EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

FELADATOK A GRÁFOK ÖSSZEFÜGGŐSÉGÉRŐL

SZAKDOLGOZAT

KÉSZÍTETTE:
BODOR ANDREA
MATEMATIKA BSC
TANÁRI SZAKIRÁNY

TÉMAVEZETŐ:
FRENKEL PÉTER
ALGEBRA ÉS SZÁMELMÉLET TANSZÉK
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR
EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

BUDAPEST

2014

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Szakdolgozatomban a gráfok összefüggőségének témakörében Lovász László: Kombinatorikai problémák és feladatok című könyve 6. fejezetének néhány feladatát dolgoztam fel. A dolgozatban bemutatott feladatok közül, néhány feladathoz a könyvben nem szereplő kiegészítő megjegyzéseket fűztem, melyek a következők. Az 1. feladathoz, az 1.1 megjegyzésben a feladat kifejezetten egyenlőségre vonatkozó állítását bizonyítom. Majd az 1.2 szakaszban a hipergráfok néhány tulajdonságát fogalmazom meg. Az 1. feladatban szereplő állítás alapján megfogalmazom az állítás általánosítását a *k-uniform* hipergráfokra, majd bizonyítom. A 4.2 példában két konkrét gráf gyenge direkt szorzatát mutatom be, a 3. ábra segítségével. Majd a 4.3 állításban mondom ki, és bizonyítom be a több tényezős direkt szorzat esetére vonatkozó összefüggőségi feltételt. A 4.4 állításban kéttényezős direkt szorzatra fogalmazom meg és bizonyítom be, hogy amennyiben mindkét tag külön-külön tartalmaz páratlan kört, akkor a direkt szorzatuk is tartalmaz. Az 5.1 példában a 4. ábra segítségével mutatok be egy *3-reguláris* páros gráfot, mely pontosan kétszeresen összefüggő. Majd az 5.2 példában az eljárást általános *k-reguláris* páros gráfra ismertetem. A 11. feladat a. és b. pontjában a 11. feladatot példával illusztráltam.

1. Feladat

Legyen G gráf, melynek komponenseinek száma $c(G)$, élei száma $|E(G)|$ és a csúcsai száma $|V(G)|$. Mutassuk meg, hogy $c(G)+|E(G)| \geq |V(G)|$ minden gráfra fennáll. [1. - 6. fejezet 1.]

Bizonyítás:

Az élek számára vonatkozó indukcióval bizonyítjuk az állítást. Tekintsük kezdetben azt a gráfot, melynek élei száma 0. Mivel ekkor G csak izolált pontokból áll, így annyi komponense van G-nek, ahány pontja, azaz ha $|E(G)|=0$, akkor $c(G)=|V(G)|$. Ha a G gráfban vannak élek, tehát legyen $e \in E(G)$-nek, akkor azt biztosan tudjuk, hogy $c(G) \geq c(G-e)-1$, hiszen az e él vagy $G-e$ két olyan pontját köti össze, melyek egy komponensen belül vannak, vagy két olyan pontját, melyek különböző komponensben voltak. Így tehát vagy ugyanannyi komponens marad, vagy 1-gyel csökken a komponensek száma. Azt is tudjuk, hogy $|E(G)|=|E(G-e)|+1$, hiszen egy él behúzásával az élek száma 1-gyel nő. Az indukciós feltevés szerint $c(G-e)+|E(G-e)| \geq |V(G-e)|=|V(G)|$, mert egy él elvételével a pontok száma nem változott. Így felhasználva, hogy a $c(G) \geq c(G-e)-1$, valamint az $|E(G)|=|E(G-e)|+1$ kapjuk, hogy

$$c(G)+|E(G)| \geq c(G-e)-1+|E(G-e)|+1 = c(G-e)+|E(G-e)| \geq |V(G)|,$$

$$c(G)+|E(G)| \geq |V(G)|.$$

1.1. Megjegyzés:

A $c(G)+|E(G)|=|V(G)|$ minden G erdőre igaz, és semmilyen más gráfra nem igaz.

Bizonyítás:

Tekintsünk egy izolált pontokból álló gráfot. Ekkor felírhatjuk, hogy $c(G)=|V(G)|$, tehát az állítás igaz. Ha behúzunk egy élt, akkor azt kapjuk, hogy a $c(G)-1+|E(G)|+1=|V(G)|$. Az állítás addig nem változik, míg két különböző komponens között húzunk be élt. Ilyen lépésekkel minden erdő megkapható az üres gráfból, ezért minden erdőre igaz a vizsgált egyenlőség. Minden gráf megkapható egy erdőből olyan lépésekkel, hogy egy komponensen belül húzunk be élt és ilyen lépésnél a komponensek száma és a csúcsszám nem változik, az élek száma nő, ezért csak erdőkre van egyenlőség.

1.2. A *k-uniform* hipergráf

1.2.1. Definíció Hipergráf (Halmaz-rendszer): A H hipergráf pontok egy véges $V(H)$ halmazából, élek egy véges $E(H)$ halmazából és egy hozzárendelésből áll, mely minden E élhez hozzárendeli $V(H)$ egy részhalmazát, E végpontjait (elemeit). Jelölése: $H = (V(H), E(H))$. Azonos végpontokkal rendelkező két él párhuzamos. A hipergráf egyszerű, ha nem tartalmaz párhuzamos éleket. Ebben az esetben $E(H)$-t tekinthetjük úgy, mint $V(H)$ részhalmazainak egy halmazát. Egy él illeszkedik egy ponthoz, ha a pont az él egyik végpontja. A hipergráf *k-uniform*, ha minden élnek k végpontja van. A *2-uniform hipergráfokat* azonosíthatjuk a hurokmentes gráfokkal. Az n pontú teljes *k-uniform hipergráf* egy olyan egyszerű hipergráf, mely a pontjainak minden k elemű részhalmazát tartalmazza élként. Jelölése: K_n^k. [1. - 639.old.]

1.2.2. Definíció (Rész-hipergráf): A H hipergráf rész-hipergráfja egy olyan H' hipergráf, melyre $V(H') \subseteq V(H)$, $E(H') \subseteq E(H)$. [1.- 645.old.]

1.2.3. Definíció (Hiperút): Egy H hipergráfban hiperútnak nevezünk egy olyan $(x_1, e_1, ..., x_k, e_k, x_{k+1})$ sétát, melyben az $(x_1, ..., x_k, x_{k+1})$ különböző pontok, és az $e_1, ..., e_k$ különböző hiperélek.

1.2.4. Definíció (Összefüggő hipergráf): Az összefüggő hipergráf olyan hipergráf, amely nem reprezentálható $H_1 \cup H_2$ alakban, ahol H_1 és H_2 pont-diszjunkt nem üres hipergráfok, azaz a hipergráf bármely két pontját hiperút köti össze. [1. - 642. old.]

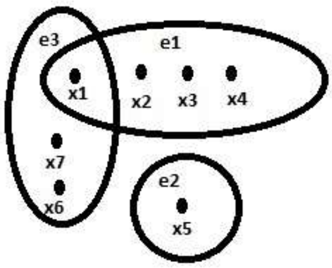
1.2.5. Definíció (Hiperkör): Egy H hipergráfban hiperkörnek nevezünk egy olyan $(x_1, e_1, ..., x_k, e_k, x_{k+1})$ sétát, melyben az $(x_1, ..., x_k)$ különböző pontok, az $e_1, ..., e_k$ különböző hiperélek és $x_1 = x_{k+1}$.

1.2.6. Definíció (Hipergráf erdő): A hipergráf erdő egy olyan hipergráf, amely nem tartalmaz hiperkört.

1.2.6.1. Megjegyzés: A definícióból következik, hogy ekkor minden komponens hiperfa.

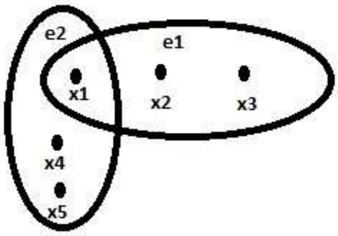
1.2.7. Definíció (Hiperfa): A hiperfa egy olyan hipergráf, amely hiperkörmentes és összefüggő.

1.2.8. Definíció (Hipergráf komponense): Egy H hipergráf komponense (vagy összefüggő komponense) minden maximális (nem bővíthető) összefüggő részhipergráfja. H bármely két komponense pontdiszjunkt, és minden pont (és él) pontosan egy komponensbe tartozik.



1. ábra

hipergráf



2. ábra

k-uniform hipergráf, ahol k=3

1.2.9. Az 1. feladat általánosítása *k-uniform* hipergráfokra:

Mutassuk meg, hogy $c(H) + |E(H)| \cdot (k-1) \geq |V(H)|$ minden *k-uniform* hipergráfra fennáll.

Bizonyítás:

Az élek számára vonatkozó indukcióval bizonyítjuk az állítást. Tekintsük kezdetben azt a H hipergráfot, melynek élei száma 0. Mivel ekkor H csak izolált pontokból áll, így annyi komponense van H-nak, ahány pontja, azaz ha $|E(H)| = 0,$ akkor $|E(H)| \cdot (k-1) = 0,$ $c(H) = |V(H)|$ és a bizonyítandó állítás igaz. Ha a H hipergráfban vannak élek, azaz legyen $e \in E(H)$-nak, akkor azt tudjuk, hogy $c(H) \geq c(H-e)-(k-1)$, hiszen az e élt $\leq k$ komponens között húzhatjuk be és ekkor a komponensek száma, azaz $c(H)$ maximum $(k-1)$-gyel csökken. Azt is tudjuk, hogy $|E(H)| = |E(H-e)| + 1,$ hiszen egy él behúzásával az élek száma 1-gyel nő. Indukcióval:

$$c(H-e) + |E(H-e)| \cdot (k-1) \geq |V(H-e)| = |V(H)|, \text{ így}$$

$$c(H) + |E(H)| \cdot (k-1) \geq c(H-e) - (k-1) + |E(H-e)| \cdot (k-1) + k - 1 =$$

$$c(H-e) + |E(H-e)| \cdot (k-1) \geq |V(H)|.$$

1.2.9.1. Megjegyzés: A $c(H) + |E(H)| \cdot (k-1) = |V(H)|$ minden *k-uniform* hipergráf erdőre igaz és semmilyen más *k-uniform* hipergráfra nem igaz.

Bizonyítás:

Ha H csak izolált pontokból áll, akkor annyi komponense van H-nak, ahány pontja. Minden H *k-uniform* hipererdő megkapható úgy izolált pontokból, hogy k különböző komponens között húzunk be éleket. Ekkor egy él behúzásával a csúcsszám nem változik, a komponensek száma $k-1$-gyel csökken és az élek száma eggyel nő. Azaz,

$$c(H) + |E(H)| \cdot (k-1) = |V(H)|$$

$$c(H) - (k-1) + (|E(H)| + 1) \cdot (k-1) = |V(H)|$$

$$c(H) - (k-1) + |E(H)| \cdot (k-1) + (k-1) = |V(H)|.$$

Ekkor a megjegyzésben megjelölt állítás igaz marad. Minden *k-uniform* hipergráf megkapható egy *k-uniform* hipererdőből olyan lépésekkel, hogy *k*-nál kevesebb komponensen belül húzunk be hiperélt és ilyen lépésnél a csúcsszám nem változik, a komponensek száma $k-1$-nél kisebb mértékben fog csökkenni, a hiperélek száma egy él behúzásával pedig 1-gyel nő, ezért csak hipererdőkre van egyenlőség.

2. Feladat

(a) Legyen G_1, G_2 **két gráf, melyekre** $V(G_1) = V(G_2)$. **Mutassuk meg, hogy** $c(G_1) + c(G_2) \le c(G_1 \cup G_2) + c\left(G_1 \cap G_2\right)$.

(b) Ez a $V(G_1) = V(G_2)$ **feltevés nélkül is igaz.** [1. - 6. fejezet 2.]

Bizonyítás:

(a)

Legyenek G_1 és G_2 gráfok, és tekintsük a G_1 és G_2 komponenseit. G_1 komponensei felírhatók $S_1, ..., S_{c(G_1)}$, és G_2 komponensei $T_1, ..., T_{c(G_2)}$ jelöléssel. Készítsünk el egy olyan G^* páros gráfot, melynek csúcsai a G_1 és G_2 komponensei, azaz $V(G^*) = \left\{s_1, ..., s_{c(G_1)}, t_1, ..., t_{c(G_2)}\right\}$ és melyekre igaz, hogy G_1 és G_2 komponensei csak abban az esetben vannak összekötve egymással, ha $S_i \cap T_j \ne \emptyset$. Válasszuk H-nak a G^* gráf egy komponensét. Ekkor definiáljuk $\tilde{H}$-t: $\tilde{H} = \bigcup_{(s_i, t_j) \in E(H)} (S_i \cap T_j)$.

Tegyük fel, hogy az (x, y) él eleme a G_1 vagy G_2 gráfban futó élek halmazának, azaz $(x, y) \in E(G_1 \cup G_2)$ és $x \in \tilde{H}$. Legyen (x, y) eleme G_1 élei halmazának, és $x \in S_i \cap T_j$. Mivel az S_i a G_1 egy komponense, $y \in S_i$. Legyen $y \in T_{j_0}$. Ha G_1 egy komponense (s_i) eleme a H csúcshalmazának, (s_i, t_{j_0}) eleme H élhalmazának, akkor $S_i \cap T_{j_0} \subseteq \tilde{H}$, $y \in \tilde{H}$. Így $\tilde{H}$ a $G_1 \cup G_2$ bizonyos komponenseiből áll, ami miatt $c(G_1 \cup G_2) \ge c(G^*)$. Ha $S_i \cap T_j \ne \emptyset$, akkor $S_i \cap T_j$ a $G_1 \cap G_2$ bizonyos komponenseiből áll, így $c(G_1 \cap G_2) \ge \left|E(G^*)\right|$. Az 1. feladatban bizonyított

$$c(G) + \left|E(G)\right| \ge \left|V(G)\right|$$

állítás alapján

$$c(G_1 \cup G_2) + c(G_1 \cap G_2) \ge c(G^*) + \left|E(G^*)\right| \ge \left|V(G^*)\right| = c(G_1) + c(G_2).$$

(b)

Legyen $V = V(G_1) \cup V(G_2)$ és $V - V(G_i)$ pontjait izolált pontokként adjuk hozzá G_i-hez. Az így kapott gráf legyen G_i'. Ekkor

$$V(G_1') = V(G_2') = V,$$

$$c(G_i') = c(G_i) + |V| - |V(G_i)|,$$

$$c(G_1' \cap G_2') = c(G_1 \cap G_2) + |V| - |V(G_1 \cap G_2)|,$$

$$c(G_1' \cup G_2') = c(G_1 \cup G_2).$$

A feladat (a) pontja szerint

$$c(G_1' \cup G_2') + c(G_1' \cap G_2') \geq c(G_1') + c(G_2').$$

Tehát

$$c(G_1 \cup G_2) + c(G_1 \cap G_2) = c(G_1' \cup G_2') + c(G_1' \cap G_2') -$$

$$-|V| + |V(G_1 \cap G_2)| \geq c(G_1') + c(G_2') - |V| + |V(G_1 \cap G_2)| =$$

$$= c(G_1) + c(G_2) + |V| - |V(G_1)| - |V(G_2)| + |V(G_1 \cap G_2)| = c(G_1) + c(G_2).$$

3. Feladat

Legyen $d_1 \leq \ldots \leq d_n$ egy egyszerű G gráf fokszámai és tegyük fel, hogy $d_k \geq k$ minden $k \leq n - d_n - 1$ esetén. Ekkor G összefüggő. [1. - 6. fejezet 3.]

Bizonyítás:

Legyen G gráf, melyre $|V(G)| = n$, $V(G) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Tegyük fel indirekt módon, hogy a G gráf nem összefüggő. Legyen továbbá G_1 egy x_n-t nem tartalmazó komponens és $|G_1| = k$, $V(G_1) = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\}$, ahol $1 \leq i_1 < \ldots < i_k < n$. Az x_n-t tartalmazó komponens legyen G_2, amelyben legalább $d_n + 1$ pont van és n pont esetén legfeljebb $n - 1$ lehet a fokszám, azaz $d_n \leq n - 1$, amiből $d_n + 1 \leq n$ adódik.

$$|V(G)| \geq |V(G_1)| + |V(G_2)|$$

$$n \geq k + (d_n + 1)$$

$$k \leq n - d_n - 1.$$

Továbbá $d_k \leq d_{i_k} \leq k - 1$, ami ellentmond a feltétel szerinti $d_k \geq k$-nak.

4. Feladat

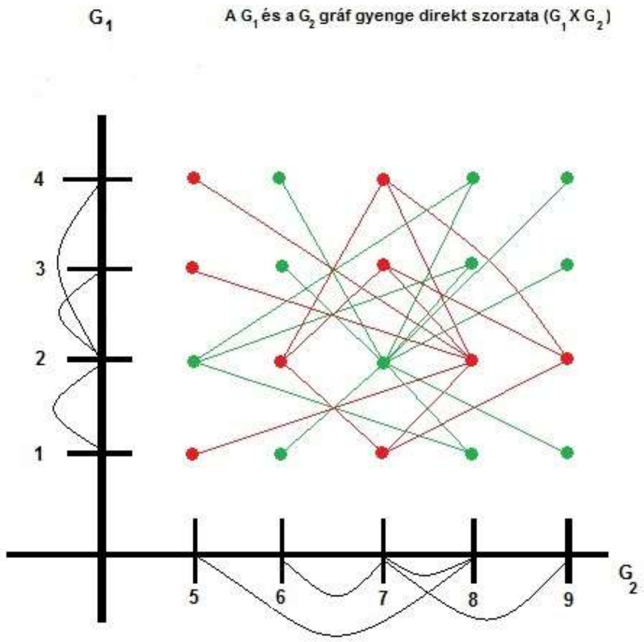
Mutassuk meg, hogy $G_1 \times G_2$ akkor és csak akkor összefüggő, ha G_1, G_2 összefüggőek és egyikük tartalmaz páratlan kört. [1. - 6. fejezet 4.]

4.1. Definíció (Gyenge direkt szorzat): Két egyszerű G_1 és G_2 gráf $G_1 \times G_2$ (gyenge) direkt szorzatát a következőképpen értelmezzük:

$$V(G_1 \times G_2) = V(G_1) \times V(G_2),$$

$$E(G_1 \times G_2) = \{((x_1, x_2),(y_1, y_2)) : (x_1, y_1) \in E(G_1), (x_2, y_2) \in E(G_2)\}.$$ [1. - 645. old.]

4.2. Példa ($G_1 \times G_2$ **)**-re:



3. ábra

$G_1 \times G_2$ gráf

A példában G_1 és G_2 összefüggő gráfok, de egyikükben sincs páratlan kör, így $G_1 \times G_2$ nem összefüggő.

Bizonyítás:

Először azt bizonyítjuk, hogy ha G_1 és G_2 gráfok összefüggőek és egyikük tartalmaz páratlan kört, akkor $G_1 \times G_2$ összefüggő. Ehhez tegyük fel, hogy G_1 és G_2 összefüggőek és G_1 tartalmaz egy C páratlan hosszú kört. Ha van G_1-ben egy l hosszú (x, y) séta, akkor van $l+2$ hosszú is, mert séta esetében egy élen oda-vissza mehetünk. Tehát meg kell mutatnunk, hogy G_1-ben van páros és páratlan hosszú (x, y) séta. Mivel G_1 összefüggő így biztosan van egy olyan (x, y) séta, ami metszi a C-t, tehát ha ehhez a sétához hozzáadjuk a C-t, akkor bármilyen paritású is volt, ellentétes paritású sétát kapunk. Most vegyük $G_1 \times G_2$ két pontját, ezek legyenek (x,u) és (y,v). G_2 tartalmaz egy sétát u és v között, azaz $(u = u_0, u_1, ..., u_k = v)$. Tegyük fel, hogy ez a séta nagyon hosszú. Mivel egy élen többször is mehetünk, azaz egy csúcsot többször is meglátogathatunk, így G_1 tartalmaz egy ugyanolyan hosszúságú sétát, azaz $(x = x_0, x_1, ..., x_k = y)$. Tehát $((x_0, u_0), (x_1, u_1), ..., (x_k, u_k))$ egy (x,u) és (y,v)-t összekötő séta $(G_1 \times G_2)$-ben.

Megfordítva, ha $(G_1 \times G_2)$ összefüggő, akkor G_1 és G_2 összefüggő. Továbbá tegyük fel, hogy G_1 és G_2 páros gráfok, azaz nem tartalmaznak páratlan hosszú kört, és legyen $V(G_1) = A_1 \cup B_1, V(G_2) = A_2 \cup B_2$ egy *2-színezésük*. Ekkor $(G_1 \times G_2)$ egyetlen éle sem köti össze $(A_1 \times A_2) \cup (B_1 \times B_2)$-t és $(A_1 \times B_2) \cup (B_1 \times A_2)$-t, ami ellentmondás.

4.3. Állítás: Mutassuk meg, hogy $G_1 \times G_2 \times ... \times G_n$ akkor és csak akkor összefüggő, ha $G_1, G_2, ..., G_n$ összefüggőek és legalább $n-1$ tényező tartalmaz páratlan kört.

Bizonyítás:

Tegyük fel, hogy $G_1, G_2, \dots, G_n$ összefüggőek és közülük legalább $n-1$ tényező tartalmaz páratlan kört. Feltehetjük, hogy $G_2, ..., G_n$ tartalmaz páratlan kört. Ekkor $G_1 \times G_2$ a *4. feladat bizonyítása* alapján egy összefüggő gráf. Ezután vegyük G_3 gráfot, amelyről tudjuk, hogy összefüggő és tartalmaz páratlan kört, így $G_1 \times G_2 \times G_3$ egy összefüggő gráf, hiszen az első két tényező szorzata is összefüggő volt. Az eljárást folytatva kapjuk, hogy $G_1 \times ... \times G_n$ összefüggő gráf lesz.

Megfordítva, ha $(G_1 \times G_2 \times ... \times G_n)$ összefüggő, akkor minden G_i és minden $G_i \times G_j$ összefüggő ahol $(1 \le i, j \le n)$, $(i \ne j)$. Továbbá tegyük fel, hogy $G_1,...,G_n$ közül legalább két páros gráf van, azaz nem tartalmaznak páratlan hosszú kört. Legyen, $G_k, G_f \in \{G_1,...,G_n\}$. Továbbá tegyük fel, hogy G_k és G_f páros gráfok és legyen, $V(G_k) = A_k \cup B_k$, $V(G_f) = A_f \cup B_f$ egy *2-színezésük*. Ekkor $(G_k \times G_f)$ egyetlen éle sem köti össze $(A_k \times A_f) \cup (B_k \times B_f)$-t és $(A_k \times B_f) \cup (B_k \times A_f)$-t, ami ellentmondás.

4.4. Állítás: A $G_1 \times G_2$ gráf akkor és csak akkor összefüggő és tartalmaz páratlan hosszú kört, ha a G_1 és G_2 gráf összefüggő és van benne páratlan hosszú kör.

Bizonyítás:

Tegyük fel, hogy G_1 és G_2 összefüggő és mindkét gráf tartalmaz páratlan hosszú kört. Mivel a $G_1 \times G_2$ összefüggőségét már beláttuk a *4. feladat bizonyításában*, így azt kell bizonyítanunk, hogy két páratlan kör szorzata tartalmaz páratlan kört. Ehhez elég belátni, hogy $G_1 \times G_2$ tartalmaz páratlan körsétát. Vegyünk G_1-ben egy nagyon hosszú körsétát, amely tartalmaz egy C_1 páratlan hosszú kört, és így páratlan hosszú sétát kapunk. Majd vegyünk G_2-ben egy ugyanolyan hosszú körsétát, amely tartalmaz egy C_2 páratlan kört. Mivel G_2-ben egy ugyanolyan hosszú körsétát vettünk, mint G_1-ben így a G_2 beli körséta is páratlan hosszú, mert egy élen többször is átmehetünk, azaz egy csúcsot többször is meglátogathatunk. G_1 és G_2 tartalmaz egy ugyanolyan hosszúságú sétát, azaz G_1 az $(x = x_0, x_1,..., x_n = x)$ körsétát és G_2 az $(y = y_0, y_1,..., y_n = y)$ körsétát. Így $((x_0, y_0),(x_1, y_1),...,(x_n, y_n))$ egy (x, y)-t és (x, y)-t összekötő körséta $(G_1 \times G_2)$-ben. Mivel G_1-ben és G_2-ben páratlan volt a lépések száma, így $(G_1 \times G_2)$-ben is páratlan hosszú körsétát kapunk.

Megfordítva, ha $(G_1 \times G_2)$ tartalmaz páratlan kört, amely tegyük fel, hogy $((x, y) = (x_0, y_0),(x_1, y_1),...,(x_n, y_n) = (x, y))$, akkor ez egy n lépésből álló páratlan hosszú körséta, melyből G_1-ben és G_2-ben szintén n lépésszámú $(x = x_0, x_1,..., x_n = x)$, $(y = y_0, y_1,..., y_n = y)$ koordinátájú körséták adódnak. Mivel n

páratlan volt, így ebből következik, hogy a G_1-ben az $(x = x_0, x_1, ..., x_n = x)$ körséta is páratlan, illetve a G_2-ben az $(y = y_0, y_1, ..., y_n = y)$ körséta is páratlan.

5. Feladat

Minden $k-$ *reguláris páros* $(k \geq 2)$ összefüggő gráf kétszeresen összefüggő.

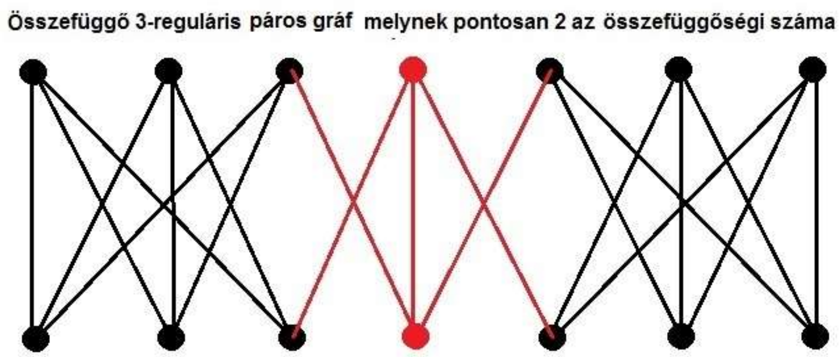
[1. - 6. fejezet 5.]

Bizonyítás:

Tegyük fel, hogy $G = G_1 \cup G_2$, és egyetlen közös csúcsuk van, azaz $V(G_1) \cap V(G_2) = \{x\}$, $|V(G_i)| \geq 2$. Ekkor $1 \leq d_{G_1}(x) \leq k-1$, mivel x-ből csak maximum $k-1$ él futhat ki. Másrészről pedig $d_{G_1}(y) = k$ minden $y \in V(G_1) - \{x\}$ pontra. Vegyük G_1 két színosztályának pontjait, melyek legyenek $u_1, ..., u_r, x; v_1, ..., v_s$.

Ekkor $|E(G_1)| = d_{G_1}(u_1) + ... + d_{G_1}(u_r) + d_{G_1}(x) = d_{G_1}(v_1) + ... + d_{G_1}(v_s)$, mivel minden u és v pontból k él fut ki, így $k \cdot r + d_{G_1}(x) = k \cdot s,$ és így $k | d_{G_1}(x),$ ami pedig a feltevésben szereplő $1 \leq d_{G_1}(x) \leq k-1$ miatt ellentmondás.

5.1. Példa (Összefüggő *3-reguláris* páros gráf):



4. ábra

5.2. Példa (Általános *k-reguláris* gráfra):

Bármely *k-reguláris* páros G gráf átalakítható úgy, hogy kétszeresen összefüggő *k-reguláris* páros gráfot kapjunk a következő eljárással. Tekintsünk egy *k-reguláris* páros gráfot, majd vegyünk el egy élt a gráfból, és ha az így kapott gráfnak vesszük k diszjunkt példányát, akkor két pont beköthető egy-egy éllel, mindegyik példányhoz, így kétszeresen összefüggő *k-reguláris* páros gráfot kapunk, amely nem 3-szorosan összefüggő.

6. Feladat

(a) **Minden összefüggő G gráfnak van olyan pontja, melyet elhagyva a gráf összefüggő marad. Mi a helyzet erősen összefüggő irányított gráfok esetén?**

(b) **Legyen G olyan legalább kétpontú összefüggő gráf, mely nem tartalmaz „cseresznyét”, vagyis két elsőfokú pontot, melyeknek van közös szomszédjuk. Mutassuk meg, hogy elhagyhatunk két szomszédos pontot az összefüggőség megsértése nélkül.**

(c) **Legyen G összefüggő gráf, mely se nem kör, se nem teljes gráf. Mutassuk meg, hogy elhagyhatunk két nem szomszédos pontot a G összefüggőségének megsértése nélkül.** [1. - 6. fejezet 6.]

Bizonyítás:

(a)

Vegyünk egy G gráfot, melyben tekintsünk egy P leghosszabb utat, azaz legyen $P=(x_0,x_1,...,x_m)$ egy maximális út G-ben. Az állítás szerint hagyjunk el egy pontot és ekkor tegyük fel, hogy $G-x_0$ nem összefüggő. Legyen G_1 a $G-x_0$ gráf egy olyan komponense, amely nem tartalmazza $P-x_0$ utat. Mivel a feltevésből tudjuk, hogy G összefüggő, így kell lennie egy olyan élnek, amely G_1-et és x_0-t összeköti. Ennek az élnek legyen a két végpontja y és x_0. Ekkor az $(y,x_0,x_1,...,x_m)$ út egy P-nél hosszabb út, ami ellentmondás, hiszen a G gráfban lévő leghosszabb útból indultunk ki.

Erősen összefüggő irányított gráf esetében nem feltétlenül hagyható el úgy a gráf egy pontja, hogy a gráf erősen összefüggő maradjon. pl. az irányított kör.

(b)

Tekintsünk a G gráfban egy P leghosszabb utat. Legyen $P=(x_0, x_1, ..., x_m)$ egy maximális út G-ben. Ha ekkor elhagyunk két pontot és $G - x_0 - x_1$ összefüggő, akkor készen vagyunk. Ha nem, akkor van egy olyan y pont, amelyet x_0 és x_1 elválaszt $\{x_2, ..., x_m\}$-től. Legyen Q egy olyan út G-ben, melynek egyik végpontja y, a másik végpontja pedig rajta van a P úton. Ekkor a Q út P-t x_0-ban, vagy x_1-ben metszi, de mivel P a leghosszabb út, ezért x_1-ben kell metszenie, azaz csak x_1-nél csatlakozhat be a Q út, különben P nem lehetne a leghosszabb út. A $Q \cup (P - x_0)$ út, és hossza legfeljebb $|E(P)|$ a P maximalitása miatt, így Q egyetlen, y-t x_1-gyel összekötő élből áll. Az y-ból indulva egyetlen él sem mutathat P-n kívüli pontba, a P maximalitása miatt és nem mehet P egyik pontjába sem, mert x_0 és x_1 elválasztják P-t és y-t, így más él nem hagyhatja el y-t. Ebből következően y elsőfokú. Az $(y, x_1, ..., x_m)$ is maximális út, ahogy P volt, így ugyanezzel a gondolatmenettel találunk x_1-hez kapcsolódó elsőfokú $z \neq y$ pontot, azaz lenne a G-ben cseresznye. Ez ellentmond a tétel felvetésének.

(c)

Legyen a G gráf egy feszítő fája T. Ekkor a T bármely két végpontját elhagyva a T gráf összefüggő marad. Ha T-nek csak szomszédos és elvágó pontpárjai vannak, akkor a T végpontjai teljes gráfot alkotnak. Válasszuk T-t úgy, hogy maximális számú végpontot tartalmazzon. Ha T feszítőfa egy út, akkor a G gráf egy kör, ha pedig T egy csillag, akkor a G gráf egy teljes gráf. Tegyük fel, hogy T nem út és nem csillag. Legyen U a T végpontjainak halmaza. A $T \setminus \mathrm{U}$ fa két végpontja legyen v és v'. Mivel v nem végpontja T-nek, így lennie kell egy szomszédjának U-ban. A $T \setminus \mathrm{U}$ fához adjuk hozzá az (u, v)-t és minden (u, w) élt ahol $(w \in U \setminus \{\mathrm{u}\})$, így a T' feszítőfát kapjuk. A T' végpontjainak ugyancsak teljes gráfot kell alkotniuk, így v' szomszédos minden $(U \setminus \{\mathrm{u}\})$-beli ponttal. De $|U| > 2$-t felhasználva, v-nek minden U-beli ponttal szomszédosnak kell lennie. A $T \setminus \mathrm{U}$-hoz minden (v, w) $(w \in U)$ élt hozzáadva olyan feszítőfát kapunk, melynek több végpontja van, mint T-nek, ami ellentmondás.

7. Feladat

Egy irányított G gráf akkor és csak akkor erősen összefüggő, ha minden $X \subset V(G)$, $X \neq \emptyset$ halmazt legalább egy él hagy el. [1. - 6. fejezet 9.]

Bizonyítás:

Vegyünk egy *G* irányított gráfot. Ekkor azt kell bizonyítanunk, hogy ha a *G* egy a és b pont között erősen összefüggő, akkor minden $X \subset V(G)$, $X \neq \emptyset$ esetén létezik (a,b) út, ahol $a \in X$,$b \in (V(G)-X)$. Egy irányított (a,b) úton végigsétálva valamely pontnál el kell hagynunk az *X*-et. Miután elhagytuk *X*-et az (a,b) út következő éle köti össze egymással az X-et és a $(V(G)-X)$-et. Megfordítva feltehetjük, hogy nem létezik az erősen összefüggő irányított (a,b) út. Azon pontok halmaza legyen *X*, melyek az *a*-ból irányított út mentén elérhetők. Ekkor $a \in X, b \notin X$ és nincs olyan (x,y) él, ahol $x \in X, y \notin X$, mert bármely (a,x) út ezzel az éllel együtt már egy (a,y) utat adna, ami nem létezik, hiszen $y \notin X$.

8. Feladat

Legyen G egy irányított gráf, $x,y \in V(G)$ és tegyük fel, hogy G éleit pirosra, zöldre és feketére színeztük. Ekkor a következő két állítás közül pontosan egy igaz:

(i) **Van olyan piros és fekete irányítatlan P (x,y) út G-ben, hogy P minden fekete éle x-től y felé mutat,**

(ii) **Van olyan $S \subset V(G)$ halmaz, $x \in S, y \notin S$ hogy S-et és $V(G)-S$-et egyik irányban sem köti össze piros él, és nincsen S-ből $V(G)-S$-be mutató fekete él.** [1. - 6 fejezet 10.]

8.1. Definíció (Élösszehúzás): Egy *e* él összehúzása egy irányított gráfban az él elhagyását és a két végpontja azonosítását jelenti. Egy részgráf összehúzása minden élének összehúzását jelenti (az élek összehúzásának sorrendje nem számít). Az összehúzással keletkezhetnek többszörös élek. [1. - 643. old.]

Bizonyítás:

Legyen G_0 egy olyan irányított gráf, melyet a G gráfból a piros élek összehúzásával és a zöld élek elhagyásával kapunk. Tegyük fel, hogy G_0-ban nincs irányított (x, y) út. Ekkor legyen S_0 olyan halmaz, amelyre $x \in S_0$, $y \notin S_0$ és S_0-ból fekete él nem megy $(V(G) - S_0)$-ba. Legyen S_0 képe a piros élek összehúzásával kapott gráfban *S*. Ekkor *S*-et nem köti össze piros él $(V(G) - S)$-el, és nem megy fekete él *S*-ből $(V(G) - S)$-be, azaz (ii) fennáll. Az egyértelműen adódik, hogy ha van (x, y) út G_0-ban, akkor (i) fennáll. Annak bizonyítására, hogy $(i),(ii)$ nem állhat fenn egyszerre, tegyük fel indirekt, hogy van (i)-nek megfelelő *P* halmaz és van (ii)-nek megfelelő *S* halmaz. Ekkor *P*-nek van egy *S*-et $(V(G) - S)$-sel összekötő *f* éle. Az *f* él nem lehet zöld, mert (i) szerint *P*-ben csak piros és fekete élek vannak. Piros sem lehet, mert (ii) szerint nincs *S*-et, $(V(G) - S)$-sel összekötő piros él. Ebből következően *f* csak fekete lehet. De (ii) miatt *f*-et nem irányíthatjuk *S*-ből $(V(G) - S)$-be és fordítva sem, hiszen *P*-n van.

9. Feladat

Legyen G egy irányított fa és $F \subseteq E(G)$. Bizonyítsuk be, hogy van olyan $x \in V(G)$ pont, melyre az x-szel érintkező élek közül az F-beliek x-ben végződnek, míg a többi x-ben kezdődik. [1. - 6. fejezet 14.]

Bizonyítás:

A bizonyításhoz fordítsuk meg *F* minden élét. Az így kapott gráf, legyen G’ gráf, melyben nincsen kör. Emiatt egy leghosszabb irányított út kezdőpontja, a vele szomszédos minden él kezdőpontja is. *F* éleit megint megfordítva azt kapjuk, hogy az *F*-beliek *x*-ben végződnek, míg a többi él *x*-ben kezdődik.

10. Feladat

Ha a G fa részfái egy halmazának metszete nem üres, akkor részfa.
[1. - 6. fejezet 16.]

Bizonyítás:

Tekintsünk egy olyan G fát, melynek részfái legyenek B és M fagráfok, azaz $V(B) \subseteq V(G)$, $E(B) \subseteq E(G)$, $V(M) \subseteq V(G)$, $E(M) \subseteq E(G)$. Azt kell igazolnunk, hogy ha $B \cap M \neq \emptyset$ akkor $B \cap M$ részfája az eredeti G fagráfnak. Vegyük két pontját a $B \cap M$-nek. Ekkor $x \in V(B), x \in V(M)$ és $z \in V(M)$ $z \in V(B)$. Mivel $V(B) \subseteq V(G)$ és $V(M) \subseteq V(G)$-nek, így $x \in V(G)$ és $z \in V(G)$. Mivel B és M a G fa részfái, azaz összefüggőek, így az x és z között B-ben is és M-ben is biztosan vezet út. Ez az út B-ben és M-ben is ugyanaz az x kezdőpontú és z végpontú út. Ez az út tehát benne van a $B \cap M$-ben is.

11. Feladat

(a) **Ha G összefüggő gráf, akkor bármely két maximális hosszú útjának van közös pontja**.

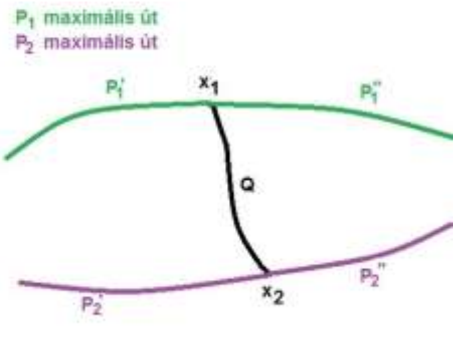
(b) **Ha G fa, akkor G összes maximális hosszú útjának van közös pontja**.

[1. - 6. fejezet 17.]

Bizonyítás:

(a)

Indirekt módon tegyük föl, hogy a P_1 és P_2 diszjunkt maximális hosszú utak. Tekintsünk egy Q utat melynek egyik végpontja P_1-ben, míg másik végpontja P_2-ben helyezkedik el, végpontjaitól eltekintve pedig diszjunkt P_1-től és P_2-től.



5. ábra

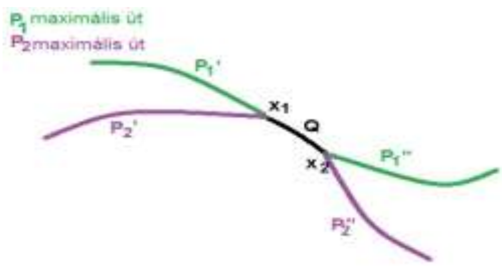
P_1 és P_2 maximális hosszú utak, melyeken Q út végpontjai helyezkednek el

Legyenek x_1, x_2 a Q végpontjai. Legyen $x_i \in P_i$, ahol x_i a P_i-t P_i' és P_i'' részekre osztja. Tegyük fel, hogy P_i' legalább olyan hosszú, mint P_i'' és P_1' legalább olyan hosszú, mint P_2'. Ekkor az élekre felírhatjuk a következő becslést.

$|E(P_1' \cup Q \cup P_2')| > |E(P_1')| + |E(P_2')| \geq 2|E(P_2')| \geq |E(P_2')| + |E(P_2'')| = |E(P_2)|$, azaz a $P_1' \cup Q \cup P_2'$ út hosszabb P_2-nél, ami ellentmondás, hiszen feltettük, hogy P_2-nél nincs hosszabb út.

(b)

Legyen P_1 és P_2 két maximális hosszú út. Mivel G fa, a $Q = P_1 \cap P_2$ egy x_1 kezdőpontú, x_2 végpontú út.



6. ábra

P_1 és P_2 maximális hosszú utak és Q metszetük

A $P_1 \cup P_2$ a Q x_1 végpontjából induló két P_1' és P_2' út és az x_2 végpontjából induló két P_1'' és P_2'' út, melyekre $P_1 = P_1' \cup Q \cup P_1''$, $P_2 = P_2' \cup Q \cup P_2''$. Az $|E(P_1')| = |E(P_2')|$, mert ha $|E(P_1')| > |E(P_2')|$ vagy $|E(P_1')| < |E(P_2')|$, akkor ez azt jelentené, hogy a $P_1' \cup Q \cup P_2''$ út P_2-nél hosszabb, vagy a $P_1'' \cup Q \cup P_2'$ út hosszabb lenne P_1-nél. Hasonlóan az $|E(P_1'')| = |E(P_2'')|$. Mivel a $P_1' \cup P_2'$ egy út, ezért $|E(P_1')| \leq \frac{1}{2}|E(P_1)|$ és ugyanígy az $|E(P_1'')| \leq \frac{1}{2}|E(P_1)|$. E szerint P_1 középpontja vagy középpontjai benne vannak a Q-ban. Tekintve, hogy Q a metszetük, így ezek a pontok benne vannak P_2-ben is. Mivel ez bármely P_2-re fennáll, így ezek a pontok benne vannak az összes maximális út metszetében is.

12. Feladat

Ha $G_1,...,G_k$ a G fa olyan részfái, hogy bármely kettő metszi egymást, akkor van egy közös pontjuk. (Ez az előző feladat (b) pontjának egy új bizonyításához vezet.) [1. - 6. fejezet 18.]

Bizonyítás:

Vegyünk egy G fagráfot, amelynek legyenek $G_1,...,G_k$ páronként metsző részfái. Legyen x az y-hoz kapcsolódó elsőfokú pont G-ben. Hagyjuk el az x pontot, és tegyük fel, hogy ekkor az állítás $(G-x)$-re fennáll. Ha a $G_1,...,G_k$ részfák egyike sem az x-ből álló egypontú gráf, akkor $G_1-x,...,G_k-x$ páronként metszik egymást; mert ha x a G_i és G_j közös pontja, akkor y is az. Ebből az indukciós feltétel szerint $G_1-x,...,G_k-x$-nek van közös pontja, így $G_1,...,G_k$-nak is. Ha G_1-nek egyetlen x pontja van, akkor x a $G_1,...,G_k$ közös pontja.

13. Feladat

Bizonyítsuk be, hogy egy összefüggő G gráfban az x, y pontok $d(x, y)$ távolsága ugyanúgy, mint az x-et és y-t összekötő utak $D(x, y)$ maximális hossza metrika.

Vagyis: (a) $d(x,y) \geq 0$, **egyenlőség akkor és csak akkor van, ha** $x = y$,

(b) $d(x,y) = d(y,x)$,

(c) $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$,

és hasonlóan $D(x, y)$-ra. [1. - 6. fejezet 19.]

Bizonyítás:

(a) Triviális.

(b) Triviális, hogy két pont egymástól való minimális távolsága ugyanakkora, bármelyiket választjuk kezdőpontnak vagy végpontnak.

$D(x, y) = D(y, x)$

Szintén triviális, hogy két pont közötti utak maximális hossza ugyanakkora, bármelyiket választjuk kezdőpontnak vagy végpontnak.

(c)

Tekintsünk egy $d(x,y)$ hosszúságú P (x,y) utat és egy $d(y,z)$ hosszúságú Q (y,z) utat. A $P \cup Q$ tartalmaz egy (x,z) utat aminek hossza nyilván legfeljebb $d(x,y)+d(y,z)$. Így $d(x,z)$ az összes ilyen utak minimális hossza szintén legfeljebb $d(x,y)+d(y,z)$.

$D(x,y)+D(y,z) \geq D(x,z)$

Tekintsünk egy $D(x,z)$ hosszú P (x,z) utat. Mivel *G* összefüggő, így van egy Q (y,P) út. Legyen *t* a *Q* végpontja *P*-n. A *t* pont a *P*-t P_1 és P_2 részekre osztja. P_1 legyen a_1 hosszú és P_2 legyen a_2 hosszú. Legyen *Q* hossza *k*. Ekkor $Q \cup P_1$ egy (x,y) út, így $D(x,y) \geq k+a_1$. Hasonlóan $D(y,z) \geq k+a_2$. Ezekből adódik, hogy $D(x,y)+D(y,z) \geq 2k+a_1+a_2 = 2k+D(x,z) \geq D(x,z)$.

14. Feladat

Egy n pontú fában, melynek átmérője legalább $2k-3$, legalább $n-k$ darab $k-$ hosszú út van. [1. - 6. fejezet 24.]

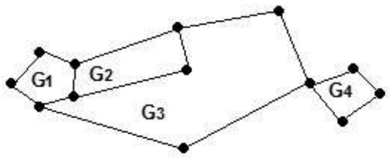
Bizonyítás:

14.1. Definíció (Gráf átmérő): A G gráf átmérője a pontok között előforduló maximális távolság. [1. - 633. old.]

Tekintsünk egy G fát és abban egy $P=(x_1,...,x_{2k-2})$, $2k-3$ hosszúságú utat. Bármely *P*-n kívüli y ponthoz hozzárendelünk egy k hosszúságú P_y utat a következőképpen. Legyen *Q* olyan út, ami összeköti *y*-t *P* egy pontjával és *Q*-nak nincsen *P*-vel más közös pontja. Ha a *Q* hosszabb $k-1$-nél, akkor P_y legyen a Q y-ban kezdődő k hosszúságú része. P_y álljon *Q*-ból és a *P* egy részútjából. Ilyen választás azért lehetséges, mert *P* hossza $2k-3$, így a *P* *Q* végpontjával érintkező darabjai közül az egyik $k-1$ hosszúságú. Most legyen P_{x_i} a *P* egy x_i-hez csatlakozó k hosszúságú részútja $k \leq i \leq 2k-2$ esetén. Ezután már adódik, hogy a P_y-ok különbözőek és $n-k$ van belőlük.

15. Feladat

Egy adott $2-$***szeresen*** **élösszefüggő** G **gráfot „felépíthetünk” a következőképpen:** $G = G_1 \cup ... \cup G_r$, **ahol** G_1 **kör és** G_{i+1} **vagy egy út, melynek pontosan a végpontjai közösek** $G_1 \cup ... \cup G_i$ **–vel, vagy egy kör, melynek egy pontja közös** $G_1 \cup ... \cup G_i$ **–vel.** [1. - 6. fejezet 28.]



7. ábra

Bizonyítás:

Válasszuk ki a G gráf egy G_1 körét. Tegyük fel, hogy $G_1,...,G_j$-t már kiválasztottuk úgy, hogy G_{i+1} $(1 \le i < j)$ vagy egy út, melynek végpontjai $(G_1 \cup ... \cup G_i)$-vel közösek, vagy egy kör, melynek $(G_1 \cup ... \cup G_i)$-vel egy közös pontja van. Ha $G_1 \cup ... \cup G_j = G$, akkor kész. Amennyiben azonban a $G_1 \cup ... \cup G_j \ne G$, akkor létezik egy $e = (x, y)$ él, amely nem $(G_1 \cup ... \cup G_j)$ beli, de e élnek és $(G_1 \cup ... \cup G_j)$-nek van egy közös pontja. Legyen C egy e-t tartalmazó kör. Induljunk el x-ből e-n, majd sétáljunk C-n addig, amíg újra el nem érjük $(G_1 \cup ... \cup G_j)$-t. Legyen G_{j+1} az a részgráf, mely azokból a pontokból és élekből áll, melyeket a séta során érintettünk. Ekkor G_{j+1} vagy egy út, melynek két végpontja $(G_1 \cup ... \cup G_j)$ beli, vagy egy C kör amely $(G_1 \cup ... \cup G_j)$-t csak az x pontban metszi. Így találhatunk egy megfelelő G_{j+1}-et. A G végessége miatt előbb-utóbb véget ér ez az eljárás.

16. Feladat (Menger tétel)

Legyen G **irányított gráf és** $a, b \in V(G)$. **Bizonyítsuk be, hogy**

(a) **akkor és csak akkor létezik k éldiszjunkt** (a,b) **út, ha** G $k-$**szorosan élösszefüggő *a* és *b* között;**

(b) **akkor és csak akkor van k pontdiszjunkt (a,b) út, ha G $k-$szorosan összefüggő *a* és *b* között;**

(c) **analóg állítások érvényesek irányítatlan gráfokra.** [1. - 6. fejezet 39.]

Bizonyítás:

16.1. Definíció (Vágás): Az (a,b) vágás olyan F élhalmaz, mely minden (a,b) utat reprezentál (lefog). Az $S \subseteq V(G)$ által meghatározott vágás az *S*-ből $V(G)-S$-be mutató élek halmaza. Ha C az S által meghatározott vágás a G irányított gráfban, akkor C^* a $V(G)-S$ által meghatározott vágás. [1. - 648. old.]

(a)

Ha *G*-ben van *k* éldiszjunkt (a,b) út, akkor természetesen *k-szorosan* élösszefüggő *a* és *b* között. A másik rész bizonyításához a G gráfból annyi élt hagyunk el, amíg még a G gráf *k*-szorosan élösszefüggő marad. Ekkor nyilván már nem lesz *a* végpontú vagy *b* kezdőpontú él. Ekkor tegyük fel, hogy van egy olyan e_1 él, amely nem illeszkedik sem *a*-hoz, sem *b*-hez. Ha ezt az élt a *G* gráfból elvesszük, akkor a megmaradt gráf már nem *k* élösszefüggő, van $(k-1)$ elemű C' (a,b) vágása, tehát ekkor $C = C' \cup \{e_1\} = \{e_1,...,e_k\}$ egy *k* elemű (a,b) vágás és e_1 választása miatt a *C*-t meghatározó *S* halmaz eleget tesz a $|S| \geq 2$, $|V(G)-S| \geq 2$ feltételeknek. Ezután legyen G_1 és G_2 rendre az S és $V(G)-S$ összehúzásával előálló gráf. Az *a* képe legyen a' a G_1-ben, és *b* képe pedig b' a G_2-ben. Látható, hogy G_1 *k-szorosan* élösszefüggő a' és b között, és így az indukciós feltevés szerint van *k* éldiszjunkt (a',b) út, ezek legyenek $P_1,...,P_k$. Mivel a'-t csak az $e_1,...,e_k$ élek hagyják el, így tegyük fel, hogy $e_i \in P_i$. Hasonlóan van *k* éldiszjunkt (a,b') út, $Q_1,...,Q_k$ G_2-ben, $e_i \in Q_i$. Ekkor $P_1 \cup Q_1,...,P_k \cup Q_k$ *k* éldiszjunkt (a,b) utat alkot *G*-ben. Mi történik abban az esetben, ha minden él kezdőpontja *a* vagy végpontja *b*? Ha van egy (a,b) él, elhagyhatjuk és folytathatjuk a bizonyítást *k* szerinti indukcióval, így feltehetjük, hogy nincsen ilyen él. Bármely $x \neq a,b$-re, $k(x)$ legyen az (a,x) élek és (x,b) élek számának minimuma. Ekkor van $\sum_{x \neq a,b} k(x)$ éldiszjunkt (a,b) út. Másrészről az olyan *x* pontok halmaza, melyek *b*-hez $k(x)$ éllel kapcsolódnak, legyen *S*. Így az $\{a\} \cup S$

által meghatározott vágásnak pontosan $\sum_{x\neq a,b} k(x)$ éle van. Így $\sum_{x\neq a,b} k(x) = k$, ami bizonyítja az állítást.

(b)

Tekintsünk egy G' gráfot, melynek a és b pontok a pontjai és minden $x \in V(G)$, $x \neq a,b$-hez van két x_1 és x_2 pontja. Legyen $a_1 = a_2 = a$ és $b_1 = b_2 = b$. A G'-ben minden $e = (x,y) \in E(G)$ élhez van egy $e' = (x_2, y_1)$ él, továbbá minden $x \in V(G)$, $x \neq a,b$-hez egy (x_1, x_2) él. Most

(i) G' akkor és csak akkor k-szorosan élösszefüggő a és b között, ha G *k-szorosan* összefüggő a és b között.

(ii) G'-ben akkor és csak akkor van k éldiszjunkt (a,b) út, ha G-ben van k pontdiszjunkt (a,b) út.

(i) bizonyításához tekintsünk egy G' beli C (a,b) vágást. Az A álljon az összes olyan x pontból, melyekre $(x_1, x_2) \in C$ és C minden más éléből. Ekkor $|A| = |C|$ és a-t és b-t A elválasztja G-ben, hiszen ha P valamely (a,b) út G-ben, akkor G' P-beli éleknek és belső pontoknak megfelelő élei egy G-beli P' (a,b) utat alkotnak, és mivel P' tartalmazza C egy élét, P tartalmazza A egy élét vagy pontját.

Megfordítva, ha A G-ben, az a-t és b-t elválasztó élek és pontok halmaza, akkor a fenti konstrukció a G' egy C élhalmazát rendeli hozzá, és C olyan (a,b) vágás lesz, melyre $|C| = |A|$. Ezzel (i)-t bizonyítottuk. Legyenek $P_1,...,P_k$ éldiszjunkt (a,b) utak G'-ben. Ha $x_i \in P_j$, akkor (x_1, x_2) nyilvánvalóan P_j egy éle és x_{3-i} szintén rajta van P_j-n. Így $P_1,...,P_k$ pontdiszjunktak, és ha még össze is húzzuk az (x_1, x_2) éleket, hogy G helyreálljon, akkor is k pontdiszjunkt G-beli (a,b) utat kapunk. Megfordítva, ha van G-ben k pontdiszjunkt (a,b) út, akkor a nekik megfeleltetett G' beli (a,b) utak pontdiszjunktak, és így éldiszjunktak is. Így (ii)-t bebizonyítottuk. (i) és (ii) (a) miatt bizonyítja a (b) állítást.

(c)

Az állítás bizonyításához minden (irányítatlan élt) helyettesítsünk két ellentétesen irányított éllel. Ekkor kapjuk a $\vec{G}$ irányított gráfot. A $\vec{G}$ irányított gráf összefüggősége és élösszefüggősége bármely két pont között ekvivalens a G gráféval. Továbbá az éldiszjunkt [pontdiszjunkt] (a,b) utak is azonosak G-ben és $\vec{G}$-ben, hiszen éldiszjunkt [pontdiszjunkt] G beli (a,b) utak ilyen utakat eredményeznek $\vec{G}$ ben. Megfordítva, ha $\vec{G}$-ben léteznek valamely éldiszjunkt (a,b) utak, akkor tegyük fel, hogy ezek nem használnak egyszerre egy (x,y) élt és a párját, (y,z)-t is, mert ebben az esetben találunk egy azonos elemszámú, de kisebb összhosszú másik (a,b) útrendszert, mely sem (x,y)-t sem (y,x)-et nem tartalmazza (a pontösszefüggőség esetében ez a probléma fel sem merül). Ezek az utak éldiszjunkt [pontdiszjunkt] (a,b) utakat eredményeznek G-ben.

Köszönetnyilvánítás

Köszönöm témavezetőmnek Frenkel Péternek, hogy a szakdolgozatom elkészítésében segítséget nyújtott, irányt mutatott és érthető, pontos magyarázataiból nagyon sokat tanultam.

Felhasznált irodalom:

[1] Lovász László: Kombinatorikai problémák és feladatok, Typotex Kiadó Budapest, 1999 [45-55], [127-133], [313-353],[633-648]