratlan, így az eredmény is az.

Már csak azt kell megmutatnunk, hogy minden 4-gyel osztható pozitív szám felírható két négyzetszám különbségeként. Ehhez megvizsgálva néhány esetet kis négyzetszámokra:

$$4 - 0 = 4;\ 9 - 1 = 8;\ 16 - 4 = 12; \ldots$$

Sejtés:

$$4m = (m + 1)^2 - (m - 1)^2$$

És ezt igazoljuk is:

$$(m+1)^2-(m-1)^2=m^2+2m+1-m^2+2m-1=4m$$

Két négyzetszám különbsége vagy páratlan, vagy 4-gyel osztható (máshogy): *

Elég, ha eszünkbe jut egy középiskolában tanult azonosság:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$

Ekkor hasonlóan a korábbiakhoz, ha a és b paritása megegyezik, akkor mindkét tényező páros, így a szorzat osztható lesz 4-gyel, illetve ha különböző paritásúak, akkor a tényezők páratlanok, és ekkor a szorzat is páratlan.

2., Megoldás diofantikus egyenlettel: *

(FREUD-GYARMATI: Számelmélet, **T 7.3.1**)

Tétel: Tekintsük az $x^2-y^2=n$ diofantikus egyenletet, ahol n rögzített pozitív egész. Az egyenlet akkor és csak akkor oldható meg, ha $n \not\equiv 2 \ (mod\ 4)$.

Bizonyítás:

Az $(x-y)(x+y)=n$ egyenlőség csak akkor teljesül, ha $x-y$ és $x+y$ az n két komplementer osztója:

$$x+y=d_1$$

$$x-y=d_2$$

$$d_1d_2=n$$

Ebből:

$$(x+y)+(x-y)=2x$$

$$x=\frac{d_1+d_2}{2}$$

$$(x+y)-(x-y)=2y$$

$$y=\frac{d_1-d_2}{2}$$

Itt x és y csak akkor lesz egész, ha d_1 és d_2 azonos paritású. Tehát a diofantikus egyenlet csak akkor oldható meg, ha n felírható két azonos paritású osztója szorzataként.

Ha n páratlan: minden osztója páratlan, így minden osztópár megfelel.

Ha n páros, de nem osztható 4-gyel, akkor nem írhatjuk föl két azonos paritású osztója szorzataként, hiszen két páros szám szorzata osztható 4-gyel.

Tehát csak a páratlan és a 4-gyel osztható számok felelnek meg és ezek mindegyike elő is áll két négyzetszám különbségeként.

Például: d_1 legyen az n legkisebb.

Páratlan számok:

n	d_1	d_2	x	y	$x^2 - y^2$
1	1	1	1	0	$1 - 0$
3	1	3	2	1	$4 - 1$
5	1	5	3	2	$9 - 4$
7	1	7	4	3	$16 - 9$
9	1	9	5	4	$25 - 16$
11	1	11	6	5	$36 - 25$

4-gyel osztható számok:

n	d_1	d_2	x	y	$x^2 - y^2$
4	2	2	2	0	$4 - 0$
8	2	4	3	1	$9 - 1$
12	2	6	4	2	$16 - 4$
16	2	8	5	3	$25 - 9$
20	2	10	6	4	$36 - 16$
24	2	12	7	5	$49 - 25$

KÖMAL
C. 1160.

Mennyi a maradék, ha a $2012^{2013}+2013^{2012}$ összeget elosztjuk $2012 \cdot 2013$-mal?

1., Megoldás:

Nézzük az alábbi törtet:

$$k = \frac{2012^{2013} + 2013^{2012}}{2012 \cdot 2013}$$

$$k = \frac{2012^{2012}}{2013} + \frac{2013^{2011}}{2012}$$

Ekkor:

$$2012^{2012} = (2013 - 1)^{2012} =$$

$$= 2013^{2012} - 2012 \cdot 2013^{2011} + \binom{2012}{2} \cdot 2013^{2010} - \cdots - \binom{2012}{2011} \cdot 2013 + 1$$

$= 2013a + 1$ (ahol a pozitív egész).

És:

$$2013^{2011} = (2012 + 1)^{2011} =$$

$$= 2012^{2011} - 2011 \cdot 2012^{2010} + \binom{2011}{2} \cdot 2012^{2009} - \cdots - \binom{2011}{2010} \cdot 2012 + 1$$

$= 2012b + 1$ (ahol b pozitív egész).

$$k = \frac{2013a + 1}{2013} + \frac{2012b + 1}{2012} = a + \frac{1}{2013} + b + \frac{1}{2012}$$

$$k = a + b + \frac{2012 + 2013}{2012 \cdot 2013} = a + b + \frac{4015}{2012 \cdot 2013}$$

Tehát a keresett maradék: $k = 4025$.

<u>2., Megoldás *</u>

Kongruenciával:

$$2012^{2013} + 2013^{2012} \equiv k \ (mod\ 2012 \cdot 2013)$$

$$2012^{2013} \equiv x \ (mod\ 2012 \cdot 2013)$$

$$2013^{2012} \equiv \ y(mod\ 2012 \cdot 2013)$$

Ekkor:

$$x + y \equiv k \ (mod\ 2012 \cdot 2013)$$

<u>Tétel:</u> Legyen $d = (c, m)$. *Ekkor* $ac \equiv bc \ (mod\ m) \Leftrightarrow a \equiv b \ (mod\ \frac{m}{d})$.

Legyen

$$x = 2012 \cdot x_1$$

és

$$y = 2013 \cdot y_1$$

A fenti tétel alapján:

$$2012^{2013} \equiv 2012 \cdot x_1 \ (mod\ 2012 \cdot 2013)$$

$$2012^{2012} \equiv x_1 \ (mod\ 2013)$$

$$(2013-1)^{2012} \equiv x_1 \ (mod\ 2013)$$

$$(-1)^{2012} \equiv x_1 \ (mod\ 2013)$$

$$1 \equiv x_1 \ (mod\ 2013)$$

$$2012 \equiv x \ (mod\ 2013)$$

Hasonlóan:

$$2013^{2012} \equiv \ 2013 \cdot y_1 \ (mod\ 2012 \cdot 2013)$$

$$2013^{2011} \equiv y_1 \ (mod\ 2012)$$

$$(2012+1)^{2011} \equiv y_1 \ (mod\ 2012)$$

$$1^{2012} \equiv y_1 \ (mod\ 2012)$$

$$1 \equiv y_1 \ (mod\ 2012)$$

$$2013 \equiv y \ (mod\ 2012)$$

Mivel $x \equiv 0 \ (mod\ 2012)$ és $y \equiv 0 \ (mod\ 2013)$, ezért felírható:

$$x + y \equiv 2012 + 2013 \ (mod\ 2012 \cdot 2013)$$

Tehát

$$m \ \equiv 4025 \ (mod\ 2012 \cdot 2013)$$

<u>Általánosan: *</u>

Legyen a és b két szomszédos egész szám, $(a, b) = 1$, ahol $a < b$ és a páros.
Ekkor:

$$a^b + b^a \equiv a + b \ (mod\ ab)$$

Ehhez elég megvizsgálni a következő két állítást:

1. állítás:

$$a^b \equiv a \ (mod\ ab)$$

Osszunk le a-val:

$$a^{b-1} \equiv 1 \ (mod\ b)$$

Mivel $b - 1 = a$, ezért $a \equiv -1 \ (mod\ b)$

$$(-1)^{b-1} \equiv 1 \ (mod\ b)$$

És $b - 1$ páros, tehát ez teljesül.

2. állítás

$$b^a \equiv b \ (mod\ ab)$$

Osszunk le b-vel:

$$b^{a-1} \equiv 1 \ (mod\ a)$$

Mivel $a + 1 = b$, ezért $b \equiv 1 \ (mod\ a)$

$$1^{b-1} \equiv 1 \ (mod\ b)$$

Ez is teljesül, tehát valóban igaz, hogy:

$$a^b + b^a \equiv a + b \ (mod\ ab)$$

ÖSSZEGZÉS:

A két különböző verseny feladatait megvizsgálva jól látszódnak a nehézségbeli különbségek. Míg egy megyei matematikaverseny jó alkalmat ad a még kezdő, szárnypróbálgató versenyzőknek is sikerélmények szerzésére, egy országos versenyen már nélkülözhetetlen az a plusztudás, amit alapórán nem valószínű, hogy meg tud kapni minden tanuló. Én középiskolásként – mivel csak közvetlenül az érettségi vizsgák előtt döntöttem a matematika tanár szak mellett – nem vettem részt matematika versenyeken, így tudom, mennyire nehéz az a rengeteg és teljesen új ismeret elsajátítása az egyetemen, amelyekkel sok társam már a versenyre felkészítő szakkörökön, esetleg a fakultáción találkozott, és volt alkalma használni, gyakorolni.

Tanári munkám alatt remélem, sok diákomnak fel tudom majd kelteni a kíváncsiságát, érdeklődését a matematika szépségei iránt, és minden segítséget meg tudok majd adni nekik ahhoz, hogy minél jobban fel tudjanak készülni az érettségi vizsgákra, közülük minél többen válasszanak matematikával kapcsolatos hivatást, és jó matematikai alapokkal kezdhessék meg felsőfokú tanulmányaikat az általuk választott szakokon.

IRODALOMJEGYZÉK

- *FREUD - GYARMATI: Számelmélet, Nemzeti Tankönyvkiadó (2006)*
- *www.komal.hu*
- *A Bács-Kiskun Megyei Matematikaverseny összefoglaló füzetei:*
  - *2006/2007*
  - *2007/2008*
  - *2008/2009*
  - *2009/2010*
  - *2011/2012*