Matematikatanítási és Módszertani Központ
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

A kör fogalma és alkalmazásai különböző geometriákban

Szakdolgozat

Szigeti Anikó Réka
Matematika BSc

Témavezető:
dr. Rózsahegyiné Vásárhelyi Éva
egyetemi docens

Konzulens:
Lénárt István
oktatáskutató

Budapest, 2013.

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A nemeuklideszi geometriák iránti érdeklődésemet 2002-ben, még általános iskolás koromban keltette fel az Álmok Álmodói kiállításon néhány érdekes mintázatú üvegből készült síklap, gömb és félgömb. Emlékszem, hogy akkor még nem értettem, miért nem lehet a félgömbön is a gömbön érvényes szabályokat követni, nem tudtam, hogy mindez csak egy modellje egy másfajta geometriának.

Nagy örömöt jelentett, amikor megtudtam, hogy a kiállításon látott tárgyak szellemi atyja, Lénárt István tanít az egyetemen, ráadásul éppen gömbi geometriáról szóló kurzusai vannak. A Nem-euklideszi geometriák az iskolában I.–II. című kurzusain ismerkedtem meg közelebbről a gömbi geometriával, és nem csökkent a kezdeti érdeklődésem és lelkesedésem, ezért döntöttem úgy, hogy a szakdolgozatomat is ebben a témában szeretném elkészíteni.

Szakdolgozatom célja annak vizsgálata, hogy a kör egyes síkbeli elemi matematikai alkalmazásai mennyiben vihetők át a gömbi geometriára, hogyan változnak, és ennek mik az okai.

Szűkebb témául a kört választottam. A második fejezetben olyan szerkesztések síkbeli és gömbi változatával foglalkozom, melyeknek csak a gömbi változatában használunk kört. A harmadik fejezetben a Thalész-tételt és a kerületi szögek tételét vizsgálom meg közelebbről. A negyedik fejezet témája a körök és érintőik. Ez a téma síkban szorosan kapcsolódik a Thalész-tételhez, ebben a fejezetben gömbi megoldásokat vizsgálok, melyekhez nincs szükség Thalész-tételre. Az ötödik fejezetben bemutatom a Lexell-kört és egy alkalmazását, a gömbi területfelező pont meghatározását. Ennek síkbéli változatához nem kapcsolódik kör, a gömbi változatához viszont igen, sőt a gömbi kerületi szögek tételére is szükség van benne.

Mindezt feladatokon keresztül vizsgálom: mi történne egy geometria feladatgyűjteménnyel, ha olyan lények kezébe kerülne, akik gömbi geometriában gondolkoznak? Milyen feladatok vihetők át síkból gömbre, bizonyos megoldások milyen változtatásokkal vihetők át, mivel leszünk szegényebbek, mivel leszünk gazdagabbak a gömbön? Talán azért is, mert a sík geometriájában nőttünk fel, az lehet a benyomásunk, hogy a síkon könnyebb szerkeszteni. Azt gondolhatnánk, hogy a gömbön csak nehezítő tényezőkkel találkozunk, például, hogy nincs párhuzamosság, ezzel minden olyan szerkesztés, ami erre épül, máris használhatatlan. Szakdolgozatomban szeretném ezt megcáfolni, megmutatni, hogy gömbön sem nehezebb szerkeszteni, sőt, léteznek olyan módszerek, amik síkban nem használhatók, és amikkel egy síkban viszonylag hosszadalmas feladat gömbön leegyszerűsödik.

Több okból is hasznosnak tartom az iskolában a gömbi geometriával való foglalkozást. Azáltal, hogy megpróbáljuk átültetni gömbre a síkban tanultakat, sokkal inkább elmélyül egy-egy fogalom a diákok fejében. Amíg az euklideszi sík geometriája az egyetlen geometria, amit ismernek a diákok, az axiómák felesleges szőrszálhasogatásnak tűnnek.

A szakdolgozatomban lévő ábrákat a GeoGebra, a Spherical Easel és az Inkscape nevű programok segítségével szerkesztettem. A 26. és 27. ábrákat Lénárt Istvántól vettem át.

A 22. ábra a *Gömbi kishajó* nevű programmal készült, melyet annak hasznos pedagógiai vonatkozásai miatt néhány mondatban bemutatok. A program úgy működik, hogy egy gömbön elhelyezhetünk pontokat, melyek egyre nagyobb sugarú körré nőnek, mígnem a pont átellenes pontjában ismét körré zsugorodnak, és a folyamat kezdődik elölről, csak most az átellenes pontból indul a növekedés. Ezek a növekvő és csökkenő körök lehetőségek tárházát nyitják meg a felhasználó előtt. A program szórakoztató módon segít a dualitás megértésében, és a témán túlmutató kérdéseket is felvet, mint például az irányított kör fogalma, vagy azt, hogy mi lenne, ha a pont helyett a ponthoz mint sugárhoz tartozó körsorozatot tekintenénk legegyszerűbb alakzatnak a gömbön. A program a http://cie.web.elte.hu/kishajo/ webhelyről érhető el.

Mivel bármely két gömb hasonló, a könnyebb érthetőség kedvéért a szakdolgozatomban gömbön egységsugarú gömböt értek.

1. A gömbi geometria néhány alapvető fogalma

Ebben a fejezetben bemutatom a gömbi geometria alapfogalmait, és tisztázok néhány alapvető fogalmat, amikre a szakdolgozatom későbbi fejezeteiben építek. Az alapfogalmakat nem definiáljuk, tartalmukat axiómák határozzák meg azáltal, hogy felsorolják azokat a tulajdonságaikat, amelyekből a többi tulajdonságuk levezethető.

1.1. Pont

Egy geometria felépítésénél szükséges, hogy meghatározzunk egy legegyszerűbb alakzatot. Szemléletünkből adódóan értelemszerűnek tűnik a pont, viszont ha választ kéne adni arra a kérdésre, hogy miért, teljesen kielégítő volna azt mondani, hogy „csak". Pontot még senki nem látott, mégis ha kimondjuk ezt a fogalmat, mindenki hasonlóra gondol. Nehéz definiálni, és mivel alapfogalom, erre nincs is szükség. Tulajdonságait az axiómák írják le. Euklidész így definiálta: „Pont az, aminek nincs része."

1.2. Egyenes

Ha legegyszerűbb alakzatnak a pontot tekinthettük, tekinthetjük második legegyszerűbbnek az egyenest, amit síkban két pont határoz meg, ugyanígy gömbön is, kivéve azt az esetet, amikor a két pont átellenes. Az egyenes a geometriánk másik alapfogalma.

Egy gömbi egyenes a gömbfelület és a gömb középpontjára illeszkedő sík metszete. Nevezzük gömbi főkörnek is, hiszen valójában egy kör, méghozzá a legnagyobb a gömbön. Az alábbi táblázat a síkbeli és a gömbi egyenes legfontosabb tulajdonságait hasonlítja össze [9].

Egyenes vonal a síkon	Gömbi főkör a gömbön
Végtelen hosszúságú	Véges hosszúságú
Nincs középpontja	Két átellenesen elhelyezkedő középpontja van (az egyenestől legtávolabb elhelyezkedő pontok) Ezeket pólusnak nevezzük, a hozzájuk tartozó egyenest pedig polárisnak.
Ha elindulunk egy egyenes vonalon, soha nem érünk vissza a kiindulási pontba.	Ha elindulunk egy főkörön, visszaérünk a kiindulási pontba.
Két különböző ponton át egy és csak egy egyenes vonalat rajzolhatunk. A két különböző pont egy véges és két végtelen részre bontja az egyenest.	Két különböző ponton át egy és csak egy főkört rajzolhatunk, kivéve hogyha a két pont átellenes, ebben az esetben végtelen sokat. A két pont két véges szakaszra bontja a főkört.
Az egyenes szakasz a legrövidebb út síkon két pont között.	A gömbi főkörív a legrövidebb út gömbön két pont között.

1.3. Távolságmérés

Nevezzük *O*-nak a gömb középpontját. A gömb felületén lévő *A* és *B* pont gömbi távolsága $AOB\sphericalangle$, tehát a gömbi távolságot fokban fogom mérni. Két pont által meghatározott gömbi szakasz a rájuk illeszkedő egyenes köztük lévő egyik része. Két pont távolságán a két pont által meghatározott egyenesen a két pont közti nem nagyobb szakasz hosszúságát értjük. Tehát $0<d\leq 180°$. $d=180°$ esetén a két pont átellenes.

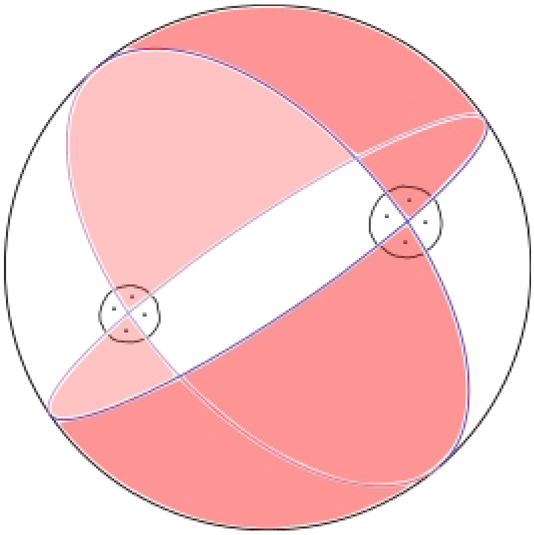
1.4. Szögmérés

Gömbi félegyenesen egy fél főkörívet értünk. Ahogy a síkon, úgy a gömbfelületen is két közös kezdőpontú félegyenes határoz meg egy szögtartományt. Két közös kezdőponttal rendelkező gömbi félegyenes egy gömbkétszöget határoz meg. Két közös kezdőponttal rendelkező félegyenes végpontja is közös, méghozzá a kezdőpont átellenes pontja. A gömbön két félegyenes által bezárt szög a csúcsaihoz tartozó poláris egyenesnek a szögtartományon belül lévő szakaszának hossza. Tekintsünk egy gömbi főkört 360° hosszúságúnak.

Ha a gömböt az euklidészi tér elemének tekintjük, úgy is fogalmazhatunk, hogy a gömbön két egyenes által bezárt szög alatt azt a szöget értjük, amit a térben a két egyenes által meghatározott két sík bezár egymással.

1.5. Területmérés

Nevezzük egy területegységnek annak a gömbháromszögnek a területét, melynek két szöge derékszög, a harmadik 1°-os. Ebből következik, hogy a gömbfelület területe 720 területegység.

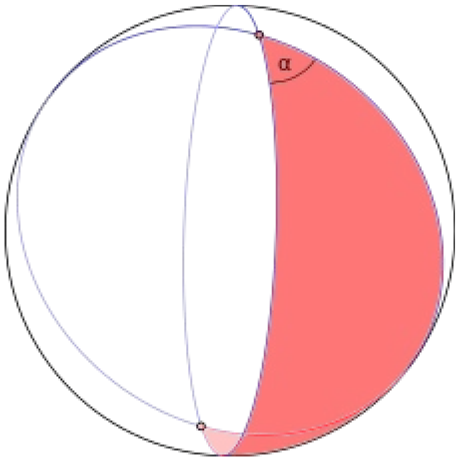


1. ábra Merőleges egyenesek

1.6. Párhuzamosság, merőlegesség

Fontos különbség sík és gömb között, hogy a gömbön nem létezik párhuzamosság. A síkon két különböző egyenesnek nulla vagy egy közös pontja van. Nulla közös pont esetén párhuzamos a két egyenes, egy közös pont esetén pedig metsző. A gömbön bármely két különböző egyenesnek pontosan két közös pontja van.

A merőlegesség gömbön is létezik, ám míg a síkot két merőleges egyenes négy végtelen egybevágó tartományra bontja, a gömbfelületet két merőleges főkör négy véges egybevágó tartományra bontja.



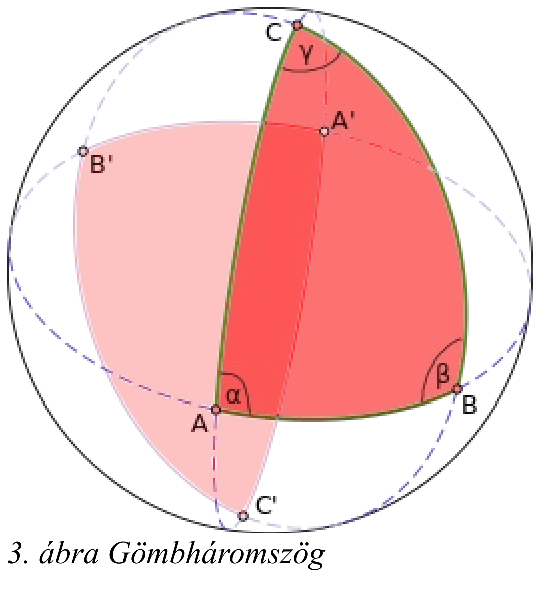
2. ábra Gömbkétszög

1.7. Gömbkétszög, gömbháromszög

A gömbkétszög a síkhoz képest gömbi sajátosság. Mivel a gömbön bármely két merőleges főkör pontosan két pontban metszi egymást, létezik olyan alakzat, melynek két csúcsa van és oldalai egyenesek. Ez a gömbkétszög. A gömbkétszög két szöge megegyezik egymással, és nem lehet nagyobb 180°-nál. A területegység definíciójából következően a gömbkétszög területe szögeinek összege:

$T = 2\alpha$. $T \leq 360$.

Ha a síkban három pontot páronként összekötünk



3. ábra Gömbháromszög

egy egyenessel, egy háromszöget kapunk. A gömbön ha ugyanezt elvégezzük, nyolc háromszöget kapunk, ezért az egyszerűség kedvéért megegyezünk, hogy két csúcsot a köztük lévő rövidebbik szakasz mentén kötünk össze. Ezeket a háromszögeket Euler-féle háromszögeknek nevezzük.

A síkban egy háromszög szögeinek összege 180°. Gömbön $180° \leq \alpha + \beta + \gamma \leq 540°$ Abban az elfajult esetben 540° a háromszög szögeinek összege, amikor mindhárom csúcsa egy főkörre illeszkedik, és mindegyik csúcs a másik két pontot összekötő hosszabbik főkörívre illeszkedik, ha ez nem teljesül, akkor pedig 180°.

Egy háromszög AB oldalához tartozó kiegészítő háromszögnek nevezzük azt a háromszöget, amelynek csúcsai A, B és C'. Ennek és a gömbkétszög területének felhasználásával levezethető a háromszög területének kiszámítási módja Tekintsük az AA', BB' és CC' gömbkétszög-párokat. Ezek lefedik a gömböt, sőt az ABC háromszöget, és átellenesét, A'B'C'-t háromszorosan, vagyis ezeknek a gömbkétszög-pároknak a területösszege a gömbfelszín területénél a háromszög területének a négyszeresével nagyobb.

$$2 \cdot (2\alpha + 2\beta + 2\gamma) = 720 + 4T_{ABC}$$

$$T_{ABC} = \alpha + \beta + \gamma - 180$$

Tehát a háromszög területe a gömbháromszög gömbi szögfölöslegével egyenlő.

1.9. Körök

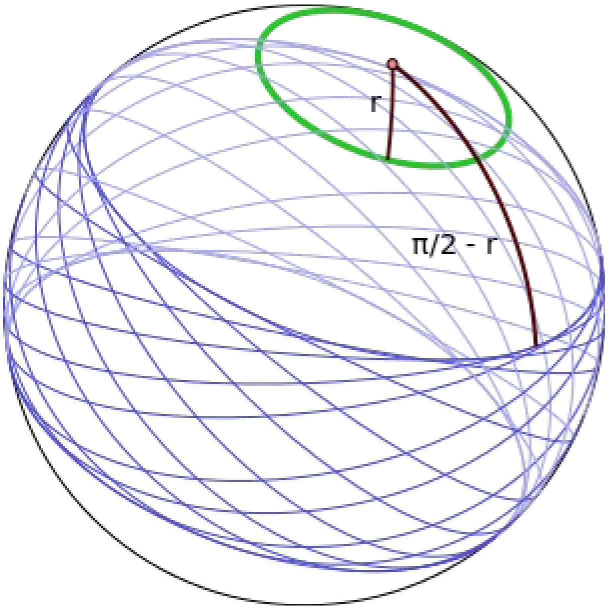
1.9.1. Definíció. A *körvonal* a felület azon pontjainak mértani helye, amelyek egy felület adott pontjától (A) adott r távolságra vannak. Síkon r bármilyen nagy lehet, a gömb viszont véges felület, egy kör sugara maximum 180° lehet. Gömbön létezik egy másik származtatása is a körvonalnak: azon pontok halmaza, melyek egy egyenestől egyenlő távolságban vannak. Az ilyen módon származtatott köröket *ekvidisztáns kör*ök*nek nevezzük.

A síkon minden körnek egy középpontja van, a gömbön viszont ha egy ponttól r távolságra lévő pontokat tekintjük, ezek a pont átellenesétől éppen 180° – r távolságra vannak.

A 90° sugarú körök kitüntetett szerepben vannak, ezek a leghosszabb kerületű körök a gömbön, *gömbi főkör*öknek hívjuk őket, ezek veszik át a gömbön az egyenes szerepét.

1.9.2. Definíció. Egy O középpontú r sugarú kör *polárkör*e azoknak a köröknek a halmaza, amelyeket úgy határozunk meg, hogy a kör minden pontjának vesszük a polárisát, azaz azt a főkört, melynek a pont a középpontja.

Egy fogalom duálisát úgy kapjuk meg, hogy a benne lévő a pont és az egyenes szót, illetve a szög és a távolság szót megcseréljük. Eszerint a polárkör definíciója: Azon egyenesek halmaza, melyek egy adott egyenessel *r* szöget zárnak be. A gyakorlatban polárkörnek ennek a két egyeneshalmaznak a burkolóját tekintjük, tehát a 90°-*r* sugarú és a 90°+*r* sugarú köröket.



4. ábra r sugarú körhöz tartozó polárkörök

90°-os sugárnál a főkör pólusához jutunk, $r > 90°$ esetén pedig tekintsük az átellenes pontot középpontnak, és ezzel visszavezettük az $r < 90°$ esetre.

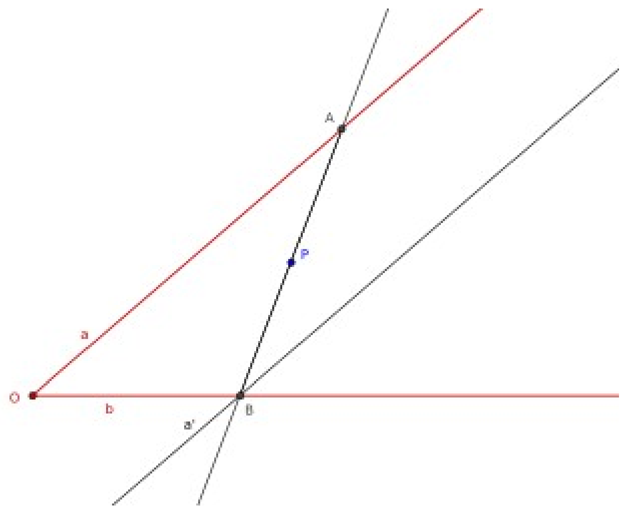
2. Egybevágóság, hasonlóság és az ekvidisztáns kör alkalmazása

A következő fejezetben egy feladatpár síkbéli és gömbi megoldásán keresztül járom körbe annak kérdését, hogy a síkban ismert egybevágóság és hasonlóság átvihető-e, és milyen formában gömbre, illetve bemutatom, hogy bizonyos esetekben a síkban létező párhuzamosság helyett a gömbön alkalmazhatjuk az ekvidisztáns köröket. Ez a feladatpár síkon és gömbön is értelmezhető, viszont a pár második fele a gömbön a síkon vettől eltérő módon oldható meg, és eredménye is különbözik a síkbéli eredménytől.

2.1. Feladat. Adott egy szögtartomány, melyet az O pontból induló a és b félegyenesek határoznak meg. P a szögtartomány egy adott a egyeneshez közelebb lévő belső pontja. Szerkesszünk P ponton át egy e egyenest, amelynek az a és b félegyenesek által meghatározott belső szögtartományba eső szakaszát P pontosan felezi.

A síkban értelmezett feladat megoldása:

Tükrözzük P-re középpontosan az a egyenest. Az a egyenes tükörképe a'. Tehát bárhogy veszünk fel P-n keresztül egy egyenest, a-val és a'-vel vett metszéspontjai egyenlő távolságra lesznek P-től. Nevezzük a' és b egyenesek metszéspontját B-nek. Vegyük fel a PB egyenest. Ennek a-val vett metszéspontját nevezzük A-nak. Az a' egyenes származtatásából következően $AP = PB$, vagyis megtaláltuk a keresett egyenest.

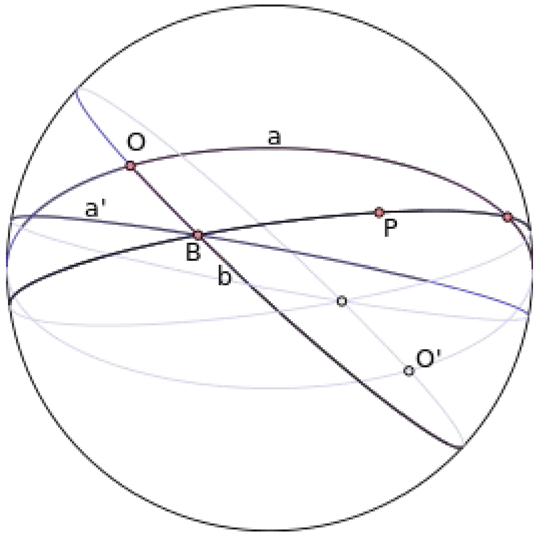


5. ábra

A feladat megoldásában azt használtuk ki, hogy egy pont és annak középpontos tükrözéssel kapott képe egyenlő távolságra van a tükrözés középpontjától. Igaz, hogy a és a' párhuzamosak, viszont ez csak egy következménye az egyenes síkban vett középpontos tükrözésének, ezt közvetlenül nem használtuk ki.

A gömbön értelmezett feladat megoldása:

Mivel a gömbön bármely két egyenes két pontban metszi egymást, egy gömbi szögtartomány tulajdonképpen egy gömbkétszög. Tehát adott egy O és O' csúcsú, a és b oldalú gömbkétszög, benne egy P ponttal. Tükrözzük a egyenest középpontosan P pontra. A síkban alkalmazott eljárást itt is használhatjuk: válasszunk két tetszőleges pontot a tükrözendő egyenesen. Nevezzük ezeket E-nek és F-nek. Húzzunk meg az E-re és P-re, illetve az F-re és P-re illeszkedő főköröket. Másoljuk át EP illetve FP szakaszokat a megfelelő egyenesekre P-től vett másik irányba. Ezek meghatározzák a G és a H pontot. Az ezekre illeszkedő főkör a tükrözendő egyenes tükörképe. Az a és a' által meghatározott gömbkétszögnek a tükrözésből adódóan P a középpontja, és metszi b egyenest. Nevezzük a' egyenes b-vel vett metszéspontját B-nek. Vegyük fel a PB egyenest. Ennek a-val vett metszéspontja PB távolságra van P ponttól, tehát megtaláltuk a keresett egyenest.

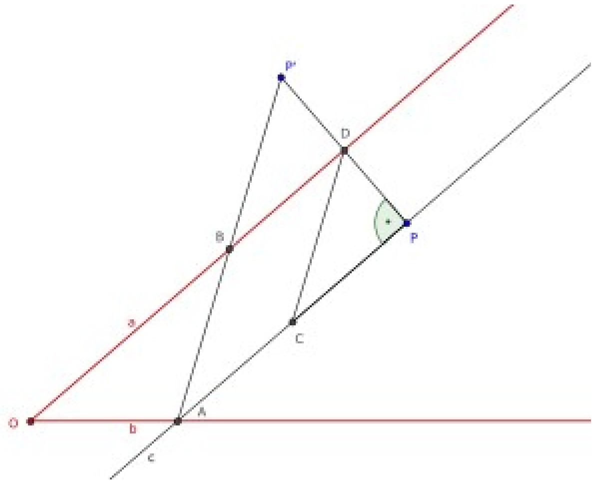


6. ábra

2.2. Feladat. Adott egy szögtartomány, melyet az O pontból induló a és b félegyenesek határoznak meg. P a szögtartomány egy adott külső pontja, mely az a egyeneshez közelebb helyezkedik el, és OP egyenes a-val bezárt szöge kisebb, mint a egyenes b-vel bezárt szöge. Szerkesszünk P ponton át egy e egyenest, amely a egyenest A pontban, b egyenest B pontban metszi, és $PA = AB$.

A síkban értelmezett feladat megoldása:

Tükrözzük P-t a egyenesre. P tükörképe P' pont. Húzzunk P'-n keresztül a-val merőlegest, ezt nevezzük c-nek. A c és b egyenesek metszéspontját nevezzük A-nak. Vegyük fel a P'-re és A-ra illeszkedő egyenest, ennek a-val vett metszéspontját nevezzük B-nek. Mivel a és c párhuzamos egyenesek és P pont a-ra vett tükörképe P', ezért $BP' = AB$. A DCP és a $P'AP$ háromszög hasonlóak, mivel P csúcshoz tartozó szögük közös, $P'P$ oldal kétszerese DP oldalnak és AP' oldal kétszerese CD oldalnak.



7. ábra

A megoldás két hasonló háromszög segítségével a párhuzamosságot felhasználva adta meg a megoldást. Az [1.6.] pontban tisztáztuk, hogy a gömbön nem létezik párhuzamosság, hiszen bármely két különböző egyenes két pontban metszi egymást.

Tudjuk, hogy két sokszög hasonló, ha megfelelő szögeik egyenlők, és megfelelő oldalaik hosszának aránya megegyezik, illetve azt is tudjuk, hogy az egybevágóságtól eltekintve két hasonló sokszög területe különbözik egymástól.

2.3. Állítás. A gömbön nem léteznek hasonló sokszögek.

Bizonyítás. Mivel minden sokszög háromszögekre bontható, elég, ha háromszögekre bizonyítjuk az állítást. Tegyük fel, hogy létezik két hasonló háromszög a gömbön, melyeknek területe különböző: T_1 és T_2. A háromszöghöz tartozó [1.7.] fejezetben levezetett kiszámítási mód alapján:

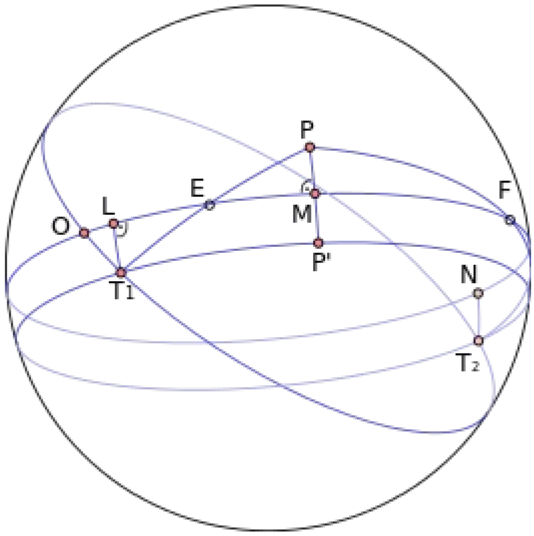
$$\alpha+\beta+\gamma-180=T_1\neq T_2=\alpha+\beta+\gamma-180 \quad \text{, tehát} \quad \alpha+\beta+\gamma\neq\alpha+\beta+\gamma \quad .$$

Ellentmondásra jutottunk, mivel a hasonlóság feltétele a megfelelő szögek egyenlősége, melynek következménye, hogy összegük is egyenlő. ■

A gömbön más megoldást kell találnunk, hiszen már annál a lépésnél akadályba ütköznénk, hogy húzzunk *P'*-n keresztül *a*-val párhuzamost, és a hasonlóságot sem tudjuk kihasználni.

A gömbön értelmezett feladat megoldása:

Ahogy a síkbéli megoldásnál, itt is tükrözzük *P*-t az *a* egyenesre. *PP'* és *a* metszéspontját nevezzük *M*-nek. Rajzoljuk meg az *a*-tól *MP'* távolságra lévő kört Ezt az *a* egyeneshez tartozó *MP'* távolságú ekvidisztáns körnek nevezzük. Úgy is mondhatjuk, hogy egy olyan kör, amelynek *a* egyenes pólusa a középpontja, és $r=90°-MP'$ sugarú. Ez a kör két pontban metszi *b*-t, ezeket nevezzük T_1-nek és T_2-nek. Tekintsük T_1T_2P háromszöget. Bocsássunk T_1-ből és T_2-ből merőlegest *a*-ra. Ezek *a*-val vett metszéspontjait nevezzük *L*-nek és *N*-nek. Az ekvidisztáns kör definíciójából következően $T_1L = PM = T_2N$. PT_1 *a*-val vett metszéspontját nevezzük *E*-nek, PT_2 *a*-val vett metszéspontját pedig *F*-nek. $PEM\sphericalangle = T_1ML\sphericalangle$, mivel csúcsszögek, ugyanígy $PFM\sphericalangle = T_2FN\sphericalangle$, valamint $T_1LE\sphericalangle = PME\sphericalangle = T_2NF\sphericalangle = PMF\sphericalangle$ mind derékszögek. Ebből következően a két-két háromszög páronként egybevágó, ezért $PE=ET_1$, illetve $PF=FT_2$. Vagyis két olyan egyenest is találtunk, amely kielégíti a feltételeket. Az *a* főkör PT_1T_2 háromszögnek T_1P és T_2P oldalát metsző középvonala.



8. ábra

3. Látóköríív, kerületi szögek tétele és a Thalész-tétel

Ebben a fejezetben megvizsgálom a kerületi szögek tételét, azt, hogy miért nem vihető át gömbre, illetve milyen módosításokkal vihető mégis át a gömbre. A Thalész-tételre úgy is tekinthetünk, mint a kerületi szögek tételének egy speciális esetére. Ezért, és mert a gömbre átvitt Thalész-tétel és a gömbre átvitt kerületi szögek tétele közti kapcsolatot szeretném bemutatni, ezeket egy fejezetben tárgyalom.

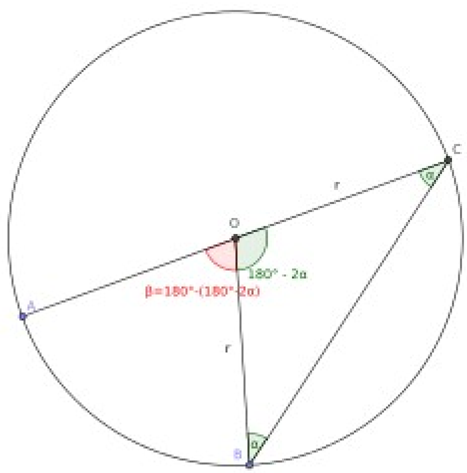
3.1. Kerületi és középponti szögek tétele a síkban

3.1.1. Definíció. Azt a szöget, amelynek a csúcsa egy adott körvonal egy pontja, szárai pedig a kör két húrjára vagy egy húrjára és egy érintőjére illeszkednek, a kör *kerületi szögének* nevezzük.

3.1.2. Definíció. Azt a szöget, amelynek csúcsa egy adott körvonal középpontja, szárai pedig a kör két sugarára illeszkednek, a kör *középponti szögének* nevezzük.

3.1.3.Tétel. Egy körben azonos ívhez tartozó kerületi és középponti szögek aránya 1:2.

Bizonyítás. Adott AB körívhez a középponti szög csúcsa csak egy helyen lehet, a kör középpontjában, a kerületi szög csúcsa viszont bárhol elhelyezkedhet a kör AB köríven kívüli ívén, ezért több esetet kell megvizsgálnunk:



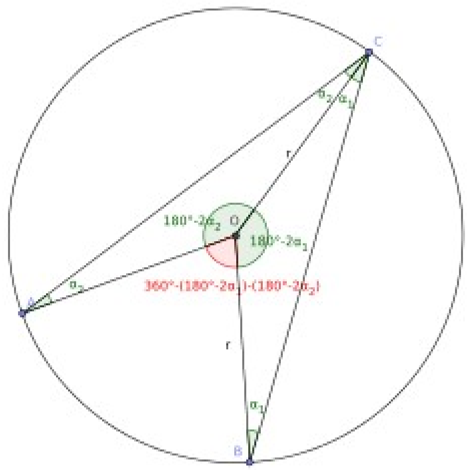
9. ábra 1.eset

<u>1.eset</u>: A kör középpontja illeszkedik a kerületi szög egyik szárára. $BCO\triangle$ egy egyenlő szárú háromszög, tehát ha C csúcshoz α szög tartozik, a , $BOC\sphericalangle=180°-2\alpha$ ennek kiegészítő szöge, $AOB\sphericalangle=180°-(180°-2\alpha)=2\alpha$.

2.eset: A kör középpontja a kerületi szög szögtartományának belső pontja. Ekkor az *OC* sugár behúzásával tekinthetünk az ábrára mint két egyenlő szárú háromszögre, ahol a C csúcshoz tartozó szög $\alpha_1+\alpha_2$. Kihasználva, hogy a háromszög szögeinek összege 180°, és hogy a teljes szög 360°, az alapon fekvő szögek segítségével kifejezve

$$\beta=360°-(180°-2\alpha_1)-(180°-2\alpha_2)$$

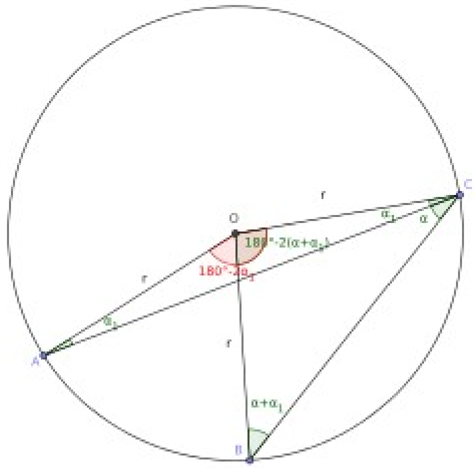
$$\beta=2(\alpha_1+\alpha_2)=2\alpha\ .$$



10. ábra 2. eset

3.eset: A kör középpontja a kerületi szögtartományon kívül van. Ebben az esetben az *ACO* és a *BCO* egyenlő szárú háromszögek alapon fekvő szögeinek segítségével fejezzük ki a harmadik szögüket, és a keresett *AOB*∢ ezek különbségeként adódik:

$$\beta=180°-2\alpha_1-(180°-2(\alpha+\alpha_1))=2\alpha\ .$$



11. ábra 3. eset

4. eset: Az utolsó eset, amikor a kerületi szög egyik szára érintő. Ha $\alpha<90°$, *AOB* egy egyenlő szárú háromszög. Jelöljük *AB* felezőpontját *F*-fel. Ekkor *AOF* és α szög merőleges szárú szögek, tehát $AOB\sphericalangle=2\alpha$. Ha $\alpha=90°$, az érintő definíciója miatt tudjuk, hogy *AOB*∢ = 180°. Ha $\alpha>90°$, a középponti szög $360°-(180°-2(\alpha-90°))=2\alpha$. ■

A gömbön ez a bizonyítás nem állja meg a helyét, hiszen kihasználtuk benne, hogy a háromszög szögeinek összege 180°. Mivel a gömbön a háromszög szögeinek összege nagyobb, mint 180°, a bizonyításnál használt egyenlő szárú háromszögek alappal szemközti csúcsa nagyobb, mint a síkon. Viszont a teljes szög a gömbön is 360°, így itt ugyanakkora szögből nagyobbat kivonva kisebb β-ra kisebb értéket kapunk, tehát nem teljesül, hogy $2\alpha=\beta$.

Hogyan lehet a Thalész-tétel fogalmait használó tételt a gömbre alkalmazni?

3.2. Gömbi kerületi szögek tétele

A tétel kimondásához vezessünk be néhány jelölést! Adott a gömbön A és B pont. Az általuk meghatározott egyenes két félgömbre osztja a gömböt. Nevezzük az egyik felet felső, a másikat alsó félgömbnek. Egy adott $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ számára legyen K_θ az a pont, melyben az AB szakasz felezőmerőlegesén fekszik, és $K_\theta AB \sphericalangle = |\theta|$, és legyen olyan K_θ, hogy a felső félgömbön fekszik, ha θ pozitív, és az alsón, ha θ negatív. Jelöljük i_θ-val azt a felső félgömbön haladó körívet, amelynek középpontja K_θ és illeszkedik A és B pontra.

3.2.1. Állítás. Ha C az i_θ ív egy tetszőleges pontja, akkor az ABC gömbháromszög α, β, γ szögeire $\alpha+\beta-\gamma=2\theta$.

Bizonyítás. Mivel $K_\theta A = K_\theta B = K_\theta C = r$, $ABK_\theta\triangle$, $BCK_\theta\triangle$ és $CAK_\theta\triangle$ háromszögek egyenlő szárúak, ebből következően $K_\theta AB \sphericalangle = K_\theta BA \sphericalangle$, $K_\theta BC \sphericalangle = K_\theta CB \sphericalangle$ és $K_\theta CA \sphericalangle = K_\theta AC \sphericalangle$. Válasszuk külön az eseteket attól függően, hogy K_θ az alsó vagy felső félgömbön vagy AB gömbi egyenesen helyezkedik el,és ha a felsőn, akkor az ABC háromszögön kívül vagy belül.

1.K_θ az alsó félgömbön vagy AB gömbi egyenesen helyezkedik el, tehát $\theta \le 0$. Ekkor $\gamma = K_\theta CA \sphericalangle + K_\theta CB \sphericalangle = K_\theta AC \sphericalangle + K_\theta BC \sphericalangle = (\alpha-\theta)+(\beta-\theta)$, vagyis $\alpha+\beta-\gamma=2\theta$.

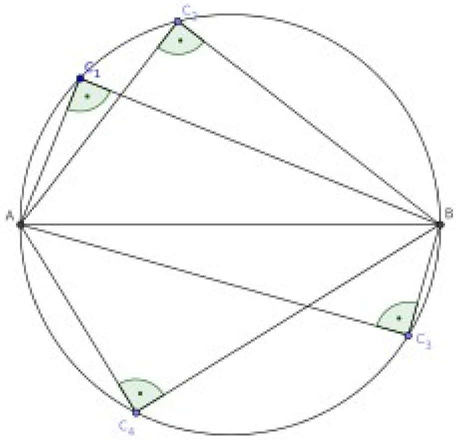
2. K_θ a felső félgömbön van, és ABC gömbháromszöghöz tartozik. Ekkor ugyanaz írható fel γ – ra, mint az előbbi esetben, így ekkor is megkapjuk eredményül, hogy $\alpha+\beta-\gamma=2\theta$.

3. K_θ a felső félgömbön van, de nem tartozik ABC gömbháromszöghöz. A szimmetria miatt elég csak azzal az esettel foglalkoznunk, amikor A csúcshoz esik közelebb. Ekkor $\gamma = K_\theta CA \sphericalangle - K_\theta CB \sphericalangle = K_\theta AC \sphericalangle - K_\theta BC \sphericalangle = (\alpha-\theta)-(\theta-\beta)$, tehát $\alpha+\beta-\gamma=2\theta$. ■

3.3. Thalész-tétel a síkban

3.3.1. Tétel (Thalész-tétel). A sík azon pontjainak mértani helye, amelyekből egy megadott szakasz derékszögben látható, a szakaszhoz mint átmérőhöz tartozó kör, elhagyva belőle a szakasz végpontjait.

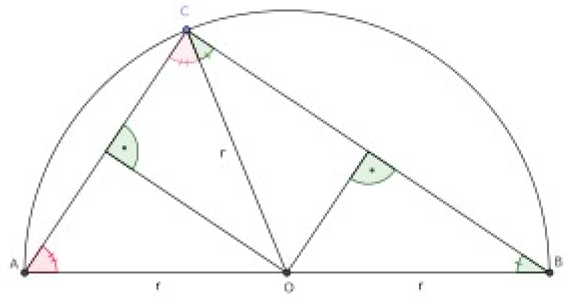
3.3.2. Definícó. A szakaszhoz mint átmérőhöz tartozó kört *Thalész-kör*nek nevezzük.



12. ábra Thalész-tétel

Bizonyítás (I). Ha a kör középpontját összekötjük *C* csúccsal, kapunk egy *AOC* és egy *BOC* egyenlő szárú háromszöget. Mivel tudjuk, hogy a háromszög szögeinek összege 180°, ez $2\alpha+2\beta$, tehát $\alpha+\beta=90°$, így $ACB\sphericalangle=90°$. ■

Bizonyítás (II). A kerületi és középpont szögek tételének bizonyítása egyben a Thalész-tételt is bizonyítja, hiszen az annak egy speciális esete, az az eset, amikor a középponti szög 180°, tehát a kerületi szög 90°. ■



13. ábra A Thalész-tétel bizonyítása

Ahogy a síkbéli kerületi szögek tétele, úgy a Thalész-tétel sem igaz gömbön.

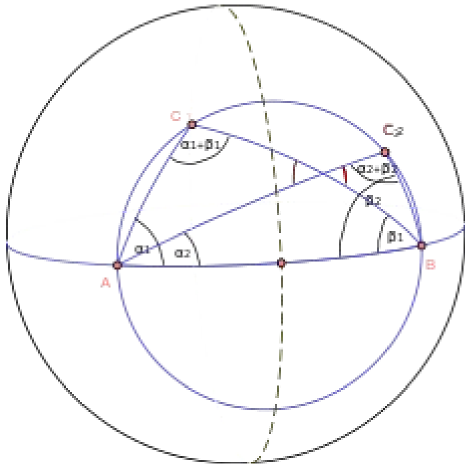
3.3.3. Állítás. A Thalész-tétel nem érvényes gömbön.

A [3.3.1.] Tétel I. bizonyítása azt is megmutatja, miért nem érvényes a Thalész-tétel gömbön. Gömbön $2\alpha+2\beta>180°$, vagyis $\alpha+\beta>90°$. ■

Ám ennél többet is állíthatunk:

3.3.4. Állítás. Egy olyan *ABC* gömbi háromszögnek, melynek *AB* oldala egy körre illeszkedik, *C* csúcsa pedig a körvonalon helyezkedik el, a *C* csúcshoz tartozó szöge az *AB* egyenesre és az *AB* szakasz felezőmerőlegesére vett szimmetrikus eseteken kívül a *C* helyétől függő semelyik esetben nem ugyanakkora.

Bizonyítás. Az $ABC_1\triangle$ és az $ABC_2\triangle$ két nem szimmetrikus esetet jelentenek. Legyen *M* a BC_1 és az AC_2 oldalak metszéspontja. Az $AMC_1\triangle$ szögei $\alpha_1-\alpha_2$, δ és $\alpha_1+\beta_1$, a $BMC_2\triangle$ szögei $\beta_2-\beta_1$, δ és $\alpha_2+\beta_2$. Tegyük fel, hogy $\alpha_1+\beta_1=\alpha_2+\beta_2$. Átrendezve $\alpha_1-\alpha_2=\beta_2-\beta_1$, ami azt jelentené, hogy a két háromszög szögei megegyeznek. Gömbön egy háromszög három szöge egyértelműen meghatározza a háromszöget, vagyis ez azt jelentené, hogy a két háromszög egybevágó. Ez csak akkor igaz, ha a *C* csúcs szimmetrikus *AB* egyenesre vagy *AB* szakasz felezőmerőlegesére. Tehát *C* csúcs mozgatásával minden más esetben különböző szöget kapunk. ■



14. ábra

Nézzük meg, mi az, ami viszont igaz azokra a gömbi háromszögekre, melyeknek egyik oldala egy kör átmérője, és csúcsai illeszkednek egy körre.

3.4. Thalész-tétel a gömbön

3.4.1. Tétel (Gömbi Thalész-tétel). A gömbön azoknak a háromszögeknek, amelyeknek egyik oldala egy kör átmérője, a kiegészítő háromszögének a területe 180 gömbi területegység.

Bizonyítás. Először számítsuk ki egy szögeivel megadott *ABC* gömbi háromszög kiegészítő háromszögének területét. Ahogy az [1.7.] alfejezetben levezettem, a szögeivel megadott gömbi háromszög területe: $T=\alpha+\beta+\gamma-180$. A γ szögű gömbkétszög területe pedig T = 2γ. Ezek alapján a háromszög AB oldalához tartozó kiegészítő háromszög területe $T=180-\alpha-\beta+\gamma$. A bizonyítás további részét kétféle módon is elvégeztem.

(I) A tételben megadott háromszög sajátossága, hogy ha a kör középpontját összekötjük *C* csúccsal, két darab egyenlőszárú háromszöget kapunk, tehát a *C* csúcshoz tartozó szög: $\gamma=\alpha+\beta$. γ-t behelyettesítve a kiegészítő háromszög területképletébe T = 180 -at kapunk eredményül. ■

(II). Ahogy a síkban a Thalész-tétel a kerületi szögek tételének speciális esete, úgy gömbön is igaz ez a megfelelő tételváltozatokra. A kerületi szögek tételének gömbi változatában ha a körív éppen félkör, akkor θ = 0. A kiegészítő háromszögről tudjuk, hogy $T=180-(\alpha+\beta-\gamma)$. Az említett állítás [3.2.1.] szerint: α + β – γ = 2θ. A kerületi szögek tételének gömbi változatában ha a körív éppen félkör, akkor θ = 0, tehát T = 180. ■

3.4.2. Tétel (A gömbi Thalész-tétel megfordítása). Adott a gömbön egy 180 területegység nagyságú háromszög. Ennek bármely oldalához tartozó kiegészítő háromszög csúcsai az oldalhoz mint átmérőhöz tartozó körre illeszkednek.

Bizonyítás. Nevezzük a háromszög csúcsait *A*, *B* és *C*-nek, hozzájuk tartozó szögeit α, β, és γ-nak. Tudjuk, hogy $\alpha+\beta+\gamma-180°=180°$, vagyis $\alpha+\beta+\gamma=360°$. Rajzoljuk meg az oldalaihoz tartozó kiegészítő háromszögeket. Például az AB oldalhoz tartozó kiegészítő háromszög szögei 180° - α, 180° - β és γ, területe 180° + γ – α – β.
A γ szöghöz tartozó csúcs az AB átmérőjű körívre illeszkedik ⇔
$(180°-\alpha)+(180°-\beta)=\gamma \Leftrightarrow \alpha+\beta+\gamma=360°$, ezzel bebizonyítottuk a tételt. ■

Beláttuk, hogy gömbön nem igaz a síkbeli Thalész-tétel, azonban felmerül a kérdés: mely pontokból látszik a gömbön 90°-ban egy adott szakasz? Létezik erre összefüggés a gömbön, ám ehhez olyan gömbi trigonometriára van szükség, amelynek kifejtése nem szerepel a szakdolgozatomban. Két speciális esetet azonban bemutatok:

Legyen az AB szakaszunk 90°, azaz egy negyed főkörív! Azok a pontok, melyekből ez a szakasz 90° alatt látszik, egy gömbkétszöget adnak, melynek oldalai merőlegesek AB szakaszra, és egyik oldala A-ra, másik B-re illeszkedik, A és B pont elhagyásával. Ennek a gömbkétszögnek a szögei 90°-osak.

Egy másik egyszerűbben vizsgálható eset, amikor A és B távolsága 180 fok, azaz A és B átellenes pontok. Melyek azok a pontok, amelyekből az AB szakasz 180° alatt látszik? A és B kivételével bárhol vesszük fel C pontot, az mindenképpen illeszkedik egy AB egyenesre. Tehát a látókörív definíciójából következően az AB szakasz kivételével bárhol felvehetjük C pontot.

4. Körök és érintőik

Ebben a fejezetben, miután definiálom a kör érintőjét, körök érintőivel kapcsolatos középiskolai tananyaghoz tartozó feladatokkal foglalkozom. Ezek síkbéli klasszikus megoldásában általában szerepel a Thalész-tétel, ami viszont gömbön nem létezik. Bemutatok egy olyan megoldási módot, amivel gömbre is átvihetők bizonyos feladatok, és ismertetek egy olyan módszert, ami csak gömbön alkalmazható. Tehát három elindulási irány mentén foglalkozom a témához kapcsolódó általam választott feladatokkal, mutatom meg azok síkbéli, gömbi alkalmazhatóságát.

4.0.1. Definíció. A *kör érintője* egy olyan egyenes, amelynek pontosan egy közös pontja van a körrel (érintési pont), távolsága a kör középpontjától éppen sugárnagyságú, azaz a sugár merőlegesen illeszkedik erre az egyenesre.

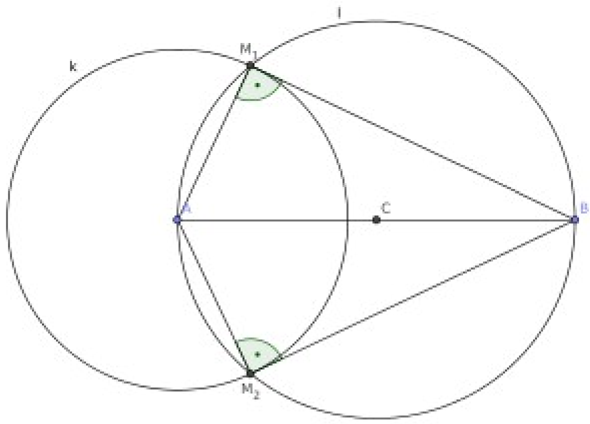
4.1. Feladat. Adott egy kör (k) középpontja (A), sugara (r) és egy középponttól különböző pont (B). Szerkesszük meg a pontból a körhöz húzható érintőket.

A feladat megoldása előtt meg kell néznünk, mely pontokon keresztül húzható a körhöz érintő. Síkban minden olyan ponton keresztül, melyekre igaz, hogy $AB \geq r$, gömbön nem elég, hogy a kör külső pontja legyen, szükséges, hogy az átellenes körnek is külső pontja legyen. Ez könnyen belátható, ha átgondoljuk, hogy egy adott pontot tartalmazó egyenes a gömbön tartalmazza a pont átellenesét is.

Amikor a B pont éppen a körvonalon helyezkedik el, a megoldás triviális, ilyenkor az AB-re merőleges, B-t tartalmazó egyenes az érintő, tehát a következőkben a pontot külső pontnak tekintjük.

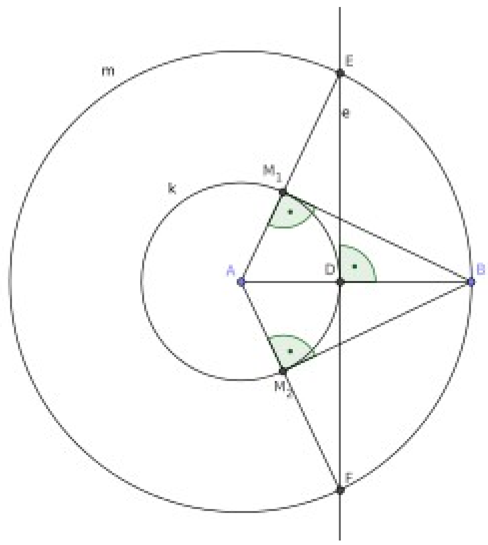
Megoldás (I). Húzzuk meg az A-ra és B-re is illeszkedő egyenest. Szerkesszük meg az AB szakasz felezőpontját (C), melynek segítségével vegyük fel az AB átmérőjű kört, melyet nevezzünk l-nek. Felhasználva a Thalész-tételt, tudjuk, hogy az AB átmérőjű kör bármely A-n és B-n kívül álló D pontjából az AB szakasz 90°-ban látszik, tehát $ADB\sphericalangle = 90°$. Vagyis a két kör metszéspontjaiból (M_1 és M_2) is 90° alatt látszik AB egyenes, azaz a két keresett egyenes BM_1 és BM_2.

Megoldható-e ez a feladat gömbön is? Az előbbi módszerrel nem, hiszen a Thalész-tétel nem érvényes gömbön. Létezik azonban egy másik megoldási mód, amely Arkhimédésztől származik, és két egybevágó háromszög szerkesztésével jutunk el az érintőegyeneshez. Oldjuk meg először síkban a feladatot ezzel a módszerrel.



15. ábra Adott pontból körhöz húzott érintők szerkesztése Thalész-tétellel

Megoldás (II). Rajzoljuk meg az A középpontú AB sugarú kört (m). Az AB egyenes és k metszéspontja legyen D. Állítsunk D-n keresztül AB-re merőlegest (e). A merőleges két pontban metszi m-et: E és F. Húzzuk be AE és AF egyenest. Ezek k-val vett metszéspontja legyen M_1 és M_2. Húzzuk be BM_1 és BM_2 egyeneseket. Mivel az ábra AB-re szimmetrikus, a megoldás leírásában elég az egyik oldallal foglalkoznunk. Tudjuk, hogy ha két háromszög két oldala és közbezárt szöge megegyezik, akkor a két háromszög egybevágó. Mivel AB és AE is m kör sugara, ezért $AB = AE$. Hasonlóképpen $AM_1 = AD$, és mivel A, M_1, E és A, D, B egy egyenesre esnek, ezért $M_1AB\sphericalangle = DAE\sphericalangle$, tehát $ADE\triangle \cong AM_1B\triangle$. Így mivel az e egyenes a D pontban érinti k kört, a BM_1 egyenes is érintőegyenes, azaz megkaptuk a keresett egyeneseket.

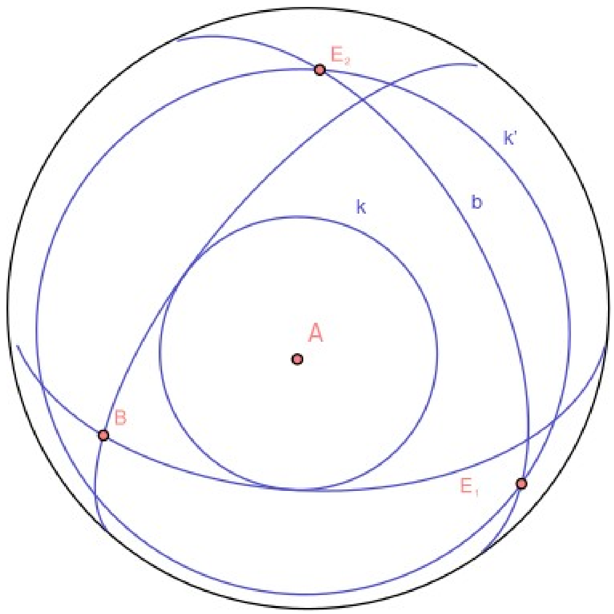


16. ábra Adott pontból körhöz húzott érintők szerkesztése egybevágó háromszögekkel

A fenti megoldásban csupa olyan lépést használtam, melyek gömbön is használhatók. A gömbön is ugyanúgy definiáljuk a merőlegességet, mint a síkon, és a gömbön is egybevágó két háromszög, ha két oldaluk és közbezárt szögük megegyezik, tehát ez a megoldás gömbön is alkalmazható.

Végül bemutatok egy harmadik megoldási módot, mely csak gömbön alkalmazható, és a dualitást használja fel. Ahogy azt az [1.9.2.] pontban megmutattam, a gömb egy pontja és a tőle 90°-ra lévő egyenes között egyértelmű megfeleltetés létezik, ugyanígy egy *O* középpontú *r* sugarú kör és egy *O* középpontú $\pi/2 - r$ sugarú kör között.

Megoldás (III). Tehát adott az *A* középpontú *k* kör, és a rajta kívülálló *B* pont. Vegyük *k* duálisát, *k'*-t, és *B* duálisát a *b* egyenest. Ahogy az eredeti feladatban olyan egyenest keresünk, mely illeszkedik az érinteni kívánt alakzatikra, a duális feladatban olyan pontot keresünk, amely illeszkedik az érinteni kívánt tárgyakra, tehát *k'* és *b* metszéspontjait. Mivel *B* külső pont, két metszéspontjuk lesz, E_1 és E_2. Ezek duálisa e_1 és e_2 egyenesek, a keresett érintők.



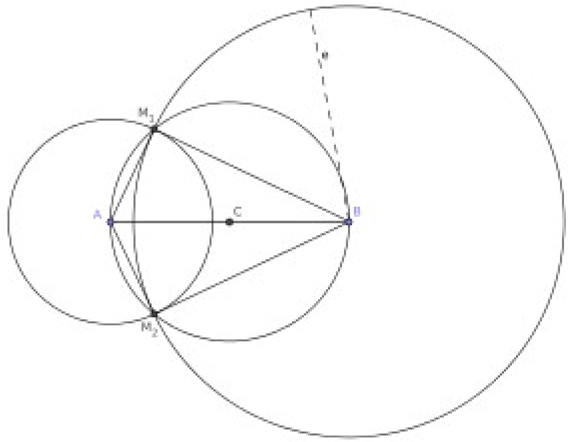
17. ábra Adott pontból körhöz húzott érintők szerkesztése a dualitás használatával

Az előző feladatban a kör sugara volt adott, és az érintőt kerestük, a következőben az érintő adott, és a hozzá megfelelő sugarat keressük.

4.2. Feladat. Adott két pont (*A* és *B*). Szerkesszünk *A* körül kört úgy, hogy a másik pontból a körhöz húzott érintőszakasz adott hosszúságú legyen (*e*)!

A feladat megoldhatóságának érdekében ki kell kötnünk, hogy $r < AB$. Lássuk először a síkbéli, Thalész-tételt felhasználó megoldását!

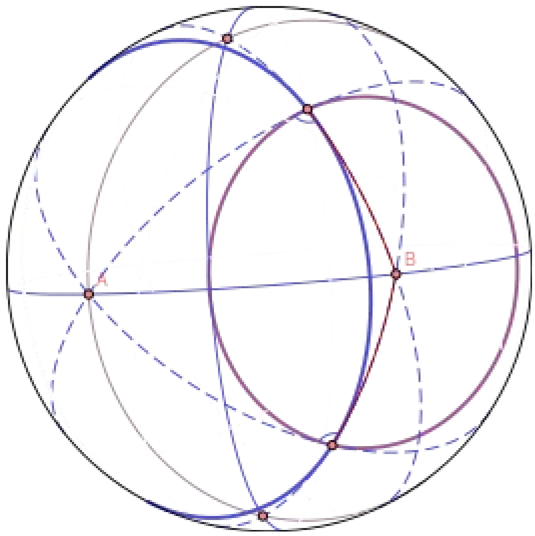
Megoldás (I). A Thalész-tétel segítségével egészen hasonló módon megoldható a feladat, mint az előző feladat (I) megoldásában történt. Tudjuk, hogy az érintési pontok rajta vannak AB szakaszhoz mint átmérőhöz rajzolt Thalész-körön, és azt is, hogy B-től e távolságra vannak. Tehát rajzoljuk meg AB átmérőhöz tartozó Thalész-kört, és a B középpontú e sugarú kört (n). E két kör metszéspontjai adják meg a két érintési pontot (M_1 és M_2), a keresett sugár az $AM_1 = AM_2$ szakasz.



18. ábra Adott pontból adott hosszúságú érintőhöz kör szerkesztése Thalész-tétellel

Arkhimédész módszerével az előzőhöz hasonló módon gömbfelületen is megoldható a feladat:

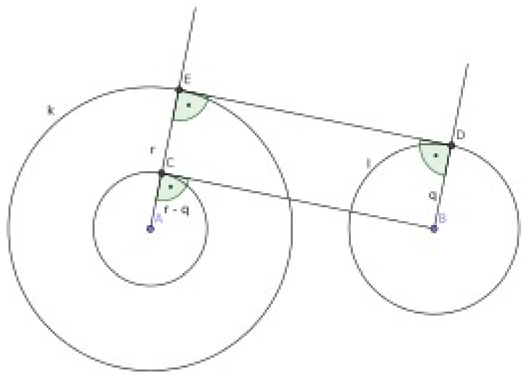
Megoldás (II). Rajzoljuk be az AB egyenest. Húzzunk B körül egy AB sugarú és egy e sugarú kört. Olyan kört szeretnénk szerkeszteni, amely a B körüli e sugarú kört derékszögben metszi. Az e sugarú kör és AB metszéspontját nevezzük D-nek. Állítsunk D ponton keresztül merőlegest az AB egyenesre. Ez a merőleges két pontban, az E-ben és az F-ben metszi az AB sugarú kört. Ahogy az előző feladat (II) megoldásában, a szimmetria miatt foglalkozzunk itt is csak az egyik oldallal. Az EB egyenes és az e sugarú kör metszéspontját nevezzük M-nek. Ahogy az előző feladatban, itt is $MAB\triangle \cong DEB\triangle$, tehát az $AMB\sphericalangle$ derékszög, így most már megrajzolható a keresett A középpontú AM sugarú kör.



19. ábra Adott pontból adott hosszúságú érintőkhöz kör szerkesztése egybevágó háromszögekkel

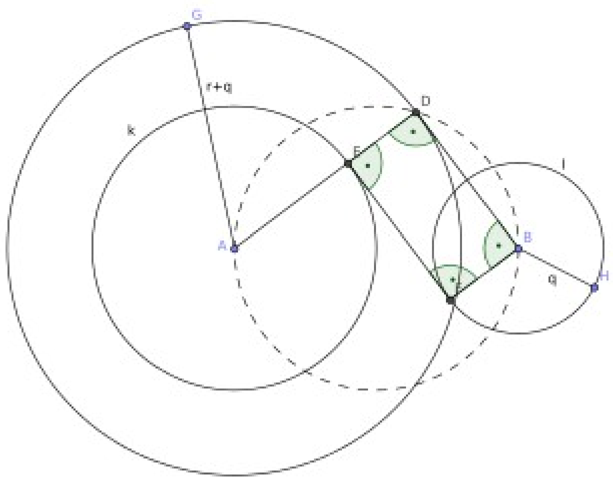
4.3. Feladat. Adott két kör (*k* és *l*) középpontjával (*A* és *B*) és sugarával (*r* és *q*, $r > q$). Szerkesszük meg ezek közös érintőegyeneseit.

Megoldás (I). A síkban létező párhuzamosság miatt ez a feladat visszavezethető az adott pontból adott körhöz húzható érintők megszerkesztéséhez. Ha mindkét kör sugarát azonos értékkel csökkentjük, a csökkentett sugarú körök közös érintője párhuzamos lesz az eredeti körök közös érintőjével. Csökkentsük *q*-val mindkét kör sugarát. Ekkor *k* egy $r - q$ sugarú körré, *l* pedig egy ponttá (*l* középpontjává) zsugorodik. A [4.1.] Feladat (I) megoldásban leírt módon szerkesszük ezt meg, majd toljuk el a sugárra merőlegesen *q* távolságra. Ezzel megkaptuk a két kör két darab külső érintőjét.



20. ábra Két kör közös külső érintőegyeneseinek szerkesztése Thalész-körrel

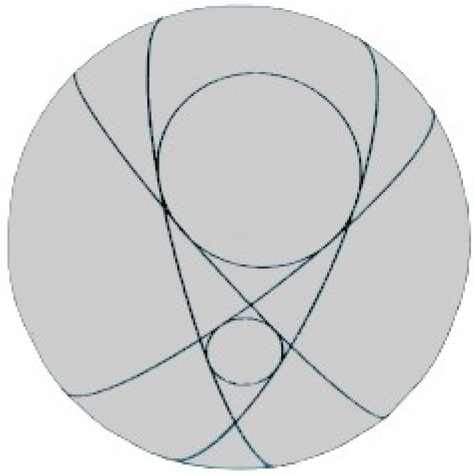
A közös belső érintőkhöz növeljük *k* kör sugarát *q*-val, *l* kör sugarát pedig csökkentsük *q*-val. Innentől ugyanúgy folytatódik a megoldás, mint a külső érintők esetében.



21. ábra Két kör közös belső érintőegyeneseinek szerkesztése Thalész-körrel

Tehát négy különböző közös érintőt kaptunk.

Megoldás (II). A dualitás felhasználásával gömbön egyszerűen meg tudjuk szerkeszteni a kívánt érintőket. Vegyük a két kör duálisait. Ezek két-két átellenes kör. Amennyiben a két kör nem metszi, nem érinti egymást, és egymáson kívül helyezkednek el, ennek a 4 körnek 8 (4-4 átellenes) metszéspontja van. Ezek a metszéspontok az érintők duálisai, így ha megrajzoljuk ehhez a 4 ponthoz tartozó egyenest, meg is kaptuk az érintőket.



22. ábra Két gömbi kör közös érintőegyenesei

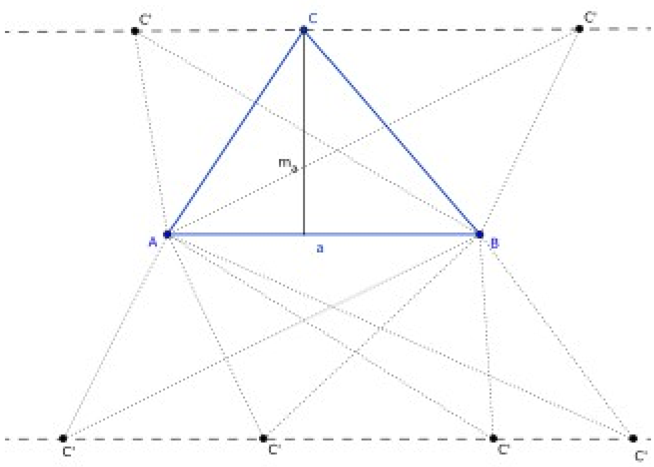
5. A Lexell-kör és alkalmazásai

A következő a fejezetben először egy feladaton keresztül bemutatom a Lexell-kört, majd segítségével bizonyítom, hogy a gömbi háromszög területfelező egyenesei közös pontra illeszkednek. A Lexell-kör hazája a gömb, síkban nem létezik. A gömbön egy síkbéli egyenes szerepét veszi át.

5.0.1. Feladat. Adott egy *ABC* háromszög. Hol helyezkednek el azok a *P* pontok, melyekre igaz, hogy $T_{ABC}=T_{ABP}$?

Megoldás a síkban

Síkban egyszerűen megoldható a feladat. Az a alapú, m_a magasságú háromszög területe $T=\frac{a \cdot m_a}{2}$. Mivel az alap változatlan, a terület állandóságához az alaphoz tartozó magasságnak is állandónak kell lennie. Tehát az alkalmas pontok *P* helyére az *AB* egyenestől m_a távolságra lévő két párhuzamos egyenes.

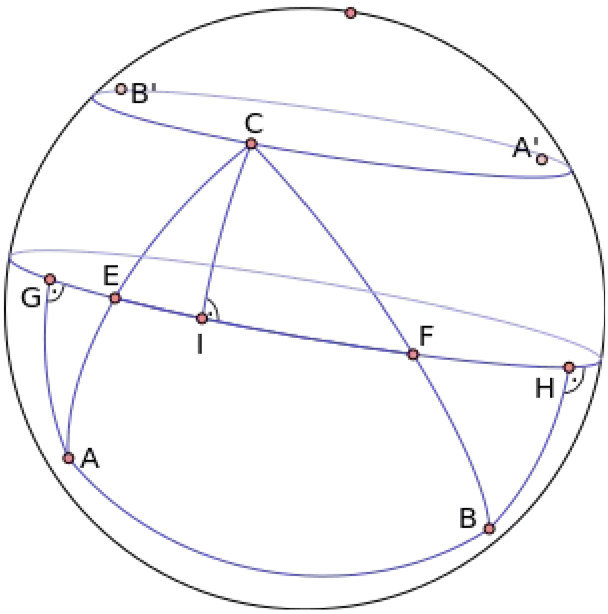


23. ábra Azonos alaphoz tartozó azonos területű háromszögek a síkban

Gömbön nem létezik a párhuzamosság, és a háromszög területét is más módon tudjuk kiszámolni, így ott más megoldást kell keresnünk.

Megoldás a gömbön

Induljunk el egy másik, gömbön is járható úton. Legyen *AC* oldal felezőpontja *E*, *BC* oldalé *F*. Rajzoljuk meg az *E* és *F* pontra illeszkedő egyenest. Legye *G* az *A* csúcs *EF* egyenesre vett vetülete, H a B csúcs, I pedig a C csúcs EF-re vett vetülete. Mivel $AE=EC$, a $GEA\sphericalangle$ és az $IEC\sphericalangle$ csúcsszögek, tehát egyenlők, $AGE\sphericalangle = CIE\sphericalangle$ mindketten derékszögek, AGE és CIE háromszögek egybevágóak. Ugyanezzel a gondolatmenettel megkapjuk, hogy $CIF\triangle \cong BHF\triangle$. Vagyis $T_{ABC}=T_{ABHG}$. Ha C vetülete a GH szakaszon kívülre esik, akkor is működik az átdarabolás. Ez alapján a feladatot úgy is megfogalmazhatjuk, hogy melyek azok a C' pontok, melyekre ABC' háromszög ugyanazzá a négyszöggé darabolható, mint ABC háromszög. Ezek az EF egyenestől IC távolságra lévő pontok, illetve ezek AB egyenesre vett tükörképei. Síkon megkapjuk a az előző megoldásban is megkapott két párhuzamos egyenest, gömbön viszont a keresett pontok két körön helyezkednek el. $AG=CI=BH$ miatt A és B átellenesei, A' és B' is ezen a körön találhatóak. E három pont ismeretében megszerkeszthető a kör. Mivel csak az Euler-féle háromszögekkel foglalkozunk, a körnek csak a C csúcsot tartalmazó nyílt AB szakasza lesz megoldás.



24. ábra

5.0.2. Tétel (Lexell tétele). Legyen A és B a gömb két különböző pontja, A' és B' a velük átellenes pontok, $\delta \in (0, 2\pi)$ egy rögzített szám. Tekintsük az AB főkör által határolt félgömbök közül az egyiket. Ekkor ebben a félgömbben lévő azon C pontok mértani helye, melyekre az ABC gömbháromszög területe δ, egy A'-t és B'-t összekötő körív.

Bizonyításvázlat. A [5.0.1.] feladat megoldásával azt bizonyítottuk, hogy ha adott területű ABC háromszög C csúcsát a Lexell-körön mozgatjuk, a háromszög területe változatlan marad. Az [5.0.2.] tétel bizonyítottságához még arra van szükségünk, hogy tetszőleges δ területű háromszöget létre tudjunk hozni. A [3.2.1.] állítást ($\alpha + \beta - \gamma = 2\theta$) és a háromszög területének kiszámítási módját ($\delta = \alpha + \beta + \gamma - 180$) felhasználva az 5.1.1. Tétel bizonyításában ismertetett módon tetszőleges adott területű háromszög megszerkeszthető.

5.1. A gömbi területfelező pont

A cím és az azzal kapcsolatos síkbéli előismereteink alapján úgy tűnhet, távolra evezünk a köröktől, hiszen a síkban egy háromszög területfelező pontjának (súlypont) meghatározásához nincs szükség körre. Gömbön azonban ez egészen másképp működik. A gömbön is létezik súlypont, ám az nem azonos a területfelező ponttal, és a gömbön nem igaz, hogy a háromszög egyik csúcsára és a szemközti oldal felezőpontjára illeszkedő egyenes két azonos területű háromszögre bontja a háromszöget. Ebben az alfejezetben bemutatom, hogyan kapható meg egy gömbi háromszög területfelező pontja.

5.1.1.Tétel. A gömbháromszög három területfelező vonala egy ponton megy át.

Bizonyítás. A bizonyítás gondolatmenete Lénárt Istvántól származik. [7]
Adott egy *ABC* háromszög, melynek szögei α, β és γ.

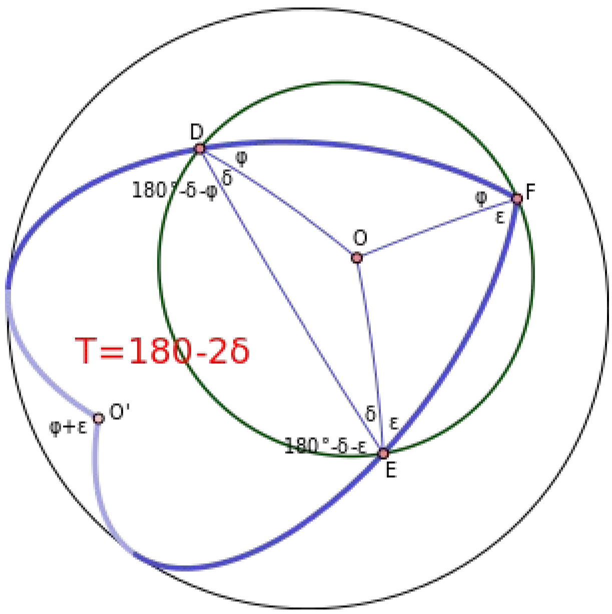
Azokat az ABC' háromszögeket keressük, melyeknek területe fele az ABC háromszögnek.

$$T_{ABC\triangle} = \alpha + \beta + \gamma - 180$$

$$T_{ABC'\triangle} = \frac{\alpha + \beta + \gamma - 180}{2}$$

A [3.2.1.] Állítást felhasználva tetszőleges területű háromszöget meg tudunk szerkeszteni a gömbön. Tetszőleges *DEF* háromszög, mely körülírt körének középpontja *O,* és *ODE*∢ = *OED*∢ = δ, *DE* oldalához tartozó kiegészítő háromszögének területe 180-2δ.

Most egy *ABC* háromszögben szeretnénk



25. ábra

egy ABD fele területű háromszöget létrehozni, melynek D csúcsa a BC vagy az AC oldalra illeszkedik.

$$T=180-2\delta=\frac{\alpha+\beta+\gamma-180}{2} \text{ , tehát } \delta=135-\frac{\alpha+\beta+\gamma}{4} .$$

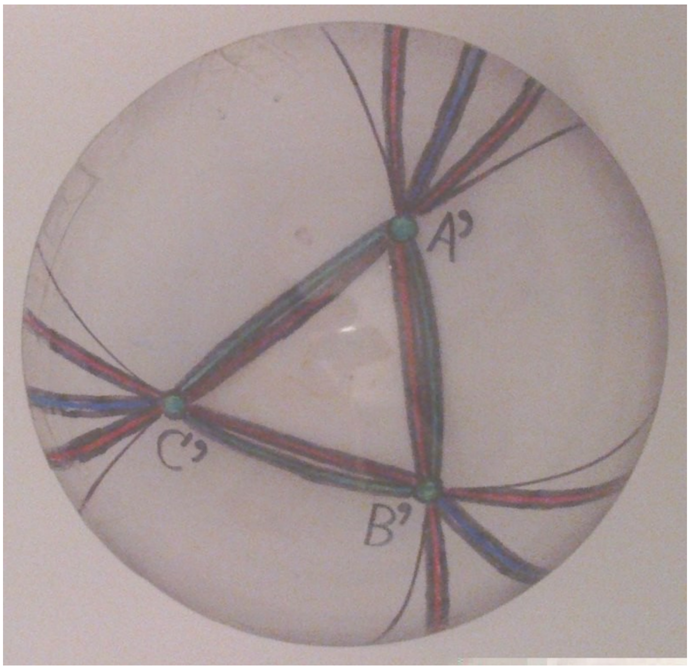
Húzzunk A-n és B-n keresztül a háromszögön kívül 1-1 egyenest, melyek δ szöget zárnak be AB szakasszal (amennyiben $\delta < 0$, az egyenes metszi a háromszöget) . Ezek metszéspontja adja O pontot. Rajzoljunk egy O középpontú $OA=OB$ sugarú kört. Tekintsük a kör azon AB ívét, amelyik AB egyenes azon oldalán halad, amelyik nem tartalmazza az ABC háromszöget. Vegyünk fel ezen egy P pontot. Ezzel megkaptuk a keresett félterületű háromszögek egyikének kiegészítő háromszögét. Rajzoljuk be P átellenes pontját, P'-t. ABP' háromszögről tudjuk, hogy területe fele az ABC háromszögének.

Most már csak az hiányzik, hogy a háromszög BC vagy CA oldalán találjunk megfelelő pontot. Ehhez használjuk a Lexell-kört! P'-re, A'-re és B'-re egyértelműen illeszkedik egy kör, ez az AB szakaszhoz és T_{ABH} területhez tartozó Lexell-kör Ez metszi BC és AC oldalt is, ezzel megszületett a keresett D pont (válasszuk ki az egyik metszéspontot). Ugyanez előállítható BC és CA oldalhoz is (E és F pontok).

Ezzel létrejött három Lexell-kör. A három Lexell-kör páronként két pontban metszi egymást. Az egyik metszéspont a háromszög oldalán található. Ez onnan látható be, hogy az AB oldalon és az AC oldalon fekvő fél területű háromszögeknek éppen egy egész háromszöggé kell kiegészíteniük egymást, így a BC oldalon lévő csúcsuknak közösnek kell lenniük (ugyanígy a többi oldalra). A másik metszéspont a háromszög csúcsainak átellenese. Ezt onnan tudjuk,

26. ábra A Lexell-körök a háromszög oldalain metszik egymást hogy azt beláttuk, hogy A' és B' az AB alapú háromszöghöz tartozó Lexell-körön helyezkedik el. Ugyanígy a BC alapú háromszöghöz tartozó Lexell-körön B' és C'. B' csak úgy illeszkedhet két különböző Lexell-körre, ha azok metszéspontjában helyezkedik el (ugyanígy A'-re és C'-re).

Ez a három kör meghatározza az őket tartalmazó három síkot. Három nem párhuzamos sík metszéspontja egy pont, ehhez elég végiggondolni, hogy két síké egy egyenes, egy egyenesé és egy síké egy pont. Tehát ha behúzzuk a húrok páronként vett metszéspontjaira illeszkedő egyeneseket, három olyan egyenest kapunk, amelyek egy közös pontra és annak átellenesére illeszkednek. E két pont közül az egyik biztosan a háromszögön belül található. Mit tudunk elmondani erről a három egyenesről? Áthaladnak D, E és F pontokon, illeszkednek A'-re, B'-re és C'-re, ebből következően A-ra, B-re és C-re is. E két tulajdonságuk bizonyítja, hogy területfelezők. Mivel létezik közös pontjuk, ez a pont a háromszög területfelező pontja. Ezzel bizonyítást nyert a tétel. ■



27. ábra A Lexell-körök a háromszög átellenesén metszik egymást

Befejezés

Szakdolgozatomban egy nem megszokott, mégis könnyen megérthető és logikusan felépített világot tártam az Olvasó elé. Egy olyan világot, melyben kevés előismerettel is el lehet kezdeni gondolkozni, kísérletezni. Bemutattam olyan fogalmakat, eljárásokat, amik ugyanúgy működnek gömbön, és síkon is, és rátértem olyanokra, melyek csak síkon, illetve csak gömbön léteznek.

Bár egy gömb felszínén élünk, szemléletünk sokszor nehezen engedelmeskedik a gömbi szabályoknak. Azt gondolom, hasznos és érdekes dolog elkezdeni gömbfelületen gondolkozni, megvizsgálni, mi változik, hogyan változik, és mi marad változatlan a sík geometriájához képest.

Köszönetnyilvánítás

Köszönöm konzulensemnek, Lénárt Istvánnak, hogy megismertette velem ezt világot, hogy ötödjére is ugyanolyan türelmesen magyarázta el, amit nem értettem, és még ilyenkor sem éreztem magam butának.

Témavezetőmnek, Dr. Vásárhelyi Évának türelmét a felém tanúsított jóindulatát.

Kalló Bernátnak a rengeteg támogatást, hogy segített gondolkozni, hogy megtanított a programok használatára, amikkel az ábrákat készítettem, és hogy megírta nekem a Gömbi kishajó programot, amin keresztül sokkal mélyebben megértettem a dualitást.

Irodalomjegyzék

[1] H. S. M. Coxeter: A geometriák alapjai. Műszaki Könyvkiadó. Budapest, 1987.

[2] Csikós Balázs: Gömbi geometria. In: Új matematikai mozaik. Szerk.: Hraskó András. Typotex Kiadó, Budapest, 2002. 337-373. oldal

[3] Czapáry-Csete-Hegyi-Iványiné-Morvai-Reiman: MATEMATIKA Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyüjtemény III. Geometriai feladatok gyűjteménye. Nemzeti Tankönyvkiadó. Budapest, 2005

[4] Euklidész: Elemek – I. könyv. Gondolat Kiadó, Budapest, 1983.
http://mek.oszk.hu/06200/06232/pdf/elemek1.pdf

[5] Hajós György: Bevezetés a geometriába. Tankönyvkiadó, Budapest, 1966.

[6] Kálmán Attila: Nemeuklideszi geometriák elemei. Második kiadás. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2002. 15-38. és 205-259. oldal

[7] Lénárt István: A gömbháromszög egy nevezetes pontjáról. In: A tanítás jobbítátsáért. Szerk.: Szendrei Julianna. Haxel Kiadó, 2005. 111-117. oldal

[8] Lénárt István: Nem-euklideszi geometriák az iskolában I.-II. című előadásainak jegyzete

[9] Lénárt István: Nem-euklideszi kalandok a rajzgömbön. Budapest, Múzsák Kiadó, 1999.