Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Bogár Eszter

Hilbert 17. problémájának bemutatása egy nem szimmetrikus, pozitív, homogén formán keresztül

Szakdolgozat

Témavezető:
Szabó Csaba
egyetemi tanár

Budapest, 2014.

Tartalomjegyzék

1. Feladat és egy megoldás

1.1. Feladat

A Középiskolai Matematikai Lapok Fórumán találtunk egy feladatot amely felkeltette az érdeklődésünket.

A feladat így szól:

Bizonyítsuk be a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq \sqrt{3(x^3y + y^3z + z^3x)}$$

1.2. Megoldások

A Középsikolai Matematikai Lapok Fórum résztvevői több bizonyítást is bemutatnak a fórumon.

Például idézik a Vasile Cirtoaje, aki az Algebraic inequalities - old and new methods című könyvében közölt megoldását, de ezt most mi nem ismertetjük, de nem is értjük.

Ugyancsak a Középsikolai Matematikai Lapok Fórum egyik résztvevője közöl egy hivatkozást, amely egy cikkre mutat. A cikk szerzői: Nguyen Duy Tung, Zhou Yuan Zhe A cikkük címe: The Interesting Around Technical Analysis Three Variable Inequalities - Nguyen Duy Tung, Zhou Yuan Zhe. Ebben a cikkben a feladat egy megoldását közlik ugyan, de sajnos erről a megoldásról a fórum egyik hozzászólója kideríti, hogy hibás.

A Középiskolai Matematikai Lapok Fórumát olvasva a kitűző látszólag két helyes megoldást is ad.

A szerző minden magyarázó, alátámasztó érvelést mellőzve a feladvány útján elindul a következő gondolatmenettel:

1. Megoldás. Hasonlítsuk össze ezt az egyenlőtlenséget a következő triviális egyenlőtlenséggel:

$$(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca),$$

Ez az egyenlőtlenség tetszőleges valós a, b, c-re teljesül.

Észrevehetjük, hogy ha ebbe az egyenlőtlenségbe behelyettesítjük a következő értékeket

$$a = x^2 + yz - xy,\ b = y^2 + zx - yz,\ \text{és } c = z^2 + xy - zx,$$

akkor éppen a bizonyítandó tétel adódik.

□

2. Megoldás. Vegyük észre, hogy

$$x^4+y^4+z^4+2x^2y^2+2x^2z^2+2y^2z^2 \geq 3x^3y+3y^3z+3z^3x =$$
$$= \frac{1}{2}\big((x^2+2yz-y^2-zx-xy)^2+(y^2+2zx-z^2-xy-yz)^2+$$
$$+(z^2-2xy-x^2-yz-zx)^2\big) \geq 0.$$

Tehát az $x^4+y^4+z^4+2x^2y^2+2x^2z^2+2y^2z^2-3x^3y-3y^3z-3z^3x$ polinomot föl tudjuk bontani 3 négyzet összegére, azaz mindig pozitív. □

A Középiskolai Matematikai Lapok Fórumán azt is leírják, vagy inkább odavetik, hogy mikor teljesül az egyenlőség.

Megjegyzés. A fenti egyenlőtlenségben egyenlőség a következő esetekben teljesül

1. $x=y=z$
2. $x:y:z=\sin^2(\frac{4\pi}{7}):\sin^2(\frac{2\pi}{7}):\sin^2(\frac{\pi}{7})$.
3. $y:z:x=\sin^2(\frac{4\pi}{7}):\sin^2(\frac{2\pi}{7}):\sin^2(\frac{\pi}{7})$.
4. $z:x:y=\sin^2(\frac{4\pi}{7}):\sin^2(\frac{2\pi}{7}):\sin^2(\frac{\pi}{7})$.

□

Ebből következik, hogy a feladatot a szokásos módon középértékekkel, mint pl: számtani-mértani, vagy számtani-négyzetes közép, nem lehet megoldani, mert ezeket csak akkor lehetne használni, ha a egyenlőség csak $x=y=z$ esetében teljesülne.

Egy olvasó az alábbi észrevételt tette:

1. Megoldás = 2. Megoldás. Az első megoldásban szereplő triviális egyenlőtlenséggel ekvivalens, hogy

$$\frac{1}{2}\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right) \geq 0,$$

ahová az

$$a = x^2+yz-xy,\ b = y^2+zx-yz,\ \text{és}\ c = z^2+xy-zx,$$

kifejezéseket helyettesítve épp a második megoldás adódik. Így ez nem tekintendő külön megoldásnak.

□

Ennyit a feladat e hozzászólás szerint ismertetett megoldási előzményieről, majd az alábbiak szerint próbálkozom a saját útvonalam mentén megoldani a feladatot.

A végeredményt a Kömal Fórum stílusában az alábbiakban foglalhatnám össze:

„A" megoldás. Vegyük észre, hogy

$$(x^2-\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}z^2-\frac{3}{2}xy+\frac{3}{2}yz)^2+\frac{3}{4}(y^2-z^2-yz+2xz-xy)^2 =$$
$$= x^4+y^4+z^4+2x^2y^2+2x^2z^2+2y^2z^2-3x^3y-3y^3z-3z^3x,$$

azaz a jobb oldal mindig pozitív.

□

Ezzel minimálisan „rávertünk" az előzőekre, mert nekünk sikerült két négyzet összegeként előállítani a kívánt kifejezést. A dolgozatban ennél egy erősebb állítást bizonyítunk:

Az összes egyszerű megoldás. Az α szög tetszőleges megválasztása mellett a

$$
\begin{aligned}
\Big(&x^2\cos(\alpha) + y^2\cos(\alpha+120^\circ) + z^2\cos(\alpha+240^\circ) + \\
&\qquad + \sqrt{3}\big(xy\cos(\alpha-30^\circ) + xz\cos(\alpha+90^\circ) + yz\cos(\alpha+210^\circ)\big)\Big)^2 + \\
&\qquad + \Big(x^2\sin(\alpha) + y^2\sin(\alpha+120^\circ) + z^2\sin(\alpha+240^\circ) + \\
&\qquad\qquad + \sqrt{3}\big(xy\sin(\alpha-30^\circ) + xz\sin(\alpha+90^\circ) + yz\sin(\alpha+210^\circ)\big)\Big)^2
\end{aligned}
$$

kifejezés egyenlő a

$$x^4 + y^4 + z^4 + 2x^2y^2 + 2x^2z^2 + 2y^2z^2 - 3x^3y - 3y^3z - 3z^3x,$$

kifejezéssel, és a fenti módon megkapható az összes lehetséges előállítása két négyzet összegére.

Egyenlőség pedig következő esetekben teljesül:

1. $x = y = z$
2. $x : y : z$ aránya ciklikusan megegyezik az $\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3$ aránnyal, ahol $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ az $x^3 - 5x^2 + 6x - 1$ polinom gyökei.

$\square$

A dolgozatban terjedelmi okok miatt nem bizonyítjuk be az alábbi, immár teljesnek mondható karakterizációját a feladatnak.

Végtelen sok megoldás. Legyen

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

és legyen U tetszőleges hatszor-hatos ortogonális mátrix. Legyen továbbá $\underline{v}=(x^2,y^2,z^2,xy,xz,yz)$. Tekintsük a

$$\underline{w}=\underline{v}AU$$

szorzatot, $\underline{w}=(w_1,w_2,w_3,w_4,w_5,w_6)$. A w_i kifejezések mind háromváltozós másodfokú polinomok. Ekkor

$$\sum w_i^2=x^4+y^4+z^4+2x^2y^2+2x^2z^2+2y^2z^2-3x^3y-3y^3z-3z^3x$$

és a kifejezés végtelen sok olyan előállítása, amely legfeljebb 6 kifejezés négyzetének az összege, megadható ilyen módon.

Ezen kívűl az végtelen sok ugyanilyen megoldást megkaphatjuk a

$$B=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 3 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 3 & -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix}$$

mátrix lehetséges AA^T fölbontásaival. Ez hasonlít a pozitív szemidefinit mártrix előállításához, de ezt a mátrixot teljesen más módszerrel kapjuk meg.

$\square$

Első lépésként tehát tűzzük ki azt célul, hogy megállapítsuk, hogy

$$x^4 + y^4 + z^4 + 2x^2y^2 + 2x^2z^2 + 2y^2z^2 \geq 3x^3y + 3y^3z + 3z^3x,$$

átrendezve

$$x^4 + y^4 + z^4 + 2x^2y^2 + 2x^2z^2 + 2y^2z^2 - 3x^3y - 3y^3z - 3z^3x \geq 0$$

teljesül-e.

2. Megoldás rezultánsokkal

Az polinomunk kifejtve és átrendezve a következőképpen néz ki:

$$f(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4 + 2x^2y^2 + 2x^2z^2 + 2y^2z^2 - 3x^3y - 3y^3z - 3z^3x$$

Ennek a polinomnak minden tagja negyedfokú, tehát ez egy homogén polinom. Ezért $f(x,y,z) = z^4 f(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1)$. Ha tehát a polinom az x, y, z számhármasnál negatív értékét vesz föl, akkor az $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$, 1 helyen is negatív értéket vesz föl. Így a megoldásunk két részre bomlik, amik a következőek: ha $z = 0$ vagy $z \neq 0$.

Ha $z \neq 0$, akkor szemmel láthatólag elég az eredeti függvényt csak pozitív x, y, z számhármasokra vizsgálni. A kifejezés pontosan akkor nagyobb vagy egyenlő nullával, ha a $z = 1$ helyettesítéssel kapott polinom is csupa nem negatív értéket vesz föl. A polinomunk a következőképpen néz ki a $z = 1$-es helyettesítéssel:

$$g(x,y) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 - 3x^3y - 3y^3 - 3x + 1$$

A legegyszerűbbnek az tűnik, hogy megkeressük a polinom minimumhelyeit és megmutatjuk, hogy a lokális szélsőértékhelyeken a polinom nagyobb vagy egyenlő, mint 0. Ehhez a parciális deriváltakat fogjuk használni, és azok zérushelyeit fogjuk keresni. Tehát olyan x, y számpárokat keresünk, ahol a parciális deriváltak egynelőek 0-val. Az x szerinti parciális derivált:

$$h(x,y) = 4x^3 + 4xy^2 - 9x^2y + 4x - 3.$$

Az y szerinti parciális derivált:

$$k(x,y) = 4y^3 - 9y^2 + 4x^2y + 4y - 3x^3.$$

Ahhoz, hogy meghatározzuk a parciális deriváltak gyökeit, rezultánsokat fogunk használni. De még mielőtt hozzákezdenénk, nézzük meg, hogy mi is az a rezultáns. A rezultáns általában két polinom közös gyökeinek meghatározására használják.

1. Definíció. *Legyen T test, és $f, g \in T[x]$, mégpedig*

$$f(x = a_nx^n + \cdots + a_0 \text{ és } g(x) = b_mx^m + \cdots + b_0.)$$

Az f és g rezultánsa az az $R(f,g)$-vel jelölt $(m+n)\times(m+n)$-es determináns, amit a következőképpen készítünk el. Az első sorba az $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_0$ együtthatókat írjuk, majd csupa nullákat. A második sor első eleme nulla, ez után jönnek sorban $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_0$, majd ismét csupa nulla. A harmadik sor elején már két nulla van. Ezt a lépcsőt összesen m soron át folytatjuk, ekkor az m-edik sorban a_0 lesz a legutolsó elem. Ezután ugyanezt az eljárást a maradék n sorban is elvégezzük a $b_m, b_{m-1}, \cdots, b_0$ együtthatókkal is.

2. Tétel. *Legyenek $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$, valamint $g(x) = b_m x^m + \cdots + b_0$ egy T test fölötti polinomok, melyek T fölött gyöktényezőkre bomlanak.*

(1) *Ha $f(x) = a_n(x-\alpha_1)\cdots 8x-\alpha_n)$ és $g(x) = b_m(x-\beta_1)\cdots(x-\beta_m)$, ahol α_i,β_j a T test elemei, és a_n és b_m egyike sem nulla, akkor*

$$R(f,g) = a_n^m g(\alpha_1)\cdots g(\alpha_n) = a_n^m b_m^n \prod_{1\le i\le n}\prod_{1\le j\le m}(\alpha_i-\beta_j) =$$

$$= (-1)^{nm} b_m^n f(\beta_1)\cdots g(\beta_m) = (-1)^{nm} R(g,f).$$

(2) *Az $R(f,g)$ akkor és csak akkor nulla, ha vagy $a_n = b_m = 0$, vagy a két polinomnak van közös gyöke T-ben.*

Itt kellett tudatosítani magunkban, hogy a rezultáns nem a gyökök megkeresésére alkalmas, hanem arra, hogy eldöntsük, hogy a két polinomnak vagy-e egyátalán közös gyöke. A rezultáns az egy determináns értéke, amelyet a mátrix együtthatóiból úgy számolunk ki, hogy összeadjuk és szorozzuk őket, ezért lehet kommutatív, nullosztómentes gyűrű felett is értelmezni a rezultánst. Ezért a definícióban a T test helyettesíthető kommutatív, nullosztómentes gyűrűvel is. Mivel mi most többváltozós polinomokkal foglalkozunk, ezért úgy fogunk tekinteni ezekre a polinomokra, mint ha az x és az y komplex számok lennének, és a z változna, vagy az x és a z komplex és az y változna, vagy az y és a z komlex számok és az x változik. És ezeket az eseteket attól függően választjuk meg, hogy hol melyikre van szükségünk.

Ha az f függvénynek van szélsőértéke, ott a parciális deriváltak egyenlőek nullával. Írjuk fel tehát az x és az y szerinti parciális deriváltak x szerinti rezultánsát, ehhez először írjuk le a h és k polinomokat, mint x függvényeit.

$$h(x,y) = 4x^3 - 9yx^2 + (4y^2+4)x - 3$$

$$k(x,y) = -3x^3 + 4yx^2 + (4y^3 - 9y^2 + 4y)$$

A rezultáns felírását a következőképpen tehetjük meg. A mátrix első sorába az h polinom tagjainak együtthatóit írjuk, majd csupa nullákat. A következő sor 0-val kezdődik, majd jönnek az együtthatók és ismét a nullák. Ezt összesen annyi soron át folytatjuk, amekkora a k polinomban az x legnagyobb hatványa, ami itt 3. Így a 3. sorban az utolsó tag az h polinom konstans tagja lesz. Majd ezután ugyanezt az eljárást elvégezzük a k polinomra is, annyiszor amekkora a h polinomban az x legnagyobb hatványa.

$$R(h,k)_x = \begin{vmatrix} 4 & -9y & 4y^2+4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -9y & 4y^2+4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -9y & 4y^2+4 & -3 \\ -3 & 4y & 0 & 4y^3-9y^2+4y & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4y & 0 & 4y^3-9y^2+4y & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4y & 0 & 4y^3-9y^2+4y \end{vmatrix} =$$

$$= 1872y^9 - 18792y^8 + 75717y^7 - 160344y^6 + 197532y^5 - 151344y^4 +$$
$$+ 78804y^3 - 30204y^2 + 7488y - 729$$

Ezt a polinomot a következőképpen tudjuk felírni szorzatként:

$$R(h,k)_x = 9(y-1)(y^3-5y^2+6y+1)(208y^5-840y^4+1085y^3-610y^2+265y-81)$$

Ahhoz, hogy az y szerinti rezultánst ki tudjuk számolni, írjuk fel a parciális deriváltakat, mint az y függvényeit.

$$h(x,y) = 4xy^2 - 9x^2y + (4x^3+4x-3)$$

$$k(x,y) = 4y^3 - 9y^2 + (4x^2+4)y - 3x^3$$

Majd az előbb ismertetett módszerrel készítsük el a rezultáns mátrixát:

$$R(h,k)_y = \begin{vmatrix} 4x & -9x^2 & 4x^3+4x-3 & 0 & 0 \\ 0 & 4x & -9x^2 & 4x^3+4x-3 & 0 \\ 0 & 0 & 4x & -9x^2 & 4x^3+4x-3 \\ 4 & -9 & 4x^2+4 & -3x^3 & 0 \\ 0 & 4 & -9 & 4x^2+4 & -3x^3 \end{vmatrix} =$$

$$= 468x^9 - 5076x^8 + 19008x^7 - 31968x^6 + 29808x^5 - 22032x^4 +$$
$$+17424x^3 - 10692x^2 + 3492x - 432$$

Az $R(h,k)_y$ polinomot 36-tal elosztjuk, majd felbontjuk polinomok szorzatára.

$$R(h,k)_y = (x^3 - 6x^2 + 5x - 1)(x-1)(13x^5 - 50x^4 + 35x^3 - 15x^2 + 25x - 12)$$

Akkor, ha van olyan hely, ahol az f polinom felveszi a 0 értéket, akkor az x az $R(h,k)_y$ 9-edfokú polinomnak a gyöke és az y az $R(h,k)_x$ 9-edfokú polinomnak a gyöke.

Azért, hogy megtudjuk, hogy az x, y párok melyik felbontás utáni polinomokból - az elsőfokúból, a harmadfokúból, vagy az ötödfokúból - kerülnek ki, először nézzük meg az ötödfokú polinomok és a parciális deriváltak rezultánsát. Az ötödfokú polinomok a következőek:

$$l(x) = 13x^5 - 50x^4 + 35x^3 - 15x^2 + 25x - 12$$
$$m(y) = 208y^5 - 840y^4 + 1085y^3 - 610y^2 + 265y - 81$$

A mátrixokat terjedelmi okokból most nem írjuk le,csak a kiszámolt rezultánsokat, amik a következőek:

$$R(h,l)_x = 3(208y^5 - 840y^4 + 1085y^3 - 610y^2 + 265y - 81)$$
$$(3328y^5 - 15360y^4 + 8720y^3 - 68540y^2 + 105355y - 16551)$$

$$R(k,l)_x = (208y^5 - 840y^4 + 1085y^3 - 610y^2 + 265y - 81)$$
$$(10816y^10 - 78000y^9 + 331980y^8 - 1092905y^7 + 2409510y^6 - 3209624y^5 + 2550325y^4 -$$
$$- 1226535y^3 + 365985y^2 - 66420y + 5184)$$

$$R(h,m)_y = 16(13x^5 - 50x^4 + 35x^3 - 15x^2 + 25x - 12)$$
$$(212992x^10 - 1116160x^9 + 3074880x^8 - 6457120x^7 + 10528740x^6 - 12723321x^5 +$$
$$+ 11377900x^4 - 7303665x^3 + 3030885x^2 - 679995x + 54756)$$

$$R(k,m)_y = -12288(13x^5 - 50x^4 + 35x^3 - 15x^2 + 25x - 12)$$
$$(13689x^10 - 21060x^9 + 9090x^8 - 29325x^7 + 31165x^6 - 8323x^5 + 8555x^4 - 5835x^3 -$$
$$- 6860x^2 - 150x - 72)$$

Azt vehetjük észre, hogy minden kapott rezultánsban megtalálható a másik ötödfokú polinom (az $R(k,l)_x$-ben a h stb.), de a harmad- vagy elsőfokúak nem, ezért ebből arra következtethetünk, hogy ha az x az egyik ötödfokú polinom gyöke, akkor az y a másik ötödfokú polinom gyökei közül kerül ki. Ha $x = 1$, és ezt az f polinomba behelyettesítjük, akkor megkapjuk, hogy az ehhez tartozó y értéke is 1. Ebből kiderül, hogy ha az x az egyik harmadfokú polinom gyöke, akkor y a másik harmadfokú polinom gyökei közül kerül ki. Tudjuk, hogy minden x-hez tartozik y. Azt is tudjuk, hogy az x, y párok melyik polinom gyökei lehetnek. Mostmár csak azt kell megvizsgálnunk, hogy van-e olyan eset, amikor az x és az y is valós.

Vizsgáljuk újra az ötödfokú polinomokat. Keressük meg az

$$l(x) = 13x^5 - 50x^4 + 35x^3 - 15x^2 + 25x - 12$$

gyökeit numerikusan. Ehhez a wolframalpha-t használtuk. A polinomnak 2 komplex és 3 valós gyöke van. A valós gyökök a következőek:

$$x_1 \approx 0,634874$$
$$x_2 \approx 0,812081$$
$$x_3 \approx 3,02334$$

Ha ezeket az értékeket visszahelyettesítjük a parciális deriváltakba, akkor különböző y értékeket kapunk. Ha ezeket a kapott y értékeket összevetjük az m polinom gyökeivel, akkor észrevesszük, hogy ezek nem egyeznek meg. Ismételjük meg ugyanezt az

$$m(y) = 208y^5 - 840y^4 + 1085y^3 - 610y^2 + 265y - 81$$

polinomra is. Ennek is 2 komplex és 3 valós gyöke van. A valós gyökei a következőek:

$$y_1 \approx 0,599384$$
$$y_2 \approx 1,25126$$
$$y_3 \approx 2,10664$$

Itt is ugyanazt kapjuk, mint az l polinomnál, tehát ha az ötödfokú polinomokból választjuk a gyököket, akkor nem lesz olyan x, y számpár, ahol mindkettő valós. Ebből arra tudunk következtetni, hogy csak akkor van megoldás, ha az $(x/y/z)$ arány a kiemelt harmadfokú polinom gyökeinek arányával egyezik meg. Ezért keressük meg az

$$n(x) = x^3 - 6x^2 + 5x - 1$$

vagy a

$$p(y) = y^3 - 6x^2 + 5x - 1$$

polinom gyökeit. Tudjuk, hogy a két harmadfokú polinomnak a gyökei megegyeznek. Ezek a gyökök a következőek:

$$x_1 \approx 0,307979$$
$$x_2 \approx 0,643104$$
$$x_3 \approx 5,0489$$

Ha ezeket az értékeket helyettesítjük be a parciális deriváltakba, akkor az ezekhez az x-ekhez tartozó y-ok valósak. Tehát tényleg csak akkor kapunk valós x, y számpárokat, ha azokat a harmadfokú polinomokból választjuk meg.

$z = 0$ esetén a polinom a következőképpen néz ki:

$$q(x,y) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 3x^3y.$$

A polinom alakját megnézve elemi módszerekhez is folyamodhatnánk, pl. ha a $q(x,y)$ polinomot lederiváljuk x szerint, akkor az x-et ki lehetne emelni, majd megoldani a másodfokú egyenletet, de ezekhez megint észrevételeket kéne tennünk, ezért most kövessük a $z = 1$-es esetben megismert megoldási módszert, ezért itt is parciális deriváltakat és rezultánsokat fogunk használni.

Ezt deriváljuk q-t parciálisan először az x, majd az y szerint.

Az x szerinti parciális derivált:

$$r(x,y) = 4x^3 + 4xy^2 - 9x^2y.$$

Az y szerinti parciális derivált:

$$s(x,y) = 4y^3 + 4x^2y - 3x^3.$$

Most vegyük az r és az s polinomok a rezultánsát x szerint:

$$R(r,s)_x = \begin{vmatrix} 4 & -9y & 4x^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -9y & 4x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -9y & 4x^2 & 0 \\ -3 & 4y & 0 & 4y^3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4y & 0 & 4y^3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4y & 0 & 4y^3 \end{vmatrix} = 1872y^9$$

Majd y szerint is:

$$R(r,s)_y = \begin{vmatrix} 4x & -9x^2 & 4x^3 & 0 & 0 \\ 0 & 4x & -9x^2 & 4x^3 & 0 \\ 0 & 0 & 4x & -9x^2 & 4x^3 \\ 4 & 0 & 4x^2 & -3x^3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4x^2 & -3x^3 \end{vmatrix} = 468x^9$$

Ez tehát azt jelenti, hogy a $z = 0$ mellett minimumhelyet vesz föl, akkor az $1872y^9$ is nulla kell hogy legyen, így $y = 0$, és ugyanez igaz a $468x^9$-re is, tehát $x = 0$. Így az egyetlen minimumhely az $x = y = z = 0$.

Most z^4-tel újra beszorozva igazoltuk, hogy az

$$x^4 + y^4 + z^4 + 2x^2y^2 + 2x^2z^2 + 2y^2z^2 - 3x^3y - 3y^3z - 3z^3x \geq 0$$

egyenlőtlenség mindig teljesül, egyenlőség csak a bevezetőben említett esetekben áll fönn.

3. Moduluselméleti módszerek

Az is egy érdekes kérdés, hogy fel lehet-e bontani a polinomot négyzetek összegére, mert ha felírható, akkor tudjuk, hogy mindig teljesül az, hogy a polinom nagyobb vagy egyenlő mint nulla. A bevezetőben már láttuk, hogy három kifejezés négyzetének összegeként előáll ez a polinom, de ez a felbontás véletlenszerűnek tűnik, nem lehet tudni, hogy hogyan lehet rájönni. Ezért szeretnénk keresni egy olyan módszert vagy algoritmust, amivel egyértelműen megmutatható, hogy a polinom előáll-e négyzetek összegeként, és ha igen, akkor az is megkapható, hogy hány darab négyzet összegeként áll elő, és ezek a négyzetek milyenek.

Ez a kérdés nem újszerű és a matematika egyik vezető kérdése abban az értelemben is, hogy Hilbert 17. problémája pont arra kérdez rá, hogy nemnegatív polinomot négyzetösszeggé lehet-e alakítani.

Hilbert 17. problémája:

Legyen p egy n változós valós együtthatós racionális törtfüggvény,amelyre

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0$$

minden $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ esetén. Igaz-e hogy

$$p = s_1^2 + s_2^2 + \cdots + s_k^2,$$

ahol $s_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), 1 \leq i \leq k$ racionális törtfüggvények?

Külön érdekes a kérdés polinomok esetére. Igaz-e, hogy minden valós együtthatós polinom, amely mindenhol nemnegatív értéket vesz föl előáll polinomok négyzetösszegeként? A reguláris algebrának része ez a kérdés homogén kétváltozós polinomokra. Ezek a függvények ugyanis pont a kvadratikus alakok. Az eredeti kérdésre maga Hilbert is tudta, hogy a válasz nemleges. A legegyszerűbb ellenpélda Motzkintól származik [1].A polinom a következő:

$$M(x, y) = x^4y^2 + x^2y^4 + 1 - 3x^2y^2.$$

Hilbert 17. problémáját maga Artin oldotta meg, aki egy nem konstruktív bizonyítást adott a tételre. Azóta konstruktív algoritmusok is születtek, mi a [2]-ben ismertetett módszer segítségével megvizsgáljuk, hogy hogyan lehet előállítani a mi kifejezésünket négyzetösszegként. Azt már tudjuk, hogy lehet, ezért egyrészt az a kérdés, hogy lehet-e máshogy, másrészt lehet-e kevesebb négyzetösszegként előállítani.

A [2]-ban leírják, hogy hogyan lehet egy mátrixot rendelni minden polinomhoz úgy, hogy a mátrix elemeinek a megfelelő értékeket adva el tudjuk dönteni, hogy az eredeti polinom előáll-e négyzetösszegként, és azt is megmutatja, hogy milyen és hány négyzet összegeként áll elő.

Az algoritmus azon alapul, hogy egy valós számtest feletti polinom négyzetösszeg-felbontása megfelel egy valós, szimmetrikus, pozitív szemidefinit mátrixnak, amelynek az elemei kielégítenek bizonyos lineáris egyenleteket. Ez csak látszólag ugyanaz a módszer, mint a kvadratikus alakok négyzetösszeggé alakítása. Itt ugyanis a páronkénti szorzatok nem különbözőek. Például x^2yz előállhat úgy is, hogy x^2 és yz szorzata, és úgy is, mint xy és xz szorzata.

Képzeljük el, hogy milyen tagok négyzetösszegeként állhat elő a mi kifejezésünk. Mivel az összegben minden tag negyedfokú, ezért a kifejezések amiket majd négyzetre kell emelni másodfokúak lesznek. Itt nem bizonyítjuk be, de a cikkből kiderül, hogy első és nulladfokú tagokat nem kell bevenni. A cikk azt sugallja, hogy nézzük meg, hogy milyen kifejezéseink vannak a polinomban, és csak az azoknak megfelelő szorzótényezőket tegyük bele a kifejezésbe. Ezen a helyen a cikk hibás, mert nyugodtan elképezelhető, hogy egy tényező amely az egyikben pozitívként a másikban negatívként szerepel az kiesik, de amúgy a négyzetösszeg előállításhoz hozzájárul. Esetünkben a szóban forgó másodfokú kifejezések x^2, y^2, z^2, xy, xz, yz. Ezekkel fogjuk indexelni a mátrix sorait és oszlopait.

Ebben az algoritmusban egy mátrixot hozunk létre, amelynek a sorai és oszlopai monomokkal vannak indexelve. A monomok megfelelnek a négyzetösszeg egy-egy tagjának.

Az i-edik sor j-edik oszlopában szereplő $b_{i,j}$ tag azt jelenti, hogy a mi négyzetösszegünkben milyen együtthatóval járul hozzá a $\beta_i + \beta_j$-nek megfelelő monom.

Példaként nézzük az x^2y^2 tagot. Itt figyelembe kell venni, hogy $b_{2,4}$ az x^2y^2 monomnak felel meg, ami kétféleképpen is előállhat. Egyszer az x^2 és y^2 szorzataként, és az xy és xy szorzataként is. Az x^4-et csak egyféleképpen tudjuk előllítani,így a $b_{1,1}$ azt jelenti, hogy hány x^4 lesz $x^2 \cdot x^2$ előállítással.

Az algoritmus a következőképpen néz ki. Elkészítünk egy akkora négyzetes mátrixok, mint amennyi a szóba jövő monomok száma. Úgy képzeljük, hogy a sorok és az oszlopok ezekkel a monomokkal vannak indexelve. Eőször kitöltjük az $b_{i,j}$ betűkkel. Ezután megvizsgáljuk, hogy melyik 2 monom minek a szorzata és megjelöljük azokat az elemeket, amelyek ugyanahhoz a szorzathoz tartoznak, vagyis, ha az oszlop és a sor jelölő monomjai ugyanazok. Ott ahol többféleképpen áll elő, ott figyeljünk arra, hogy az összeg egyenlő legyen az együtthatóval. Rendeljünk minden monomhoz egy-egy három hosszú karakterisztikus vektort, annak megfelelően, hogy az (x, y, z) változók milyen hatványon szerepelnek a sorozatban. Majd az összeg tagjaihoz rendelt vektorok közül válasszuk ki azokat, amelyekben minden koordináta páros, majd a vektor koordinátáinak értékét felezzük meg, és indexeljük őket. Ennek megfelelően a vektorok:

$$
\begin{aligned}
x^2 &\mapsto \beta_1 = (2,0,0)\\
y^2 &\mapsto \beta_2 = (0,2,0)\\
z^2 &\mapsto \beta_3 = (0,0,2)\\
xy &\mapsto \beta_4 = (1,1,0)\\
xz &\mapsto \beta_5 = (1,0,1)\\
yz &\mapsto \beta_6 = (1,0,1)
\end{aligned}
$$

Ezek után nézzük meg, hogy a polinom nemnulla együtthatójú tagjait hogyan tudjuk felírni a karakterisztikus vektorokkal:

$$
\begin{aligned}
(4,0,0) &= \beta_1 + \beta_1;\\
(0,4,0) &= \beta_2 + \beta_2;\\
(0,0,4) &= \beta_3 + \beta_3;\\
(2,2,0) &= \beta_1 + \beta_2,\ \ \beta_4 + \beta_4;\\
(2,0,2) &= \beta_1 + \beta_3,\ \ \beta_5 + \beta_5;\\
(0,2,2) &= \beta_2 + \beta_3,\ \ \beta_6 + \beta_6;
\end{aligned}
$$

Az (x, y, z) változók kitevőiből látható, hogy a monomokat úgy szorozzuk, ahogy a karakterisztikus vektorokat összeadjuk. Így tehát a problémát átfogalmaztuk a vektorterek nyelvére.

Technikailag a keresett B mátrixot a következőképpen írjuk föl. Egy üres mátrixból indulunk ki, majd minden lépésben hozzávesszük a polinom egy-egy tagját. A maradék helyekre pedig ismeretleneket teszünk. A módszert példákon keresztül szemléltetjük. A módszert nem írjuk le minden egyes tagra, mert a példákon keresztül mindenkinek világos lesz, hogy hogyan kell kitölteni a mátrixot. Induljunk ki a következő 6×6-os B mátrixból.

$$B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} & b_{1,4} & b_{1,5} & b_{1,6} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} & b_{2,4} & b_{2,5} & b_{2,6} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} & b_{3,4} & b_{3,5} & b_{3,6} \\ b_{4,1} & b_{4,2} & b_{4,3} & b_{4,4} & b_{4,5} & b_{4,6} \\ b_{5,1} & b_{5,2} & b_{5,3} & b_{5,4} & b_{5,5} & b_{5,6} \\ b_{6,1} & b_{6,2} & b_{6,3} & b_{6,4} & b_{6,5} & b_{6,6} \end{pmatrix}$$

A $b_{1,1}$ tagnak megfeleltetett $(4,0,0)$ vektor csak egyféleképp áll elő β-k összegeként, méghozzá $2\beta_1$ alakban. A $b_{1,1}$ együtthatója 1, ennek megfelelően tehát a B mátrixban $b_{1,1} := 1$.

A (2,2,0) karakterisztikus vektorú tag előáll úgy is, mint $\beta_1 + \beta_2$, és úgy is, mint $\beta_4 + \beta_4$. Ez a B mátrix $b_{1,2}$, $b_{2,1}$, $b_{4,4}$ elemeinek felel meg. Mivel tudjuk, hogy ezekenek az elemeknek az összege meg kell, hogy egyezzen a polinomban szereplő tag együtthatójával, valamint a szimmetria miatt: $b_{1,2} = b_{2,1}$. Legyen $b_{1,2} = a$. A polinomban a tag együtthatója 2, tehát $b_{1,2} + b_{2,1} + b_{4,4} = 2$, így $b_{4,4} = 2 - 2a$. Most a mátrixunk a következőképpen néz ki:

$$B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & a & b_{1,3} & b_{1,4} & b_{1,5} & b_{1,6} \\ a & b_{2,2} & b_{2,3} & b_{2,4} & b_{2,5} & b_{2,6} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} & b_{3,4} & b_{3,5} & b_{3,6} \\ b_{4,1} & b_{4,2} & b_{4,3} & 2-2a & b_{4,5} & b_{4,6} \\ b_{5,1} & b_{5,2} & b_{5,3} & b_{5,4} & b_{5,5} & b_{5,6} \\ b_{6,1} & b_{6,2} & b_{6,3} & b_{6,4} & b_{6,5} & b_{6,6} \end{pmatrix}$$

Ugyanezt végezzük el az összes többi monomra.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & a & b & -\frac{3}{2} & \delta & \alpha \\ a & 1 & c & \epsilon & \beta & -\frac{3}{2} \\ b & c & 1 & \gamma & -\frac{3}{2} & \varphi \\ -\frac{3}{2} & -\epsilon & \gamma & 2-2a & -\alpha & -\beta \\ -\delta & \beta & -\frac{3}{2} & -\alpha & 2-2b & -\gamma \\ \alpha & -\frac{3}{2} & -\varphi & -\beta & -\gamma & 2-2c \end{pmatrix}$$

Tegyünk még egy apró észrevételt. Az x^3z tag csak $x^2 \cdot xz$ alakban állhat elő, a kifejezésünkben viszont nem szerepel, ezért $b_{1,5} = b_{5,1} = 0$ Tehát a kitöltött mátrix:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & a & b & -\frac{3}{2} & 0 & \alpha \\ a & 1 & c & 0 & \beta & -\frac{3}{2} \\ b & c & 1 & \gamma & -\frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & \gamma & 2-2a & -\alpha & -\beta \\ 0 & \beta & -\frac{3}{2} & -\alpha & 2-2b & -\gamma \\ \alpha & -\frac{3}{2} & 0 & -\beta & -\gamma & 2-2c \end{pmatrix}$$

A feladatunk a következő: Adjunk úgy valós értékeket az $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$-nak, hogy a mátrixunk pozitív szemidefinit legyen. Ezek a kiértékelések fogják megadni a négyzetösszeg előállításainkat. Tegyük fel, hogy találunk ilyen számokat, hogy a mátrix pozitív szemidefinit. Ekkor a B mátrixról tudjuk, hogy előáll AA^T alakban. A kifejezés annyi négyzetösszegként fog előállni amennyi a nem 0 oszlopok száma és a monomok együtthatói a mátrix megfelelő elemei.

Mivel a Középiskolai Lapok Fórumán 3 négyzet összegeként állították elő a polinomot, így mi most azt vizsgáljuk meg, hogy előállítható-e a polinom 1 vagy 2 négyzet összegeként. Az algoritmusból kiderül, hogy a négyzetek száma a kitöltött B mátrix rangja, ami szemmel láthatólag nem 1, mert a 0-k más oszlopokban vannak. Ezért nézzük meg, hogy lehet-e a mátrix rangja 2. A mátrix rangja pont akkor 2, ha minden 3×3 aldetermináns egyenlő 0-val. Válasszunk ki a következő aldeterminánst:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & -\frac{3}{2} \\ a & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & (2-2a) \end{vmatrix} = (2-2a) - a^2(2-2a) - \frac{9}{4}$$

Ennek a polinomnak a gyökei:

$$a_1 = -\frac{1}{2},\ a_2 = -\frac{1}{4}(3-\sqrt{13}),\ a_3 = -\frac{1}{4}(3+\sqrt{13})$$

A b-re és a c-re hasonlóan kereshetünk aldeterminánsokat, így amennyiben elérhető, hogy a mátrix rangja 2 legyen, akkor a, b, c értékei a következőek lehetnek:

$$-\frac{1}{2},\ \ -\frac{1}{4}(3-\sqrt{13}),\ \ -\frac{1}{4}(3+\sqrt{13})$$

Legyen $a = -\frac{1}{2}$, ekkor a mátrixunk a következőképpen néz ki:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & b & -\frac{3}{2} & 0 & \alpha \\ -\frac{1}{2} & 1 & c & 0 & \beta & -\frac{3}{2} \\ b & c & 1 & \gamma & -\frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & \gamma & 3 & -\alpha & -\beta \\ 0 & \beta & -\frac{3}{2} & -\alpha & 2-2b & -\gamma \\ \alpha & -\frac{3}{2} & 0 & -\beta & -\gamma & 2-2c \end{pmatrix}$$

Számoljuk ki a következő aldeterminánst:

$$\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & b \\ -\frac{1}{2} & 1 & c \\ b & c & 1 \end{vmatrix} = b^2 + c^2 + \frac{1}{4} - 1 + \frac{1}{2}bc + \frac{1}{2}bc = b^2 + c^2 + bc - \frac{3}{4}$$

Legyen most $b = -\frac{1}{2}$, helyettesítsük be ezt a determinánsba és számoljuk ki ebből a lehetséges c értékeket.

$$c^2 - \frac{1}{2}c - \frac{1}{2} = 0$$

Az egyenletnek a gyökei a következőek:

$$c_1 = 1,\ c_2 = -\frac{1}{2}.$$

Mivel a c_1 nem a gyöke az előző egyenletnek, ezért nem megoldás. A c_2 viszont az előző egyenlet gyöke is, ezért ez jó megoldás, így ezt az értéket használjuk. Tehát a mátrixunk most így néz ki:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & \alpha \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \beta & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & \gamma & -\frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & \gamma & 3 & -\alpha & -\beta \\ 0 & \beta & -\frac{3}{2} & -\alpha & 3 & -\gamma \\ \alpha & -\frac{3}{2} & 0 & -\beta & -\gamma & 3 \end{pmatrix}$$

Most számoljuk ki az α, β és γ értékét a következő aldeterminánssal:

$$\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \beta \\ 0 & \beta & 3 \end{vmatrix} = \beta^2 + \frac{3}{4} - 3$$

Számoljuk ki a következő másodfokú egyenletnek a gyökeit:

$$\beta^2 - \frac{9}{4} = 0.$$

A gyökök pedig a következőek:

$$\beta = \pm 1,5.$$

Mivel azt szeretnénk, hogy a mátrix rangja 2 legyen, ezért az $\alpha, \beta, \gamma = 1,5$ helyettesítést fogjuk használni. Tehát végül a teljesen kitöltött mátrix a következőképpen néz ki:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 3 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 3 & -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix}$$

Látható, hogy ennek a mátrixnak a rangja valóban 2. Tehát bizonyos, hogy valóban fölírható az eredeti polinomot két négyzet összegeként. Ezt meg is tesszük a többi lehetséges a, b és c érték vizsgálata után. Most pedig keressünk még több négyzetösszeges előállítást az a-ra kapott értékek változtatásával. A lehetséges értékek a, b, c-re:

$$(a,b,c)_1 = -\frac{1}{2},\ (a,b,c)_2 = -\frac{1}{4}(3-\sqrt{13}),\ (a,b,c)_3 = -\frac{1}{4}(3+\sqrt{13}),$$

és ezek bármilyen variációja.

Maradjon $a = -\frac{1}{2}$ továbbra is, és legyen $b = -\frac{1}{4}(3+\sqrt{13})$, ekkor a mátrixunk a következőképpen néz ki:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}(3+\sqrt{13}) & -\frac{3}{2} & 0 & \alpha \\ -\frac{1}{2} & 1 & c & 0 & \beta & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{4}(3+\sqrt{13}) & c & 1 & \gamma & -\frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & \gamma & 3 & -\alpha & -\beta \\ 0 & \beta & -\frac{3}{2} & -\alpha & 2+\frac{1}{2}(3+\sqrt{13}) & -\gamma \\ \alpha & -\frac{3}{2} & 0 & -\beta & -\gamma & 2-2c \end{pmatrix}$$

Helyettesítsük be a b-t a következő egyenletbe, ami az előzőekben kiszámolt aldetermináns:

$$b^2 + c^2 + bc - \frac{3}{4} = 0$$

és számoljuk ki ebből a lehetséges c értékeket. Ebből az egyenletből c-re komplex értékeket kapunk, így ebből nem kapunk új négyzetösszeg előállítást.

Legyen most $b = -\frac{1}{4}(3 - \sqrt{13})$, majd ismételjük meg az előző lépést mégegyszer. Ekkor c-re a következő értékeket kapjuk:

$$c_1 \approx -0,99624, \; c_2 \approx 0,84485$$

De ebből sem kapunk új négyzetösszeget, mert ezek a c értékek sem egyenlőek egyik lehetséges értékkel sem. Tehát mostmár azokat az eseteket megvizsgáltuk, amikor a, b vagy c értéke közül bármelyik $-\frac{1}{2}$ lehet, így mostmár csak a többi esetet kell vizsgálnunk. Legyen most $a = -\frac{1}{4}(3 + \sqrt{13})$. Ekkor a mátrixunk a következőképpen alakul:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4}(3+\sqrt{13}) & b & -\frac{3}{2} & 0 & \alpha \\ -\frac{1}{4}(3+\sqrt{13}) & 1 & c & 0 & \beta & -\frac{3}{2} \\ b & c & 1 & \gamma & -\frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & \gamma & 2+\frac{1}{2}(3+\sqrt{13}) & -\alpha & -\beta \\ 0 & \beta & -\frac{3}{2} & -\alpha & 2-2b & -\gamma \\ \alpha & -\frac{3}{2} & 0 & -\beta & -\gamma & 2-2c \end{pmatrix}$$

Számoljuk ki a következő aldeterminánst:

$$\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{4}(3+\sqrt{13}) & b \\ -\frac{1}{4}(3+\sqrt{13}) & 1 & c \\ b & c & 1 \end{vmatrix} = b^2 + c^2 + \frac{1}{2}(3+\sqrt{13})bc + \frac{1}{2}(3+\sqrt{13})^2 - 1$$

Helyettesítsünk be b helyére $b = -\frac{1}{4}(3 + \sqrt{13})$. Ekkor

$$c^2 + -\frac{1}{8}(3+\sqrt{13})^2 c + ((-\frac{1}{4}(3+\sqrt{13}))^2 + \frac{1}{2}(3+\sqrt{13})^2 - 1) = 0.$$

Oldjuk meg ezt a c-re másodfokú egyenletet. Az egyenlet gyökei komplex számok, így innen sem kapunk új négyzetösszeg előállítást.

Legyen most $b = -\frac{1}{4}(3-\sqrt{13})$. Ekkor az aldetermináns a következőképpen néz ki:

$$c^2 + -\frac{1}{8}(3-\sqrt{13})^2 c + ((-\frac{1}{4}(3-\sqrt{13}))^2 + \frac{1}{2}(3+\sqrt{13})^2 - 1) = 0.$$

Ennek az egyenletnek a gyökei is komplexek.

Mostmár csak a lehetséges értékek egy variációját kell megvizsgálnunk, amikor $a = -\frac{1}{4}(3-\sqrt{13})$. Ekkor a mátrixunk a következőképpen alakul:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4}(3-\sqrt{13}) & b & -\frac{3}{2} & 0 & \alpha \\ -\frac{1}{4}(3-\sqrt{13}) & 1 & c & 0 & \beta & -\frac{3}{2} \\ b & c & 1 & \gamma & -\frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & \gamma & 2+\frac{1}{2}(3-\sqrt{13}) & -\alpha & -\beta \\ 0 & \beta & -\frac{3}{2} & -\alpha & 2-2b & -\gamma \\ \alpha & -\frac{3}{2} & 0 & -\beta & -\gamma & 2-2c \end{pmatrix}$$

Számoljuk ki a következő aldeterminánst:

$$\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{4}(3-\sqrt{13}) & b \\ -\frac{1}{4}(3-\sqrt{13}) & 1 & c \\ b & c & 1 \end{vmatrix} = b^2 + c^2 + \frac{1}{2}(3-\sqrt{13})bc + \frac{1}{2}(3-\sqrt{13})^2 - 1$$

Helyettesítsünk be b helyére $b = -\frac{1}{4}(3-\sqrt{13})$. Ekkor

$$c^2 + -\frac{1}{8}(3-\sqrt{13})^2 c + ((-\frac{1}{4}(3-\sqrt{13}))^2 + \frac{1}{2}(3-\sqrt{13})^2 - 1) = 0.$$

Oldjuk meg ezt a c-re másodfokú egyenletet. Az egyenlet gyökei komplex számok, így innen sem kapunk új négyzetösszeg előállítást. Ezáltal az összes ilyen lehetőséget megvizsgáltuk.

Csak egyetlen lehetséges B mátrixot kaptunk, ami a következő:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 3 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 3 & -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix}$$

Ennek a mátrixnak a rangja tehát 2 és ezt akár Gram-Schmidt ortogonizációval vagy más módszerrel felbonthatjuk AA^T alakban, ahol

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Egy ilyen felbontásból az összes olyan A_1 , amelyre $A_1A_1^T = B$ úgy kapható meg, hogy veszünk egy tetszőleges ortogonális U mátrixot és megszorozzuk vele A-t.

Ebből a mátrixból meg is kapunk rögtön egy négyzetösszeges felbontást:

$$(x^2 - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}z^2 - \frac{3}{2}xy + \frac{3}{2}yz)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2}y^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}z^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}yz + \sqrt{3}xz - \frac{\sqrt{3}}{2}xy)^2$$

Ezt úgy kaptuk meg, hogy az A mátrixot megszoroznánk az $(x^2, y^2, z^2, xy, xz, yz)$ vektorral és az összeg tagjait négyzetre emelnénk.

Általában ezeket az $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ értékeket nem lehet úgy megválasztani, hogy pozitív szemidefinitet kapjunk. Motzkin példája is mutatja, hogy az ahhoz a poliomhoz rendelt mátrixot nem lehet úgy kitölteni, hogy pozitív szemidefinit legyen, mert nem lehet négyzetösszegként előállítani.

Mi is több tucat értéket helyettesítettünk félig véletlenszerűen, félig tudatosan, de mindig lett a B mátrixnak negatív sajátértéke. Ez azért baj, mert egy ilyen mátrix pont akkor pozitív szemidefinit, ha a sajátértékei nem negatívak.

Az ilyen értékek megtalálása általában bonyolult és hosszú feladat, nem véletlen, hogy ebből a kérdéskörből nőtt ki az Artin-Schreier elmélet.

Most nézzük meg, hogy milyen értékek is vannak az A mátrixban. Ezeket felírhatjuk szinusz és koszinusz függvények segítségével is. Így az A mátrixunk a következőképpen alakul:

$$A = \begin{pmatrix} \cos 0^\circ & \sin 0^\circ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos 120^\circ & \sin 120^\circ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos 240^\circ & \sin 240^\circ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3}\cos -30^\circ & \sqrt{3}\sin -30^\circ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3}\cos 90^\circ & \sqrt{3}\sin 90^\circ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3}\cos 210^\circ & \sqrt{3}\sin 210^\circ & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Az A mátrix első két sorát megszorozva a

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

2×2-es ortogonális mátrixszal, az alábbi mátrixot kapjuk:

$$A = \begin{pmatrix} \cos 0^\circ \sin\alpha - \sin 0^\circ \cos\alpha & \cos 0^\circ \sin\alpha + \sin 0^\circ \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos 120^\circ \sin\alpha - \sin 120^\circ \cos\alpha & \cos 120^\circ \sin\alpha + \sin 120^\circ \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos 240^\circ \sin\alpha - \sin 240^\circ \cos\alpha & \cos 140^\circ \sin\alpha + \sin 240^\circ \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3}\cos(-30)^\circ \sin\alpha - \sqrt{3}\sin -30^\circ \cos\alpha & \sqrt{3}\cos(-30)^\circ \sin\alpha + \sqrt{3}\sin -30^\circ \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3}\cos 90^\circ \sin\alpha - \sqrt{3}\sin 90^\circ \cos\alpha & \sqrt{3}\cos 90^\circ \sin\alpha + \sqrt{3}\sin 90^\circ \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3}\cos 210^\circ \sin\alpha - \sqrt{3}\sin 210^\circ \cos\alpha & \sqrt{3}\cos 210^\circ \sin\alpha + \sqrt{3}\sin 210^\circ \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Trigonometrikus azonosságokat felhasználva a mátrixunk az alábbiak szerint egyszerűsödik:

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha + 0^\circ) & \sin(\alpha + 0^\circ) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos(\alpha + 120^\circ) & \sin(\alpha + 120^\circ) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos(\alpha + 240^\circ) & \sin(\alpha + 240^\circ) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3}\cos(\alpha(-30)^\circ) & \sqrt{3}\sin(\alpha(-30)^\circ) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3}\cos(\alpha + 90^\circ) & \sqrt{3}\sin(\alpha + 90^\circ) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3}\cos(\alpha + 210^\circ) & \sqrt{3}\sin(\alpha + 210^\circ) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ezzel általános képletet adhatunk az összes kéttagú négyzetösszeg előállításra, ami a következő:

$$\Big(x^2\cos(\alpha) + y^2\cos(\alpha + 120^\circ) + z^2\cos(\alpha + 240^\circ) +$$
$$+ \sqrt{3}\big(xy\cos(\alpha - 30^\circ) + xz\cos(\alpha + 90^\circ) + yz\cos(\alpha + 210^\circ)\big)\Big)^2 +$$
$$+ \Big(x^2\sin(\alpha) + y^2\sin(\alpha + 120^\circ) + z^2\sin(\alpha + 240^\circ) +$$
$$+ \sqrt{3}\big(xy\sin(\alpha - 30^\circ) + xz\sin(\alpha + 90^\circ) + yz\sin(\alpha + 210^\circ)\big)\Big)^2,$$

tetszőleges α megválasztása mellett.

Köszönetnyilvánítás

Köszönöm Palotay Dorkának és Árendás Péternek a szakdolgozathoz nyújtott hasznos tanácsaikat.

Ezen kívűl köszönöm Édesanyámnak a tanulmányaim során nyújtott folyamatos támogatást és bátorítást

Hivatkozások

[1] T. S. Motzkin, The arithmetic-geometric ineguality, In: Proc. Symposium on Inequalites, edited by O. Shisha, Academic Press, New YOrk, 1967, pp. 205-224.

[2] Victoria Powers and Thorsten Wörmann, An algorithm for sums os squars of real polynomials, Universität Dortmund.

[3] Vasile Cirtoaje, Algebraic inequalities - old and new methods, GIL Publishing House, Zalau, Romania, 2006.

[4] Konrad Schmüdgen, Around Hilbert's 17th problem, Universität Leipzig,

[5] Kiss Emil, Bevezetés az algebrába, Typotex kiadó, Budapest, 2007.