EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

MATEMATIKAI INTÉZET

MATEMATIKATANÍTÁSI ÉS MÓDSZERTANI KÖZPONT

Terület- és térfogatszámítás az általános iskolától az egyetemig

Szakdolgozat

Készítette: Takács Ferenc
Matematika BSc – tanári szakirány

Témavezető: Dr. Szeredi Éva
főiskolai docens

Budapest
2013

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A terület és a térfogat témaköre, kiszámítása már évezredek óta jelen van az emberiség és a matematika történetében. Köztudott, hogy az ókori matematika kimagasló jelentőséggel bírt. Az akkor élők tudása és tudásvágya meglepően sokrétű volt, a tudomány legkülönbözőbb területeire kihatott. Az ókorban az egyiptomiak például már meg tudták határozni többek közt a derékszögű háromszög területét, amit arra is használtak, hogy földek, telkek területét kiszámítsák. Hasonlóan voltak képletek, módszerek például csonka testek térfogatának kiszámolására. Szakdolgozatomban a matematika eme nagy múltra visszatekintő részéről és annak tanításáról írok; az elméleti megközelítés mellett pedig szép számmal kapnak helyet a gyakorlathoz közel álló feladatok és azok megoldásai.

Az első fejezetben a területtel foglalkozom. Először a terület általános fogalmát, a Jordan-mértéket vezetem be, majd erre adok egyetemi példákat. Ezután a területet geometriailag közelítem meg, alternatív definíciót szolgáltatva. Végül megvizsgálom a Jordan mérték és a Riemann-integrálhatóság közötti összefüggést és az eredményeket felhasználva kiszámolom a kör területét. Ezek után megnézem, hogyan tanítják ezeket a fogalmakat a közép- és általános iskolában a bonyolult absztrakciós szintek elhagyásával, szemléletesen, a fiatalok számára könnyen érthetően.

A terület és a térfogat analóg fogalmak, rengeteg közös vonásuk van. Éppen ezért a második fejezetben nem kizárólag a térfogat bemutatásával foglalkozom, hanem a terület és a térfogat közötti párhuzamokra, analógiákra teszem a hangsúlyt. A térfogatszámításnak is jelentős kapcsolata van az integrálszámítással, a fejezet további részében erről olvashatunk.

A harmadik fejezetben kapnak helyet a terület- és térfogatszámításhoz kapcsolódó központi felvételi, érettségi és KÖMAL feladatok. Mutatok arra példát, hogy bizonyos síkbeli feladatok kiterjeszthetők térbe, lehet találni velük teljesen analóg térbeli feladatot. Ugyanígy térbeli feladatoknak is létezhet síkbeli megfelelője.

1. fejezet: Területfogalom- és számítás

A szakdolgozatom első fejezetében a területtel kapcsolatos vizsgálódásoké a főszerep. Először az általános területfogalommal, a Jordan-mértékkel foglalkozok, mutatok egyetemi példákat, mint a *Cantor-halmaz*, vagy a *Sierpinski-szőnyeg*. Ezt követően a Jordan-mérhető halmazok és az integrál kapcsolata következik, példaként bebizonyítom a kör területét integrálással. Az általános, egyetemi területfogalom után azt veszem sorra, hogy az ismert sokszögek, síkidom területét hogy tanítja az általános- és a középiskola.

Általános területfogalom, Jordan-mérték

A következőkben a *Laczkovich Miklós – T. Sós Vera: Analízis* című könyv alapján definiálom általánosan a terület fogalmát.

Definíció

$\boldsymbol{R}^d$-ben téglának nevezzük az $[a_1, b_1] \times ... \times [a_d, b_d]$ alakú halmazokat, ahol $a_i < b_i$ minden $i = 1,...,d$ -re.

Speciálisan a tégla fogalma alatt értjük

- $d = 1$ esetben az $[a_1, b_1]$ nem elfajuló, korlátos, zárt intervallumot,
- $d = 2$ esetben az $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ síkbeli téglalapot,
- $d = 3$ esetben az $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ térbeli téglatestet.

Tetszőleges $R = [a_1, b_1] \times ... \times [a_p, b_p] \subset \boldsymbol{R}^p$ téglára $t(R)$ -rel jelöljük a $(b_1 - a_1) \cdots (b_p - a_p)$ szorzatot.

Definíció

Ha $A \subset \boldsymbol{R}^p$ korlátos, akkor A külső mértéke a $\sum_{i=1}^{n} t(R_i)$ számok halmazának alsó határa, ahol $R_1,...,R_n$ tetszőleges olyan téglák, melyek egyesítése lefedi A-t. Az A halmaz külső mértékét $k(A)$ -val jelöljük.

Definíció

Az A halmaz belső mértéke a $\sum_{i=1}^{n} t(R_i)$ számok halmazának felső határa, ahol $R_1,...,R_n$ tetszőleges A-ban fekvő és páronként egymásba nem nyúló téglák (azaz nincs közös belső pontjuk). Az A halmaz belső mértékét $b(A)$-val jelöljük.

Definíció

A korlátos A halmazt Jordan-mérhetőnek nevezzük, ha $b(A) = k(A)$. Ekkor A Jordan-mértéke $t^p(A) = t(A) = b(A) = k(A)$. Ha $p \geq 3$, akkor a Jordan-mérték helyett térfogatot, a $p = 2$ esetben területet, a $p = 1$ esetben hosszúságot is mondhatunk.

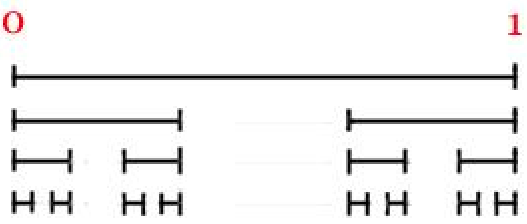
Megjegyzés

$t(A)$, $b(A)$, $k(A)$ helyett $t^p(A)$-t, $b^p(A)$-t, $k^p(A)$-t is írhatunk.

Nézzünk példákat!

Első példa

Legyen az első példa a *Cantor-halmaz*! Tekintsük a számegyenes $[0,1]$ intervallumát és ebből az intervallumból hagyjuk el a középső nyílt egyharmadát, azaz az $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ intervallumot. Ezután a maradék két zárt intervallum mindegyikéből hagyjuk el a középső nyílt egyharmadukat, és így tovább. Az így megmaradt pontok halmaza a Cantor-halmaz, amit jelöljünk C-vel.



Az ábrán jól látható a fent ismertetett eljárás.

A kép forrása: http://wmi.math.u-szeged.hu/mediawiki/index.php/Iter%C3%A1ci%C3%B3

Az 1 hosszúságú intervallumból először $\frac{1}{3}$-ot, azután $\frac{2}{9}$-et hagyunk el, stb., ez alapján:

$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^i}{3^{i+1}} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{4}{3^3} \ldots = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}} \right) = 1$, tehát az elhagyott részek hossza 1, vagyis a

Cantor-halmaz hossza $1-1=0$.

Látható, hogy a konstrukció *k*. lépésében 2^k darab $\frac{1}{3^k}$ hosszúságú zárt intervallumot

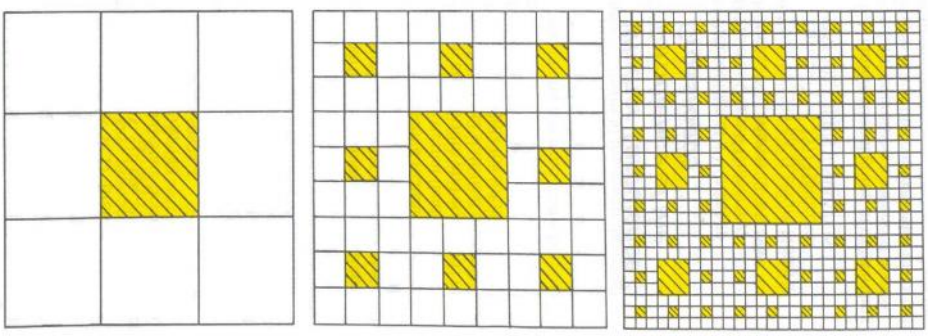
kapunk, melyek *C*-t lefedik. Mivel $\lim_{k\to\infty} \frac{2^k}{3^k} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 0$, ezért $k(C)=0$.

A Cantor-halmaz belső mértéke szintén *0*, ugyanis felhasználva azt az állítást, hogy tetszőleges $A \in R^p$ korlátos halmazra $b(A) \le k(A)$, tudjuk, hogy $0 \le b(C) \le k(C) = 0$.
Ezek szerint $b(C) = k(C) = 0$, tehát a Cantor-halmaz hossza valóban 0.

Második példa

Tekintsük a Cantor-halmaz egyik síkbeli megfelelőjét, az ún. *Sierpinski-szőnyeg*et!
Osszuk fel a $[0,1]\times[0,1]$ halmazt (zárt egységnégyzet) 9 egybevágó négyzetre, majd ezek közül hagyjuk el a középső nyílt négyzetet, azaz az $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ halmazt. Hasonlóan, a maradék 8 zárt négyzet mindegyikéből hagyjuk el a középső nyílt $\frac{1}{9}$-üket, és így tovább.
A megmaradt pontok halmaza a Sierpinski-szőnyeg, amit jelöljünk *S*-sel!

A következő ábrán jól látható a konstrukció:



A kép forrása: http://math.uni-pannon.hu/~szalkai/Sierpinski-szonyeg-.jpg

Az 1 területű négyzetből tehát először $\frac{1}{9}$-et, majd $\frac{8}{81}$-et – és így tovább – hagyunk el.

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{2^{3i}}{3^{2(i+1)}}=\frac{1}{9}+\frac{8}{\left(3^2\right)^2}+\frac{64}{\left(3^2\right)^3}+\ldots=\frac{1}{9}\left(\frac{1}{1-\frac{8}{9}}\right)=1$$, tehát az elhagyott részek területe 1,

vagyis a Sierpinski-szőnyeg területe 0. Látható, hogy a konstrukció k. lépésében 8^k darab $\frac{1}{9^k}$ területű négyzetet kapunk. Mivel $\lim_{k\to\infty}\frac{8^k}{9^k}=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{8}{9}\right)^k=0$, ezért $k(S)=0$

A Sierpinski-szőnyeg belső mértéke szintén *0*, ugyanis $0\le b(S)\le k(S)=0$.

Ezek szerint $b(S)=k(S)=0$, tehát a Sierpinski-szőnyeg területe valóban 0.

Harmadik példa

Induljunk ki ismét a $[0,1]\times[0,1]$ halmazból. Ebből a zárt egységnégyzetből hagyjuk el a racionális x és y koordinátájú pontokat! Jelöljük ezt a halmazt N-nel!

Az N halmaz belső mértéke 0, mert egyetlen téglát sem tudunk letenni úgy, hogy ne tartalmazzon elhagyott (azaz racionális) pontot.

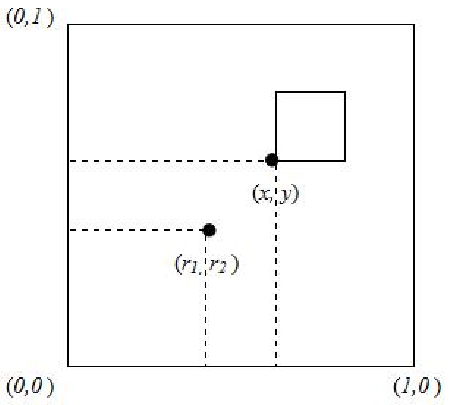
Bizonyítás

Tegyük fel indirekte, hogy le tudok tenni téglát, az $[a,b]\times[c,d]$-t. Mivel bármely két valós szám között van racionális szám (tétel), ezért biztos, hogy ekkor a és b között találok egy r_1, c és d között egy r_2 racionális számot, vagyis találok egy (r_1, r_2) pontot, melynek mindkét koordinátája racionális szám. Ez pedig ellentmondás, hiszen egy belső fedés nem tartalmazhat kidobott pontot.
Ebből következik, hogy minden belső fedés területe 0, hiszen egyetlen egy téglát sem tartalmaz a tekintett halmaz.

Az N halmaz külső mértéke legalább 1, mert ha kiválasztunk egy elhagyott (azaz racionális) pontot, akkor nem tudjuk lefedni a halmazunkat úgy, hogy az adott pont ne legyen lefedve. Ezért a külső mérték legalább 1, hiszen minden külső fedés az egész négyzetet tartalmazza.

Bizonyítás

Válasszunk ki egy (r_1, r_2) elhagyott racionális pontot a halmazból. Tegyük fel indirekte,



hogy ekkor le tudjuk fedni a halmazunkat úgy, hogy az adott (r_1, r_2) pont ne legyen benne. Tekintsük a kiválasztott (r_1, r_2) ponthoz legközelebbi négyzetet. Ennek a négyzetnek a kiválasztott (r_1, r_2) ponthoz legközelebbi pontját jelöljük (x, y)-nal. Ha r_1 és x különböző, akkor a kettő között van irracionális, ami nincs lefedve. Ha egyenlők, akkor r_2 és y között keresünk irracionális pontot. Ha ezek is egyenlők, akkor (r_1, r_2) eleme a téglának, tehát fedett, ami ellentmondás.

Vagyis $b(N) \neq k(N)$, tehát az N halmaznak nem létezik területe.

Alternatív definíció a területre, geometriai megközelítés

A terület a geometriában egy olyan függvény, amely a síkbeli alakzatok egy részéhez számokat rendel bizonyos feltételeknek megfelelően. Az ilyen alakzatokat (Jordan) területtel rendelkező alakzatoknak nevezzük. Mielőtt rátérnék a pontos definícióra, azt megelőzően szükséges bevezetni fogalmakat, állításokat. Az első ilyen a korlátosság.

A korlátosságot többféleképpen is szokás definiálni. Például: egy alakzat korlátos, ha

- létezik tartalmazó téglalap vagy
- létezik tartalmazó kör vagy
- létezik tartalmazó sokszög.

Könnyen belátható, hogy ezek ekvivalens definíciók.
Mivel Hajós György már megmutatta, hogy a sokszögeknek van területe, ezért az általános területfogalom felépítésénél a sokszögek területét használja fel.

Emiatt a korlátosságot a sokszögek segítségével definiálja:

Definíció Egy alakzat korlátos, ha létezik őt tartalmazó sokszög.
Az általános területfogalom definiálásához az analízistől kölcsönveszi a szuprémum és az infimum fogalmát.

Definíció Egy felülről korlátos és nemüres *A* számhalmaz legkisebb felső korlátját *A* szuprémumának nevezzük.
Definíció Egy alulról korlátos és nemüres *A* számhalmaz legnagyobb, alsó korlátját *A* infimumának nevezzük.
Legyen *H* tetszőleges korlátos síkbeli ponthalmaz, $s = \{$ a sík sokszögei $\}$,
$T : s \to R$ területmérő függvény.
H korlátossága miatt létezik olyan $K \in s$ sokszög mely tartalmazza *H*-t, vagyis bármely olyan *S* sokszöget, melyet *H* tartalmaz, *K* is tartalmaz:

$$S \subseteq H \subset K$$

$T_*(H) = \sup\{T(S) : S \in s, S \subseteq H\}$ (ill. $T_*(H) = 0$, ha nincs ilyen *S*)
Mivel $S \subseteq H \subset K \Rightarrow T(S) < T(K)$, tehát $\{T(S)\}$ felülről korlátos, ezért létezik $\sup\{T(S)\}$.
$T^*(H) = \inf\{T(S) : S \in s, H \subseteq S\}$
Mivel $T(S) \geq 0$, ezért létezik $\inf\{T(S)\}$.
Látható, hogy $T_*(H) \leq T^*(H)$.

Definíció Azt mondjuk, hogy *H*-nak van területe, ha $T_*(H) = T^*(H)$. A közös értéket *H* területének nevezzük.

Megjegyzések

- Ha *H* sokszög, akkor van területe (ilyenkor *sup* = *max* = *inf* = *min* a sokszög területe)
- Előfordulhat, hogy *T(H) = 0*, ekkor *H* például egy szakasz. Ha *H*-nak létezik belső pontja és van területe, akkor *T(H) > 0*.

A korlátos síkbeli ponthalmaz területének definíciója (területmérő függvény):

1) T pozitív
2) T egybevágóság invariáns, azaz ha $H_1 \cong H_2$ és H_1-nek van területe, akkor H_2-nek is van és $T(H_1) = T(H_2)$
3) T additív függvény, azaz ha $H = H_1 \cup H_2$, mindháromnak létezik területe és H_1-nek, H_2-nek nincs közös belső pontja, akkor $T(H) = T(H_1) + T(H_2)$
4) T(egységnégyzet) = 1

Az additivitás esetében elmondható, hogy ez igaz kettő helyett véges sok részidomra.

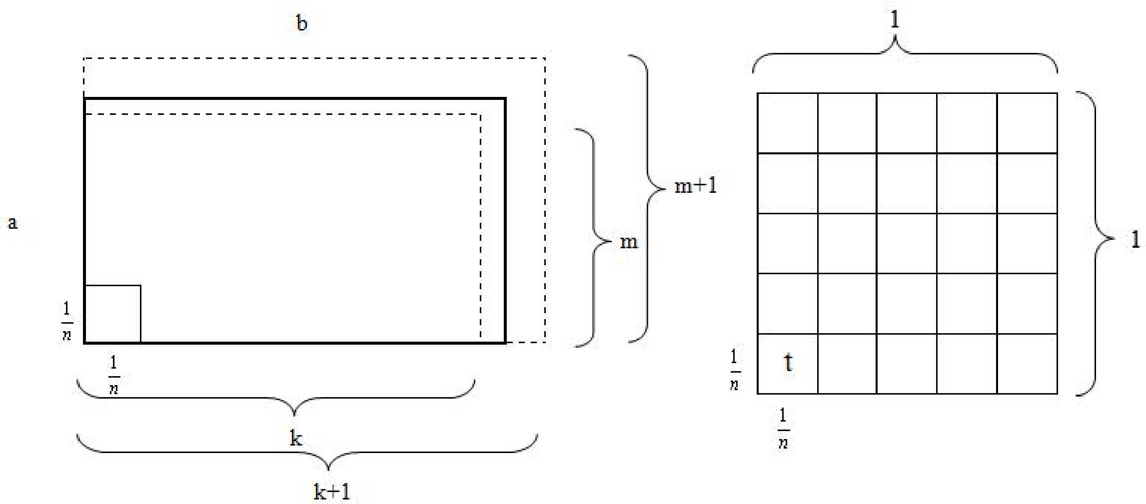
A területmérő függvény tulajdonságait is felhasználva belátható a téglalap területének képlete.

Tétel

Egy *a*, *b* oldalú téglalap területe $a \cdot b$

Bizonyítás

Osszuk fel *n* egyenlő részre az egységnégyzet mindkét oldalát! Húzzunk az osztópontokon keresztül párhuzamosokat, így n^2 darab egybevágó, $\frac{1}{n}$ oldalhosszúságú négyzet keletkezik, ezek területe a terület definíciójának 2)-es tulajdonsága szerint egyenlő, a 3)-as tulajdonság miatt pedig, ha az egységnégyzet területe *t,* akkor $n^2 \cdot t = 1$, vagyis $t = \frac{1}{n^2}$



Egy a és b oldalhosszúságú téglalap a oldalára mérjünk fel $\frac{1}{n}$ oldalhosszúságot annyiszor, ahányszor lehetséges. Ha ez m-szer lehetséges, akkor:

$$\text{I.} \qquad 0 < \frac{m}{n} \le a < \frac{m+1}{n}$$

Ugyanezen téglalap b oldalára mérjünk fel $\frac{1}{n}$ oldalhosszúságot annyiszor, ahányszor lehetséges. Ha ez k-szor lehetséges, akkor:

$$\text{II.} \qquad 0 < \frac{k}{n} \le b < \frac{k+1}{n}$$

Az I., II.-t összeszorozva adódik, hogy:

$$\frac{m \cdot k}{n^2} \le a \cdot b < \frac{(m+1)\cdot(k+1)}{n^2}$$

Ezen kívül fennállnak az alábbi egyenlőtlenségek is:

$$m \cdot k \cdot t \le T < (m+1)\cdot(k+1)\cdot t$$
$$\frac{m \cdot k}{n^2} \le T < \frac{(m+1)\cdot(k+1)}{n^2}$$

Ezzel beláttuk, hogy $a \cdot b$ és T is az $\left[\frac{m \cdot k}{n^2}; \frac{(m+1)\cdot(k+1)}{n^2}\right)$ intervallumban van.

Ha meg tudjuk mutatni, hogy ennek az intervallumnak a hossza 0-hoz tart, abból már következik, hogy $T = a \cdot b$

Ezt az analízis eszközeivel tesszük meg.

Vizsgáljuk a következő határértéket:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(k+1)(m+1)}{n^2}-\frac{k\cdot m}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{k+m+1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{k}{n^2}+\frac{m}{n^2}+\frac{1}{n^2}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{k}{n^2}+\lim_{n\to\infty}\frac{m}{n^2}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$$

A fenti határérték valóban tart a 0-hoz, ha $n\to\infty$, mert:

$0<\frac{k}{n^2}=\frac{1}{n}\cdot\frac{k}{n}\le\frac{1}{n}\cdot b\to 0$, ha $n\to\infty$ (I. miatt)

$0<\frac{m}{n^2}=\frac{1}{n}\cdot\frac{m}{n}\le\frac{1}{n}\cdot a\to 0$, ha $n\to\infty$ (II. miatt)

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$ pedig magától értetődik.

Ezekből következik, hogy $T=a\cdot b$

Összehasonlítás

Itt Hajós György bizonyításától kissé eltérő bizonyítást adtam. Ennek oka elsősorban az, hogy megmutassam, hogy az iskolás bizonyítások nagyon közeli rokonságban állnak a precíz egyetemi bizonyítással. Az eltérés két dologban van:

- az iskolában csak természetes és racionális mérőszámú oldalakkal foglalkoznak,
- konkrét számokra történnek a levezetések, de olyan gondolatmenettel, ami tetszőlegesre igaz.

Ezeket a didaktika *prematematikai bizonyítások*nak nevezi.

Jordan-mérhető halmazok kapcsolata az integrálással

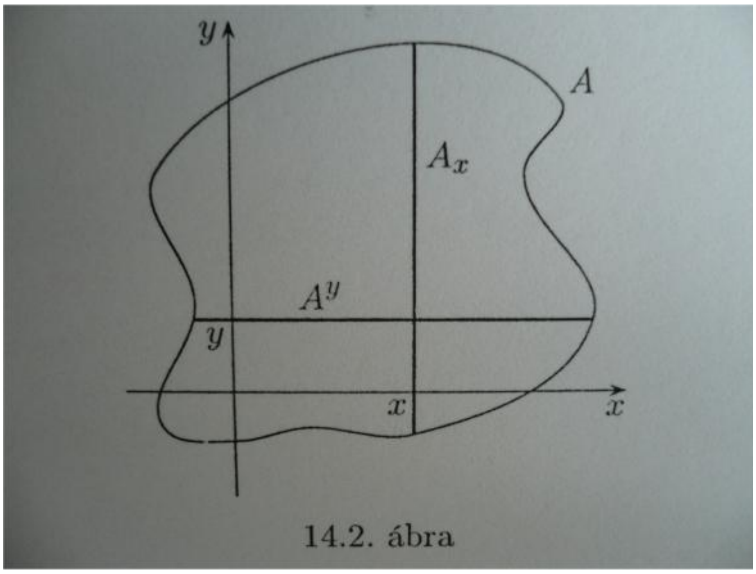
A következő definíciók és állítások a *Laczkovich Miklós – T. Sós Vera Analízis II.* című könyvből származnak.

Definíció

Az $A \subset \mathbf{R}^2$ halmaz szekcióinak nevezzük az

$$A_x = \{y \in R : (x,y) \in A\} \qquad \text{és} \qquad A^y = \{x \in R : (x,y) \in A\}$$

halmazokat minden $x, y \in R$-re.



A kép forrása: Laczkovich Miklós – T. Sós Vera Analízis II.

Tétel

Legyen $A \subset \mathbf{R}^2$ olyan mérhető halmaz, amelyre $A \subset [a,b] \times [c,d]$.

Ekkor az $x \mapsto k^1(A_x)$ és $x \mapsto b^1(A_x)$ függvények integrálhatók $[a,b]$-ben és

$$t^2(A) = \int_a^b k^1(A_x)dx = \int_a^b b^1(A_x)dx$$

Hasonlóan, az $y \mapsto k^1(A^y)$ és $y \mapsto b^1(A^y)$ függvények integrálhatóak $[c,d]$-ben és

$$t^2(A) = \int_c^d k^1(A^y)dy = \int_c^d b^1(A^y)dy$$

Állítás

Legyen *f* nemnegatív és korlátos függvény az $[a,b]$ intervallumon.

Az $A_f = \{(x,y) : x \in [a,b], 0 \le y \le f(x)\}$ halmaz akkor és csak akkor mérhető, ha *f* integrálható, és ekkor

$$t^2(A_f) = \int_a^b f dx$$

A kör területe

Definíció A kör azon pontok halmaza a síkon, melyek a sík egy meghatározott pontjától (középpont) azonos távolságra (sugár) vannak.

Tétel

$T_{kör} = r^2 \cdot \pi$

Bizonyítás

Legyen egy r sugarú kör középpontja az origó. Az I. és II. síknegyedbe eső félkörvonalat reprezentáló függvény az $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$. Az adott félkör területét határozott integrállal kiszámítjuk, mint az $f(x)$ függvény grafikonja alatti területet.

$$T = \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} dx = r \cdot \int_{-r}^{r} \sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}} dx = r^2 \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot \cos t dt = r^2 \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt =$$

$$= r^2 \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = r^2 \cdot \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{r^2 \cdot \pi}{2}$$

Mivel ez csak félkör területe, ezért a kör területe: $T_{kör} = r^2 \cdot \pi$

Terület az iskolában

Az alsó tagozaton a területfogalom tanítása területek összehasonlításával kezdődik.
Ha egy alakzat „belepakolható” mozgatással egy másik alakzatba, vagy mozgatással és darabolással egy másik alakzat belsejébe vihető, akkor a területe kisebb, mint a másik alakzaté. Ezeknek a feladatoknak a megoldása során a területnek a definíció 2) és 3) pontjában megfogalmazott, valamint az I. és II. pontokban kifejtett tulajdonságait építjük be nonverbálisan a gyerekek szemléletébe.

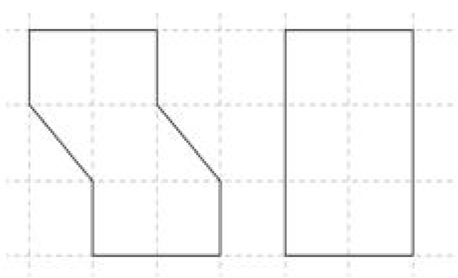
Általános iskola alsó tagozatának 4. osztályában ismerkednek meg a tanulók a terület fogalmával.

Természetesen szemléletes fogalmakkal dolgoznak, nem kész definíciók alapján, mint az egyetemen. Mégis a tanítási anyagokat elemezve azt találtam, hogy már az általános iskolai tanításban a precíz definíciók legtöbb eleme megtalálható, sokszor szinte ugyanúgy, mint az egyetemi anyagban.

Nézzünk példákat:
Először csak különböző síkidomok területének egymáshoz való viszonyát határozzák meg. Megvizsgálják, hogy két síkidom közül melyik területe a nagyobb.

Például kivágott síkidomokat próbálnak egymásba helyezni, így gyűjtik a tapasztalatokat. Két síkidom közül annak lesz kisebb a területe, amelyet „bele bírtak tenni a nagyobba”. Ekkor a területnek éppen azt a tulajdonságát használják, amit a II. megjegyzésben fogalmaztam meg. Ha a síkidomok egymásra helyezve éppen fedik egymást, akkor a területük egyenlő, ami az egybevágóság invariancia tulajdonságnak felel meg.

Ezt az ötletet viszont nem mindig lehet megvalósítani, két alakzat a legtöbbször nem egymásba helyezhető. Ilyenkor új módszert alkalmaznak, az átdarabolást. Az átdarabolásnál az additivitás tulajdonságot használják valójában, hiszen több részre darabolják az adott sokszöget, majd a részeket másképpen illesztik egymáshoz.



A téglalap területe

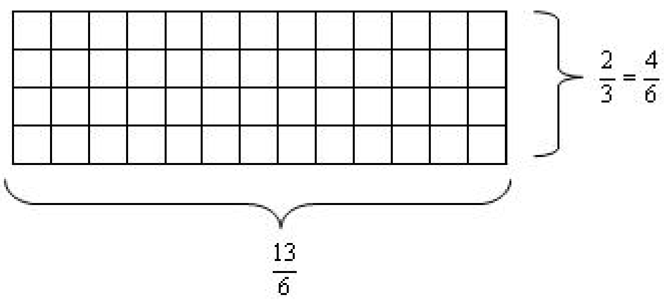
A 4. osztályosok a fent említett feladatban a téglalap területét úgy számolják ki, hogy választanak egy egységet, majd megszámolják, hogy az adott sokszögből hány található a téglalapban. Itt valójában a területmérő függvény két fontos tulajdonságát használják, az egybevágóság invarianciát és az additivitást. A cél az, hogy az eddig megtapasztalt tulajdonságok beépüljenek a gyerekek gondolkodásába.

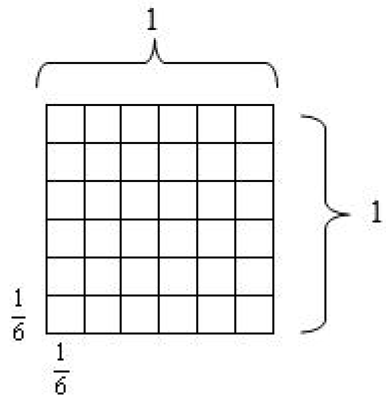
Az eddig ismertetett feladatokban, területek összehasonlításához nem volt szükség az egységnégyzet használatára. Erre akkor van szükség, ha bizonyos alakzatok területének számítására képleteket akarunk nyerni. Ekkor egységnégyzeteket kell használnunk.

Az általános iskolában már az alsó tagozaton a tanulók megismerik a téglalap területképletét, vagyis, hogy egy a és b oldalú téglalap területe $a \cdot b$. Először olyan téglalapok területét számítják, ahol a és b egész számok. Kezdetekben olyan feladatokat kapnak, hogy egységnégyzetekkel fedjék le a téglalapot, majd ezek megszámolásával állapítsák meg a területet. Egy idő után – ami gyerekenként nagyon különböző lehet – eljutnak ahhoz a felismeréshez, hogy elég azt megszámolni, hogy az egyik és a másik oldal mentén hány választott egységhosszúságú négyzet fér el, ezt követően ezek összeszorzásából adódik a téglalap területe.

Természetesen az állítás igaz nem csak egész egység oldalú téglalapok esetén is. Általános iskolában konkrét racionális a és b esetén is bizonyítják az állítást. Nézzünk erre egy példát!

Egy $a = \frac{13}{6}$ és $b = \frac{2}{3}$ oldalú téglalap területét úgy határozzák meg, hogy közös nevezőre hozzák a törteket. Így kapnak egy olyan értéket, melynek mindkét oldal egész számszorosa, tehát ennek megfelelően a téglalapot is és az egységnégyzetet is fel tudják darabolni egybevágó kis négyzetekre.





Ebben a példában $\frac{1}{6}$ oldalhosszúságú négyzetekre bontják a téglalapot, majd meghatározzák, hogy az egységnégyzetet hány $\frac{1}{6}$ oldalhosszúságú négyzettel lehet lefedni (hézagmentesen, egyrétűen). Jól látható, hogy 36 darab ilyen négyzetre van szükség, tehát egy ilyen kis négyzet területe $\frac{1}{36}$. A terület meghatározásához utolsó lépés, hogy az eredeti téglalapban hány ilyen származtatott egységnégyzet található? Ez a szám az 52, vagyis ennyi egységnégyzet helyezhető el a téglalapban.

Tehát a téglalap területe: $52 \cdot \frac{1}{36} = \frac{13}{9}$, ami éppen $\frac{2}{3} \cdot \frac{13}{6}$ azaz az oldalak szorzata.

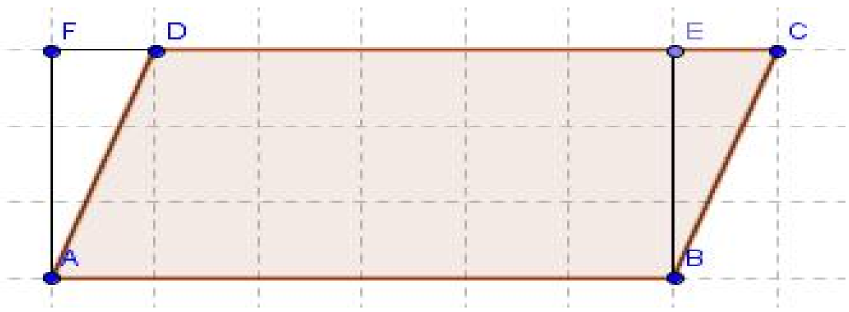
A tanulók a közoktatásban már találkoznak az irracionális számokkal, dolgoznak velük, de a definíciókat, tételeket csak az egyetem teszi precízzé. Így van ez a téglalap területével is, ha *a* és *b* irracionálisak. (A tetszőleges oldalhosszakra vonatkozó bizonyítást korábban már ismertettem.)

A további nevezetes területek esetében olyan szoros hasonlóság figyelhető meg, hogy teljesen párhuzamosan tárgyalható az általános- és középiskolás, illetve az egyetemi felépítés.

A parallelogramma területe

Parallelogrammának nevezzük az olyan négyszögeket, melyek szemközti oldalai párhuzamosak. Természetesen a téglalap és a négyzet is parallelogramma.

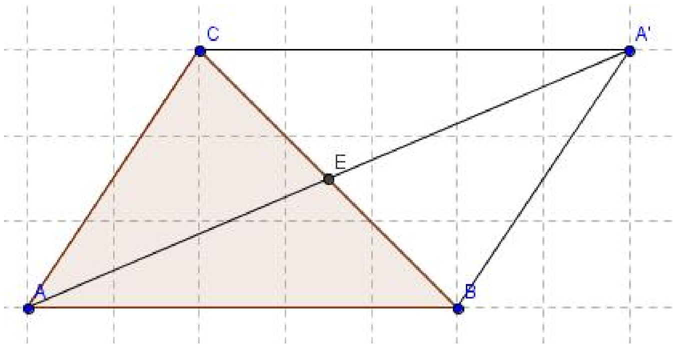
A parallelogramma területének meghatározásához felhasználjuk a téglalapokra kapott összefüggéseket és a korábban már ismertetett átdarabolási módszert.



Az *ABCD* parallelogramma *A* és *B* csúcsából merőlegeseket állítunk a szemközti oldalegyenesre. Az így kapott *BCE* háromszög és *ADF* háromszög egybevágó, mert két oldal és a közbezárt szög megegyezik. Az *ABCD* parallelogrammából a *BCE* háromszöget eltávolítva és áthelyezve az *ADF* helyére egy *ABEF* téglalapot kapunk. Jól látható, hogy az *ABCD* parallelogramma területe megegyezik az *ABEF* téglalap területével.
A téglalap területe az előzőekben tárgyaltak alapján a téglalap két szomszédos oldalának a szorzata. Az *AF* szakasz hossza éppen az *ABCD* parallelogramma *AB* oldalhoz tartozó magassága, tehát a parallelogramma területe egyenlő bármelyik oldalának és az ahhoz tartozó magasságnak a szorzatával.

A háromszög területe

Az általános háromszög területe visszavezethető a parallelogramma területére. Tükrözzük az *ABC* háromszöget a *BC* oldal felezőpontjára, ekkor egy *ABA'C* parallelogrammát kapunk. A tükrözés és az egybevágóság miatt a kapott parallelogramma területe kétszerese a kiinduló háromszög területének.



A megismert módszerekkel az eddig nem említett sokszögek területét is megkaphatjuk, visszavezetve az előzőekre. (Minden sokszög feldarabolható háromszögekre.)

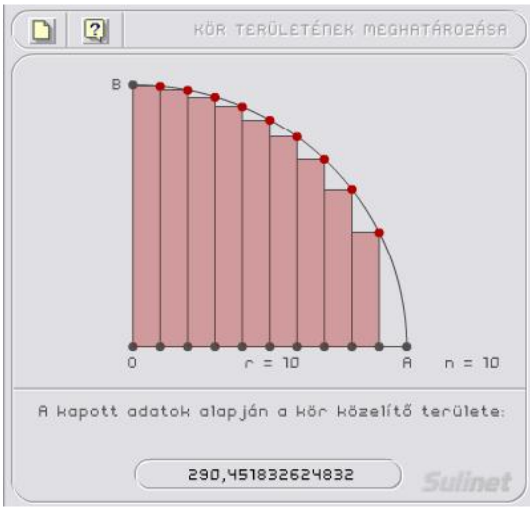
A kör területe

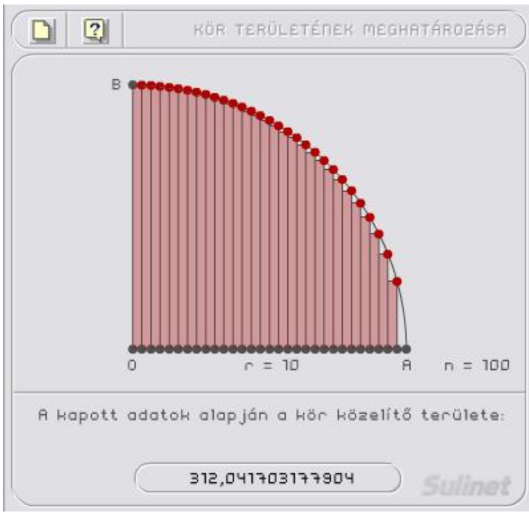
A kör területének képletét a közoktatásban természetesen nem integrállal bizonyítják. Először 7. osztályban találkoznak a diákok a kör területével. Rávezető feladatokat oldanak meg, a négyzetrácsos füzetbe, illetve milliméterpapírra köröket rajzolnak és megpróbálják megállapítani a területét. Hamar rájönnek, hogy a kör területének pontos származtatása nem könnyű feladat az eddig tanult módszerekkel vagy ismeret birtokában.

A minél pontosabb eredményhez különböző módon próbálnak eljutni, az egyik ilyen szemlélet a közelítés. Tekintsünk egy origó középpontú, egységnyi sugarú kört a szokásos derékszögű, Descartes-koordinátarendszerben. Az egyszerűség kedvéért csak az I. síknegyedet vizsgáljuk (a többi hasonlóan történik).

A kör első síknegyedbe eső részére felső becslést kapunk, ha olyan téglalap területeinek összegét tekintjük, amelyek tartalmazzák a kör megfelelő részét. Hasonlóan, a beírt téglalapok területeinek összege alsó becslést ad. Az így kapott összegeket nevezzük felső-, ill. alsó közelítő összegnek. Minél jobban finomítjuk a beosztást, kisebb téglalapokat használunk, annál pontosabb értéket kapunk. A Sulineten található számítógépes program segítségével jól szemléltethető az alsó becslés, majd a kör területének becslése.

Minta:
Adott (például) egy 10 cm sugarú kör, az I. síknegyedet ábrázolja a program.





Az első ábrán az $\overline{OA}$ szakaszt 10 egyenlő részre osztottuk, míg a másodikon 100 egyenlő részre. A kör területére kapott eredmény sokkal jobban közelíti a pontos értéket, ha több részre osztjuk az adott szakaszt.

A közelítéshez szorosan kapcsolódik a határozott integrál fogalma, amivel a tanulók esetleg már a középiskolás fakultáción, az emelt szintű érettségire való felkészülés esetén vagy legkésőbb az egyetemen megismerkednek.
Hajós György a kör területképletét nem integrálással, hanem elemi úton igazolja. Nézzük meg ennek főbb lépéseit bizonyítás nélkül:

1. Először bebizonyítja, hogy „a körnek van területe, s hogy a növekvő oldalszámú beírt és körülírt szabályos sokszögek területe a kör területéhez tart”.
2. Ezután egy általa korábban már bizonyított állítást használ: „a körülírt szabályos sokszög területe a kerületének és a körsugár felének szorzata”. Tudjuk, hogy „n növekedtével ez a kerület a kör kerületéhez tart, a körülírt szabályos sokszög területének határértéke, azaz a kör területe a kör kerületének és a sugár felének szorzata”.

Tehát, ha már tudjuk a kör kerületének képletét, akkor a terület ennek $\frac{r}{2}$-szerese, azaz

$$T = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot \frac{r}{2} = r^2 \cdot \pi$$

A középiskolai matematika tankönyvekben megtaláljuk ennek a gondolatmenetnek a megfelelőjét. Itt bemutatok egy részletet a Czapáry-Gyapjas szerzőpáros tankönyvéből:

„Körbe írt szabályos sokszögön olyan konvex sokszöget értünk, amelynek csúcsai a körre illeszkednek, az oldalai (és ezért a szögei is) egyenlők. Kör köré írt szabályos sokszögön olyan konvex sokszöget értünk, amelynek oldalai és a szögei egyenlők, az oldalak a kört (az oldalak felezőpontjainál) érintik. k_n-nel és t_n-nel jelölve a körbe írható n oldalú szabályos sokszög kerületét, illetve területét, K_n-nel és T_n-nel jelölve a kör köré írható n oldalú szabályos sokszög kerületét, illetve területét, minden n-re igazak a következő kettős egyenlőtlenségek:

$$k_n < K < K_n$$

és

$$t_n < T < T_n,$$

ahol *K, T* a kör kerületének és a területének mérőszáma.
A szemlélet alapján elfogadjuk, hogy ha a beírt és a körülírt szabályos sokszögek oldalszámát növeljük, akkor a sokszögek kerületei a körök hosszához, a területeik a kör területéhez „egyre közelebb kerülnek”. Bebizonyítható, hogy a kör (*K)* kerületének és átmérőjének (2*r*) hányadosa állandó. Ezt az állandót π-vel jelöljük. $\frac{K}{2r} = \pi \Leftrightarrow K = 2r\pi$.

A kör területe pedig $T = r^2\pi$.”

2. fejezet: Térfogatfogalom- és számítás

Térfogat az iskolában

Az előző fejezetben a területtel és a hozzá kapcsolódó tudnivalókkal foglalkoztam. A továbbiakban a térfogat fogalmával foglalkozom. A terület és térfogat fogalmának kiépítése nagyon hasonlóan zajlik, nagyon sok területen párhuzamosan végezhető. Ebben a fejezetben nem konkrétan a térfogat jellemzőit tekintem át, hanem rávilágítok a közös pontokra és összehasonlítást végzek. Ezzel azért is érdemes szerintem foglalkozni, mert az iskolai tanítás ezeket az analógiákat nem eléggé használja ki a fogalomépítésben.

Ahogy a területnél a területmérő függvény bevezetése adta a tárgyalási alapot, most ez a szerep a térfogatmérő függvényé lesz. Ezt a definíciót Hajós György a következőképpen fogalmazza meg:

Definíció Minden poliéderhez hozzárendelhetünk egy számot, amelyet térfogatnak nevezünk, és amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

1) Minden poliéder térfogata pozitív szám.
2) Egybevágó poliéderek térfogata egyenlő.
3) Ha egy poliédert két poliéderre bontunk, e kettő térfogatának összege az eredeti poliéder térfogatával egyenlő.
4) Az egységkocka térfogata 1.

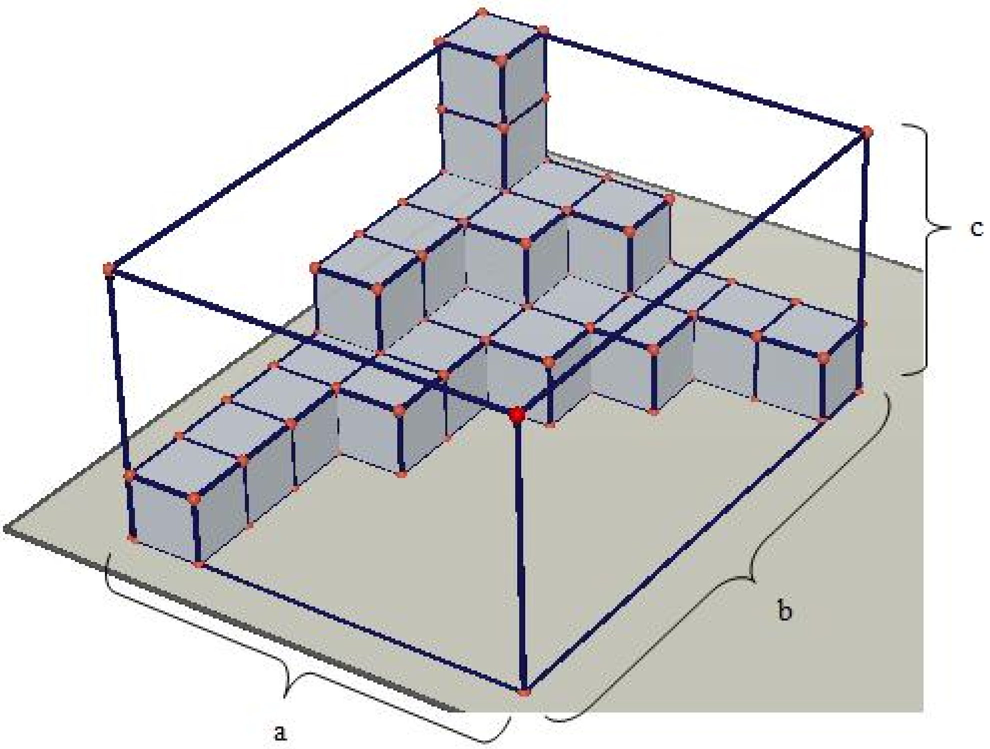
Látható, hogy a területmérő- és a térfogatmérő függvény definíciója teljesen analóg. A terület és a térfogat is pozitív, mindkét helyen fellép az egybevágóság invariancia, a térfogatnál is ugyanúgy érvényesül az additivitás nem csak két poliéder, hanem n poliéder esetén is. Az egységnégyzet kétdimenziós síkbeli alakzat háromdimenziós térbeli megfelelője az egységkocka. Az egységkocka bevezetésével megágyazunk a számításoknak, hogy később képletek útján meg tudjuk állapitani poliéderek térfogatát.

Téglatest és kocka

Általános iskolában, ahogy a terület esetében a téglalappal és a négyzettel ismerkednek meg először a tanulók, a térfogattal foglalkozó órákon a téglatest és a kocka tulajdonságai kerülnek előtérbe. 5. osztályban a felszín bevezetése alkalmával a diákok már találkoztak a téglatesttel, a kockával. Megvizsgálták ezeket a testeket, megnézték, hogy hány lapjuk, élük van, milyen tulajdonságokkal rendelkeznek. Kockából és téglatestből építettek különböző testeket és ez a folyamat 6. osztályban is szerepet kap. Fontos párhuzamot vonni a terület- és a térfogatszámítás között. Míg a területnél az egységnégyzettel való lefedés segítségével állapítottuk meg a területet, addig a térfogatnál az egységkockával való kirakással kapjuk szemléletesen a térfogatot.

Megtanulják, hogyan lehet kiszámolni a téglatest és a kocka térfogatát. Ennek bizonyítása mind az iskolában, mind az egyetemen a síkbeli esettel teljesen analóg módon történik.

Tétel $V_{téglatest} = a \cdot b \cdot c$



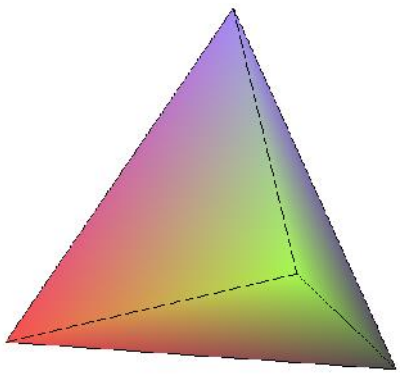
A kocka a téglatest speciális esete, ugyanis a kocka esetében $a = b = c$.

Tétel $V_{kocka} = a^3$

Összehasonlítva a téglatest és kocka térfogatára kapott képleteket a téglalap és a négyzet területképleteivel ismét feltűnik az analógia – míg két dimenzióban két oldalhosszúságot szorzunk össze, három dimenzióban hármat, két dimenzióban négyzetre emelünk, három dimenzióban köbre. A képletek bizonyítása is mind az iskolában, mind az egyetemen a síkbeli esettel teljesen analóg módon történik.

További analógiák

Pólya György *Indukció és Analógia* című könyvében az analógiáról a következőt állítja: „Két rendszer analóg, ha megfelelő részeik világosan megfogalmazható kapcsolataikban megegyeznek.” Az előzőekben már szó esett arról, hogy a sík és a tér, ezzel együtt pedig a terület és a térfogat analóg, sok hasonlóság mutatkozik. Pólya György gondolatait követve most további analógiákra mutatok rá.



Vizsgáljuk meg a háromszög és a tetraéder viszonyát aszerint, hogy ezeket a korlátos alakzatokat legkevesebb hány „elem zárja be”. Tudjuk, hogy a síkon minimum három egyenesre van szükségünk ahhoz, hogy korlátos alakzatot kapjunk, kevesebb egyenes esetén erre nincs esélyünk. Három általános helyzetű egyenes viszont már meghatároz(hat) egy korlátos síkidomot, egy háromszöget. A térben hasonlóan lehet gondolkodni: minimum négy sík szükséges egy korlátos alakzat előállításához, kevesebb nem elegendő. Négy sík már bezárhat egy korlátos alakzatot, egy tetraédert. Egy háromszöget és egy gúlát is analógnak tekinthetünk. „Vegyünk egy egyenes szakaszt, illetve egy sokszöget. Kössük össze a szakasz minden pontját egy, a szakasz egyenesén kívül levő ponttal, így egy háromszöget kapunk. Ha pedig a sokszög síkján kívül rögzítünk egy pontot, és az adott sokszög minden pontját összekötjük ezzel a ponttal, akkor gúlát kapunk.”

Ez az analógia a terület illetve térfogatképletben is megmutatkozik. A háromszög területe az egyik oldal és az ahhoz tartozó magasság szorzatának a fele, míg a gúla térfogata az alap sokszög szorozva a gúla magasságával és ennek a harmada.

A tetraéder térfogatát $V = a \cdot \frac{m}{2} \cdot \frac{M}{3} = A \cdot \frac{M}{3}$ képlettel tudjuk kiszámolni, ahol m a síkidom magasságát, M a test magasságát, A az alaplapnak választott háromszög területét jelöli.

Analóg lehet egy parallelogramma és egy hasáb, teljen hasonló megfontolással, mint az előbb a háromszög és a gúla esetében. „Mozgassuk a szakaszt, ill. a sokszöget önmagával párhuzamosan, olyan irányban természetesen, hogy a szakasz egyeneséből, illetve a sokszög síkjából kilépjünk, így egy parallelogrammát, ill. egy hasábot kapunk.” Ez az analógia is tükröződik a terület illetve térfogatképletben. A parallelogramma területe az alap és a hozzá tartozó magasság szorzata, a hasáb térfogata az alapalakzat területének és a hasáb magasságának szorzata.

Az előző fejezetben láttuk, hogy minden sokszög feldarabolható háromszögekre. Ezzel analóg állítás a térben:
Minden poliéder tetraéderekre darabolható fel.

Mivel a tetraéder térfogatát már ismerjük, ezért minden poliéder térfogatát ki tudjuk számolni.

Néhány ismert test térfogata

A Hajós György által leírtak szerint a poliéderek esetében használt térfogat fogalmát kiterjeszthetjük. Ezt olyan példákon keresztül mutatom be, melyek már a közoktatásban előfordulnak, ilyen például a henger, a kúp, a gömb. Ezen testek térfogata az összefoglaló táblázatban megtalálható.
Mint az előbb – Pólya György megfogalmazásában – láttuk, a kúp, akár a gúla, a háromszög analógja: Ha egy kör pontjait összekötöm egy, a kör síkjára nem illeszkedő ponttal, kúpot kapok. Ezzel összhangban van az, hogy a kúp és a gúla térfogatképlete teljesen megegyezik. És hasonlóan a henger, akár a hasáb, a parallelogramma analógja, térfogatképleteik is egyformák.

Ezekkel az analógiákkal függ össze az is, hogy a kör kerülete és területe között fennálló összefüggéssel (a kör területe a kerületének $r/2$-szerese) analóg módon, a gömb térfogata a gömb felszínéből $r/3$-mal való szorzással kapható.

A következő táblázat szépen mutatja a sík és a tér alakzatainak, ezek területének és térfogatának szoros analógiáját. (Jelölési konvenciók: T az alapterületet, m a síkidom magasságát, M a test magasságát, r a sugarat jelöli.)

<table>
<tr><th></th><th>Két dimenzió</th><th>Három dimenzió</th></tr>
<tr><td rowspan="10">Alakzatok és mértékek</td><td>sík</td><td>tér</td></tr>
<tr><td>terület</td><td>térfogat</td></tr>
<tr><td>Téglalap
$T = a \cdot b$</td><td>Téglatest
$V = a \cdot b \cdot c$</td></tr>
<tr><td>Négyzet
$T = a^2$</td><td>Kocka
$V = a^3$</td></tr>
<tr><td>Háromszög
$T = a \cdot \frac{m}{2}$</td><td>Tetraéder
$V = a \cdot \frac{m}{2} \cdot \frac{M}{3}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">S sokszög területe T</td><td>Hasáb
$V = T \cdot M$</td></tr>
<tr><td>Gúla
$V = T \cdot \frac{M}{3}$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Kör
$T = r^2 \cdot \pi$</td><td>Henger
$V = r^2 \cdot \pi \cdot M$</td></tr>
<tr><td>Kúp
$V = r^2 \cdot \pi \cdot \frac{M}{3}$</td></tr>
<tr><td>Gömb
$V = \frac{4 \cdot \pi}{3} r^3$</td></tr>
</table>

Térfogatszámítás integrállal

Tétel

Ha *f* nemnegatív és integrálható az $[a,b]$ intervallumon, akkor az *f* által meghatározott forgástest mérhető, és a térfogata

$$\pi \cdot \int_a^b f^2(x)dx$$

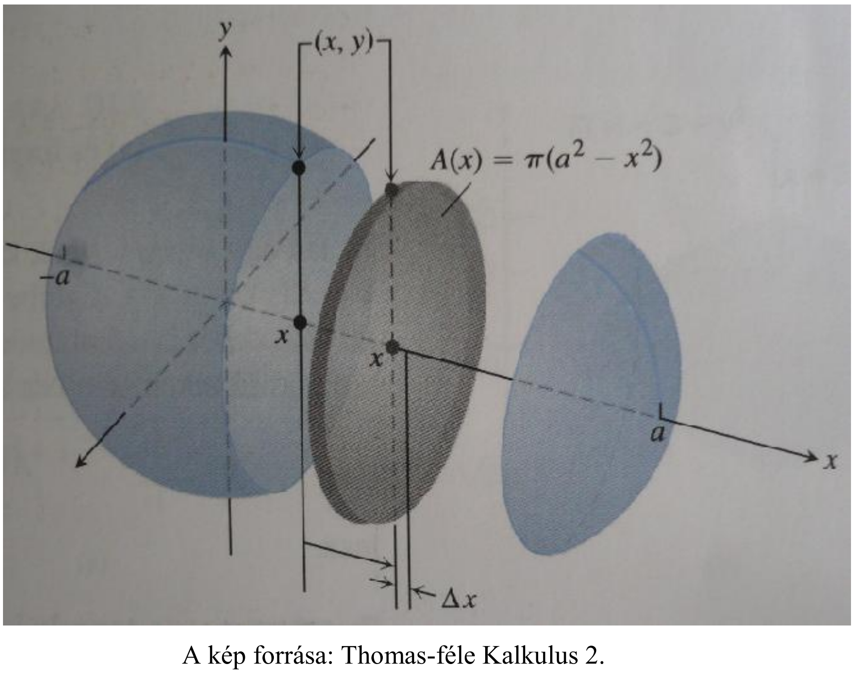
A gömb térfogata integrálással

Forgassuk meg az $x^2 + y^2 = r^2$ kört az *x*-tengely körül! Az ábra alapján a gömböt az *x*-tengelyre merőleges síkokkal elvágjuk. Ekkor a $-r$ és r között fekvő x pontot tartalmazó síkmetszet területe:

$$\pi \cdot y^2 = \pi \cdot \left(r^2 - x^2\right)$$

A térfogat:

$$\int_{-r}^{r} \pi \cdot \left(r^2 - x^2\right)dx = \pi \cdot \left[r^2 \cdot x - \frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{r} = \pi \cdot \left(\left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right) - \left(-r^3 - \frac{-r^3}{3}\right)\right) = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi$$



A kép forrása: Thomas-féle Kalkulus 2.

Megjegyzés: a könyv a gömb sugarára nem az *r*, hanem az *a* jelölést használja.

Feladat

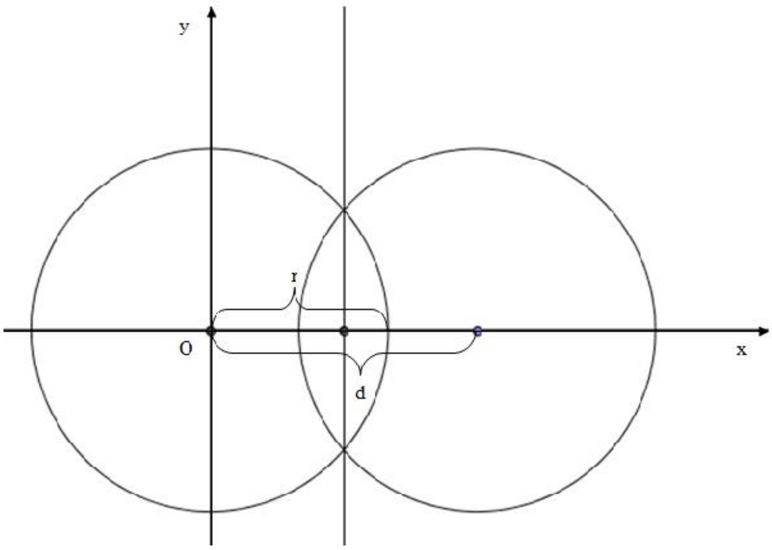
Számítsuk ki két egymástól *d* távolságra lévő *r* sugarú gömb metszetének a térfogatát!

Megoldás

Az előzőekhez hasonló módon az $x^2 + y^2 = r^2$ kört forgatjuk meg az *x*-tengely körül.

Mivel csak a két gömb metszetének térfogatára vagyunk kíváncsiak, ezért $\frac{d}{2}$-től *r*-ig integrálunk.

Az alábbi ábra segíti a megértést.



$$\int_{d/2}^{r} \pi \cdot (r^2 - x^2)dx = \pi \cdot \left[r^2 \cdot x - \frac{x^3}{3} \right]_{d/2}^{r} = \pi \cdot \left(\left(r^3 - \frac{r^3}{3} \right) - \left(r^2 \cdot \frac{d}{2} - \frac{\frac{d^3}{8}}{3} \right) \right) =$$

$$= \pi \cdot \left(r^3 - \frac{r^3}{3} - r^2 \cdot \frac{d}{2} + \frac{d^3}{24} \right)$$

Ekkor persze csak a metszet térfogatának a felét kaptuk meg, ezért ezt meg kell szorozni 2-vel.

A két egymástól *d* távolságra lévő *r* sugarú gömb metszetének a térfogata tehát:

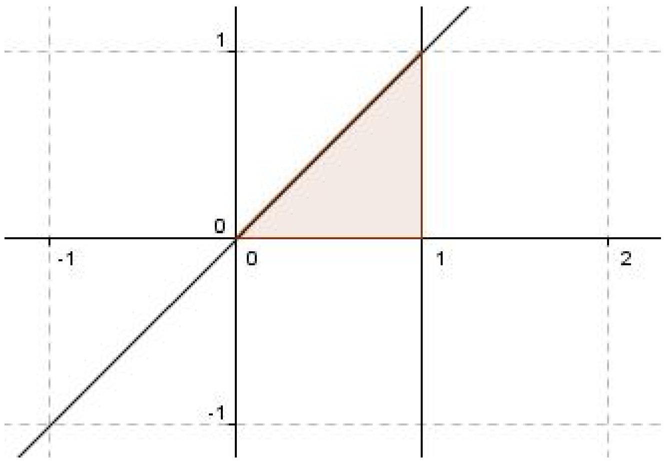
$$V_{metszet} = 2 \cdot \pi \cdot \left(r^3 - \frac{r^3}{3} - r^2 \cdot \frac{d}{2} + \frac{d^3}{24} \right) = \frac{\pi \cdot \left(16 \cdot r^3 - 12 \cdot r^2 \cdot d + d^3 \right)}{12}$$

Térfogatszámítással kapcsolatos feladat megoldása kettős integrállal

A következő feladat részben a *Thomas-féle Kalkulus 3.* című könyv feladata alapján készült.

Feladat:

Határozzuk meg annak a térbeli tartománynak a térfogatát, amelyet a $z = x^2 + y^2$ paraboloid, a $z = 0$, az $y = 0$, az $x = 1$, az $y = x$ síkok határolnak. A kérdéses térbeli tartománynak egy xy-beli síkmetszete az ábrán látható.



Megoldás

A feladatra két megoldást is adok, ami lényegében csak abban különbözik, hogy más az integrálás sorrendje, aminek azonban fontos szerepe lesz a későbbiekben.

1. megoldás

Az első megoldásban először *y* szerint, majd *x* szerint integrálok. Az ilyen típusú feladatoknál első lépésként meg kell határozni az integrálási határokat. Ez az ábra alapján könnyen megtehető.

$$0 \le x \le 1$$
$$0 \le y \le x$$

$$\int_0^1 \left(\int_0^x (x^2 + y^2)\, dy \right) dx = \int_0^1 \left(\left[x^2 \cdot y + \frac{y^3}{3} \right]_0^x \right) dx = \int_0^1 \left(x^3 + \frac{x^3}{3} \right) dx = \left[\frac{4}{3} \cdot \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

2. megoldás

A második megoldás során először x szerint, azután y szerint integrálok. Itt is első lépésként a határokat kell megadni.

$$y \le x \le 1$$
$$0 \le y \le 1$$

$$\int_0^1 \left(\int_y^1 \left(x^2 + y^2\right) dx \right) dy = \int_0^1 \left(\left[\frac{x^3}{3} + y^2 \cdot x \right]_y^1 \right) dy = \int_0^1 \left(\left(\frac{1}{3} + y^2 \right) - \left(\frac{y^3}{3} + y^3 \right) \right) dy =$$

$$= \left[\frac{1}{3} \cdot y + \frac{y^3}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{y^4}{4} - \frac{y^4}{4} \right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{12} - \frac{1}{4} = \frac{8-1-3}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Kiegészítés a feladat megoldásához

A kiszámolt értékeket ellenőrizhetjük például a Maple programmal, az alábbi utasítások kiadása után a program kiszámolja az integrál értékét.

```
> Int(Int(x^2 + y^2, y = 0..x), x = 0..1) = int(int(x^2 + y^2, y = 0..x), x = 0..1);
```

$$\int_0^1 \int_0^x \left(x^2 + y^2\right) dy\, dx = \frac{1}{3}$$

```
> Int(Int(x^2 + y^2, x = y..1), y = 0..1) = int(int(x^2 + y^2, x = y..1), y = 0..1);
```

$$\int_0^1 \int_y^1 \left(x^2 + y^2\right) dx\, dy = \frac{1}{3}$$

Látható, hogy az x és y szerinti integrálás sorrendjének felcserélése ebben az esetben ugyanazt az integrál értéket eredményezi. Egy bonyolult integrál kiszámítása során sokszor kényelmes eszköznek bizonyul, ha az integrál sorrendjét felcserélhetjük. A következő tétel arról szól, hogy ez mikor tehető meg.

A T halmazon Riemann-integrálható függvények halmazát jelölje $R(T)$.

Fubini tétel

Legyen $f : R^2 \to R$, $[a,b]$ és $[c,d]$ korlátos és zárt intervallumok, jelölje T az $[a,b]\times[c,d]$ téglalapot.

1) Tegyük fel, hogy $f \in R(T)$ és $\forall x \in [a,b]$ esetén az $y \mapsto f(x,y)$, $y \in [c,d]$ ún. „szekciófüggvény" Riemann-integrálható $[c,d]$-n.

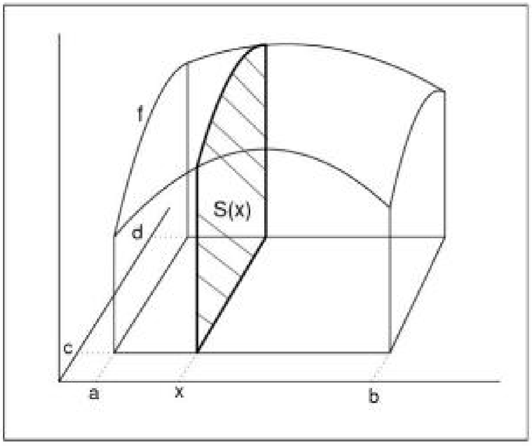
Ekkor

$$\int_T f = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx$$

2) Tegyük fel, hogy $f \in R(T)$ és $\forall y \in [c,d]$ esetén az $x \mapsto f(x,y)$, $x \in [a,b]$ ún. „szekciófüggvény" Riemann-integrálható $[a,b]$-n.

Ekkor

$$\int_T f = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy$$



6.3. ábra. Egy $x \in [a,b]$ ponthoz tartozó szekciófüggvény

Az ábra forrása:
http://www.cs.elte.hu/~seszter/oktatas/2010_11_1/BSc_mattanar_ea/analizis_III_jegyzet2010.pdf

Következmény

Ha f-re mind az 1), mind a 2) feltételei teljesülnek, akkor

$$\int_T f = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy$$

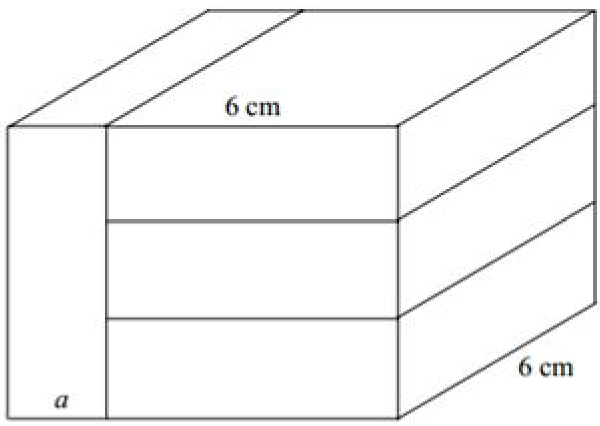
3. fejezet: Vegyes feladatok a terület és a térfogatszámítás témaköréből. Központi felvételi-, érettségi-, KÖMAL feladatok

A terület és a térfogat tárgyalása után ebben a részben feladatok és azok megoldásai következnek.
Általános iskolai, területszámításos feladatokra már mutattam példákat, itt most középiskolai, felvételi, érettségi és versenyszintű, elsősorban térfogatszámítással kapcsolatos feladatokat gyűjtöttem össze.
A feladatok összeállításában egyrészt a változatosságra törekedtem, másrészt megpróbáltam olyan példákat válogatni, melyekhez tudtam analóg feladatot készíteni.
A feladatsor és a közölt megoldások világosan mutatják, hogy milyen nagy segítség lehet a térbeli feladatok megoldásában, ha képesek vagyunk analóg síkbeli probléma megfogalmazására.

Térfogatszámítás a központi felvételi feladatok között

1. feladat

Négy darab egybevágó négyzetes hasáb összeragasztásával az ábrán látható téglatestet építettük meg.



a) Hány centiméter az a-val jelölt szakasz hossza?

b)–d) Hány köbcentiméter ennek az összeragasztott téglatestnek a térfogata?
Írd le a számolás menetét is!

Központi felvételi feladat, 2013. január

Megoldás:

a) Mivel négy darab egybevágó négyzetes hasábról szól a feladat, ezért az adatokat tekintve mindegy, hogy melyik hasábról beszélünk. Látható, hogy a hasábok alapját egy 6 *cm* x 6 *cm* alapterületű négyzet adja. A kérdéses a szakasz hossza lényegében nem mást, mint egy hasáb magassága.

Az ábrán látható módon három téglatestet hézagmentesen és pontosan egymásra illesztve pontosan akkora az együttes magasság, mint egy téglatest alapterületét adó négyzet oldala, azaz 6 *cm*. Tehát a keresett *a* oldal *2 cm*.

b) Először számoljuk ki egy hasáb térfogatát. Ezt úgy kapjuk, hogy az alapterületet megszorozzuk a magassággal, vagyis esetünkben $72\ cm^3$. Mivel négy ilyen hasáb alkotja az ábrán látható testet és a hasábok egybevágók, ezért az összeragasztott test térfogata $288\ cm^3$.

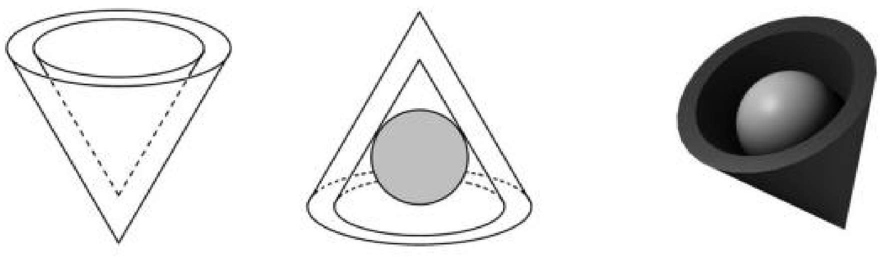
Sokféle – ezzel analóg – síkbeli feladat létezik, melyek könnyebbek lehetnek, ezáltal a gyengébb térlátással rendelkező diákok számára segítséget nyújthatnak.

Térfogatszámítás a középszintű érettségin

2. feladat

Az egyik csokoládégyárban egy újfajta, kúp alakú desszertet gyártanak. A desszert csokoládéból készült váza olyan, mint egy tölcsér. (Lásd ábra.)

A külső és belső kúp hasonló, a hasonlóság aránya $\frac{6}{5}$. A kisebb kúp adatai: alapkörének sugara 1 cm, magassága 2,5 cm hosszú.



a) Hány cm^3 csokoládét tartalmaz egy ilyen csokoládéváz? A választ tizedre kerekítve adja meg!

Az elkészült csokoládéváz üreges belsejébe marcipángömböt helyeznek, ezután egy csokoládéból készült vékony körlemezzel lezárják a kúpot.

b) Hány cm a sugara a lehető legnagyobb méretű ilyen marcipángömbnek? A választ tizedre kerekítve adja meg!

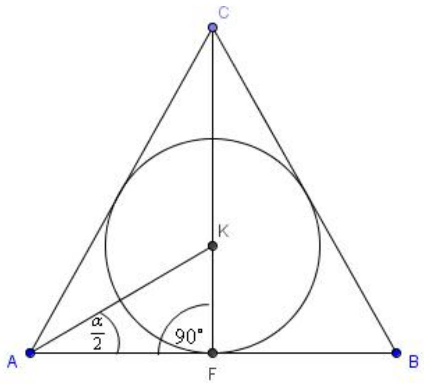
Középszintű érettségi feladat, 2010. május

Megoldás

a) Számoljuk ki először a kisebb kúp térfogatát! Behelyettesítünk a térfogatképletbe:

$V_{kisebb} = \frac{1^2 \cdot \pi \cdot 2,5}{3} \approx 2,62\ cm^3$. Mivel hasonló testek térfogatának aránya a hasonlóság arányának a köbe, ezért $V_{nagyobb} = \left(\frac{6}{5}\right)^3 \cdot V_{kisebb} \approx 4,52\ cm^3$. Egy ilyen csokoládéváz tehát $V_{nagyobb} - V_{kisebb} \approx 1,9\ cm^3$ csokoládét tartalmaz.

b) A legnagyobb sugarú marcipángömb a kisebb kúp beírt gömbje. Az adatok alapján az ábra jelöléseit használva:



$$tg\alpha = \frac{FC}{AF} = \frac{2,5}{1} = 2,5$$

$$\alpha \approx 68,2^\circ$$

$$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{FK}{AF}$$

$$FK \approx 0,68\ cm$$

A lehető legnagyobb marcipángömb sugara tizedre kerekítve $0,7\ cm$.

Láthatjuk, hogy a térbeli feladatban a gömb sugarának kiszámítása éppen az analóg síkbeli feladat megoldásával kapható meg.

Térfogatszámítás az emelt szintű érettségin

3. feladat

Egy forgáskúp nyílásszöge 90°, magassága 6 cm.

a) Számítsa ki a kúp térfogatát (cm^3-ben) és felszínét (cm^2-ben)!

b) A kúp alaplapjával párhuzamos síkkal kettévágjuk a kúpot. Mekkora a keletkező csonkakúp térfogata (cm^3-ben), ha a metsző sík átmegy a kúp beírt gömbjének középpontján?

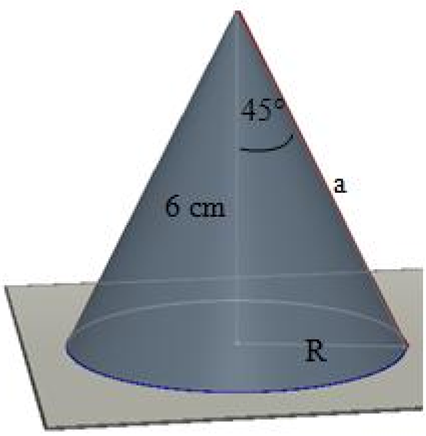
Válaszait egészre kerekítve adja meg!

Emelt szintű érettségi feladat, 2012. május

Megoldás

A térbeli feladat megoldása lényegében az analóg síkbeli feladat megoldásán alapul.

a) A kúp felszínének és a térfogatának meghatározásához a megadott adatokon kívül tudnunk kell az alapkör sugarát. Ezt az ábrán látható derékszögű háromszögből ki tudjuk számolni.



$$tg45^\circ = \frac{R}{6}$$

$$R = 6\ cm$$

Az alkotójának hossza Pitagorasz-tétellel számolható:

$$6^2 + 6^2 = a^2$$

$$a = \sqrt{36 \cdot 2} = 6 \cdot \sqrt{2}\ cm$$

A kúp térfogata:

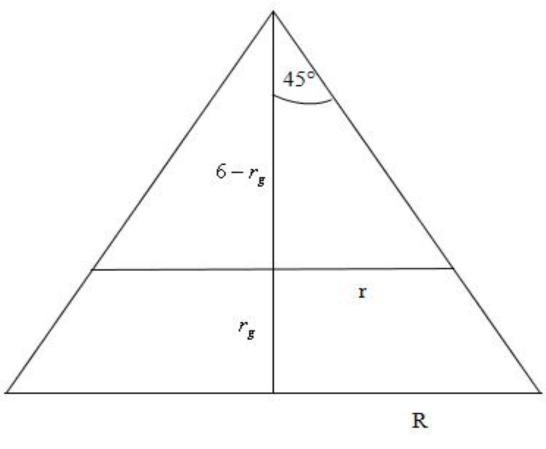
$$V = \frac{6^2 \cdot \pi \cdot 6}{3} = 72 \cdot \pi \approx 226\ cm^3$$

A kúp felszíne:

$$A = \pi \cdot R \cdot (R + a) = \pi \cdot 6 \cdot (6 + 6 \cdot \sqrt{2}) \approx 273\ cm^2$$

b) Tudjuk, hogy a kúpba írható gömb sugarát az alábbi összefüggéssel megkaphatjuk (ahol értelemszerűen *A* a felszínt, *V* a térfogatot jelöli): $r_g = \frac{3 \cdot V}{A} \approx 2{,}48\ \ cm$

A csonkakúp térfogatának meghatározásához szükséges hiányzó adatokat az ábrán látható síkmetszetet tekintve számolhatjuk ki:



$$tg45^\circ = \frac{r}{6 - r_g}$$

$$r \approx 3{,}52\ cm$$

A keresett csonkakúp térfogata:

$$V_{csk} = \frac{\pi \cdot r_g}{3} \cdot (R^2 + r^2 + R \cdot r) \approx \frac{\pi \cdot 2{,}48}{3} \cdot (6^2 + 3{,}52^2 + 21{,}12) \approx 180\ cm^3$$

Az analóg síkbeli feladat így szólhat:

Egy egyenlő szárú háromszög csúcsszöge 90°. Ehhez a csúcshoz tartozó magassága 6 *cm*. Számítsa ki a háromszög területét és kerületét!
A háromszöget az alappal párhuzamos egyenessel kettévágjuk. Mekkora a keletkezett trapéz területe, ha az egyenes áthalad a háromszögbe írt kör középpontján?

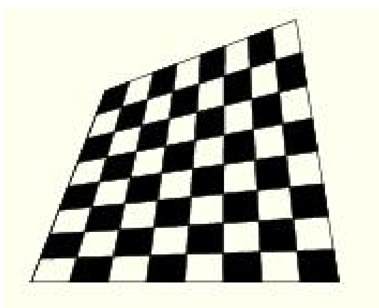
A térbeli feladat megoldásában rengeteget segíthet az analóg síkbeli feladat megfogalmazása és megoldása. A térbeli feladatok megoldásának csaknem minden lépése közvetlenül az analóg síkbeli feladatok megoldásán alapul.

KÖMAL feladat

Ezúttal egy síkbeli feladatból indulok ki, azt próbálom térben általánosítani.

4. feladat

C. 1116. Egy konvex négyszög minden oldalát osszuk fel nyolc egyenlő részre, majd minden osztópontot kössünk össze az *ábra* szerint a vele szemközti oldalon levő megfelelő osztóponttal. Az így kapott kis négyszögeket színezzük be sakktáblaszerűen fekete és fehér színűre. Igazoljuk, hogy a fekete négyszögek területének összege megegyezik a fehér négyszögek területének összegével. (2012. március)

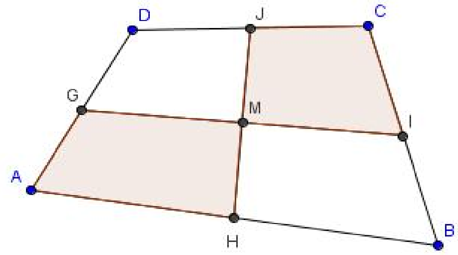


Megoldás

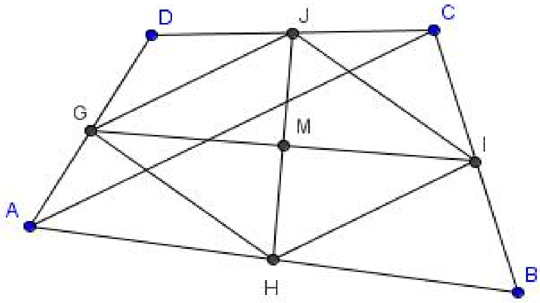
Tekintsünk egy konvex négyszöget és rajzoljuk be a középvonalait. Az így négy részre osztott eredeti négyszögben két-két átellenes négyszög területe egyenlő.

Az ábra jelöléseit használva, $T_{AHMG} + T_{MICJ} = T_{GMJD} + T_{HBIM}$.

Tudjuk, hogy *GJ* középvonala az *ACD* háromszögnek, ezért párhuzamos és fele olyan hosszú, mint az *AC* átló. Az is igaz, hogy a *GJD* háromszög területe az *ACD* háromszög területének negyede. Hasonlóan, *HI* párhuzamos és fele olyan



hosszú, mint *AC*, és *HBI* háromszög területe az *ABC* háromszög területének negyede. Ezekből következik, hogy *GHIJ* parallelogramma, melyet a *HJ* és a *GI* átlók négy egyenlő területű háromszögre bontanak, továbbá, hogy a *GJD* és a *HBI* háromszögek

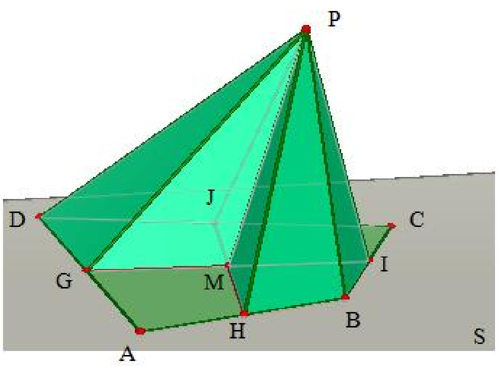


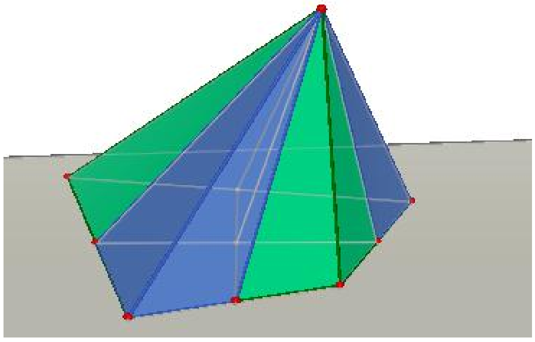
területének összege az *ABCD* négyszög területének negyede. Hasonlóan, *AHG* és *ICJ* háromszögek területének összege az eredeti *ABCD* négyszög területének negyede. Ebből következően a belső parallelogramma területe a teljes négyszög területének a fele. Mivel a parallelogrammát az átlói négy egyenlő területű háromszögre bontják, ezért két két szembenfekvő, egyforma színű, kis háromszög területe szintén a négyszög területének a negyede. Vagyis, $T_{AHMG} + T_{MICJ} = T_{GMJD} + T_{HBIM} = \frac{T_{ABCD}}{2}$.

Könnyen látható, hogy ha az eredeti feladatban található „sakktáblát” 2x2-es négyszögekre bontjuk, akkor a megfelelő területeket összeadva teljesül az állítás.

A következőkben ezt a feladatot fogom kiterjeszteni és a térbeli megfelelőjét bemutatni. Tekintsünk az *S* síkban egy *ABCD* konvex négyszöget, és az *S* síkra nem illeszkedő *P* pontot! Az *ABCD* négyszöget ugyanúgy daraboljuk fel a középvonalaival, mint az előbb. A két középvonal metszéspontja *M*. Ekkor az alábbi gúlák térfogata egyenlő:

$$V_{HBIMP} + V_{GMJDP} = V_{AHMGP} + V_{MICJP}$$





Befejezés

Manapság az elméleti tudás mellett szerintem kiemelkedően fontos a gyakorlatiasság, a problémamegoldó készség és az önálló gondolkodás. Egyrészt ezek motiváltak a szakdolgozatom témaválasztásában, másrészt viszont fontosnak tartottam, hogy a választott téma jelentős szerepet kapjon már a közoktatásban. A tanítás szeretete nálam az elmúlt időszakban a Bevezető Iskolai Gyakorlat során került előtérbe, ekkor bizonyosodott be egyértelműen, hogy a tanítás az álmom, és több tanárom valamint pedagógus nagymamám véleménye szerint számomra testhez álló pályát választottam. Kérésemre az előírtnál jóval több tanórát és szakkört tarthattam, ahol többek közt volt szerencsém a terület témakörével foglalkozni. Ez a témakör az általános iskola 5. osztályában került elő, rengeteg tapasztalattal lettem gazdagabb. Ezen a szinten sok kifejezés, definíció nem világos még a gyerekek számára, ezzel ellentétben viszont meglepően tájékozottak voltak a testekkel kapcsolatban. Tapasztaltam a szakdolgozatban leírt néhány tényt, tanítási módszert, de néha ezekkel ellentétes felfogásokat is láttam. Például a téglalap tulajdonságainak alapos megértése nélkül előkerültek a terület kiszámítására alkalmas képletek, amelyeket feltehetően sokak ugyancsak megértés nélkül használnak, ez utóbbira a saját órámon derítettem fényt. Szakdolgozatomban megpróbáltam megmutatni, hogy az egyetemi definíciók és állítások valamilyen formában jelen vannak az általános- és középiskolai tudásanyag, tanítás mögött. Ha nem is mondják ki a definíciókat, tételeket, azoknak a tulajdonságait használják, sokszor alkalmaznak – főleg általános iskolában – prematematikai bizonyításokat. A tanulók nagyon fogékonyak az új ismeretekre és tapasztalatom szerint sokkal nagyobb érdeklődést mutatnak a tárgy iránt, ha rendszeresen hozunk gyakorlati példákat, olyanokat, amikkel nap mint nap ők is találkozhatnak. Erre kiváló példa, amikor egy szakköri órán a gráfokkal és azok gyakorlati hasznával ismertettem meg őket. Sok diák arcán lehetett látni a meglepettséget; valószínűleg sokan nem sejtik, hogy a matematika mennyire szerteágazó, mennyire körülvesz minket használjuk és hasznosítjuk a mindennapokban. A szakdolgozat megírása azon túl, hogy sok új ismerethez segített hozzá, hasznos volt a leendő tanítás miatt egyaránt. A terület és a térfogat fogalmát, annak tanítását sokkal világosabban értem, mint korábban, látom az összefüggéseket, hogy épülnek egymásra a tananyag részei. Tanulság számomra hogy az ilyen mélységű elmélyedés egy témában megmutatja, hogy milyen sok apró részlete van a matematikának, és sokszor ami az oktatás során, főleg a közoktatás során előtérbe kerül, az csak a jéghegy csúcsa.

Irodalomjegyzék

- Hajós György: Bevezetés a geometriába (Nemzeti Tankönyvkiadó, 2006)
- Laczkovich Miklós – T. Sós Vera: Analízis II. (Nemzeti Tankönyvkiadó, 2007)
- Pólya György: Indukció és Analógia (A matematikai gondolkodás művészete I., Gondolat Könyvkiadó, 1988)
- Thomas-féle Kalkulus 2., 3. (Typotex Kiadó, 2006)
- Negyedik matematikakönyvem (Apáczai Kiadó, 2002)
- Czapáry Endre – Gyapjas Ferenc: Matematika a középiskolák 12. évfolyama számára (Nemzeti Tankönyvkiadó, 2004)
- Johnny Ball: Matekmágusok (HVG Kiadó, 2012)

http://www.sulinet.hu/tanar/kompetenciateruletek/2_matematika/
http://hirmagazin.sulinet.hu/hu/oktatas/a-kor-keruletenek-es-teruletenek-kozelitese
http://www.mozaweb.hu/
http://www.oktatas.hu/kozneveles/kozepfoku_felveteli_eljaras/kozponti_feladatsorok
http://www.komal.hu/verseny/feladat.cgi?a=honap&h=201203&t=i

A 15., 17., 18., 27., 28., 36. (felső ábra) oldalon található ábrákat a *GeoGebrá*val, a 23. oldalon találhatót a *Maple*-lel, a 22., 34. (felső ábra), 36. (alsó ábra) oldalon találhatóakat a *Cabri 3D* szoftverrel készítettem.