Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Matematika BSc - tanári szakirány

Szakdolgozat

Tételek másodrendű felületekről

Készítette: Bota Bettina (IVKRL1)
Témavezető: Dr. Csikós Balázs tanszékvezető egyetemi docens
Geometriai Tanszék

2014

Tartalomjegyzék

1 Bevezető

„A geometriának nagy vonásokban való bemutatása a szemléletes gondolkodásmód kapcsán arra is alkalmas, hogy a közönség szűkebb körében a matematika helyesebb méltatásához hozzásegítsen.”

David Hilbert

Szakdolgozatom célja, a geometria egy szemléletes oldalának bemutatása, bizonyos másodrendű felületek vizsgálatán keresztül. Ahogy azt a fenti idézet is megfogalmazza, én is úgy gondolom, hogy a matematika könnyebben szerethetővé, érthetővé válik sok szemléletes ábra, saját kezűleg elkészíthető modell segítségével, ezért munkám során ezt az irányt kívántam követni. A pontos levezetések érdekében sok képlet, analitikus leírás is található dolgozatomban, ennek ellenére e tételek értelme egyszerre látható és megfogható, matematikában nem jártasak számára is.

Szakdolgozatom első felében az ellipszist és a hiperbolát mutatom be, továbbá a konfokális ellipszisek és hiperbolák fogalmát ismertetem. Témám középpontjában azonban az ellipszoid áll, elsősorban erről a felületről szeretnék olyan tételeket belátni, melyek segítségével a felület síkmetszeteiről kapunk részletes ismereteket. Azért választottam ezeket a tételeket, mert jól szemléltethetők sajátkészítésű modell segítségével is. Az általam készített modell az ellipszoid egy körmetszet modellje.

Dolgozatom befejezésében az egyköpenyű és kétköpenyű hiperboloidokról is szó esik, mint az ellipszoiddal konfokális másodrendű felületek, melyek szemléltetésére számítógépes programmal készült képek lesznek segítségemre.

Szeretném megköszönni témavezetőm, Csikós Balázs munkáját, aki sok ötlettel, támogatással látott el a dolgozatom megírása során, mindig elérhető és segítőkész volt, ha kérdéssel fordultam hozzá.

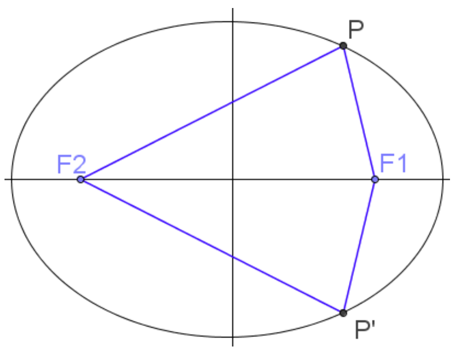
2 Az ellipszis és a hiperbola

2.1 Az ellipszis definíciója és alapvető tulajdonságai

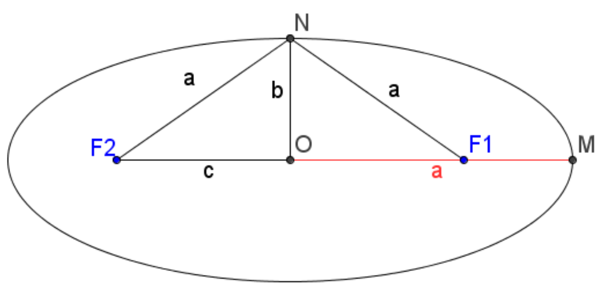
Legyenek adottak a σ síkon az F_1 és F_2 pontok, továbbá egy $a > \frac{F_1F_2}{2}$ távolság. Azon σ-beli pontok ε mértani helyét, melyek F_1 és F_2-től mért távolságuk összege $2a$, ellipszisnek nevezzük.

$$\varepsilon = \{P \in \sigma \mid F_1P + F_2P = 2a\}.$$

Az F_1, F_2 pontok az ellipszis fókuszpontjai. Tekintsük az F_1F_2 szakasz felezőmerőlegesét és az F_1F_2 által meghatározott egyeneseket. Ezeket az egyeneseket az ellipszis tengelyeinek nevezzük, melyek egyben szimmetriatengelyek is.



A görbe szimmetrikussága látható, ha az F_1F_2P és F_1F_2P' háromszögeket vizsgáljuk, ahol $P \in \varepsilon$ és P' a P tükörképe az F_1F_2 egyenesre. Ekkor a fókuszok és a hozzájuk tartozó pontpárok szimmetrikus alakzatot alkotnak, mivel ugyanaz a távolságösszeg van mind P, mind P' ponthoz hozzárendelve. A tengelyek merőlegesen metszik egymást, metszéspontjuk pedig az ellipszis centruma. Jelölje: O.



A fókuszpontok O-tól mért távolságát c-vel jelöljük, és lineáris excentricitásnak nevezzük.

$$F_1O = F_2O = c$$

A két tengelynek és az ellipszisnek 4 metszéspontja van, ezek a tengelypontok. Az ábrán látható jelöléseknek megfelelően:

$$OM = \frac{MF_1 + MF_2}{2} = a \text{ és } ON = b,$$

ahol a és b az ellipszis féltengelyei. Így az ellipszis definíciójában szereplő állandó, az ellipszis fél nagytengelyének hosszával egyezik meg.

Tehát egy ellipszist két fókuszpontja és nagytengelyének hossza meghatároz.

A Pitagorasz-tétel szerint, az előbbiekben meghatározott távolságokra érvényes

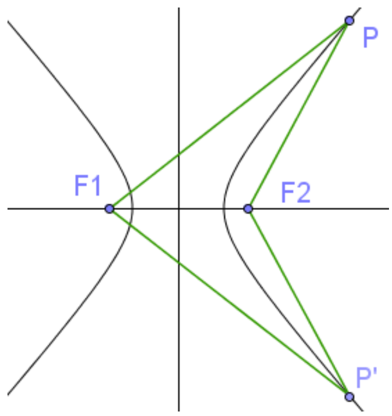
$$b^2 + c^2 = a^2$$

összefüggés, mivel F_1F_2N egyenlőszárú háromszög, amelyben definíció szerint

$$F_1N + NF_2 = 2a.$$

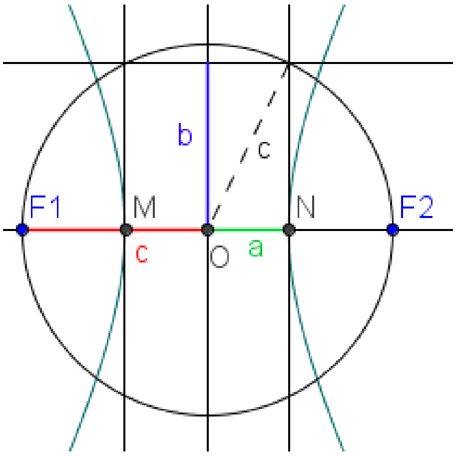
2.2 A hiperbola definíciója és alapvető tulajdonságai

Tekintsünk egy σ síkot F_1 és F_2 tetszőleges pontokkal, és legyen adott egy $a < \frac{F_1F_2}{2}$ távolság. Azon P pontok $\mathcal{H}$ mértani helyét a síkon, melyekre az $|F_1P - F_2P| = 2a$ feltétel teljesül, hiperbolának nevezzük. A hiperbola pontjait két osztályba sorolhatjuk aszerint, hogy melyik fókuszponthoz vannak közelebb. Amely pontok egy-egy fókuszhoz közelebb helyezkednek el, a hiperbola egy-egy ágát alkotják. Az F_1, F_2 pontok a hiperbola fókuszpontjai, és az F_1F_2 egyenes és F_1F_2 szakasz felezőmerőlegese a hiperbola tengelyei.



Ez a két tengely ebben az esetben is szimmetriatengely, mivel P pont F_1F_2 egyenesre vett tükörképe P', melynek a tengelyen lévő F_1F_2 pontoktól mért távolsága a tükrözés során nem változik, tehát a távolságkülönbség is azonos. Azaz ha $P \in \mathcal{H}$, akkor $P' \in \mathcal{H}$. Ugyanez elmondható a másik tengely esetében is, bár a fókuszok ekkor felcserélődnek, a távolságkülönbségek abszolút értéke nem változik meg. A tengelyek metszéspontját a hiperbola szimmetriacentrumának nevezzük és O-val jelöljük. A fókuszpontok és az O pontot összekötő szakasz hossza c, ez a lineáris excentricitás.

$$F_1O = F_2O = c$$



Az F_1F_2 szakaszra merőleges, O ponton átmenő tengelyt, képzetes tengelynek hívjuk. Ezen az egyenesen nincs a hiperbolának pontja, mivel bármely pontjára $|F_1P - F_2P| = 0$, ami miatt P nem teljesíti a definícióban szereplő feltételt. Az F_1, F_2 pontok által meghatározott egyenest valós tengely egyenesnek is nevezzük, melyen a hiperbolának két pontja helyezkedik el. Az ábrán ezeket M-el és N-el jelöltem. A tengelypontok nem lehetnek az F_1F_2 szakaszon kívül, mivel ekkor

$$|F_1P - F_2P| = F_1F_2 = 2c,$$

ami nem teljesíti a definícióban szereplő feltételt, miszerint

$$|F_1P - F_2P| < F_1F_2.$$

Az F_1F_2 szakaszon azonban a definícióból adódóan pontosan két hiperbolapont fekszik, melyekre biztosan igaz, hogy:

$$OM = ON = a.$$

Ha bevezetjük a tengelypontokat összekötő szakaszra a valós tengely elnevezést, akkor a-t ennek megfelelően valós féltengelynek hívjuk. Tehát egy hiperbolát egyértelműen meghatároz két fókuszpontja és a valós féltengely hossza. A további felhasználások érdekében, a hiperbola esetén is vezessük be a b tengelyszakaszt. Nevezzük képzetes féltengelynek, és a definíciója legyen:

$$b^2 = c^2 - a^2.$$

2.3 Az ellipszis és a hiperbola kanonikus egyenlete

Az ellipszist és a hiperbolát leíró egyenletet, egy olyan speciális koordináta-rendszerben, melynek origója O, x tengelye pedig az F_1F_2 egyenes, kanonikus egyenletnek nevezzük.

Az így felvett Descartes-féle koordináta-rendszerben, az x és y koordinátatengelyek által kifeszített síkban a következőképp írható fel a közös egyenletük:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1.$$

Ebből két eset adódik a szakaszhosszaknak megfelelően. Az ellipszis kanonikus egyenlete

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

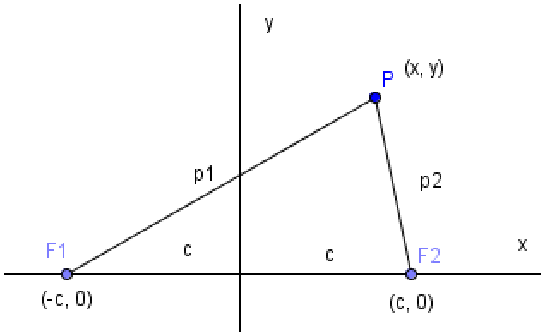
a hiperboláé pedig

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

A sík egy P pontja rajta van az ellipszisen, illetve hiperbolán, ha koordinátái kielégítik a fenti egyenletet.

Bizonyítás:

Jelölje P (x, y) a sík egy tetszőleges pontját, melynek F_1, F_2 fókuszpontoktól mért távolságát jelöljük p_1, p_2-vel.



Ekkor felírható az alábbi egyenlet:

$$(p_1+p_2+2a)(p_1+p_2-2a)(p_1-p_2+2a)(-p_1+p_2+2a)=0.$$

Ez $a>c$ esetén egy 2a nagytengelyű ellipszist határoz meg, $a<c$ esetén pedig egy 2a valóstengelyű hiperbola pontjaira teljesül. Az állítás bizonyításához vizsgáljuk meg az egyes lehetőségeket, mikor lehetnek nullák az egyes tagok.

- p_1+p_2+2a sosem lesz 0, mivel p_1 és p_2 távolságot jelölnek, így nem negatív számok, $2a$ pedig pozitív.
- p_1+p_2-2a akkor és csak akkor lehet 0-val egyenlő, ha $p_1+p_2=2a$. Tegyük fel, hogy $a<c$, ekkor háromszög-egyenlőtlenség miatt $p_1+p_2>2c>2a$, tehát a feltétel nem teljesül. A másik esetben $a>c$, ekkor P az ellipszis egy pontját jelöli.
- p_1-p_2+2a és $-p_1+p_2+2a$ tényezők akkor és csak akkor egyenlők nullával, ha $|p_1-p_2|=2a$ feltétel érvényesül. Vegyük elsőként, az $a>c$ esetet, amikor az

előzőben is említett ok miatt, $|p_1 - p_2| < 2c < 2a,$ így nem teljesül a feltétel, míg $a < c$ kikötés mellett P pont a hiperbola egy pontja.

A tétel bizonyításához már csak át kell alakítanunk a fenti egyenletet.

Az $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ azonosság alapján az egyenlet

$$[(p_1 + p_2)^2 - 4a^2] \cdot [-(p_1 - p_2)^2 + 4a^2] = 0.$$

Végezzük el a szorzást:

$$-(p_1 + p_2)^2 \cdot (p_1 - p_2)^2 + 4a^2(p_1 + p_2)^2 + 4a^2(p_1 - p_2)^2 - 16a^4 = 0,$$

$$-({p_1}^2 - {p_2}^2)^2 + 4a^2[(p_1 + p_2)^2 + (p_1 - p_2)^2] - 16a^4 = 0.$$

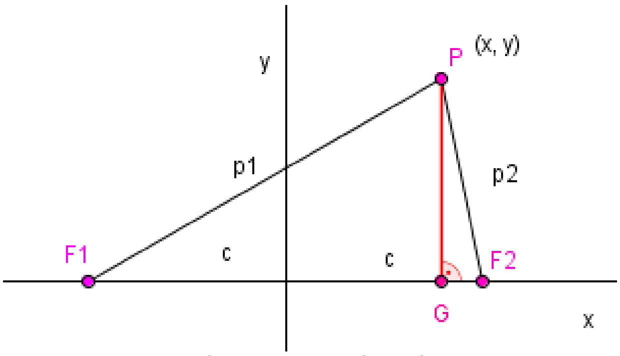
Az egyenletben szereplő $(p_1 + p_2)^2 + (p_1 - p_2)^2$ alakot rendezzük át a következőképp:

$$(p_1 + p_2)^2 + (p_1 - p_2)^2 = 2{p_1}^2 + 2{p_2}^2,$$

amiből

$$-({p_1}^2 - {p_2}^2)^2 + 8a^2({p_1}^2 + {p_2}^2) - 16a^4 = 0.$$

A P (x, y) pont koordinátáira írjuk fel a Pitagorasz-tételt:



$$p_1^2 = (x + c)^2 + y^2,$$

$$p_2^2 = (x - c)^2 + y^2.$$

Az egyenleteket egymásból kivonjuk, majd összeadjuk:

$${p_1}^2 - {p_2}^2 = 4xc,$$

$${p_1}^2 + {p_2}^2 = 2x^2 + 2c^2 + 2y^2.$$

Az így kapott eredményeket visszahelyettesítve

$$-(16x^2c^2) + 8a^2 2(x^2 + c^2 + y^2) - 16a^4 = 0.$$

$$-x^2c^2 + x^2a^2 + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4,$$

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

adódik.

Osszuk el az egyenletet $a^2(a^2 - c^2)$- tel. Ekkor az

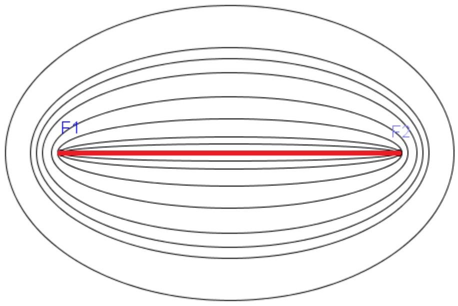
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

egyenlethez jutunk, ami megegyezik a tételben szereplő kanonikus egyenlettel.

3 Konfokális kúpszeletek

Azon kúpszeletek seregét, melyeknek mindkét fókuszpontja közös, konfokális kúpszeleteknek nevezzük.

3.1 Konfokális ellipszisek



Ha az ellipszisek definíciójában megengedjük, hogy $a = c$ legyen, akkor ebben az esetben az ellipszis egy szakasszá fajulna el. A következő állításban tekintsük ezt a szakasszá fajult ellipszist is ellipszisnek.

Állítás:

Tekintsünk a σ síkban két pontot, legyenek ezek a rögzített fókuszpontjaink. Az ezekhez tartozó konfokális ellipszisek seregét vizsgálva elmondható, hogy az így kapott görbék a σ síkot hézagtalanul befedik, ráadásul a sík minden pontján pontosan egy görbe megy át.

Bizonyítás:

Első lépésben tekintsük a két fókuszpont közötti szakaszt. Ebben az esetben egy elfajult ellipszisről van szó, melynek pontjai éppen a szakasz pontjaival egyeznek meg.

$$F_1P + F_2P = F_1F_2$$

Ezeken kívül bármely síkbeli pont megadható a fókuszoktól mért távolságok összegével.

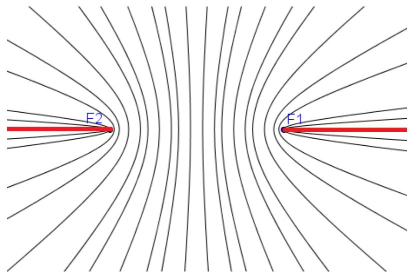
$$\forall\ P \in \sigma \text{ pontra } \exists\ (F_1P + F_2P) \text{ összeg.}$$

Tehát azon az ellipszisen biztosan rajta van P pont, amelyhez ez az érték tartozik. Továbbá ha tekintünk egy tetszőleges $Q \in \sigma$ pontot, és feltesszük, hogy

$$F_1P + F_2P \neq F_1Q + F_2Q,$$

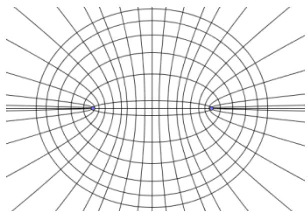
akkor a Q és P pontok két diszjunkt ellipszist határoznak meg.

3.2 Konfokális hiperbolák



Hasonlóan az előzőkhöz, vegyünk ismét két rögzített fókuszpontot és az ezekhez tartozó, a pontok által meghatározott síkban fekvő hiperbolák seregét. Ebben az esetben is tekintsük az F_1F_2egyenes, F_1F_2szakaszán kívül esőpontok által meghatározott két félegyenesből álló alakzatot egy elfajult hiperbolának. Ekkor a konfokális hiperbolák összessége a síkot hézagtalanul lefedi és a sík minden pontján pontosan egy hiperbolaág megy át. Az állítás bizonyítása majdnem teljesen megegyező az ellipszisre elmondottakkal, azzal a különbséggel, hogy most $|F_1P - F_2P|$ adja meg egyértelműen a P ponton átmenő F_1F_2 valós tengelyű hiperbolát.

A fenti állításokat összekapcsoló következtetés, hogy a konfokális ellipszisek és hiperbolák együttes rendszere úgy fedi le a síkot, hogy a sík minden pontján pontosan egy (esetleg elfajuló) ellipszis és egy (esetleg elfajuló) hiperbola megy át.



3.3 A konfokális ellipszisek és hiperbolák kanonikus egyenlete

Az x, y koordinátatengelyek által meghatározott σ síkban, tekintsük azokat az ellipsziseket és hiperbolákat, melyeknek az origó a szimmetriacentrumuk és az x-tengelyre eső fókuszpontjaik rögzítettek, tehát c állandó. Ekkor az a valós féltengelyű görbéket leíró egyenlet:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1,$$

amint azt már korábban bizonyítottuk. Ezen egyenletben a két nevező különbsége $a^2 - (a^2 - c^2) = c^2$ nem függ a megválasztásától. Tehát az

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

egyenletű kúpszelettel konfokális kúpszeletek kanonikus egyenlete mindig

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{(a^2 - c^2) + \lambda} = 1$$

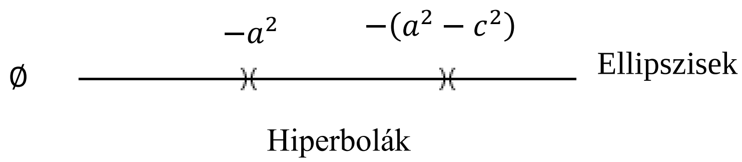
alakú.

Hogyan változik λ érték függvényében a görbe alakja?

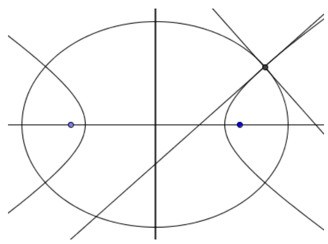
- $\lambda < -a^2$ esetén, $a^2 + \lambda < 0$ és $(a^2 - c^2) + \lambda < 0$ negatív számok, ami azt jelenti, hogy az egyenletnek nincs megoldása.
- $\lambda = -a^2$ érték szintén nem megengedett, a 0-val való osztás kizárása végett.
- $-a^2 < \lambda < -(a^2 - c^2)$ esetben $a^2 + \lambda > 0$ pozitív értéket vesz fel,

$(a^2 - c^2) + \lambda < 0$, azaz negatív. Így éppen egy hiperbola egyenletéhez jutunk.

- $\lambda = -(a^2 - c^2)$ teljesülésével, 0-val osztanánk, tehát ezt az esetet is el kell vetnünk.
- Végül a $\lambda > -(a^2 - c^2)$ értékek, melyekre mindkét nevezőben pozitív számot kapunk, ellipsziseket határoznak meg.



3.4 A konfokális ellipszisek és hiperbolák ortogonális görbesereget alkotnak



Állítás:

A konfokális hiperbolák és ellipszisek seregének összes görbéje a másik sereg görbéit minden pontban merőlegesen metszik, ezért az általuk képzett rendszerek ortogonális görbesereget alkotnak.

Bizonyítás:

A tétel bizonyításához szükségünk lesz két segédtételre és a görbemetszetről szóló definíció felírására.

Definíció: Két görbe merőlegesen metszi egymást egy pontban, ha a pontba húzott érintők merőlegesek egymásra.

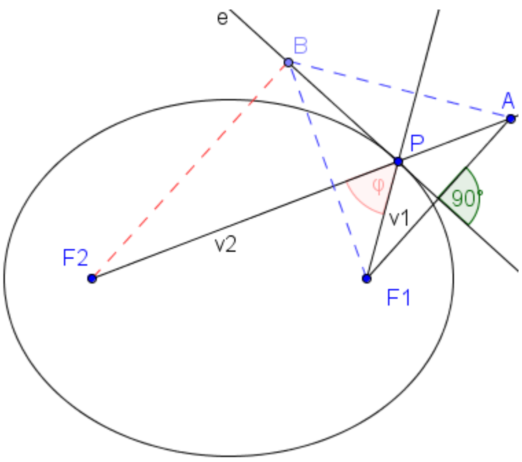
Első állítás:

Adott σ síkban bármely $P \in \sigma$ ponton átmenő ellipszis érintője felezi a P pontba húzott vezérsugarak mellékszögét.

Bizonyítás:

Vegyünk fel az ellipszisen egy tetszőleges P pontot. Az érintő egyenest jelölje e, továbbá F_1P által meghatározott egyenest v_1, az F_2P által meghatározottat pedig v_2 jelöli. Ezek a P pontba húzott vezérsugarak.

Első lépésben a v_2 egyenes P pontjából mérjük fel a v_2 egyenes F_2-t nem tartalmazó félegyenesére az F_1P távolságot, így kijelölve A pontot, továbbá vegyük fel a P pontba húzott F_1PA szög szögfelezőjét.



Látható, hogy F_1PA egyenlőszárú háromszög, tehát e megegyezik az F_1A szakasz felezőmerőlegesével.

Vegyünk továbbá az e egyenesen egy tetszőleges $B \neq P$ pontot.

Definíció szerint az e egyenes az ellipszis P pontbeli érintője, ha minden P-től különböző pontja külső pont. Így az érintő definíciójából adódóan azt kell belátnunk, hogy $B \in e$ pont az ellipszis külső pontja, azaz

$$F_1B + F_2B > 2a.$$

Ismert, hogy B pont eleme az e felezőmerőlegesnek, ami azt is jelenti, hogy

$$AB = F_1B.$$

Ezek alapján felírható a következő összefüggés:

$$AB + F_2B = F_1B + F_2B.$$

Háromszög-egyenlőtlenség miatt:

$$AB + F_2B > F_2A.$$

Ebből a két egyenletből már következik, hogy

$$F_1B + F_2B > F_2A = F_1P + F_2P = 2a,$$

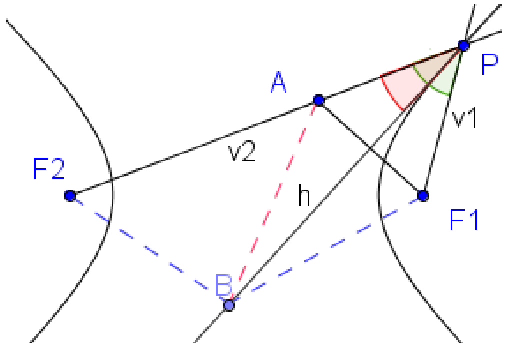
tehát B az ellipszisnek külső pontja, azaz az e egyenes az ellipszis érintője P-ben.

Második állítás:

Legyen P a hiperbola egy tetszőleges pontja, ekkor az $F_1P = v_1$ és $F_2P = v_2$ vezérsugarak által bezárt szög szögfelezője a hiperbola érintője P-ben.

Bizonyítása:

Legyen $P \in \sigma$ a hiperbola egy tetszőleges pontja. Tegyük fel, hogy $PF_1 < PF_2$.



Vegyük fel a h egyenest, mint az F_1PF_2 szög szögfelezőjét. Be kell látnunk, hogy a h egyenes, a hiperbola P pontbeli érintője. Az érintő definíciójából adódik, hogy ez akkor teljesül, ha h-nak a hiperbolával egyetlen közös pontja P, és minden más pontja külső pont.

Első lépésként mérjük fel a PF_1 hosszt PF_2 szakaszra, így kijelölve A pontot. Az így létrehozott alakzatban:

$$AP = PF_1.$$

Mivel P rajta van a hiperbolán

$$F_2A = F_2P - AP = F_2P - PF_1 = 2a$$

összefüggés adódik.

A h egyenesen vegyünk fel egy további B pontot. Erről be kell látnunk, hogy a hiperbolának külső pontja, azaz

$$|F_2B - F_1B| < 2a.$$

A B pont tehát APF_1 szögfelező egyenesére esik, ezért

$$BF_1 = AB,$$

amiből

$$|F_2B - F_1B| = |F_2B - AB|.$$

Háromszög-egyenlőtlenség miatt:

$$|F_2B - AB| < F_2A = 2a.$$

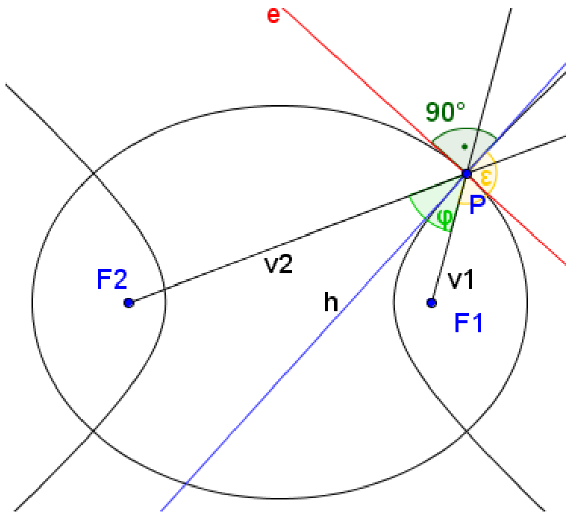
A két egyenletből pedig

$$|F_2B - F_1B| < 2a$$

összefüggés adódik, tehát a B pont a hiperbola külső pontja, azaz a h egyenes a hiperbola érintője a P pontban.

Tétel bizonyítása:

A σ síkban tekintsünk egy tetszőleges $P \neq F_1, \neq F_2$ pontot és a rajta keresztül haladó, F_1 és F_2 fókuszpontokhoz tartozó konfokális ellipszist és hiperbolát. Alkalmazzuk ismét a fenti állításokban használt jelöléseket továbbá a v_1, v_2 vezérsugarak által bezárt szöget jelölje φ, mellékszögét pedig ε. Tehát $\varepsilon = 180° - \varphi$.



Az érintők, azaz a h és e egyenesek által bezárt szög a korábban bizonyított állítások alapján

$$\frac{\varphi}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

alakban írható fel, melyből

$$\frac{\varphi}{2} + \frac{180° - \varphi}{2} = 90°$$

adódik, azaz a két görbe merőlegesen metszi egymást.

4 Másodrendű felületek

Azokat a felületek, melyeket alkalmas Descartes-féle koordináta-rendszerben másodfokú egyenlettel adhatunk meg, másodrendű felületeknek nevezzük.

Általános egyenletük:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz +$$
$$+2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0,$$

ahol a_{ij} rögzített valós számokat jelöl, x, y és z pedig a változók, melyek koordinátahármasokat jelölnek. Feltehetjük, hogy a másodfokú tagok együtthatói nem mind nullával egyenlők, hiszen ha így lenne, elsőfokú polinomot kapnánk, ami már nem másodrendű felületet határoz meg. Mivel alkalmas koordináta-rendszer felvételével (főtengely transzformáció), a vegyes másodfokú tagok kiejthetők az egyenletből, ezért azt is feltehetjük, hogy a_{11}, a_{22}, a_{33} egyike biztosan nem nulla.

Az egyenletben szereplő együtthatókat egy szimmetrikus mátrixba rendezhetjük a következőképp:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}.$$

Ez egy szimmetrikus mátrix, tehát:

$$a_{ij} = a_{ji} \qquad \text{(i,j=1, 2, 3, 4 és i}\neq\text{j).}$$

Ennek segítségével a felület egyenlete:

$$(x \quad y \quad z \quad 1)M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Legyen a $P(x, y, z)$ pontot meghatározó vektor: $\underline{k} = (x, y, z, 1)$. Ekkor P pont rajta van a másodrendű felületen, ha a következő összefüggés telesül:

$$\underline{k}M\underline{k}^T = 0.$$

A másodfokú tagok együtthatóiból képzett mátrix segítségével a másodfokú egyenlet másképp is felírható, miszerint:

$$(x \quad y \quad z)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 2(a_{14} \quad a_{24} \quad a_{34})\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + a_{44} = 0.$$

Ebben az egyenletben A a másodfokú tagok együtthatóiból képzett mátrixot jelöli:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Ha a másodrendű felület centruma az origó, akkor az egyenlet

$$(x \quad y \quad z)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + a_{44} = 0$$

alakú.

Egy másodrendű felületet az említett egyenlet alakjától függően hét osztályba sorolhatunk:

- ellipszoidok, ebbe az osztályba tartoznak például a gömbök is;
- egyköpenyű, kétköpenyű hiperboloidok;
- hiperbolikus, elliptikus paraboloidok;
- kúpfelületek;
- hengerfelületek;

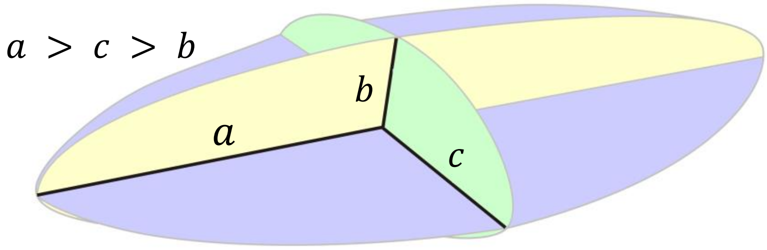
A felsorolt hét felülettípus közül elsőként az ellipszoidról írok részletesebben, majd a konfokális másodrendű felületek kapcsán az egyköpenyű hiperboloid és a kétköpenyű hiperboloid is előtérbe kerül.

4.1 Az ellipszoid

A másodrendű görbék egy speciális típusát ellipszoidnak nevezzük, melyet alkalmas Descartes-féle koordináta-rendszerben a következő egyenlettel definiálhatunk:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Az egyenletben szereplő x, y és z koordináta-hármasokat jelöl, a, b és c pedig az ellipszoidra jellemző pozitív valós számok. Ekkor egy tetszőleges térbeli P pont rajta van az ellipszoidon, ha koordinátái kielégítik a fenti egyenletet. Ha így definiáljuk ezeket a speciális felületeket, akkor ebben a koordináta-rendszerben az ellipszoid középpontja az origó, jelölje: O. Egy ellipszoidnak legalább három szimmetriasíkja van, ezek az xy, xz és yz síkok, melyek metszésvonalából a felület által kimetszett hosszúságok éppen $2a, 2b$ és $2c$, ezeket nagy-, középső-, és kistengelyeknek nevezzük, feltéve, hogy $a > b > c$. Abban az esetben, amikor két tengely egyenlő hosszú, forgás ellipszoidról beszélünk, ha pedig mindhárom tengelyhossz megegyezik, gömbfelület jön létre.



A másodrendű felületekről leírtak alapján, az ellipszoid egyenlete is kifejezhető egy mátrix segítségével. A másodfokú egyenlet együtthatói a következőképp alakulnak:

$$a_{11}=\frac{1}{a^2}, a_{22}=\frac{1}{b^2}, a_{33}=\frac{1}{c^2}, a_{44}=-1,$$

$$a_{ij} = a_{ji} = 0 \qquad (i, j = 1, 2, 3, 4 \text{ és } i \neq j\,).$$

Tehát az együtthatókból képzett mátrix:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Később a következő alakot is használjuk:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c^2} \end{pmatrix}.$$

Egy $P(x, y, z)$ pont az ellipszoid része, ha a pontot meghatározó, $\underline{k} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ vektorra igaz a

$$\underline{k} A \underline{k}^T = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

egyenlet.

4.1.1 Egy ellipszoid minden síkmetszete ellipszis

4.1.1.1 Másodrendű görbe

Analitikusan fogom bizonyítani, hogy az ellipszoidokat minden sík másodrendű görbében metsz, ezért fontosnak látom, hogy a másodrendű görbékről is adjak egy általános bevezetést.

Másodrendű görbének nevezzük, azon görbéket a síkon, melyek egyenlete másodfokú.
Az alábbi egyenlettel írhatók le:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Ebben az egyenletben a másodfokú tagok akárcsak a másodrendű felületeknél, szintén nem lehetnek mind nullával egyenlők.
Az egyenlet együtthatóiból mátrix képezhető:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

amely szimmetrikus, tehát:

$$a_{ij} = a_{ji} \qquad (i, j = 1, 2, 3 \text{ és } i \neq j).$$

A másodfokú tagok együtthatóinak mátrixa:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Ez a mátrix azért fontos a továbbiakban, mert determinánsából meghatározhatjuk a másodrendű görbéről, hogy elliptikus, hiperbolikus vagy parabolikus alakú aszerint, hogy pozitív, nulla vagy negatív a determináns értéke. Ez az állítás homogén koordináták bevezetésével bizonyítható, melyben elliptikusnak, hiperbolikusnak, parabolikusnak nevezünk egy másodrendű görbét, ha 0, 1 vagy 2 ideális pontja van.

Alkalmas koordináta-rendszer megválasztása esetén a másodfokú egyenlet egyszerűbbé alakítható, például a vegyes másodfokú tag kiejthető főtengely transzformációval (a koordináta-rendszer tengelyeit az A mátrix sajátvektorainak irányába fordítjuk), továbbá origó középpont esetén,

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} = 0$$

alakra hozható, melyből leolvashatók a görbe geometriai jellemzői.

Az ellipszis és hiperbola kanonikus egyenletéből kiindulva megállapítható, hogy ezek is másodrendű görbék, melyeket az alábbi mátrixok írnak le:

$$M_{ellipszis} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad M_{hiperbola} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vannak más másodrendű görbék is, ilyen például még a parabola a kúpszeletek köréből, de lehet pont, üres alakzat, két egymást metsző egyenes, két párhuzamos egyenes uniója vagy egyetlen egyenes is, ezeket degenerált kúpszeleteknek nevezzük. Tehát kilenc darab speciális egyenletet kapunk, melyeket alkalmas koordináta-transzformációval bármely másodfokú egyenletből kihozhatunk. Az, hogy ezeken a görbe alakokon kívül nem létezik más másodrendű görbe, homogén koordináták bevezetésével bizonyítható.

A következő bizonyításokban csak az ellipszisre vonatkozó állításokat használjuk fel, ezért egyelőre azt helyezem előtérbe. Fel fogom használni, hogy ha egy másodrendű görbét meghatározó A mátrix determinánsa pozitív és a görbének van legalább két pontja, akkor az egyenlet ellipszist határoz meg.

4.1.1.2 A szimmetriasíkokkal vett metszetek

A szimmetriasíkokkal vett metszetekről könnyen látszik, hogy ellipszist adnak, melyet egy egyszerű behelyettesítés bizonyít.
Az xy, síkkal vett metszet esetén $z = 0$ helyettesítést kell alkalmaznunk:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{0^2}{c^2} = 1,$$

amelyből

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Látható, hogy egy ellipszis egyenletét kapjuk. Ugyanezt a helyettesítést elvégezhetjük xz és yz síkok esetében is, $y = 0$ és $x = 0$ értékekkel számolva.

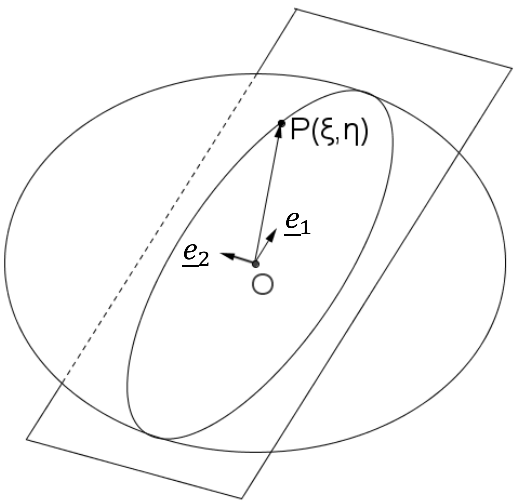
4.1.1.3 Egy origót tartalmazó síkkal vett metszet

Tekintsük az $O(0,0)$ középpontú, x, y, z koordinátatengelyekkel meghatározott K derékszögű koordináta-rendszerben az

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

egyenletű ellipszoidot és egy O-t tartalmazó σ síkot. Ezen síkon vegyünk fel $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ egységvektorokat, melyek ortonormált bázist alkotnak. Az általuk meghatározott O origójú koordináta-rendszert jelölje K'. Ebben a rendszerben vegyünk fel egy σ-beli $P(\xi, \eta)$ pontot, melyet a következő helyvektorral adhatunk meg

$$\overrightarrow{OP} = \xi \underline{e}_1 + \eta \underline{e}_2.$$



Célunk P pont koordinátáinak kifejezése a K koordináta-rendszerben. Ehhez elsőként az egységvektorokat írjuk fel.

$$\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} \underline{e}_1^1 \\ \underline{e}_1^2 \\ \underline{e}_1^3 \end{pmatrix}, \underline{e}_2 = \begin{pmatrix} \underline{e}_2^1 \\ \underline{e}_2^2 \\ \underline{e}_2^3 \end{pmatrix},$$

melyek segítségével

$$\overrightarrow{OP} = \xi \underline{e}_1 + \eta \underline{e}_2 = \ \xi \begin{pmatrix} \underline{e}_1^1 \\ \underline{e}_1^2 \\ \underline{e}_1^3 \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} \underline{e}_2^1 \\ \underline{e}_2^2 \\ \underline{e}_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \underline{e}_1^1 + \eta \underline{e}_2^1 \\ \xi \underline{e}_1^2 + \eta \underline{e}_2^2 \\ \xi \underline{e}_1^3 + \eta \underline{e}_2^3 \end{pmatrix}.$$

P pont rajta van az ellipszoidon akkor és csak akkor, ha a pont K rendszerbeli koordinátái kielégítik az ellipszoid egyenletét. Behelyettesítve

$$\frac{(\xi \underline{e}_1^1 + \eta \underline{e}_2^1)^2}{a^2} + \frac{(\xi \underline{e}_1^2 + \eta \underline{e}_2^2)^2}{b^2} + \frac{(\xi \underline{e}_1^3 + \eta \underline{e}_2^3)^2}{c^2} = 1.$$

Végezzük el a négyzetre emelést és a kiemelést

$$\xi^2 \left(\frac{\left(\underline{e}_1^1\right)^2}{a^2} + \frac{\left(\underline{e}_1^2\right)^2}{b^2} + \frac{\left(\underline{e}_1^3\right)^2}{c^2} \right) + 2\xi\eta \left(\frac{\underline{e}_1^1 \cdot \underline{e}_2^1}{a^2} + \frac{\underline{e}_1^2 \cdot \underline{e}_2^2}{b^2} + \frac{\underline{e}_1^3 \cdot \underline{e}_2^3}{c^2} \right) +$$

$$+\eta^2 \left(\frac{\left(\underline{e}_2^1\right)^2}{a^2} + \frac{\left(\underline{e}_2^2\right)^2}{b^2} + \frac{\left(\underline{e}_2^3\right)^2}{c^2} \right) = 1.$$

A másodfokú tagok együtthatóinak egyszerű helyettesítésével átláthatóbbá válik az eredmény.

$$\left(\frac{\left(\underline{e}_1^1\right)^2}{a^2} + \frac{\left(\underline{e}_1^2\right)^2}{b^2} + \frac{\left(\underline{e}_1^3\right)^2}{c^2} \right) = A, \left(\frac{\underline{e}_1^1 \cdot \underline{e}_2^1}{a^2} + \frac{\underline{e}_1^2 \cdot \underline{e}_2^2}{b^2} + \frac{\underline{e}_1^3 \cdot \underline{e}_2^3}{c^2} \right) = B,$$

$$\left(\frac{\left(\underline{e}_2^1\right)^2}{a^2} + \frac{\left(\underline{e}_2^2\right)^2}{b^2} + \frac{\left(\underline{e}_2^3\right)^2}{c^2} \right) = C,$$

tehát

$$\xi^2 A + 2\xi\eta B + \eta^2 C - 1 = 0.$$

Ebből az összefüggésből már világosan látszik, hogy egy másodrendű görbe egyenletét kaptuk, amely ellipszist határoz meg, ha a másodfokú együtthatókból képzett mátrix determinánsa pozitív, azaz

$$det \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} > 0.$$

Tehát azt kell bizonyítanunk, hogy

$$det \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} = AC - B^2 > 0,$$

vagyis

$$AC > B^2,$$

$$\left(\frac{\left(\underline{e}_1^1\right)^2}{a^2} + \frac{\left(\underline{e}_1^2\right)^2}{b^2} + \frac{\left(\underline{e}_1^3\right)^2}{c^2} \right) \left(\frac{\left(\underline{e}_2^1\right)^2}{a^2} + \frac{\left(\underline{e}_2^2\right)^2}{b^2} + \frac{\left(\underline{e}_2^3\right)^2}{c^2} \right) > \left(\frac{\underline{e}_1^1 \cdot \underline{e}_2^1}{a^2} + \frac{\underline{e}_1^2 \cdot \underline{e}_2^2}{b^2} + \frac{\underline{e}_1^3 \cdot \underline{e}_2^3}{c^2} \right)^2.$$

Cauchy-Bunyakowskyj-Schwarz-egyenlőtlenség segítségével bizonyítható ez az állítás.

Tétel:

$$|\underline{a}|^2 \cdot |\underline{b}|^2 \geq \langle \underline{a}, \underline{b} \rangle^2.$$

Bizonyítás:

Az $\underline{a}$, $\underline{b}$ vektorok skaláris szorzata:

$$\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = \underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos\gamma.$$

Az egyenletet emeljük négyzetre, így az

$$\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle^2 = |\underline{a}|^2 \cdot |\underline{b}|^2 \cdot \cos^2\gamma$$

összefüggés adódik. Mivel $\cos^2\gamma$ pozitív szám és legfeljebb 1 lehet az értéke, ezért:

$$|\underline{a}|^2 \cdot |\underline{b}|^2 \geq |\underline{a}|^2 \cdot |\underline{b}|^2 \cdot \cos^2\gamma = \langle \underline{a}, \underline{b} \rangle^2.$$

Térjünk vissza az eredeti állításra és alkalmazzuk a következő helyettesítéseket

$$\underline{a} = \left(\frac{\underline{e}_1^1}{a}, \frac{\underline{e}_1^2}{b}, \frac{\underline{e}_1^3}{c}\right), \underline{b} = \left(\frac{\underline{e}_2^1}{a}, \frac{\underline{e}_2^2}{b}, \frac{\underline{e}_2^3}{c}\right).$$

A vektorok hosszát a koordináták négyzetösszegének a gyökéből számolhatjuk,

$$|\underline{a}|^2 = \left(\sqrt{\frac{(\underline{e}_1^1)^2}{a^2} + \frac{(\underline{e}_1^2)^2}{b^2} + \frac{(\underline{e}_1^3)^2}{c^2}}\right)^2,$$

$$|\underline{b}|^2 = \left(\sqrt{\frac{(\underline{e}_2^1)^2}{a^2} + \frac{(\underline{e}_2^2)^2}{b^2} + \frac{(\underline{e}_2^3)^2}{c^2}}\right)^2.$$

Ekkor a skaláris szorzatra teljesül, hogy

$$\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle^2 = \left(\frac{\underline{e}_1^1 \cdot \underline{e}_2^1}{a^2} + \frac{\underline{e}_1^2 \cdot \underline{e}_2^2}{b^2} + \frac{\underline{e}_1^3 \cdot \underline{e}_2^3}{c^2}\right)^2,$$

mellyel igazultuk

$$AC > B^2$$

egyenlőtlenséget, tehát a metszetgörbe ellipszis.

A másodrendű görbe egyenletéből akkor is következik, hogy ellipszis, ha arra gondolunk, hogy az ellipszoid korlátos alakzat, tehát minden síkmetszete is korlátos. Azt már beláttuk, hogy ez a síkmetszet másodrendű görbe, melyek közül csak az ellipszisek korlátosak.

4.1.1.4 A tétel általánosítása

Állítás:

Az origón átmenő síkot eltolva, a metszetgörbe egyenlete másodfokú egyenlet marad, amely ellipszist, pontot, vagy üres halmazt definiál.

Bizonyítás:

Legyen ebben az esetben is O, origó az ellipszoid középpontja. Ekkor egy $Q(x, y, z)$ pont rajta van az ellipszoidon, ha koordinátái kielégítik a következő egyenletet

$$(x \quad y \quad z)A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = (x \quad y \quad z)\begin{pmatrix}\frac{1}{a^2} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{c^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 1.$$

Ha $\underline{x} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ jelölést használunk,

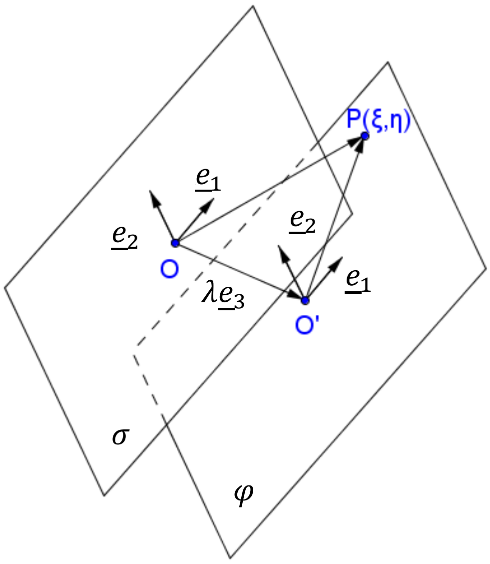
$$\underline{x}^T A\, \underline{x} = 1.$$

Az origót tartalmazó σ síkot toljuk el $\lambda \underline{e}_3$ vektorral, ahol $\underline{e}_3 = \underline{e}_1 \times \underline{e}_2$ és ezt a síkot jelöljük φ-vel. Ekkor $O \in \sigma$ pont eltoltja $O' \in \varphi$.

Vegyünk fel a φ síkon egy $P(\xi, \eta)$ pontot, mely az alábbi alakban írható fel

$$\overrightarrow{O'P} = \xi \underline{e}_1 + \eta \underline{e}_2,$$

$$\overrightarrow{OP} = \xi \underline{e}_1 + \eta \underline{e}_2 + \lambda \underline{e}_3.$$



P pont az ellipszoidon van akkor és csak akkor, ha

$$\left(\xi \underline{e}_1 + \eta \underline{e}_2 + \lambda \underline{e}_3\right)^T A \left(\xi \underline{e}_1 + \eta \underline{e}_2 + \lambda \underline{e}_3\right) = 1,$$

$$\left(\xi \underline{e}_1^T + \eta \underline{e}_2^T + \lambda \underline{e}_3^T\right) A \left(\xi \underline{e}_1 + \eta \underline{e}_2 + \lambda \underline{e}_3\right) = 1.$$

Végezzük el a szorzást és a kiemelést, figyelembe véve

$$\underline{e}_i^T A \underline{e}_j = \underline{e}_j^T A \underline{e}_i$$

összefüggést. Az így kapott egyenlet

$$\xi^2\left(\underline{e}_1^T A \underline{e}_1\right) + 2\xi\eta\left(\underline{e}_1^T A \underline{e}_2\right) + \eta^2\left(\underline{e}_2^T A \underline{e}_2\right) + 2\xi\left(\underline{e}_1^T A\, \lambda \underline{e}_3\right) + 2\eta\left(\underline{e}_2^T A\, \lambda \underline{e}_3\right) + \lambda^2\left(\underline{e}_3^T A \underline{e}_3\right) = 1.$$

Alkalmazzuk a következő helyettesítéseket

$$\underline{e}_1^T A \underline{e}_1 = A, \qquad \underline{e}_1^T A \underline{e}_2 = B, \qquad \underline{e}_2^T A \underline{e}_2 = C,$$

$$2\left(\underline{e}_1^T A\, \lambda \underline{e}_3\right) = D, \qquad 2\left(\underline{e}_2^T A\, \lambda \underline{e}_3\right) = E, \qquad \lambda^2\left(\underline{e}_3^T A \underline{e}_3\right) - 1 = F.$$

Melyekkel

$$\xi^2 A + 2\xi\eta B + \eta^2 C + \xi D + \eta E + F = 0.$$

Erről az egyenletről már megállapítható, hogy másodrendű görbét definiál. Az ellipszoid említett korlátossága végett ez ellipszist vagy egy pontot határoz meg, amennyiben a φ sík metszi az alakzatot, különben üres halmaz a metszet.

4.1.2 Egy ellipszoidnak végtelen sok körmetszete létezik

A következőkben azt fogom belátni, hogy az ellipszoid felületén végtelen sok kör fekszik. Ehhez elsőként, két könnyen megtalálható körmetszet létezését bizonyítom, majd, hogy e körmetszetek síkjával párhuzamos síkok is kört metszenek ki a felületből.

4.1.2.1 Bármely általános ellipszoidhoz létezik olyan sík, mely körben metszi.

Tekintsük az $a > b > c$ tengelyek által meghatározott háromtengelyű ellipszoidot, és a középső, azaz a b tengelyt tartalmazó σ síkot. Mint azt már korábban bizonyítottuk ez a sík a felületet ellipszisben metszi. Az így kapott ellipszis egyik tengelye mindig b, másik tengelyét pedig jelöljük d-vel. Az $a, b \in \sigma$ síkot, kezdjük el forgatni b tengely körül, egészen addig míg $b, c \in \sigma$-t kapunk. Ekkor megállapítható, hogy $a \geq d \geq c$, és d minden pozitív valós értéket felvesz a és c hosszak között. Ismert, hogy $a > b > c$, a forgatás során tehát biztosan lesz olyan pont, amikor $d = b$. Ekkor az ellipszis mindkét tengelye b hosszúságú, tehát a metszetgörbe kör. A sík forgatását ellentétes irányba is elkezdhetjük, ekkor ugyanez az eljárás elvégezhető, tehát még, az előzőtől különböző körmetszet található a felületen.
Lássuk be, hogy e körök síkjával párhuzamos síkok is kört metszenek ki az ellipszoidból!

4.1.2.2 Ha egy síkmetszet kör, minden párhuzamos síkmetszet is kör

Ezt a bizonyítást analitikus módon végezzük, egy korábbi állításból levezetve, miszerint az ellipszoid minden síkmetszete ellipszis. Az akkor kapott ellipszis egyenletekre két feltételt kell szabnunk, hogy köregyenletet kapjunk, majd belátni, hogy a sík eltolásával, ugyanazon feltételek mellett szintén köregyenlet az eredmény.

Egy általános r sugarú, (u, v) középpontú kör egyenlete az x, y tengelyek által meghatározott Descartes-féle koordináta-rendszerben a következőképp írható fel:

$$(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2,$$

$$x^2 + y^2 - 2(yv + xu) + (u^2 + v^2 - r^2) = 0,$$

melyből látható, hogy a kör paramétereit (u, v, r) változtatva, az egyenletet konstanssal szorozva, vagy átrendezve a másodfokú tagok együtthatói mindig azonosak maradnak és az xy szorzat sosem jelenik meg.

Mivel az origó középpontú ellipszoid egy origót tartalmazó síkmetszete

$$\xi^2 A + 2\xi\eta B + \eta^2 C - 1 = 0$$

alakú, ezért az előző köregyenletre vonatkozó következtetésből eredően, az egyenlet pontosan akkor definiál kört, ha

$$A = C \text{ és } B = 0.$$

Így az egyenlet alakja

$$\xi^2 C + \eta^2 C - 1 = 0,$$

melyet átrendezve

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{1}{C}.$$

Tehát egy origó középpontú, $\sqrt{\frac{1}{C}}$ sugarú kört kapunk metszetként. Mint azt már az előző bizonyítás is mutatja:

$$\sqrt{\frac{1}{C}} = b,$$

azaz a sugár a középső tengely hosszával egyenlő, melyet $B = 0$ feltétel okoz.

Ekkor az ellipszis egyenletéből is következik:

$$\xi^2 A + \eta^2 C = 1.$$

$$\frac{1}{b^2} = C \rightarrow b = \sqrt{\frac{1}{C}}.$$

Ahogy azt már korábbi bizonyításban láttuk, a sík eltolását követően a metszetgörbe egyenlete a következő alakra változik:

$$\xi^2 A + 2\xi\eta B + \eta^2 C + \xi D + \eta E + F = 0.$$

Erre alkalmazva a korábbi

$$A = C \text{ és } B = 0$$

feltételeket, az összefüggés

$$\xi^2 C + \eta^2 C + \xi D + \eta E + F = 0$$

alakra módosul, azaz köregyenletet kapunk, melyet $C \neq 0$-val osztva, majd teljes négyzetté alakítva

$$\left(\xi + \frac{D}{2C}\right)^2 + \left(\eta + \frac{E}{2C}\right)^2 = \left(\frac{D}{2C}\right)^2 + \left(\frac{E}{2C}\right)^2 - \frac{F}{C}$$

képletet kapjuk, melyből a kör középpontja

$$\left(-\frac{D}{2C}, -\frac{E}{2C}\right),$$

sugara pedig

$$r = \sqrt{\left(\frac{D}{2C}\right)^2 + \left(\frac{E}{2C}\right)^2 - \frac{F}{C}}, \text{ ha } \left(\left(\frac{D}{2C}\right)^2 + \left(\frac{E}{2C}\right)^2 - \frac{F}{C}\right) > 0.$$

Abban az esetben, ha

$$\left(\left(\frac{D}{2C}\right)^2 + \left(\frac{E}{2C}\right)^2 - \frac{F}{C}\right) = 0,$$

a sík egyetlen pontban metszi a felületet, tehát az ellipszoid érintősíkjáról van szó.
Ha pedig

$$\left(\left(\frac{D}{2C}\right)^2 + \left(\frac{E}{2C}\right)^2 - \frac{F}{C}\right) < 0,$$

akkor üres az alakzat, a sík nem metszi az ellipszoidot.

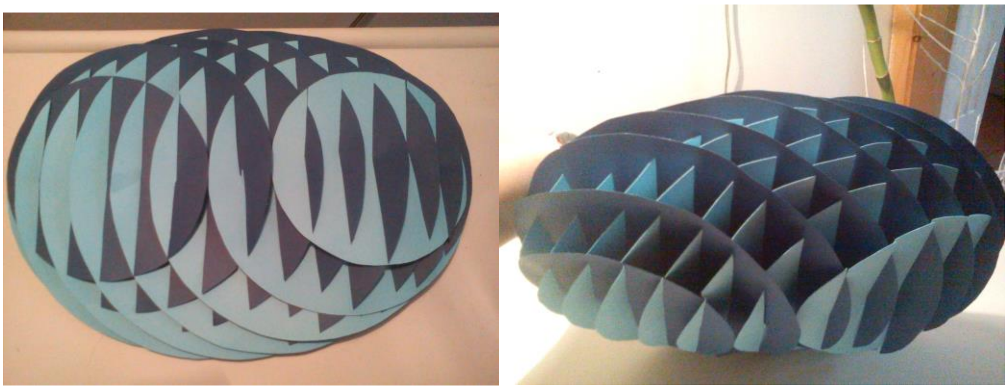
4.1.3 Modellezés

Az ellipszoidon tehát két olyan görbesereg található, mely párhuzamos körökből áll.
Az állítás szemléltetésére körmetszet-modell is készíthető, melyen az imént említett körök serege jól megfigyelhető. Az is látható alkalmas mozgatással, hogy a modell gömb alakra hozható, sőt egy síkba is összehajtható.

Az általam készített modellek:

1. kép: A modellre szemből nézve látható, hogy koncentrikus körlapok alkotják.

2. kép: Az egymásra merőleges körlapok alkotta gömb.



3. kép: A testet kicsit elmozgatva, mikor a körlapok már nem merőlegesek egymásra, ellipszoid alakot láthatunk.

4.1.4 Kapcsolat párhuzamos síkmetszetek féltengelyei között

Beláttuk, hogy minden síkmetszet ellipszis, ezért ebben a fejezetben azt vizsgáljuk, hogy ezen ellipszisek féltengelyei között milyen összefüggés látható.

Tekintsük viszonyításképp azt az ellipszist, melynek középpontja az origó, jelölje:ε. Ennek egyenletét korábban kifejeztük, miszerint

$$\xi^2 A + 2\xi\eta B + \eta^2 C - 1 = 0$$

ahol,

$$A = \underline{e}_1^T A \underline{e}_1, \qquad B = \underline{e}_2^T A \underline{e}_1, \qquad C = \underline{e}_2^T A \underline{e}_2.$$

Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ vektorok, az ellipszist tartalmazó σ sík bázisvektorai.

Továbbiakban azokat a görbéket kell megvizsgálnunk, amelyek párhuzamosak ε-nal, azaz a σ-val párhuzamos φ síkban fekvő metszetgörbéket. Egyenletük már szintén ismert:

$$\xi^2\left(\underline{e}_1^T A \underline{e}_1\right) + 2\xi\eta\left(\underline{e}_1^T A \underline{e}_2\right) + \eta^2\left(\underline{e}_2^T A \underline{e}_2\right) + 2\xi\left(\underline{e}_1^T A\, \lambda \underline{e}_3\right) + 2\eta\left(\underline{e}_2^T A\, \lambda \underline{e}_3\right) + \lambda^2\left(\underline{e}_3^T A \underline{e}_3\right) = 1,$$

ahol, $\lambda \underline{e}_3$ a σ síkot φ-be vivő eltolásvektor, és $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ ortonormált bázist alkotnak.

Alkalmazzuk a fenti A, B, C helyettesítést, továbbá

$$2\xi\left(\underline{e}_1^T A\, \lambda \underline{e}_3\right) = \xi\, \lambda\, c, \qquad 2\eta\left(\underline{e}_2^T A\, \lambda \underline{e}_3\right) = \eta\, \lambda\, d, \qquad \lambda^2\left(\underline{e}_3^T A \underline{e}_3\right) = \lambda^2 e$$

kiemeléseket. Így az alábbi egyenlethez jutunk:

$$\xi^2 A + 2\xi\eta B + \eta^2 C + \xi\, \lambda\, c + \eta\, \lambda\, d + \lambda^2 e = 1.$$

Mindkét görbére ugyanazt a főtengely transzformációt alkalmazva, a vegyes másodfokú tagokat kiejthetjük. Erre azért van szükség, hogy a kapott egyenletekből kiolvashatók legyenek a féltengelyhosszak. A transzformáció során a két görbe párhuzamossága megmarad, $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ vektorok továbbra is ortonormált bázist alkotnak, és az eltolásvektor hossza sem változik.

Az új egyenletek:

$$\xi^2 A + \eta^2 C = 1,$$

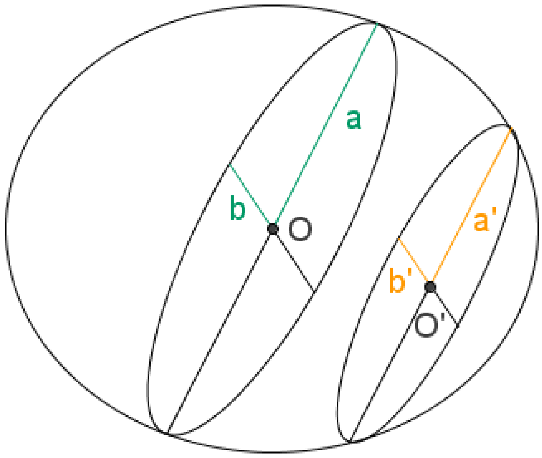
$$\xi^2 A + \eta^2 C + \xi\, \lambda\, c + \eta\, \lambda\, d + \lambda^2 e = 1.$$

Az féltengelyhosszak meghatározásához alkalmazzuk még

$$A = \frac{1}{a^2}, \qquad C = \frac{1}{b^2}$$

helyettesítéseket, mellyel az első egyenletből az a, b féltengelyű ellipszis egyenletét kapjuk

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1,$$



A második egyenletből pedig a következő eltolt ellipszis egyenletét

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \xi\,\lambda\,c + \eta\,\lambda\,d + \lambda^2 e = 1.$$

Az eltolt ellipszis egyenletéből, a', b' értékeket kell kifejeznünk, a és b segítségével.

Első lépésben alakítsuk teljes négyzetté az egyenletet

$$\frac{\left(\xi + \frac{a^2 c\lambda}{2}\right)^2}{a^2} + \frac{\left(\eta + \frac{b^2 d\lambda}{2}\right)^2}{b^2} + \lambda^2 \left\{ e - \left(\frac{a^2 c}{2}\right)^2 - \left(\frac{b^2 d}{2}\right)^2 \right\} = 1.$$

Legyen

$$\left\{ e - \left(\frac{a^2 c}{2}\right)^2 - \left(\frac{b^2 d}{2}\right)^2 \right\} = f.$$

Átrendezve az egyenletet

$$\frac{\left(\xi + \frac{a^2 c\lambda}{2}\right)^2}{a^2} + \frac{\left(\eta + \frac{b^2 d\lambda}{2}\right)^2}{b^2} = 1 - \lambda^2 f.$$

Abban az esetben, ha $(1 - \lambda^2 f) = 0$, egy pont egyenletét kapjuk, különben osszunk le $(1 - \lambda^2 f) \neq 0$-val

$$\frac{\left(\xi + \frac{a^2 c\lambda}{2}\right)^2}{a^2 \cdot (1 - \lambda^2 f)} + \frac{\left(\eta + \frac{b^2 d\lambda}{2}\right)^2}{b^2 \cdot (1 - \lambda^2 f)} = 1.$$

Ebből az összefüggésből már leolvasható, hogy

$$a' = a \cdot \sqrt{1 - \lambda^2 f},$$

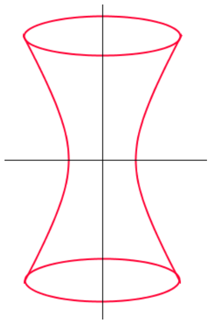
$$b' = b \cdot \sqrt{1 - \lambda^2 f}.$$

$$\frac{a'}{b'} = \frac{a \cdot \sqrt{1 - \lambda^2 f}}{b \cdot \sqrt{1 - \lambda^2 f}} = \frac{a}{b}.$$

Tehát a féltengelyhosszak aránya állandó minden párhuzamos síkmetszet esetén.

4.2 A hiperboloidok

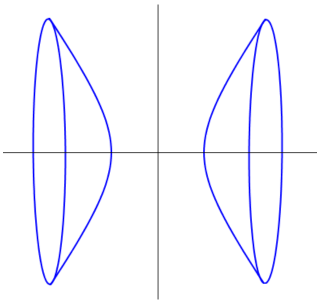
Kétféle hiperboloidról beszélhetünk, az egyik az egyköpenyű hiperboloid a másik pedig a kétköpenyű hiperboloid. Megfelelő koordináta-rendszer választása mellett a következő egyenletekkel definiálhatjuk őket. Általános egyköpenyű hiperbolidot alkotnak azon pontok a térben, melyek koordinátái kielégítik



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

egyenletet, kétköpenyű hiperboloidot pedig a

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



egyenletet kielégítő pontok. Ebben a koordináta-rendszerben az origó a hiperboloid centruma, a koordináta-rendszer tengelyei pedig a hiperboloid szimmetriatengelyei.

4.3 Ellipszoiddal konfokális másodrendű felületek

<u>*Definíció:*</u> Az

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

egyenletű ellipszoiddal konfokális másodrendű felületek, az

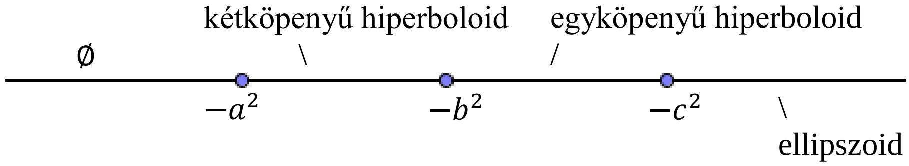
$$F_\lambda=\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1$$

egyenletű felületek.

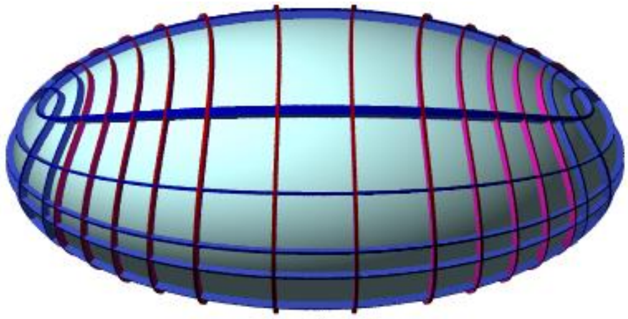
Az egyenletben szereplő a, b, c számok egy adott ellipszoidra jellemző állandók, melyekről feltehetjük, hogy $a > b > c > 0$, λ pedig egy valós szám, melynek értéke meghatározza a felület alakját, ezért hét különböző esetet kell megvizsgálnunk λ függvényében.

- $\lambda = -c^2, \lambda = -b^2, \lambda = -a^2$ esetek nem teljesülhetnek, mivel a nevezőben nem állhat nulla.
- $\lambda > -c^2$ esetben az egyenlet nevezői pozitívak, tehát ellipszoid az így meghatározott felület.
- $-b^2 < \lambda < -c^2$ teljesülése esetén, $c^2 + \lambda < 0$, tehát az egyenlet egyköpenyű hiperboloidot határoz meg.

- $-a^2 < \lambda < -b^2$ értékekre $c^2 + \lambda < 0$ és $b^2 + \lambda < 0$, amivel kétköpenyű hiperboloid egyenletéhez jutunk.
- $\lambda < -a^2$, eset pedig nem teljesülhet, üres az alakzat.



Az alábbi képen egy ellipszoid, és a vele konfokális hiperboloidok metszete látható:



Állítás:

Ha egy $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ olyan, amelyre teljesül $x_0 \cdot y_0 \cdot z_0 \neq 0$, akkor a konfokális másodrendű felületseregből pontosan egy ellipszoid, pontosan egy egyköpenyű hiperboloid és pontosan egy kétköpenyű hiperboloid megy át az (x_0, y_0, z_0) ponton.

Bizonyítás:

Az F_λ pontosan akkor megy át az (x_0, y_0, z_0) ponton, ha az

$$\frac{x_0^2}{a^2+\lambda} + \frac{y_0^2}{b^2+\lambda} + \frac{z_0^2}{c^2+\lambda} = 1$$

egyenlet teljesül.

Az egyenletet λ-ra kell megoldanunk, ezért átalakítjuk.

$$(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda) -$$
$$-[x_0^2(b^2+\lambda)(c^2+\lambda) + y_0^2(a^2+\lambda)(c^2+\lambda) + z_0^2(b^2+\lambda)(a^2+\lambda)] = 0.$$

Ha elvégezzük a szorzást láthatóvá válik, hogy harmadfokú polinomot kaptunk λ-ra.

$$p(\lambda) = (\lambda^3 + \lambda^2 c^2 + \lambda^2 a^2 + \lambda^2 b^2 + a^2 c^2 \lambda + b^2 c^2 \lambda + a^2 b^2 \lambda + a^2 c^2 b^2) -$$
$$-[x_0^2(b^2+\lambda)(c^2+\lambda) + y_0^2(a^2+\lambda)(c^2+\lambda) + z_0^2(b^2+\lambda)(a^2+\lambda)] = 0.$$

Egy harmadfokú polinomnak maximum három gyöke lehet, ezért már csak azt kell belátnunk, hogy ez a három gyök létezik, és a korábbi megállapítások alapján, a következő teljesül rájuk:

$$-a^2 < \lambda_1 < -b^2,$$
$$-b^2 < \lambda_2 < -c^2,$$
$$-c^2 < \lambda_3.$$

Ennek bizonyításához a Bolzano-tételt használjuk fel.

Bolzano-tétel:

Ha egy f függvény folytonos az $[a, b]$ zárt intervallumon, továbbá $f(a)$ és $f(b)$ ellenkező előjelűek, akkor f-nek biztosan van zérushelye valamely belső pontban.

Tekintsük elsőként $[-a^2, -b^2]$ intervallumot. Ekkor $p(-a^2)$-et és $p(-b^2)$-et kell megvizsgálnunk. Az intervallum kezdőpontjában

$$p(-a^2) = -x_0^2(b^2 - a^2)(c^2 - a^2),$$
$$(b^2 - a^2) > 0, \qquad (c^2 - a^2) > 0,$$

tehát

$$p(-a^2) < 0,$$

és

$$p(-b^2) = -y_0^2(a^2 - b^2)(c^2 - b^2),$$
$$(a^2 - b^2) < 0, \qquad (c^2 - b^2) > 0,$$

azaz

$$p(-b^2) > 0.$$

Ez azt jelenti, hogy teljesül a Bolzano-tétel feltétele, tehát a polinomnak van gyöke $[-a^2, -b^2]$ intervallumban.

$$\exists \lambda_1 : \ -a^2 < \lambda_1 < -b^2.$$

Nézzük most az $[-b^2, -c^2]$ intervallumot, ahol már ismert, hogy

$$p(-b^2) > 0,$$

és hasonlóan az eddigiekhez

$$p(-c^2) = -z_0^2(a^2 - c^2)(b^2 - c^2),$$
$$(a^2 - c^2) < 0, \qquad (b^2 - c^2) < 0,$$
$$p(-c^2) < 0.$$

Tehát, szintén teljesül, hogy $p(-b^2)$ és $p(-c^2)$ ellenkező előjelűek, így

$$\exists \lambda_2 : \ -b^2 < \lambda_2 < -c^2.$$

Ismert, hogy egy harmadfokú polinomra teljesül, hogy

$$\lim_{\lambda \to +\infty} p(\lambda) = +\infty,$$

azaz plusz végtelenben a függvény plusz végtelenhez tart, ha a főegyüttható pozitív. Esetünkben ez teljesül, mert p főegyütthatója 1. Ez azt jelenti, hogy létezik olyan $x > -c^2$, $x \in \mathbb{R}$, melyre $p(x) > 0$. Azt már láttuk, hogy $p(-c^2) < 0$, így a tétel szerint

$$\exists \lambda_3 : \ -c^2 < \lambda_3.$$

Tehát az

$$\frac{x_0^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y_0^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z_0^2}{c^2 + \lambda} = 1$$

egyenlet pontosan azokra a $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ értékekre teljesül, melyekre

$$-a^2 < \lambda_1 < -b^2, \qquad -b^2 < \lambda_2 < -c^2, \qquad -c^2 < \lambda_3,$$

azaz pontosan egy ellipszoid, pontosan egy egyköpenyű hiperboloid és pontosan egy kétköpenyű hiperboloid megy át az (x_0, y_0, z_0) ponton.

4.3.1 Konfokális másodrendű felületek metszete

Állítás:

Az $(x_0\,, y_0\,, z_0\,) \epsilon\mathbb{R}^3$ ponton átmenő konfokális másodrendű felületek, egymást páronként merőlegesen metszik.

Bizonyítás:

Két felület merőlegesen metszi egymást egy pontban, ha a pontbeli érintősíkok merőlegesek egymásra, azaz ha az érintősíkok normálvektorai merőlegesek. Elsőként tehát ezeket a normálvektorokat határozzuk meg, majd belátjuk merőlegességük.

Egy felületet a térben megadhatunk az egyenletével, és paraméterezéssel is. Ahhoz, hogy a felületet egyenlettel adjuk meg, rögzíteni kell egy $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ függvényt. Ekkor az $F(\underline{x}) = 0$ egyenletű felület azon $\underline{x}$ pontok $[F]$ halmaza, melyekben az F függvény 0 értéket vesz fel. Ennél nem általánosabb a $G(\underline{x}) = H(\underline{x})$ alakú egyenlet, amikor az egyenlet mindkét oldalán nullától különböző függvény áll, mert egy ilyet "nullára rendezéssel" $(G - H)(\underline{x}) = 0$ alakra hozhatunk.

Egy felület paraméteres megadásakor rögzítünk egy Ω síkbeli tartományt és egy $\underline{r}: \Omega \to \mathbb{R}^3$ leképezést. Ekkor a felület pontjai az $\underline{r}$ leképezés értékkészletébe eső pontok. Az $\underline{r}$ paraméterezést regulárisnak hívjuk, ha differenciálható és $\underline{r_u}(u, v) = \partial_u\underline{r}$ és $\underline{r_v}(u, v) = \partial_v\underline{r}$ lineárisan függetlenek bármely $(u, v) \in \Omega$-ra . Az érintősík differenciálgeometriai definíciója szerint egy regulárisan paraméterezett felület érintősíkja az $\underline{r}\,(u, v)$ pontban, az a sík, mely párhuzamos az $\underline{r_u}(u, v)$ és $\underline{r_v}(u, v)$ parciális deriváltakkal és átmegy az $\underline{r}\,(u, v)$ ponton.

Tekintsük tehát az $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ függvény által adott $F(\underline{x}) = 0$ egyenletű $[F]$ felületet, és legyen adott egy $\underline{r}: \Omega \to \mathbb{R}^3$ leképezés, amely az $[F]$ felületnek, vagy annak egy részének a reguláris paraméterezése.

A bizonyítás folyatásában szükségünk lesz a következő állításra:

Állítás:

Ha az $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény olyan, hogy teljesül az

$$F \circ \underline{r} \equiv 0$$

összefüggés, akkor grad $F(\underline{r}\,(u, v))$ merőleges az $\underline{r}\,(u, v)$-beli érintősíkra.

Bizonyítás:

Feltettük, hogy $F \circ \underline{r} \equiv 0$, amiből az is következik, hogy

$$\partial_u(F \circ \underline{r}) \equiv 0 \text{ és } \partial_v(F \circ \underline{r}) \equiv 0.$$

A láncszabály szerint:

$$\partial_u(F \circ \underline{r}) = \langle \operatorname{grad} F\left(\underline{r}\,(u,v)\right), \underline{r}_u(u,v)\rangle \equiv 0, \text{ és}$$

$$\partial_v(F \circ \underline{r}) = \langle \operatorname{grad} F\left(\underline{r}\,(u,v)\right), \underline{r}_v(u,v)\rangle \equiv 0,$$

ami azt jelenti, hogy grad $F\left(\underline{r}\,(u,v)\right)$ merőleges $\underline{r}_u(u,v)$ és $\underline{r}_v(u,v)$ vektorokra. Az $\underline{r}\,(u,v)$ pontban az érintősíkot éppen ezek a vektorok feszítik ki, tehát grad$F\left(\underline{r}\,(u,v)\right)$ valóban merőleges az $\underline{r}\,(u,v)$-beli érintősíkra.

Az eredeti állításra visszatérve, jelen esetben azokat az $[F_\lambda]$ felületeket vizsgáljuk, melyek egyenlete

$$F_\lambda(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} - 1 = 0.$$

Az előző állítás alapján e felületek $(x_0\,,y_0\,,z_0\,)$ pontbeli érintősíkjainak normálvektorai, grad $F_\lambda\,(x_0\,,y_0\,,z_0\,)$-val egyeznek meg.

Definíció szerint az F függvény gradiensén az (x,y,z) pontban, a

$$\operatorname{grad} F(x,y,z) = (\partial_x F, \partial_y F, \partial_z F)$$

vektort értjük, ezért

$$\operatorname{grad} F_\lambda\,(x_0\,,y_0\,,z_0\,) = \left(\frac{2x_0}{a^2+\lambda}, \frac{2y_0}{b^2+\lambda}, \frac{2z_0}{c^2+\lambda}\right),$$

tehát az érintősíkok normálvektorai $(x_0\,,y_0\,,z_0\,)$ pontban:

$$\left(\frac{x_0}{a^2+\lambda}, \frac{y_0}{b^2+\lambda}, \frac{z_0}{c^2+\lambda}\right).$$

Már csak azt kell belátnunk, hogy bármely két $(x_0\,,y_0\,,z_0\,)$ ponton átmenő konfokális másodrendű felület $(x_0\,,y_0\,,z_0\,)$ pontbeli érintősíkjának normálvektora merőleges egymásra.

Vegyük tehát

$$[F_\lambda]\colon \frac{x_0^2}{a^2+\lambda} + \frac{y_0^2}{b^2+\lambda} + \frac{z_0^2}{c^2+\lambda} = 1 \text{ és } [F_\mu]\colon \frac{x_0^2}{a^2+\mu} + \frac{y_0^2}{b^2+\mu} + \frac{z_0^2}{c^2+\mu} = 1$$

felületeket, melyekre

$$\lambda \neq \mu.$$

Az állítás akkor teljesül, ha a két normálvektor merőleges

$$\left(\frac{x_0}{a^2+\lambda}, \frac{y_0}{b^2+\lambda}, \frac{z_0}{c^2+\lambda}\right) \perp \left(\frac{x_0}{a^2+\mu}, \frac{y_0}{b^2+\mu}, \frac{z_0}{c^2+\mu}\right),$$

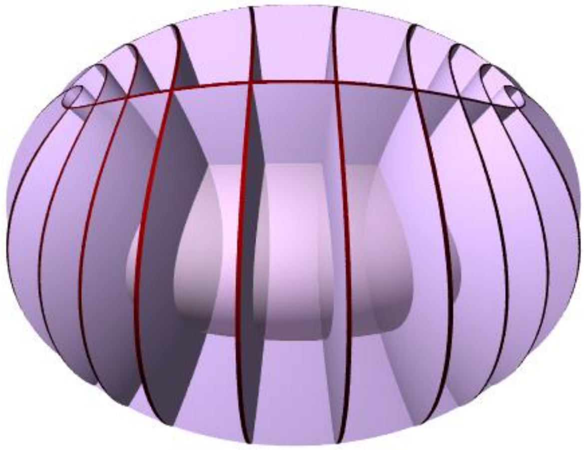
azaz, ha a skaláris szorzatuk nulla

$$\frac{x_0^2}{(a^2+\lambda)(a^2+\mu)} + \frac{y_0^2}{(b^2+\lambda)(c^2+\mu)} + \frac{z_0^2}{(c^2+\lambda)(c^2+\mu)} = 0.$$

Ennek bizonyításához vonjuk ki egymásból a kiinduláskor vett felületek egyenletét! Ekkor

$$\left(F_\lambda - F_\mu\right)(x_0\,, y_0\,, z_0\,) = \frac{x_0^2(\mu-\lambda)}{(a^2+\lambda)(a^2+\mu)} + \frac{y_0^2(\mu-\lambda)}{(b^2+\lambda)(c^2+\mu)} + \frac{z_0^2(\mu-\lambda)}{(c^2+\lambda)(c^2+\mu)} = 0$$

összefüggéshez jutunk, melyet $(\mu-\lambda)$-val leoszthatunk, hiszen feltettük, hogy $\lambda \neq \mu$. Az osztás után látható, hogy a kívánt eredményt kaptuk, tehát az $(x_0\,, y_0\,, z_0\,) \in \mathbb{R}^3$ ponton átmenő konfokális másodrendű felületek, egymást páronként merőlegesen metszik.



5 Irodalomjegyzék

[1] Hajós György: Bevezetés a geometriába. Tankönyvkiadó, Budapest 1962

[2] David Hilbert – Stefan Cohn-Vossen: Szemléletes geometria. Gondolat Könyvkiadó, Budapest 1982

[3] Verhóczki László: Geometria előadás matematikatanároknak, http://phil.elte.hu/~attila/math/geometriajegyzet/geometria_.pdf

[4] Molnár Anikó: Nevezetes egyenlőtlenségek. ELTE Matematika BSc szakdolgozat, http://www.cs.elte.hu/blobs/diplomamunkak/bsc_mattan/2010/molnar_aniko.pdf

[5] Verhóczki László: Klasszikus differenciálgeometria, e-tankönyv, http://latexcms.math.bme.hu/modositott/KlasszikusDiffGeom.pdf