Síkgráfok és alkalmazásaik

Szakdolgozat

Készítette: Beregszászi Eliza Bettina

Matematika BSc, tanári szakirány

Témavezetők:

Dr. Sziklai Péter

Hermann György

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

Számítógéptudományi Tanszék

2014

Tartalom

Bevezetés

Már az egyetemi tanulmányaim kezdetén elhatároztam, hogy ha lehetséges, a gráfokról fogom írni a szakdolgozatomat, melyeknek az alkalmazásai is mindig érdekeltek. Már régóta érdeklődtem a fizika iránt is, ezért az elmúlt tanévben beiratkoztam a Budapesti Műszaki Egyetemre, ahol vendéghallgatóként fölvettem néhány tantárgyat a Villamosmérnöki karon. Eddig sikeresen teljesítettem két félévet Jelek és rendszerek-, Digitális technika, Villamos energetika- és Méréstechnika tárgyakból.

Nagyon megtetszett, amikor Jelek és rendszerek tantárgyból is előkerültek a síkgráfok, és így összekapcsolódott a dolgozatom témája a megkezdett fizikai tanulmányaimmal. Utánanéztem és néhány érdekes dolog derült ki számomra a Kirchhoff törvények és a gráfok kapcsolatáról, amit részletesen ki is fogok fejteni a dolgozatban.

A dolgozatom négy részből fog állni. Először ismertetem a megértéshez szükséges gráfelméleti és fizikai alapfogalmakat.

A második fejezetben bemutatom a legfontosabb gráfmátrixokat, melyek közül a szomszédsági mátrixot a gráfok számítógépen való tárolásánál alkalmazzuk leginkább, a többi ismertetett mátrix reprezentáció pedig a hálózatszámítás mátrixos levezetéséhez szükséges.

Ezután foglalkozom a síkgráfok ismertetésével, majd néhány matematikai alkalmazást mutatok a használatukra. Ez a rész a síkba rajzolható és nem síkba rajzolható gráfokra is sok példát tartalmaz.

Szakdolgozatom végén kerül elő a dualitás elve, melyet bizonyítani is fogok, illetve egy fizikai példán keresztül be is mutatom ennek jelentőségét. Ebben a fizikai alkalmazásban egyszerre mutatkozik meg a gráfelmélet szépsége és használhatósága más tudományokban, ami engem mindig is magával ragadott.

Végezetül szeretném megköszönni Dr. Sziklai Péter témavezetőmnek az egész éves segítőkész munkáját!

Történeti áttekintés

A gráfelmélet egy viszonylag fiatal tudományága a matematikának. Kezdetét sokan Leonhard Euler (1707-1783) svájci matematikus és fizikus 1736-ban megjelent dolgozatától számítják, melyben a Königsbergi-hidak problémáját oldotta meg.

Mások pedig Kirchhoff elektromos hálózatokról írt 1847-ben publikált eredményeihez köti a gráfelmélet kezdetét. Annyi azonban biztos, hogy életünk során rengeteg olyan dologgal találkozunk, amely mögött gráfok vannak.

Kezdetben úgy tűnt, hogy a gráfok csupán jópofa rejtvények, játékos kérdések megválaszolására jók. A XIX. században azonban Kirchhoff és Cayley munkái megmutatták, hogy ennél jóval többről van szó. Kirchhoff elektromos hálózatokkal, Cayley pedig kémiai vizsgálatokkal hozta kapcsolatba a gráfokat.

A magyar matematikusok közül sokan foglalkoztak a gráfelmélet témakörével. Kőnig Dénes (1884-1944) magyar matematikus volt az első gráfelméleti tankönyv szerzője. 1936-ban megjelent könyve két évtizeden át az egyetlen tudományos színvonalú gráfelméleti munka volt.

Az 1920-as 30-as évek fiatal magyar matematikusai gyakran találkoztak a Városligetben, a Vajdahunyad váránál található Anonymus-szobornál és megalakították az Anonymus-csoport néven híressé vált közösségüket. Tagja volt Turán Pál, Erdős Pál, Gallai Tibor, valamint Szekeres György és Klein Eszter, akik később összeházasodtak.

Turán Pál 1941-ben publikálta tételét, melyben meghatározza, hogy legfeljebb mennyi éle lehet egy véges gráfnak, mely nem tartalmaz részgráfként adott nagyságú teljes gráfot. Ezzel a gráfelmélet egy új fejezetét indította el, az extremális gráfelméletet.

Úgy gondolom, büszkék lehetünk rá, hogy a magyarok igen sikeresek a gráfelmélet terén.

Mindig is érdekelt, hogy a matematikának milyen alkalmazásai vannak az élet különböző területein, és úgy vélem, hogy a gráfelmélet ebből a szempontból is egy igen sokszínű tudományág.

Gráfként képzelhetünk el egy például egy úthálózatot, Európa villamosenergia-hálózatát, a Facebookos ismeretségeinket. A pszichológusok is gráfokat használnak egy-egy szociometriai felmérésnél valamint egy térkép kiszínezéséhez is alkalmazzuk a gráfelméletet.

Sokféle gazdasági feladat megfogalmazható gráfelméleti problémaként is. Ha például több város vagy község között telefonhálózatot (vagy vízvezeték-hálózatot stb.) akarunk kiépíteni. Természetesen az egyre gyakrabban használt GPS-ek is gráfként, tárolják a térképeket. Mégpedig olyan irányított gráfként, melyben az élekhez hozzárendelnek többféle adatot, az út hosszúságát, időt, költségeit. Nyilván azt szeretnénk, ha a költségek minimálisak lennének és ezt legkönnyebben gráfokkal tudjuk szemléltetni és átlátni. Ebben a problémában a minimális költségű fagráf megkeresése a célunk.

1.Alapfogalmak

Ebben a fejezetben megismerkedünk a legfontosabb gráfelméleti és fizikai alapfogalmakkal, amelyek alapját képezik a későbbi bizonyítások és példák megértésének.

1.1 Gráfelméleti alapfogalmak[1]

1.1.1. Definíció: Gráfnak nevezzük a pontokból és – az ezekből alkotható pontpárok közül néhányat (szélsőséges esetben mindegyiket vagy egyiket sem) összekötő – vonalakból álló alakzatot. A pontokat a gráf **csúcsainak** vagy pontjainak, a vonalakat pedig a gráf **éleinek** nevezzük.

Jelölések: A G gráf csúcsainak halmazát V(G)-vel jelöljük, mely az angol vertex=csúcs szóból ered. A G gráf éleinek halmazát pedig E(G)-vel jelöljük, mely az angol edge=él szóból ered.

1.1.2. Definíció: Ha egy élnek azonos a két végpontja, **hurokélnek** nevezzük. Ha két csúcs között egynél több élt húzunk, **többszörös élt** kapunk. Azokat a gráfokat, amelyekben nincsenek hurokélek és többszörös élek, **egyszerű gráfnak** nevezzük.

1.1.3. Definíció: Egy gráf csúcsának foka a csúcsban találkozó élek száma. Ha egy csúcsban nincs él, akkor **izolált csúcsnak** nevezzük, és azt mondjuk, hogy 0 a foka. A V pont **fokszámát** d(V)-vel jelöljük. A **maximális fokszámot** Δ-val, a **minimálisat** δ-val jelöljük.

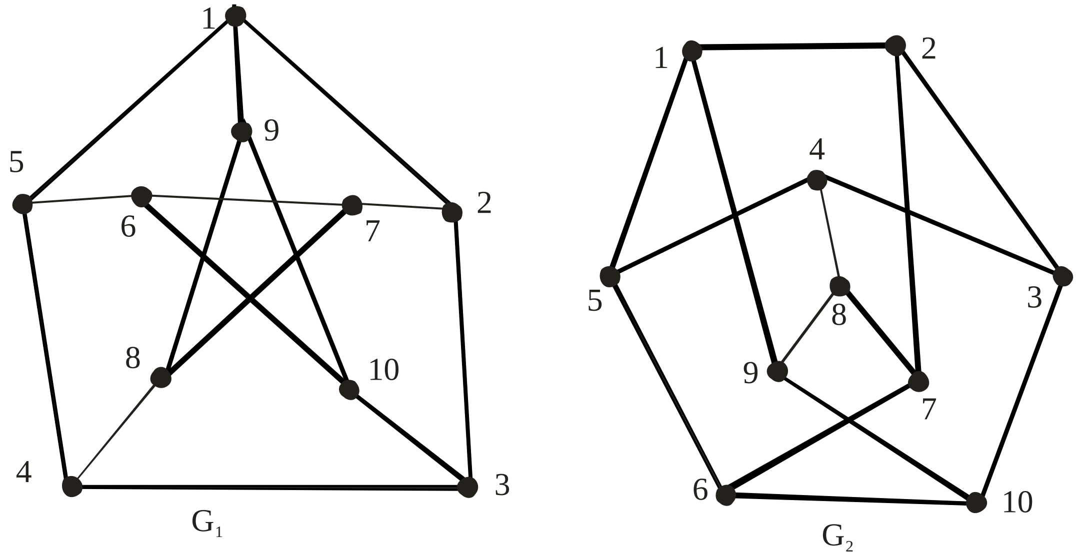
1.1.4. Definíció: Egy n csúcsú, egyszerű gráfot **teljes gráfnak** nevezünk és K_n-nel jelöljük, ha bármely két csúcsa össze van kötve éllel. Az egy csúcsból álló gráf is teljes gráfnak számít.

1.1.5. Definíció: Egyszerű gráfról beszélünk, ha a gráf sem párhuzamos élt, sem hurokélt nem tartalmaz.

[1] Sokszínű matematika 11., középiskolai tankönyv, Szeged, Mozaik kiadó, 2010.

1.1.6. Definíció: Egy gráfot **k-szorosan összefüggőnek** nevezünk, ha tetszőleges k-nál kisebb elemszámú csúcshalmazát elhagyva összefüggő gráfot kapunk, és |V(G)|>k.

1.1.7. Definíció: Egy G gráf **komplementerén** azt a G gráfot értjük, amelyben azok a V(G)-beli pontpárok vannak összekötve, amelyek G-ben nincsenek.



1. ábra Gráfizomorfia

1.1.8. Definíció[2]: G és H gráfokat akkor nevezzük **izomorfnak**, ha pontjaik és éleik között kölcsönösen egyértelmű és illeszkedéstartó megfeleltetés van. Ekkor két csúcs szomszédos G-ben akkor és csak akkor, ha a megfelelőik szomszédosak H-ban.

Izomorfizmus jelölése: G ~ H

1.1.9. Definíció: A H gráf **részgráfja** a G gráfnak, ha csúcs- és élhalmaza részhalmaza a G gráf csúcs- és élhalmazának.

Egy gráf definíció szerint élek és csúcsok halmazából áll, melyet többféleképpen megadhatunk:

- grafikusan,
- halmazokkal,
- vagy mátrixos alakban.[3]

Számunkra a mátrixos alak a legfontosabb, ezt alkalmazom leggyakrabban, de természetesen a gráfoknak mindhárom fajta megadása előfordul.

---

[2] http://tudasbazis.sulinet.hu/hu/matematika/matematika/matematika-11-osztaly/grafelmeleti-alapfogalmak-tetelek/izomorf-grafok

[3] A számítástudomány alapjai, Katona Gyula-Recski András-Szabó Csaba, Typotex, Budapest, 2006

1.2 Fizikai alapfogalmak[4]

A fizikai alapfogalmak bevezetését kezdjük a villamos hálózatok leírásához legfontosabb két mennyiséggel: a feszültséggel és az árammal.

1.2.1. Definíció: A **feszültség** két pont közötti potenciálkülönbséget jelent, melyet nyíllal jelölünk. Mindegy, hogy a nyilat melyik irányba vesszük fel, de ezzel jelöljük ki az általunk pozitívnak tekintett irányt, ami azt jelenti, hogy ha a számítások során a nyíl által jelzettel ellentétes irányú potenciálcsökkenést kapunk, akkor a két pont közötti feszültség **negatív**, ha a csökkenés iránya megegyezik a nyíl irányával, akkor a két pont közötti feszültség **pozitív.**

A feszültség **mértékegysége** a volt. [U]=V.

1.2.2. Definíció: Az elektromos töltések egyirányú rendezett mozgását **áram-nak** hívjuk. Az áram a passzív elemeken a potenciál csökkenésének az irányába folyik. Ha egy kétpólus mellé felveszünk egy nyilat, azzal kijelöljük az általunk pozitívnak tekintett irányt, ami azt jelenti, hogy a számítások során, ha a nyíllal ellentétes irányú áramot kapunk, akkor a kétpóluson folyó áram negatív, ha pedig a nyíllal megegyező irányú áramot kapunk, akkor a kétpóluson folyó áram pozitív.

Az áram mértékegysége az amper. [I]= A.

Az áram és a feszültség közti kapcsolatot a fizikából jól ismert Ohm törvény írja le. Az Ohm törvény szerint az áram arányos a feszültséggel és az arányossági tényezőt vezetőképességnek nevezzük, ennek reciproka az ellenállás.

1.2.3. Definíció: A **lineáris ellenállás** feszültsége és árama arányosak: $R = \frac{U}{I}$, ahol R az egyenáramú ellenállás. A képlet más alakban is felírható: $I = GU$, ahol G az egyenáramú vezetőképességet jelenti. Ha egyikük sem nulla, akkor $R = \frac{1}{G}$. Ezt az összefüggést nevezzük Ohm törvényének.

Az ellenállás mértékegysége az ohm. [R]=Ω. A vezetésé, pedig a siemens. [G]=S. Speciális esetek, amikor az ellenállás értéke nulla, illetve végtelen. Amikor nulla az

[4] Jelek és rendszerek I. Gyakorló füzet, Barbarics Tamás, Budapest, 2008

ellenállás, akkor rövidzárról beszélünk, amely egy olyan kétpólus, amelynek a feszültsége nulla, amikor végtelen az ellenállás, akkor szakadásról beszélünk, amely egy olyan kétpólus, amelynek az árama nulla.

1.2.4. Definíció: A **kétpólus** két kivezetéssel, más néven pólussal vagy kapoccsal rendelkező áramköri elem. Az egyszerű kétpólus pólusai között csak egy elem van.

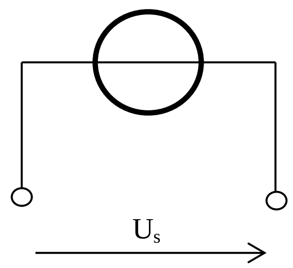
Két típusba sorolhatók: Aktív és passzív kétpólusok.

1.2.5. Definíció: Az **aktív kétpólusok** energiát tudnak leadni. Például: feszültségforrás, áramforrás.

Megjegyzés: A feszültségforrás és áramforrás lehet passzív elem is.

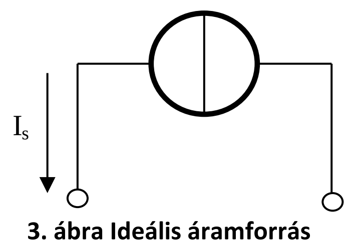
1.2.6. Definíció: A **passzív kétpólusok** energiát csak felvenni képesek. Például: ellenállás, tekercs, kondenzátor.

1.2.7. Definíció: Az **ideális feszültségforrásnak** nincs belső ellenállása, így bármilyen rákapcsolt terhelés esetén ugyanakkora a feszültsége.



2. ábra Ideális feszültségforrás

1.2.8. Definíció: Az **ideális áramforrásnak** nincs belső ellenállása, így bármilyen rákapcsolt terhelés esetén ugyanakkora az árama.



3. ábra Ideális áramforrás

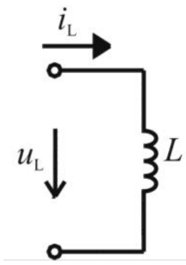
1.2.9. Definíció: A **lineáris tekercs** olyan kétpólus, amelynek $i_L = i_L(t)$ árama a tekercs $u_L = u_L(t)$ feszültségének integrálja:

$$i_L(t)=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t}u_L(\tau)d\tau.$$

A hálózati egyenletek felírásánál ennek az egyenletnek a fordítottját szoktuk alkalmazni, amikor a lineáris tekercs feszültségét fejezzük ki az áramának deriváltjával, azaz

$$u_L = L\frac{di_L}{dt}$$

Az L mennyiséget a tekercs **induktivitásának** nevezzük, az SI-egysége a henry (jele: H). Gyakran használjuk az ezred részét is (mH). Lineáris esetben L értéke állandó és pozitív. Vezető hurok vagy sokmenetű tekercselés gyakran modellezhető tekerccsel, illetve a (hálózatelméleti) tekercs például vasmagra tekercselt vezetékkel realizálható.



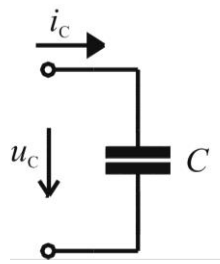
4. ábra Induktivitás

1.2.10. Definíció: A **lineáris kondenzátor** olyan kétpólus, amelynek $u_C = u_C$ (t) feszültsége arányos a felhalmozott töltéssel, amely a kondenzátor $i_C = i_C$ (t) áramának integrálja: $u_C(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t}i_C(\tau)d\tau.$

A hálózati egyenletek felírásánál ennek az egyenletnek a fordítottját szoktuk alkalmazni, amikor a lineáris kondenzátor áramát fejezzük ki a feszültségének deriváltjával, azaz:

$$i_C = C\frac{du_C}{dt}$$

A C mennyiséget a kondenzátor **kapacitásának** nevezzük, az SI-egysége a farad (jele: F). Rendszerint a farad milliomod, vagy még kisebb részei (μF, nF. pF) fordulnak elő. Lineáris esetben C értéke állandó és pozitív.



5. ábra Kondenzátor

Megjegyzés: A szakdolgozatomban csak lineáris kétpólusokkal foglalkozom.

2. Gráfmátrixok

Ebben a fejezetben először általánosságban, majd példákon keresztül bemutatom, hogyan reprezentálhatunk egy gráfot mátrixokkal. A gráfmátrixokra később nagy szükség lesz, ugyanis a dualitás elvét mátrixokkal írhatjuk le.

Ezek után nézzük meg a gráfmátrixok fajtáit:

2.1. Definíció[5]: Az n csúcsú G gráf $A(G) = (a_{ij})$ **szomszédsági mátrixán** a következő n×n-es mátrixot értjük:

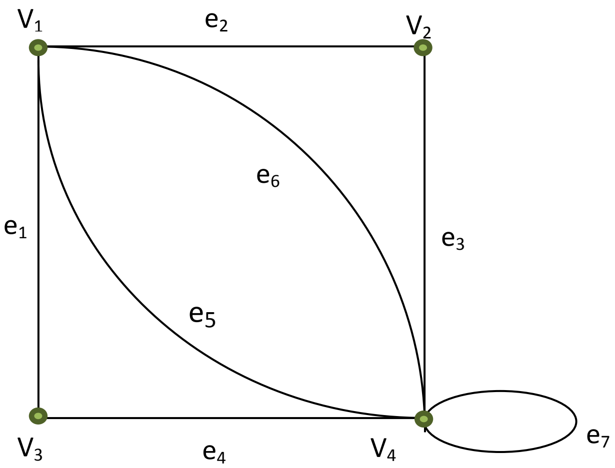
$$a_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ha az i} - \text{edik és j} - \text{edik csúcs között nem fut él} \\ k, \text{ha az i} - \text{edik és j} - \text{edik csúcs között k darab párhuzamos él halad} \\ l, \text{ha i} = \text{j és az i} - \text{edik csúcshoz l darab hurokél illeszkedik} \end{cases}$$

2.2. Definíció[6]: Az n csúcsú, e élű G gráf $B(G) = (b_{ij})$ **illeszkedési mátrixán** a következő n×e-es mátrixot értjük:

$$b_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ha a j} - \text{edik él nem illeszkedik az i} - \text{edik ponthoz} \\ 1, \text{ha a j} - \text{edik élnek az i} - \text{edik pont a kezdőpontja} \\ -1, \text{ha a j} - \text{edik élnek az i} - \text{edik pont a végpontja} \end{cases}$$

Példa: A következő példában a szemléltetéshez rajzoltam két gráfot, egy irányítás nélkülit (2. ábra) és egy irányítottat (3. ábra), majd felírtam ennek szomszédsági- és illeszkedési mátrixait:

[5] A számítástudomány alapjai, Katona Gyula-Recski András-Szabó Csaba, Typotex, Budapest, 2006
[6] A számítástudomány alapjai, Katona Gyula-Recski András-Szabó Csaba, Typotex, Budapest, 2006



6. ábra Egy irányítás nélküli gráf

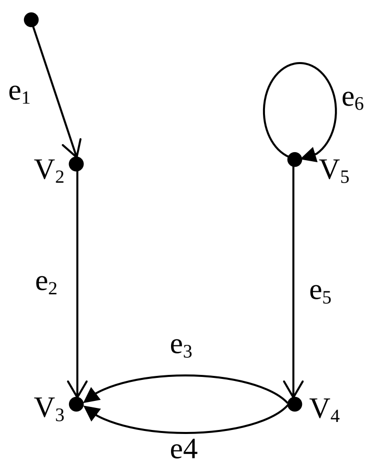
Az irányítás nélküli gráf illeszkedési mátrixa:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Szomszédsági mátrixa:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Az irányított gráf és mátrixai a következőképpen néznek ki:



7. ábra Irányított gráf

Az irányított gráf illeszkedési mátrixa:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Szomszédsági mátrixa:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2.1. Tétel[7]: Az n pontú c összefüggő komponensből álló, hurokélmentes irányított gráf illeszkedési mátrixának rangja n-c.

(Az összefüggőség irányított gráfban: az éleket irányítás nélkül tekintjük, és akkor ugyanaz, mint irányítatlan esetben.)

Bizonyítás: Ha c > 1, akkor komponensenként sorolva fel a pontokat és éleket, B(G) blokkdiagonális szerkezetű lesz, ezért elég egy p pontú összefüggő komponensre belátni, hogy a neki megfelelő blokk rangja p-1.

Egy ilyen blokk sorainak száma p, és a sorok összege (0,0,…,0), mert minden oszlopban pont egy +1 és egy −1 áll. (nincs hurokél, minden élnek pontosan egy kezdő és egy végpontja van, és ezek különbözőek): a rang tehát legfeljebb p-1

Legyen F egy feszítőfa ebben a komponensben: p-1 élű. Legyen v_1 az F egy elsőfokú pontja, e_1 a hozzá illeszkedő él. Ekkor (F - {v_1}) is egy fa, legyen v_2 egy elsőfokú pontja és e_2 a hozzá illeszkedő él. Általában, v_{i+1} legyen az (F - {v_1, v_2,…,v_i}) fa egy elsőfokú pontja, e_{i+1} a hozzá illeszkedő él. Ha a blokk sorait v_1, v_2,…,v_p sorrendben soroljuk fel, az oszlopait pedig az e_1,e_2,…,e_{p-1} felsorolással kezdjük, akkor a mátrix megfelelő p x p-1-es része a következő alakú:

[7] www.cs.bme.hu/~sali/bsz1/bsz1218.ppt

$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_p \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & \cdots & e_{p-1} \end{array} \\ \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 & 0 \\ & \pm 1 & 0 & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & \pm 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Azaz p-1 lineárisan független oszlopot találtunk. □

A hálózat topológiáját jellemző mátrixok[8]

A mátrixok megadásakor használok néhány újnak tűnő fogalmat, melyet gráfelméletből már ismerünk, de másképp nevezzük.

Vágat (a gráfelméletben vágásnak hívjuk): azon élek (ágak) összessége, melyek elvételével, miközben a csomópontok (csúcsok) a helyükön maradnak, a gráf két teljesen különálló komponensre esik szét, viszont bármely él visszarakásával már újra összefüggő lesz.

A vágatot irányítással látjuk el, amely az egyik különálló résztől a másik felé mutat. Egy hálózaton sok vágatot létesíthetünk.

Egy vágat akkor független a többitől, ha legalább egy új élt tartalmaz, amely még egy vágatban sem szerepelt.

A független vágatok egy teljes rendszerét egy kiválasztott fa segítségével határozhatjuk meg. Ha ugyanis úgy készítünk vágatokat, hogy azok rendre a fa első, második, …, (n-1)-edik ágát tartalmazzák, akkor független vágatrendszerhez jutunk.

Hurok: Amikor hálózatszámításnál a hurok szót használjuk, ugyanarra gondolunk, mint a gráfelméletben a **körnél**.

Ág: A gráfelméletben **élnek** felel meg.

Feszítőfa: A gráf minden csúcsát tartalmazza és nincs benne kör.

[8] Elméleti villamosságtan, Simonyi Károly, Tankönyvkiadó, Budapest. 11. átdolgozott kiadás 1991

Hídág: Olyan élt nevezünk hídágnak, amely nem része egy megadott feszítőfának, de annak két csúcsát köti össze.

A következő táblázatban összefoglalom, hogy az előző gráfelméleti fogalmaknak mely fogalmak felelnek meg a villamosságtani alkalmazásoknál:

Él	Ág
Csúcs	Csomópont
Kör	Hurok
Vágás	Vágat

2.3. Definíció: **Csomópont-ágmátrix:** Megegyezik az illeszkedési mátrixszal, de itt az élek vagy ágak irányítással vannak ellátva, melynek a későbbiekben fontos szerepe lesz.

2.4. Definíció: A **hurokágmátrix** azaz $M = m_{ij}$[9] mátrix sorait a hurkok, oszlopait az ágak szerint számozzuk:

$$m_{ij} = \begin{cases} +1, \text{ha az i} - \text{edik hurok tartalmazza a j} - \text{edik ágat és irányításuk megegyezik} \\ -1, \text{ha az i} - \text{edik hurok tartalmazza a j} - \text{edik ágat, de irányításuk ellenkező} \\ \ \ 0, \text{ha az i} - \text{edik hurok nem tartalmazza a j} - \text{edik ágat} \end{cases}$$

2.5. Definíció: A **vágásmátrix**, azaz $Q = q_{ij}$ mátrix sorait a vágatok, oszlopait az ágak szerint sorszámozzuk a következőképpen:

$$q_{ij} = \begin{cases} +1, \text{ha az i} - \text{edik vágat tartalmazza a j} - \text{edik ágat és irányítása megegyezik} \\ -1, \text{ha az i} - \text{edik vágat tartalmazza a j} - \text{edik ágat, de irányítása ellenkező} \\ \ \ 0, \text{ha az i} - \text{edik vágat nem tartalmazza a j} - \text{edik ágat} \end{cases}$$

[9] Elméleti villamosságtan, Simonyi Károly, Tankönyvkiadó, Budapest. 11. átdolgozott kiadás 1991

3. Síkgráfok

A következő fejezetekben síkgráfokkal kapcsolatos bizonyításokkal, példákkal és alkalmazásokkal foglalkozom. Ezek megértéséhez lesznek hasznosak a következő definíciók.

3.1. Definíciók[10]

3.1.1. Definíció: Egy gráf **lerajzolása:** a gráf csúcsainak a sík pontjait feleltetjük meg (különbözőeknek különbözőt), és ezeket pontokkal jelöljük, az éleknek pedig önmagukat nem metsző görbéket feleltetünk meg.

3.1.2. Definíció: Síkbarajzolható gráfnak hívjuk az olyan gráfokat, melyek lerajzolhatók a síkba úgy, hogy az éleik nem metszik egymást. A síkbarajzolható gráf a síkot tartományokra osztja.

3.1.3. Definíció: Egy gráf **síkgráf,** ha van síkra rajzolása.

3.1.4. Definíció: Egy síkra rajzolt gráf egy **tartományának** nevezzük a sík azon pontjait, amelyek nem csúcsokat reprezentálnak és nem halad át rajtuk élt reprezentáló görbe.

3.1.5. Definíció: Egy síkbarajzolható gráf **duális gráfja** az a gráf, melynek csúcsai az eredeti gráf tartományai, és két csúcs annyi éllel van összekötve, ahány közös határszakasza volt a megfelelő tartományoknak.

A definíciók leírása után ismertetem a legfontosabb síkgráfokról szóló tételeket és bizonyításokat.

3.2. Az Euler-formula és következményei

3.2.1. Tétel: Euler-formula: Legyen G összefüggő, síkbarajzolt gráf, ahol c a csúcsok, e az élek, t pedig a tartományok száma. Ekkor $c + t = e + 2$.

[10] http://www.math.u-szeged.hu/~hajnal/courses/MSc_Grafelmelet/graf98/sikgraf.htm

Bizonyítás: Az élek száma szerinti indukcióval bizonyítunk. Ha a gráf éleinek száma minimális, tehát nem hagyható el belőle él úgy, hogy összefüggő maradjon, akkor G egy fa, így $e = n - 1$, továbbá t = 1, így ekkor az egyenlőség teljesül. Tegyük most fel, hogy G tartalmaz kört, és f legyen a kör egy éle, valamint T_1 és T_2 legyen a körön belül illetve kívül az a két (egyértelműen meghatározott) tartomány, amelyeknek f a közös határa. Ekkor f törlésével T_1 és T_2 egyesül, vagyis a kapott G" gráfban $e' = e - 1$ és $t' = t - 1$, így az indukciós feltevés alapján n + (t-1) = (e-1) + 2, tehát az állítást igazoltuk.

Megjegyzés: A bizonyításban nem tettük fel, hogy G egyszerű, tehát a formula érvényes hurok-, illetve párhuzamos éleket tartalmazó gráfokra is.

Az Euler-formula következményei:

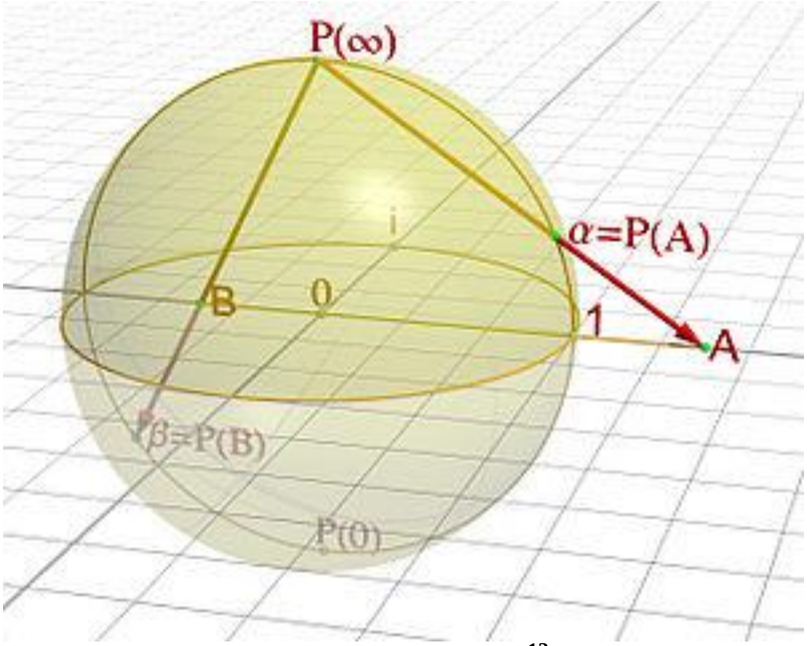
3.2.2. Következmény: Euler-féle poliéder-tétel: Egy konvex poliéder csúcsai (c), élei (e) és lapjai (l) számára érvényes a c + l = e + 2 összefüggés.

3.2.3. Következmény: Ha G egyszerű, síkbarajzolható gráf, akkor $e \leq 3n - 6$. Ha G egyszerű, kétosztályú síkgráf, akkor $e \leq 2n - 4$.

Bizonyítás: Egy 1 hosszúságú kör megfelel egy hurokélnek, egy 2 hosszúságú kör pedig párhuzamos éleknek, tehát egy egyszerű gráfban $b \geq 3$. A b = 3 feltételt visszaírva az egyenlőtlenségbe épp az első egyenlőtlenséget kapjuk. Ha még az is teljesül, hogy a gráf kétosztályú, akkor minden köre páros, így $b \geq 4$, amiből $2e \leq 4n - 8$, ami pedig a második egyenlőtlenség kétszerese. □

Megjegyzés: A fenti tétel csupán szükséges feltételt ad arra vonatkozóan, hogy G síkgráf-e. Abból, hogy valamely gráfra teljesül a fenti egyenlőtlenség, nem következik, a síkba rajzolhatóság.

Tétel[11]: Egy gráf akkor és csak akkor síkbarajzolható, ha gömbre rajzolható.



8. ábra Sztereografikus projekció[12]

Bizonyítás: (Sztereografikus projekcióval.) Vegyük a gráf egy síkba rajzolását és tekintsünk egy gömböt, amely érinti ezt a síkot. Az érintési pontot nevezzük el a gömb déli pólusának, az ezzel átellenes pontot pedig északi pólusnak (E). Ezután a sík egy X pontjának feleltessük meg az XE szakasznak a gömbfelülettel vett (egyértelmű) metszéspontját. Az eljárást sztereografikus projekciónak hívjuk. Ezzel a megfeleltetéssel a síkba rajzolt gráfnak egy gömbre rajzolását kapjuk. A megfordítás bizonyításánál, tekintsük a gráfunknak egy olyan gömbre rajzolását, amelyben E nem pontja a gráfnak, és nem halad rajta át él. Mivel a sztereografikus projekció a sík és a lyukas, azaz északi pólus nélküli gömbfelület között kölcsönösen egyértelmű, ezért a fenti leképezés megfordításával a gráf egy síkba rajzolását kapjuk.

Érdekes állítást tartalmaz az alábbi tétel (nem bizonyítom):□

Tétel: Fáry-Wagner tétel

Ha G gráf síkbarajzolható, akkor úgy is lerajzolható, hogy minden él egyenes szakasz legyen. Például K4 síkbarajzolható.

---

[11] file:///C:/Users/Oszt%C3%A1lyvezet%C5%91%20%C3%9Ar/Downloads/jegyzet_sikgraf.pdf
[12] http://hu.wikibooks.org/wiki/Komplex_anal%C3%ADzis/Topologikus_fogalmak

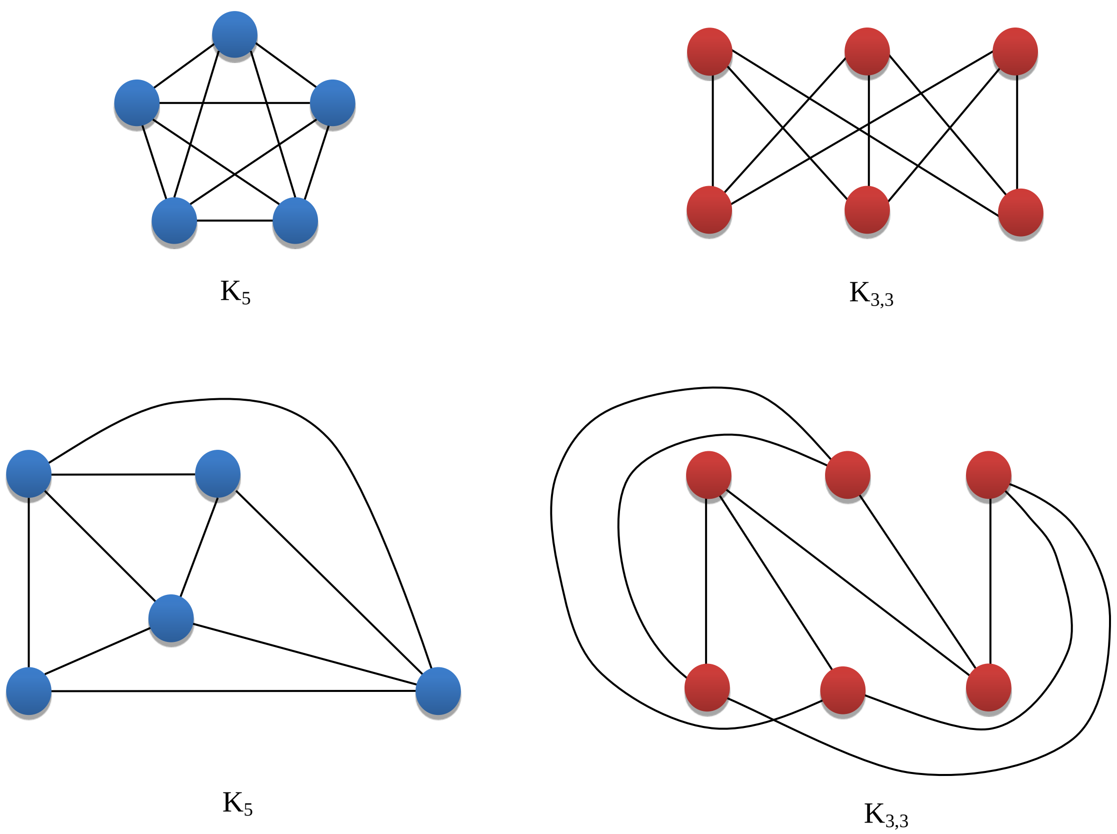
3.3. Kuratowski gráfok [13]

A Kuratowski gráfok, K_5 és $K_{3,3}$ azért fontosak a síkbarajzolhatóság kérdésénél, mert amennyiben a gráf tartalmazza ezek valamelyikét részgráfként, úgy nem síkbarajzolhatók.

A Kuratowski tétel bizonyításához felhasználjuk a Tutte tételt.

3.3.1. Tutte tétel: Ha G= (V, E) olyan 3- összefüggő egyszerű gráf, mely nem tartalmaz felosztott K_5-t és felosztott $K_{3,3}$-t, akkor beágyazható a síkba úgy, hogy minden élt egyenes szakasz reprezentál, két élnek csak a végpontja lehet közös, valamint a tartományok konvexek.

Nevezzünk egy felosztott K_5-t vagy $K_{3,3}$-t tiltott részgráfnak.



9. ábra Tiltott részgráfok

3.3.2. Kuratowski tétel: Egy gráf akkor és csak akkor síkbarajzolható, ha nem tartalmaz tiltott részgráfot.

[13] http://www.cs.elte.hu/~frank/jegyzet/graf/graf.2013.pdf

Bizonyítás: Az Euler formula szerint $t + n = m + 2$, ahol t a tartományok száma, n a csúcsoké, m pedig az éleké. K_5 nem síkbarajzolható, mert ha az lenne, akkor

$t = 10 + 2 - 5 = 7$ lenne a tartományok száma.

Mivel pedig minden tartományt legalább három él határol, az élek száma legalább $\frac{7\cdot3}{2}$, azaz legalább 11 lenne, holott csak 10.

A $K_{3,3}$ sem rajzolható síkba, mert $t = 9 + 2 - 6 = 5$ lenne, de minden kör legalább négyélű, ezért az élek száma legalább $\frac{4\cdot t}{2}$ azaz legalább 10-nek kéne lennie, de csak 9.

Ebből következik, hogy a K_5 és $K_{3,3}$ továbbosztásai nem síkbarajzolhatók, valamint egy ilyeneket tartalmazó gráf sem az.

A megfordításhoz indirekt tegyük fel, hogy G nem tartalmaz tiltott részgráfot, mégsem síkbarajzolható. Ekkor feltehetjük, hogy G minimális. G nyilván összefüggő, hiszen, ha nem az, akkor a komponensei síkbarajzolhatók lennének és így G is az volna.

Hasonlóképp látható, hogy G nem tartalmaz hurkokat illetve párhuzamos éleket, azaz G egyszerű gráf.

Azt állítjuk, hogy G 2-összefüggő, ugyanis ha t elvágó pont volna, akkor létezne V-nek két X, Y részhalmaza, melyekre $t \in X \cap Y$, $V = X \cup Y$, $|X| \geq 2$, $|Y| \geq 2$, nincs él $X-Y$ és $Y-X$ között, továbbá az X és Y által kifeszített G_1 és G_2 részgráfok összefüggők.

Ekkor G_1 és G_2 síkbarajzolhatók és ezeket t-nél összeillesztve G egy síkba rajzolását kapnánk.

Belátható az is, hogy G 3-összefüggő. Mivel K_4 síkbarajzolható, így a legfeljebb négypontú gráfok is azok, tehát $|V| \geq 5$. Indirekt tegyük fel, hogy {x, y} elvágja a gráfot. Ekkor létezik V-nek két részhalmaza, melyekre $X \cap Y = \{x, y\}$, $V = X \cup Y$, $|X| \geq 3$, $|Y| \geq 3$, nincs él $X-Y$ és $Y-X$ között, valamint az X és Y által kifeszített G_1 és G_2 részgráfok összefüggők. Legyen G_X az X által feszített gráf plusz az $e = xy$ él és G_Y az Y által feszített gráf plusz e. Ekkor belátható, hogy G_X nem tartalmaz tiltott részgráfot, hiszen ha tartalmazna, akkor az szükségképpen használná az új e élt, mivel G-ben nincs tiltott részgráf. Ugyanakkor G_Y-ban létezik út x és y között, és akkor az e élt ezen útra cserélve egy G-beli tiltott részgráfot kapnánk. Analóg kapjuk, hogy G_Y sem tartalmaz tiltott részgráfot. Indukcióval adódik, hogy mind G_X, mind G_Y síkba rajzolhatóak, valamint mindkettőnek létezik olyan síkba rajzolása is, melyben e él a végtelen tartomány határán van. Mivel egy síkgráf felrajzolható a gömbre is, és akkor az e által határolt egyik T tartomány egy belső pontjából a gömböt egy tőle diszjunkt síkra vetítve a kívánt síkba rajzolást kapjuk. Tehát a két síkba rajzolás összeilleszthető az e mentén úgy, hogy a G+e egy síkba rajzolását kapjuk. A 3-összefüggő gráfokra a tétel a Tutte tételből következik. □

3.4. Példák síkbarajzolható és nem síkbarajzolható gráfokra[14]:

K_4: síkbarajzolható, ugyanis ha veszünk egy háromszöget, és a belsejében egy negyedik pontot, majd ezt a pontot összekötjük a három csúccsal akkor az élek metszése elkerülhető.

K_7: nem síkbarajzolható, mivel részgráfként tartalmazza K_5-öt.

$K_{4;5}$: szintén nem síkbarajzolható, mert részgráfként tartalmazza a $K_{3;3}$-at.

$K_{2,n}$: mindig síkbarajzolható.

$K_{n,m}$ viszont nem lehet síkbarajzolható, amennyiben n is és m is legalább 3.

Egy másik példa nem síkbarajzolható gráfra[15]:

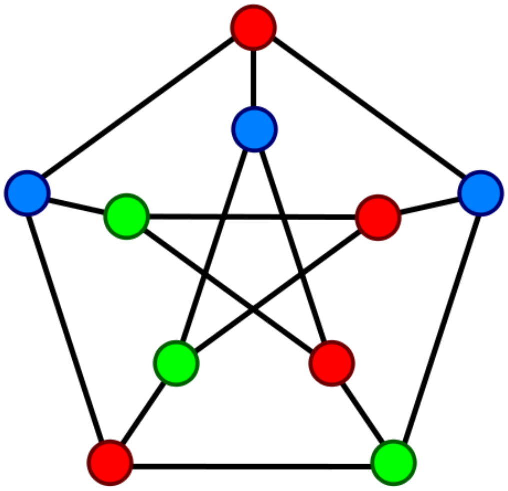
A **Petersen-gráf** többször előkerült tanulmányaink során. Nemcsak gráfelméletből, hanem algebrából is tanultunk róla.

Nevét egy dán matematikusról kapta, aki foglalkozott matematikával, fizikával, közgazdasággal, ám legfontosabbnak tartott eredményeit gráfelméletben érte el.

[14] http://www.cs.elte.hu/~frank/jegyzet/graf/graf.2013.pdf

[15] http://hu.wikipedia.org/wiki/Petersen-gr%C3%A1f

A Petersen gráf egy lerajzolása



10. ábra Petersen-gráf

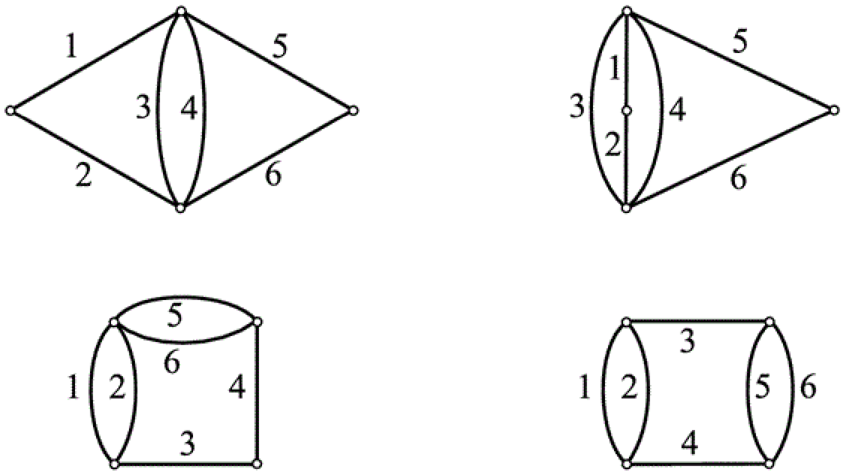
A Petersen-gráf nem síkbarajzolható, mivel tartalmazza $K_{3,3}$ továbbosztását.

4. Dualitás

A fejezet első felében a gráfelméletben értelmezett dualitásról lesz szó. Majd levezetem a hálózatszámítást mátrixos alakban, és ezeket felhasználva egy fizikai példán mutatom be, hogyan értelmezhető a dualitás.

4.1. A dualitás fogalma

Síkbarajzolható gráf duálisa: Egy síkbarajzolható G gráfnak úgy képezhetjük a duálisát G’-t, hogy G tartományaihoz rendeljük G’ csúcsait és akkor kötünk össze két csúcsot éllel, ha G-ben a két tartománynak van közös határvonala.



11. ábra Gráfok és duálisaik

Gráfelméletből tudjuk, hogy egy S összefüggő síkgráfhoz mindig rendelhető egy S’ összefüggő síkgráf úgy, hogy élnek él, vágatnak hurok, huroknak pedig vágat felel meg.

Hasonlóképpen értelmezhető egy villamos hálózat duálja is, ahol a duálhálózat ágimpedanciája megegyezik az eredeti hálózat ágadmittanciájával.[16]

[16] http://109.74.55.19/tananyag/tananyagok/Jegyzetek/Villamossagtan.pdf

A következő fogalmak egymás duálisai[17]:

Feszültség	Áram
Feszültségforrás	Áramforrás
Rövidzár	Szakadás
Párhuzamos kapcsolás	Soros kapcsolás
Ellenállás	Vezetés (reciprok ellenállás)
Impedancia	Admittancia
Induktivitás	Kapacitás

A következő részek megértéséhez szükséges néhány fogalom ismerete. Lássuk ezeket:

Impedancia: Váltakozó áramú ellenállás, komplex szám, melynek valós része az ohmos ellenállást képzetes része pedig a frekvenciától függő ellenállást jelenti, (amely tekercsnél és kondenzátoroknál van).

Admittancia: az impedancia reciproka, más néven vezetőképesség

Négyzetes mátrix: Olyan mátrix, melynek ugyanannyi oszlopa és sora van.

Diagonális mátrix: Olyan négyzetes mátrix, melynek minden főátlón kívüli eleme nulla.

A Kirchhoff törvények[18]

Kirchhoff I. törvénye: Más néven csomóponti törvény párhuzamos (elágazó) áramkörökre vonatkozik. Az elágazásnál csomópont alakul ki. A törvény kimondja, hogy a csomópontba befolyó áramok összege megegyezik az onnan elfolyó áramok összegével. ($I=I_1+I_2+I_3$...)

[17] A számítástudomány alapjai, Katona Gyula-Recski András-Szabó Csaba, Typotex, Budapest, 2006
[18] http://elektroman.uw.hu/cikkek/kirchhoff.htm

Kirchhoff II. törvénye: Más néven huroktörvény soros kapcsolásra vonatkozik. Azt mondja ki, hogy bármely zárt hurokban az áramköri elemekben lévő feszültségek előjellel helyesen vett összege nulla. Tömörebben $\Sigma U = 0$. ($U=U_1+U_2+U_3...$) Tehát a sorba kapcsolódó fogyasztókra jutó (azokra eső, azokon fellépő, illetve mérhető) feszültségek összege megegyezik a generátor feszültségével.

A Kirchhoff első és második törvényei egymás duálisai.

4.2. A legfontosabb hálózatszámítási módszerek[19]

1. módszer: Csomóponti potenciálok módszere

A csomóponti potenciálok módszere a hálózatszámításnál leggyakrabban alkalmazott módszer. Amennyiben ismerjük a csomópontokban a potenciálok értékét, akkor az élek áramát meghatározhatjuk a potenciálkülönbségek és a köztük lévő ellenállások segítségével. A módszer Kirchhoff áramtörvényén alapszik. Megegyezés szerint a csomópontból kifolyó áramot tekintjük pozitívnak. Az egyenletek felírásánál az áramot úgy írjuk fel, hogy a saját csomópont potenciáljából levonjuk a másik csomópont potenciálját, és ezt osztjuk a két pont közötti ellenállás értékével. Egy csomópont potenciálját megválaszthatjuk (értelemszerűen 0 értékkel), a többi csomópont potenciálját kell meghatároznunk, tehát ha a hálózat „n" csomóponttal rendelkezik, akkor n-1 egyenletet kell felírni.

2. módszer: Hurokáramok módszere

A hurokáramok módszere során a hálózatban felvett hurkokban, gráfokkal megfogalmazva a gráf köreiben folyó áramokat számítjuk ki, majd ezek segítségével határozzuk meg az elemek áramát és feszültségét. A hurkok felvétele során több dologra kell odafigyelnünk:

- egy hurokban csak egy áramforrás lehet,
- egy áramforráson célszerű egy hurkot átvezetni,
- minden huroknak kapcsolatban kell lennie legalább egy másik hurokkal,
- a hálózat minden ágát le kell fedni a hurkokkal,

[19] Jelek és rendszerek I, Gyakorló füzet, Barbarics Tamás, Budapest, 2008

- megfelelő számú hurkot kell felvenni (m = b – n + 1), ahol b a kétpólusok száma.

Megjegyzés: Az egyenletek felírásánál vigyáznunk kell arra, hogy a saját hurok áramát vegyük pozitívnak és a többi, az elemen átfolyó hurokáramot ennek irányához viszonyítsuk.

4.3. Hálózatszámítás gráfmátrixokkal

A hálózat villamos állapotát jellemző mátrixok:

A passzív elemek szempontjából a hálózatot a Z_b illetve Y_b ellenállás-, illetve vezetésmátrix jellemzi. Az ellenállásmátrix bxb méretű négyzetes mátrix. Ha feltételezzük, hogy minden passzív elem külön ágat képvisel, vagyis egy soros R, L, C kapcsolást nem egy, hanem három különböző ágnak veszünk, akkor tiszta szinuszos változás esetén:

$$Z_b = \begin{pmatrix} j\omega L & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{j\omega C} \end{pmatrix}$$

ahol

$$\omega = 2\pi f,$$

a források körfrekvenciáját jelenti.

Ekkor egy olyan mátrixot kapunk, melynek minden eleme is egy mátrix, mert L, R és C is mátrix. Ezért ezt hipermátrixnak is szokás nevezni.

Az admittanciamátrix:

$$Y_b = Z_b^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{j\omega} L^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & R^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \left(\dfrac{1}{j\omega C}\right)^{-1} \end{pmatrix}$$

b tagból álló forrásfeszültség-, és forrásáram-oszlopmátrix jellemzi.

$$U_G = \begin{bmatrix} U_{G1} \\ U_{G2} \\ \cdot \\ \cdot \\ U_{Gb} \end{bmatrix}$$

$$J_G = \begin{bmatrix} J_{G1} \\ J_{G2} \\ \cdot \\ \cdot \\ J_{Gb} \end{bmatrix}$$

A hálózat teljes villamos állapotát ismerjük, ha minden ág áramát és minden ág két végpontjai közti feszültséget ismerjük.

Vezessünk be l darab hurokáramot: $J_1, J_2, \ldots, J_l$. Legyen **J** a hurokáramokat tartalmazó oszlopmátrix. Mivel az **M** hurokágmátrix i-edik oszlopában a +1, -1 vagy 0 azt jelenti, hogy az i-edik ág hozzátartozik-e az 1, 2., …, l-edik hurokhoz és milyen az ág és a hurok irányítása egymáshoz képest, az

$$\mathrm{m}_{\mathrm{i}1}\mathrm{J}_1 + \mathrm{m}_{\mathrm{i}2}\mathrm{J}_2 + \cdots + \mathrm{m}_{\mathrm{il}}\mathrm{J}_\mathrm{l}$$

kifejezés az i-edik ág áramát adja meg. Mivel itt oszlopot oszloppal szoroztunk, ezért ha a hagyományos mátrixszorzás szabályát akarjuk alkalmazni, az **M** mátrix transzponáltját kell vennünk:

$$\mathrm{I} = \mathrm{M}^\mathrm{T} \cdot \mathrm{J}$$

A csomóponti potenciálok módszerének általánosításaként bevezetjük a V_1, V_2, … V_{n-1} független pontpárfeszültségeket vagy a **V** mátrixot. Ehhez a gráf egy fáját használjuk, úgy, hogy a fa valamilyen sorrendben megszámozott ágainak feszültségét választjuk pontpárfeszültségnek. Egy tetszés szerinti ág Ui ágfeszültsége és a V_1, V_2, … V_{n-1} független pontpárfeszültség között (**U** és **V** mátrix között) a következő módon van kapcsolat.

A fát alkotó bármely ág ágfeszültsége azonos az ugyanazon ághoz tarozó értékkel. Egy-egy hídág két csomópontot köt össze, amelyek a fán keresztül, annak több ágát igénybe véve záródnak. Az ágfeszültség ekkor megegyezik a két csomópontot összekötő faágak feszültségeinek előjeles összegével. Az ehhez a fához tartozó **Q** vágásmátrix egy oszlopában lévő q_{i1}, q_{i2}, …, q_{ib} számok megadják, hogy az i-edik ág melyik vágathoz tartozik és milyen irányítással.

Ha a k-adik sorban +1 áll, azaz q_{ik} = +1, akkor az i-edik ág a k-adik vágathoz hozzátartozik. A V_k feszültségű k-adik faág is ehhez tartozik. Ebben az esetben az i-edik ág irányítása megegyezik a vágat, vagyis a k-adik faág irányításával.

Egy-egy ág pontosan azokhoz a vágatokhoz tartozik, amelyeknek megfelelő faág összeköti a két pontot. A két pontot összekötő faágat metsző vágat mindenképpen metszi az adott ágat is, hiszen ha nem metszené, akkor nem esne két részre a hálózat. Valamint az sem lehet, hogy más vágatban is szerepeljen ezen ág, mivel ekkor két faág kerülne a vágatrendszerbe, amit eleve kizártunk.

A

$$q_{i1}V_1+q_{i2}V_2+\ldots+ q_{in-1}V_{n-1}$$

kifejezés az i-edik ágat összekötő faágrendszer előjeles feszültségösszege, ezért egyenlő az i-edik ág feszültségével.

Mátrixos alakban írva:

$$U = Q^T \cdot V$$

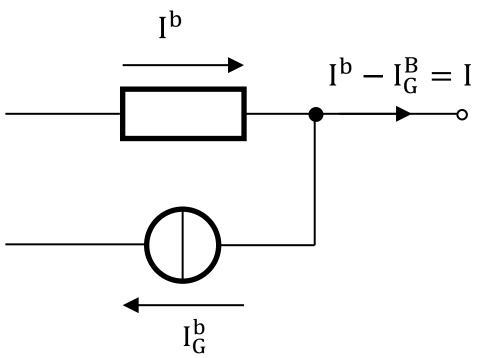
Kirchhoff csomóponti törvénye egyszerűen fölírható a $\mathbf{H_r}$ mátrix segítségével, mivel a mátrix sorai azt mutatják meg, hogy melyik ág fut be a csomópontba, és az milyen irányítással, azaz megadja az áramok előjeleit.

Tehát a

$$h_{i1}I_1 + h_{i2}I_2 + h_{i3}I_3 + \ldots. + h_{ib}I_b,\ \text{ahol } i = 1, 2, \ldots, n\text{-}1$$

kifejezés megadja az i-edik csomópontban találkozó áramok előjeles összegét, tehát 0-val egyenlő. Mátrixos alakban:

$$H_r \cdot I_b = 0 \ \ (\text{n-1 egyenlet}).$$



12. ábra A csomóponti törvény áramgenerátorok esetén

Ha a hálózatot áramgenerátorok is gerjesztik, és mindegyik generátort egy-egy ághoz tartozónak gondolunk, akkor **13. ábra** szerint Kirchhoff törvényét az

$$\mathrm{I} = \mathrm{I_b} - \mathrm{I_G^b}$$

áramra írhatjuk fel, vagyis:

$$\mathrm{H} \cdot \left(\mathrm{I^b} \cdot \mathrm{I_G^b}\right) = 0, \mathrm{H} \cdot \mathrm{I^b} = \mathrm{H} \cdot \mathrm{I_G^b} = -\mathrm{I_G^n}$$

$\mathrm{I_G^n}$ a csomópont felé mutató pozitív irányú gerjesztőáram n tagú oszlopmátrixát jelenti. Kirchhoff első törvénye fölírható

$$\mathrm{Q} \cdot \mathrm{I} = 0$$

alakban is. Ennek igazsága belátható azzal, hogy mindegyik vágat két önálló, egymással kapcsolatban nem álló részre bontja a hálózatot. Töltés egyikben sem halmozódhat fel. Tehát bármely vágathoz tartozó ágakon folyó áramok előjeles összege nulla lesz. A $\mathrm{Q} \cdot \mathrm{I} = 0$ összefüggés éppen ezt jelenti.

Kirchhoff törvényét az **M** mátrixszal fejezhetjük ki a következőképpen:

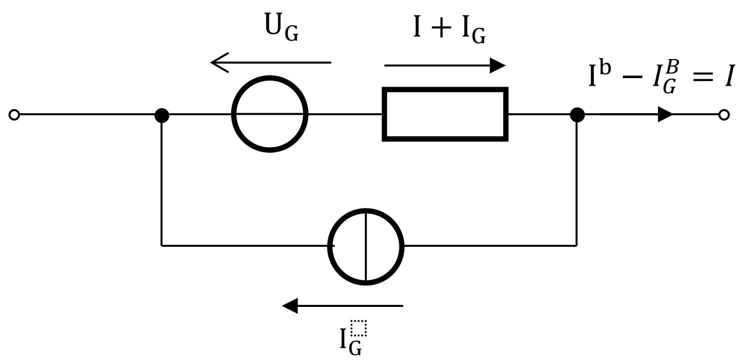
$$\mathrm{M} \cdot \mathrm{U_b} = 0 \text{ (} l \text{ egyenlet).}$$

$\mathbf{U}_b$ jelenti az egyes ágak két végpontja között fellépő feszültséget. A fenti összefüggés egyenletekre bontva fejezi ki, hogy az egy-egy hurokhoz tartozó ágak feszültségeinek előjeles összege éppen nulla.

A

$$\mathrm{H_r} \cdot \mathrm{I_b} = 0 \text{ , és } \mathrm{M} \cdot \mathrm{U_b} = 0$$

összefüggéssel n – 1 + l = b számú egyenletünk van a b darab I_1, …, I_b és a szintén b darab U_1, U_2, … , U_b ismeretlenek számára. Hogy valamelyik mennyiséget kiküszöböljük, összefüggést kell találnunk az **U** és az **I** mátrix között.



13. ábra Az általános hálózat egy tetszőleges ága

A **14. ábra** ábrán egy általános ágat vizsgálunk, amelyen áram- és feszültséggenerátor is van. Adott irányokkal a következő mátrixos alakok írhatók föl: impedanciával kifejezve:

$$\mathrm{U} + \mathrm{U_G} = \mathrm{Z_b} \cdot (\mathrm{I} + \mathrm{I_G})$$

vagy admittanciával kifejezve:

$$\mathrm{I} + \mathrm{I_G} = \mathrm{Y_b} \cdot (\mathrm{U} + \mathrm{U_G})$$

Ha az előző egyenletből kifejezzük **U**-t az **I**-vel, majd behelyettesítjük az

$$\mathrm{M} \cdot \mathrm{U} = 0$$

hurokegyenletbe, akkor a következőket kapjuk meg:

$$\mathrm{U} = \mathrm{Z_b} \cdot (\mathrm{I} + \mathrm{I_G}) - \mathrm{U_G}$$

$$\mathrm{M} \cdot \mathrm{U} = 0 = \mathrm{M} \cdot \mathrm{Z_b} \cdot \mathrm{I} + \mathrm{M} \cdot \mathrm{Z_b} \cdot \mathrm{I_G} - \mathrm{M} \cdot \mathrm{U_G}$$

tehát

$$\mathrm{M} \cdot \mathrm{Z_b} \cdot \mathrm{I} = \mathrm{M} \cdot (\mathrm{U_g} - \mathrm{Z_b} \cdot \mathrm{I_G})$$

Ez l egyenletet jelent b darab I_1, I_2, …, I_b ismeretlen számára. Ekkor bevezetjük az l darab hurokáramra az

$$\mathrm{I} = \mathrm{M^T} \cdot \mathrm{J}$$

összefüggést. A hurokáramokra fölírt alapegyenletet megkapjuk, ha ezt visszahelyettesítjük az

$$\mathrm{M} \cdot \mathrm{Z_b} \cdot \mathrm{I} = \mathrm{M} \cdot (\mathrm{U_G} - \mathrm{Z_b} \cdot \mathrm{I_G})$$

összefüggésbe:

$$(\mathrm{M} \cdot \mathrm{Z_b} \cdot \mathrm{M^T}) \cdot \mathrm{J} = \mathrm{M} \cdot (\mathrm{U_G} - \mathrm{Z_b} \cdot \mathrm{I_G})$$

Analóg egyenlethez jutunk, ha a

$$\mathrm{Q} \cdot \mathrm{I} = 0, \mathrm{M} \cdot \mathrm{U} = 0$$

egyenletekből kiküszöböljük az **I**-t az

$$\mathrm{I} = \mathrm{Y_b} \cdot (\mathrm{U} + \mathrm{U_G}) - \mathrm{I_G}$$

összefüggés segítségével. Ezt a

$$\mathrm{Q} \cdot \mathrm{I} = 0$$

egyenletbe helyettesítve

$$\mathrm{Q} \cdot \mathrm{I} = 0 = \mathrm{Q} \cdot \mathrm{Y_b} \cdot \mathrm{U} + \mathrm{Q} \cdot \mathrm{Y_b}\mathrm{U_G} - \mathrm{Q} \cdot \mathrm{I_G}$$

vagyis

$$\mathrm{Q} \cdot \mathrm{Y_b} \cdot \mathrm{U} = \mathrm{Q} \cdot (\mathrm{I_G} - \mathrm{Y_b} \cdot \mathrm{U_G})$$

Ekkor n-1 darab egyenletünk van b darab U_1, U_2, …, U_b ismeretlenhez. Ha bevezetjük az n-1 számú független pontpárfeszültséget, V_1, V_2, …, V_{n-1}-et az

$$U = Q^T \cdot V$$

összefüggéssel, akkor a pontpárpotenciálokkal fölírt összefüggések a következők:

$$(Q \cdot Y_b \cdot Q^T) \cdot V = Q \cdot (I_G - Y_b \cdot U_G)$$

Tehát n-1 egyenletünk és n-1 ismeretlenünk van.

A két alapösszefüggés a következő:

$$(M \cdot Z_b \cdot M^T) \cdot J = M \cdot (U_G - Z_b \cdot I_G)$$

$$(Q \cdot Y_b \cdot Q^T) \cdot V = Q \cdot (I_G - Y_b \cdot U_G)$$

Összefoglalás: Az első egyenletből a hurokáramok, a másodikból pedig az ágfeszültségek határozhatók meg.

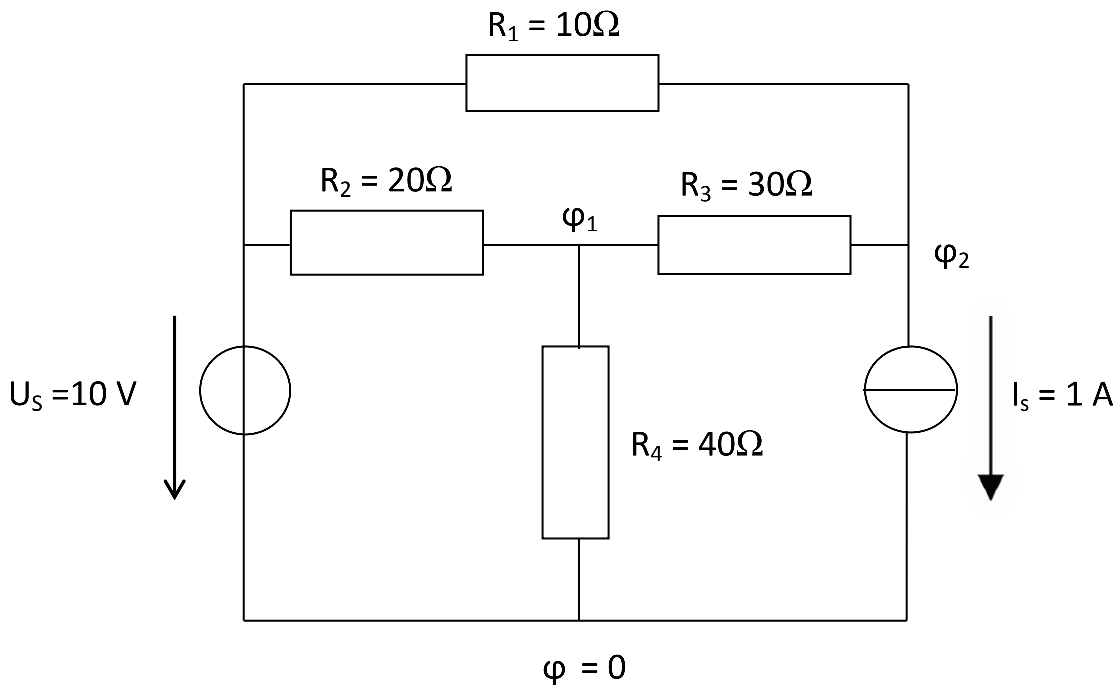
4.4. Példa a dualitás alkalmazására

Példa: A következő oldalakon egy nagyon érdekes matematikai jelenséget mutatok be egy saját magam által kitalált hálózaton.

Korábban bemutattam a két leggyakrabban használt hálózatszámítási módszert, a csomóponti- és a hurokáramok módszerét, melyet a villamosmérnökök gyakran alkalmaznak. Ezzel fogom kiszámítani az áramkört leíró csomóponti egyenleteket.

Ezután a hálózat gráfját fölrajzolva megadom ennek duálgráfját és a duálhálózatot, és a gráfmátrixokat. A duálhálózatra Kirchhoff 2. törvénye alapján felírom a hurokegyenleteket. És megmutatom, hogy a duálhálózat hurokegyenletei megegyeznek az eredeti hálózat csomóponti egyenleteivel, vagyis teljesül rá a dualitás elve, miszerint Kirchhoff törvények egymás duálisai.

Lássuk az eredeti hálózatot:



14. ábra A hálózat áramköri rajza

A hálózatban 4 csomópont található, melyek közül az egyiket, (mindegy melyiket) „0" csomópontnak nevezzük el. A másik három csomópontot hívjuk φ_0, $\varphi_1$és φ_2-nek, melyek feszültségeket jelentenek. A feszültségek értékét az alábbi egyenletekből fogjuk megkapni. Két csomópont közti feszültség megegyezik a potenciálkülönbséggel, tehát φ_1-től φ_2 felé mutató feszültség φ_1-φ_2. φ_1-től φ_2 felé folyó áramot pedig úgy kapjuk, hogy $(\varphi_1-\varphi_2)/R_3$.

Egy n csomópontú hálózat esetén mindig n-1 csomóponti egyenletre van szükségünk, ugyanis az egyiket referenciapontnak tekintjük, és ehhez viszonyítjuk a többi pont feszültségét, ezt nevezzük „0" csomópontnak. Ha Kirchhoff 2. törvénye alapján a hurokegyenleteket szeretnénk meghatározni, akkor $b - n + 1$ egyenletet kell felírnunk, ahol b a kétpólusok száma, n pedig továbbra is a csomópontoké.

Mivel a „0" és a φ_0 csomópont között csak egy feszültségforrás van, amely φ_0-tól a „0" felé mutat, így φ_0 feszültség kiszámításához nincs szükség külön egyenletre, mivel φ_0-„0"=Us, azaz a φ_0 feszültség megegyezik U_s feszültséggel.

Kirchhoff 1. törvénye kimondja, hogy egy csomópontba befolyó áramok összege 0.

Ez alapján felírhatók a következő egyenleteket φ_1-re és φ_2-re:

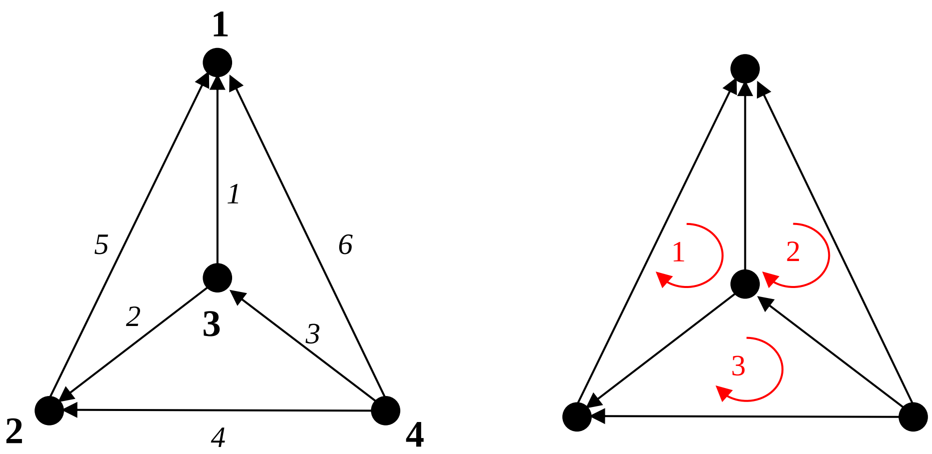
$$\varphi_1\text{: } \frac{\varphi_1}{R_4} + \frac{\varphi_1 - U_S}{R_2} + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R_3} = 0$$

$$\varphi_2\text{: } \frac{\varphi_2 - U_s}{R_1} + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{R_3} + i_s = 0$$

Az áram a feszültség és az ellenállás hányadosa: $I = \frac{U}{R}$, ahol a mértékegységek Amper=Volt/Ohm.

A hálózat gráfjának lerajzolása:

K_4 gráfot kapjuk, melyben a hálózatbeli ágak lesznek a gráf élei, a hurkok, pedig a gráf körei. K_4 duálisa szintén K_4, tehát a duálhálózat gráfja is ugyanez.



15. ábra A hálózat gráfja

$$U_G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ U_S \end{bmatrix} \qquad I_G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I_s \\ 0 \end{bmatrix}$$

A gráf alapján a hálózat ellenállásmátrixa:

$$Z_b = \begin{pmatrix} R_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Megjegyzés: Mivel nincsenek benne csatolt tekercsek, ezért diagonális mátrixot kaptunk.

Admittanciamátrixa:

$$Y_b = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A gráfot jellemző mátrixok:

Hurokágmátrix vagy körmátrix:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

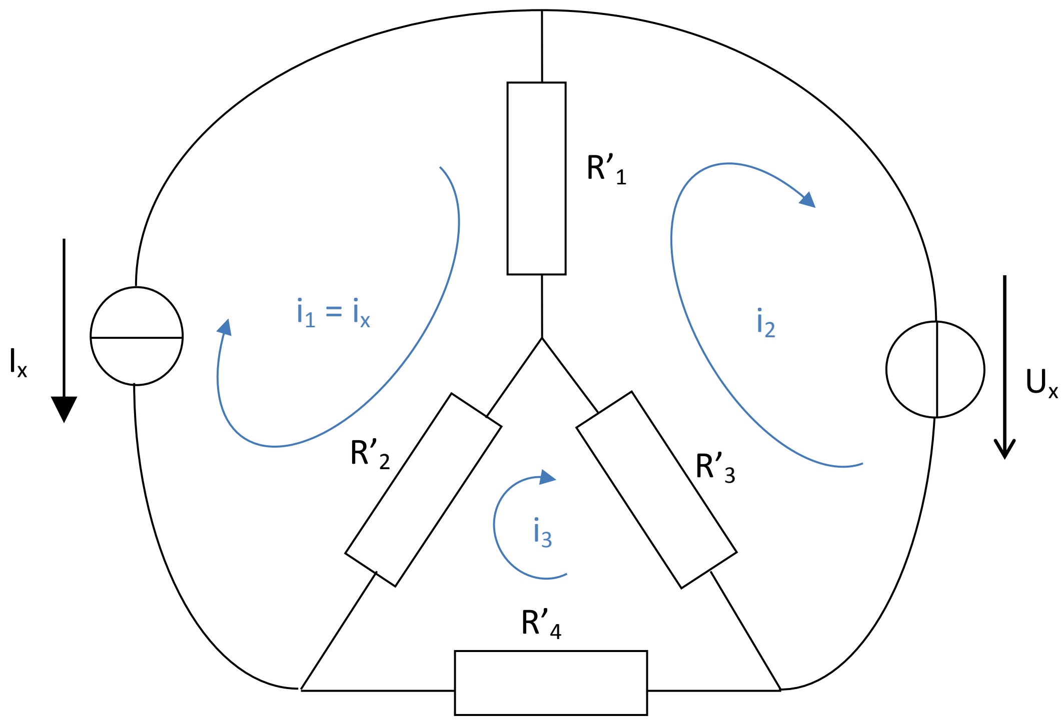
Csomópont-ág mátrix:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Vágatmátrix vagy más néven vágásmátrix:

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A duálhálózatban huroknak vágat, vágatnak hurok felel meg, ezért a következőképpen fog kinézni:



16. ábra A hálózat duálisának áramköri rajza

A hálózaton felvettem a hurokáramokat, i_1, i_2, i_3-at.

$$i_2\colon (i_2 - i_x)\cdot R_1' + (i_2 - i_3)\cdot R_3' - U_x$$

$$i_3 \ : \ \ (i_3 - \ i_x\,)R_2' + i_3 R_4' \ + (i_3 - i_2)R_3' \ \ = \ \ 0$$

$$R_1' \ = \frac{1}{R_1} \qquad R_2' \ = \frac{1}{R_2} \qquad R_3' \ = \frac{1}{R_3} \qquad R_4' \ = \frac{1}{R_4}$$

Átrendezve, behelyettesítve:

$$i_2 \ : \quad \frac{i_2 - i_x}{R_1} + \frac{i_2 - i_3}{R_3} + \ U_x \ = 0$$

$$i_3 \ : \quad \frac{i_3 - i_x}{R_2} + \frac{i_3 - i_2}{R_3} + \frac{i_3}{R_4} = 0$$

Ahhoz hogy az eredeti h egyenleteit formálisan visszakapjuk, a következő helyettesítések szükségesek:

$$i_3 \ \to \varphi_1 \qquad i_2 \ \to \varphi_2 \qquad i_x \ \to U_s \qquad U_x \ \to \ i_s$$

Megjegyzés: Az egyenletek formálisan megegyeznek, de fizikailag nem értelmezhető mennyiségeket kapunk. Az alakja a csomóponti egyenletekre hasonlít, és az áramértékekre ugyanazok a számértékek jönnek ki, mint az eredeti hálózat potenciáljaira, ám itt amper/ohm lenne a mértékegysége, ami nem értelmes fizikailag.

Megjegyzés: A hálózati dualitást a valóságban nem alkalmazzák, ez inkább csak egy matematikai érdekesség.

Összegzés

Végigtekintve a dolgozatomon, úgy érzem sikerült megvalósítanom, amit elterveztem. Hosszú kutató munka előzte meg a megírás folyamatát. Ebben a tanévben az ELTE matematika szakja mellett vendéghallgatója voltam a BME Villamosmérnöki Karának is. A dolgozatomban mind a két egyetemen szerzett ismereteimre nagy szükség volt. A matematika szak segített a klasszikus gráfelméleti problémák rendszerezésében. A villamosmérnöki szakon tanultak pedig a matematika műszaki gyakorlatban való alkalmazásánál bizonyultak rendkívül hasznosnak. Külön öröm volt számomra, hogy a BME-n felvett szabadon választott tantárgyaim gráfelmélettel való kapcsolatára is rátaláltam, és egy önálló példán keresztül ezt sikerült is kifejtenem. A dolgozatban előkerülő gráfelméleti problémák, például a síkgráfok, a dualitás, valamint annak alkalmazása a villamos hálózatokban, számomra esztétikai élményt is jelentettek. Remélem az olvasó számára is hasonló élményt adott majd a dolgozatom.

Ábrajegyzék

Források

- Sokszínű matematika 11. középiskolai tankönyv, Szeged, Mozaik kiadó, 2010.
- http://wiki.vmg.sulinet.hu/doku.php?id=matematika:kombinatorika:grafelmelet
- http://tudasbazis.sulinet.hu/hu/matematika/matematika/matematika-11-osztaly/grafelmeleti-alapfogalmak-tetelek/izomorf-grafok
- A számítástudomány alapjai, Katona Gyula-Recski András-Szabó Csaba, Typotex, Budapest, 2006
- Jelek és rendszerek I. Gyakorló füzet, Barbarics Tamás, Budapest, 2008
- www.cs.bme.hu/~sali/bsz1/bsz1218.ppt
- Elméleti villamosságtan, Simonyi Károly, Tankönyvkiadó, Budapest. 11. átdolgozott kiadás 1991
- file:///C:/Users/Oszt%C3%A1lyvezet%C5%91%20%C3%9Ar/Downloads/jegyzet_sikgraf.pdf
- http://hu.wikibooks.org/wiki/Komplex_anal%C3%ADzis/Topologikus_fogalmak
- http://www.cs.elte.hu/~frank/jegyzet/graf/graf.2013.pdf
- http://www.cs.elte.hu/~frank/jegyzet/graf/graf.2013.pdf
- http://hu.wikipedia.org/wiki/Petersen-gr%C3%A1f
- http://www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tkt/uj-matematikai-mozaik-uj/ar19s06.html
- http://109.74.55.19/tananyag/tananyagok/Jegyzetek/Villamossagtan.pdf
- http://www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tkt/uj-matematikai-mozaik-uj/ar19s06.html
- http://109.74.55.19/tananyag/tananyagok/Jegyzetek/Villamossagtan.pdf
- http://elektroman.uw.hu/cikkek/kirchhoff.htm
- http://www.math.u-szeged.hu/~hajnal/courses/MSc_Diszkret/MSc_kombi09/ea09_szabo.pdf