Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Fábián Kata
Matematika BSc

Játsszunk Zarankiewicz-csel!

Szakdolgozat

Témavezetők:
Héger Tamás, tudományos segédmunkatárs
Szőnyi Tamás, egyetemi tanár

Budapest, 2014

Tartalomjegyzék

Előszó

Ebben a dolgozatban a címadó Zarankiewicz-probléma az utolsó fejezetben kapott helyet, ugyanis egy általánosabb kontextusból, az extremális gráfelméletből indultunk ki. Nézzük meg röviden, hogyan is jutunk el Zarankiewiczig.

Az első fejezetben csak az alapfogalmakat tekintjük át, hogy senki ne ütközhessen ismeretlen fogalmakba az olvasás folyamán.

A következő fejezetekben először az extremális gráfelmélet első klasszikusát, a Mantel-tételt vizsgáltuk. Ennek kicsit részletesebb elemzésébe is belekezdtünk. A Mantel-tétel után két lehetséges irányba is folytattuk a tárgyalást: a nagyobb teljes gráfok kizárását a Turán-tétel fejezetében, a négy hosszú kör kizárását a C_4-mentes gráfok fejezetében vizsgáljuk. Az általános Erdős–Stone–Simonovits-tétel további okot adott a páros kizárt részgráf vizsgálatára. A páros kizárt részgráfok közül a Zarankiewicz-problémával foglalkozunk részletesebben. A problémából született egyszerű táblajáték néhány verziójának részletes elemzésével, a nyerő stratégiák bemutatásával zárul a dolgozat.

A dolgozat megírását izgalmassá tette, hogy az eddig megszokott módszerektől eltérőeket is megismerhettem. Egyre inkább tetszik ez a témakör, úgy érzem a „végesség” ellenére itt nincsenek határok, mindig lehet egy új, még megválaszolatlan kérdést találni.

1. fejezet

Gráfelméleti alapfogalmak

Bevezetésként tisztázzunk néhány alapfogalmat, alaptételt, melyekre szükségünk lesz. Bővebben például az [5] könyvben olvashatunk a témához kapcsolódó további alapvetésekről.

1.1.1. Definíció. *Legyen V egy (nem üres) halmaz, E pedig a V kételemű részhalmazainak egy halmaza. Ekkor a $G = (V, E)$ párt* egyszerű gráfnak *nevezzük. A V elemeit csúcsoknak vagy pontoknak, az E elemeit éleknek nevezzük.*

A gráfot úgy szokás ábrázolni, hogy a csúcsokat pontokkal, az éleket vonalakkal jelöljük. Hurokélnek nevezünk egy élt, ha két végpontja ugyanaz. Ha egy gráf két csúcsát egynél több él köti össze, akkor azt többszörös élnek nevezzük.

1.1. ábra. Hurokél, többszörös él.

Szemléletesen egy gráfot egyszerű gráfnak nevezünk, ha sem hurokélt, sem többszörös élt nem tartalmaz.

1.1.2. Definíció. *Egy gráf egy pontjának a* fokszáma (foka) *a pontban találkozó élek száma. Az x csúcs fokának jele: $d(x)$.*

Továbbiakban csak egyszerű gráfokról fogunk beszélni. Ismételjünk át néhány tételt, melyeket bizonyítás nélkül közlünk.

1.1.3. Tétel. *Minden gráfban a pontok fokszámának összege az élek számának kétszerese.*

1. Következmény. *Minden gráfban a pontok fokszámának összege páros.*

2. Következmény. *Minden gráfban a páratlan fokú pontok száma páros.*

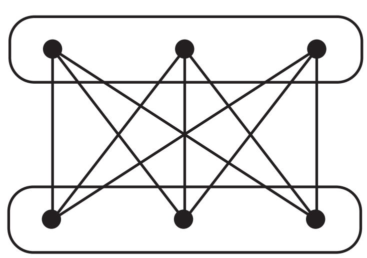
1.1.4. Definíció. *A G gráfot* k-regulárisnak *nevezzük, ha G-ben minden pont foka k.*

1.1.5. Definíció. *Ha egy egyszerű gráf bármely két pontja össze van kötve éllel, akkor* teljes gráfnak *nevezzük. Az n csúcsú teljes gráf jele: K_n.*

1.1.6. Tétel. *Az n pontú teljes gráf éleinek a száma: $\frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$.*

1.1.7. Definíció. Kétosztályú *(vagy elterjedtebb nevén* páros*) gráfnak nevezünk egy G gráfot, ha G csúcsainak halmazát fel tudjuk osztani két diszjunkt, A és B halmazra úgy, hogy $A \cup B = V$, és az összes G-beli élre teljesül, hogy az egyik végpontja A-ban, másik pedig B-ben van. Jelölés: $G = (A, B, E)$.*

1.1.8. Definíció. Teljes páros gráfnak *nevezünk valamely $G = (V_1, V_2, E)$ páros gráfot (ahol V_1, V_2 a csúcsok két osztálya), ha bármely $v_1 \in V_1$ és $v_2 \in V_2$ csúcspárra létezik $\{v_1, v_2\} \in E$ él.*



1.2. ábra. Példa egy teljes páros gráfra: $K_{3,3}$.

1.1.9. Definíció. *Egy G hurokmentes gráf k* színnel jól színezhető, *ha minden csúcsot ki lehet színezni k szín felhasználásával úgy, hogy bármely két szomszédos csúcs színe különböző legyen. A k színnel színezhető gráfokat k osztályú gráfoknak hívjuk. Egy ilyen színezésnél az azonos színt kapott pontok halmazát színosztálynak nevezzük. G kromatikus száma $\chi(G) = k$, ha G k színnel kiszínezhető, de $k - 1$ színnel nem.*

1.1.10. Definíció. *Egy* teljes k osztályú gráf *egy olyan k színnel jól színezhető gráf, ahol a különböző színosztályok között minden él be van húzva. Az ilyen gráfok megadásához (izomorfia erejéig) elegendő az osztályok elemszámát megadni. Egy teljes többosztályú gráfot, melyben az osztályok elemszámai $a_1, a_2, \ldots a_k$, így jelölünk: $K_{a_1,a_2,\ldots,a_k}$. A $K_{a,b}$ gráfok a teljes páros gráfok.*

Hány osztályú egy gráf? Ez nem egyértelmű. A legkisebb osztályszámot fejezi ki a kromatikus szám.

1.1.11. Megjegyzés. *Páros gráfot mindig ki lehet színezni két színnel, például úgy, hogy az egyik osztályban lévő csúcsokat az egyik színnel, a másik osztályban lévőket pedig a másik színnel színezzük ki.*

1.1.12. Definíció. *A $v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots v_n, e_n, v_{n+1}$ sorozatot körnek nevezzük, ha $v_1, \ldots v_n$ különböző csúcsok és $v_1 = v_{n+1}$, és az e_i él pedig mindig a v_i és v_{i+1} csúcsok között futó él. Az n hosszú kör jele: C_n.*

1.1.13. Tétel. *Egy gráf pontosan akkor színezhető ki két színnel, ha nem tartalmaz páratlan hosszúságú kört.*

1.1.14. Megjegyzés. *A páros gráf elnevezés a páros körüljárásból adódik. Akárhogy teszünk benne kört, az páros sok élet fog tartalmazni.*

2. fejezet

A Turán tételkör

A Turán-tétel azzal foglalkozik, hogy ha egy adott méretű teljes gráfot nem engedünk meg részgráfként, akkor maximum hány éle lehet a gráfnak adott csúcsszám mellett. Turán Pál 1941-ben publikálta tételét, ami a gráfelmélet egy jelentős fejezetét, az extremális gráfelméletet indította útnak.

Általánosabban is fel lehet tenni a kérdést: hogyha egy bármilyen rögzített H gráfot zárunk ki, akkor maximum hány éle lehet a gráfnak?

2.1. Mantel-tétel

Az első érdekes eset, amikor a háromszögeket zártuk ki. Ezt a speciális esetet már Mantel is vizsgálta 1907-ben. Ebben a fejezetben lesz még szó arról is, hogy egyéb feltételek esetén milyen maximális élszámot tudunk elérni a háromszögmentes gráfoknál.

2.1.1. Tétel (Mantel tétele, 1907). *Ha az n csúcsú G egyszerű gráf nem tartalmaz részgráfként háromszöget, akkor éleinek száma*

$$|E(G)| \leq \frac{n^2}{4}.$$

Bizonyítás 1. Válasszunk ki egy csúcsot a legnagyobb fokúak közül, nevezzük azt x-nek. Ekkor $d(x) = \Delta$, ahol Δ a legnagyobb fokszámot jelenti. Jelöljük x szomszédainak halmazát A-val, és legyen B a többi csúcs halmaza. Így B elemszáma pontosan $n - \Delta$, hiszen x szomszédain kívül, minden csúcs B-ben van.

Kétféle él létezik ebben a gráfban. Vannak olyan élek, amelyeknek az egyik végpontjuk B-ben van, és vannak olyan élek, melyeknek mindkét végpontjuk B-ben van. Olyan él nincs, melynek egyik végpontja sincs B-ben, hiszen A-ban nincs él, a háromszögmentesség miatt. Tehát az élek számára adhatunk egy felső becslést: (B-beli csúcsok száma) $\cdot$ (maximális fokszám), vagyis $|E(G)| \leq (n - \Delta) \cdot \Delta$. Ez a szorzat mikor lesz maximális? A számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség miatt akkor, ha a szorzat mindkét tényezője $\frac{n}{2}$. Így azt kapjuk, hogy $|E(G)| \leq (\frac{n}{2})^2$, vagyis:

$$|E(G)| \leq \frac{n^2}{4}.$$

□

Bizonyítás 2. ([6] alapján). Legyen x_1, $x_2 \in V(G)$ két éllel összekötött csúcs. Jelölje $N(x_1)$ az x_1 szomszédait, és $N(x_2)$ az x_2 szomszédait. Ekkor azt mondhatjuk, hogy $N(x_1)$ és $N(x_2)$ diszjunktak, hiszen ha x_1-nek és x_2-nek lenne közös szomszédja, akkor azzal tiltott háromszöget alkotnának.

Mennyi $N(x_1)$ elemszáma? Éppen annyi, mint x_1 foka: $d(x_1)$. Ekkor fennáll, hogy $d(x_1) + d(x_2) \leq n$ minden x_1, $x_2 \in V(G) : \{x_1, x_2\} \in E(G)$ esetén. Ez összesen $|E(G)| = e$ darab egyenlőtlenség, mert minden élre felírhatunk egyet. Ha az egyenlőtlenségeket összeadjuk, akkor a bal oldalon egy x csúcs foka pontosan annyiszor fog szerepelni, ahány szomszédja van, vagyis amennyi az ő foka ($d(x)$-szer). Tehát

$$d(x_1)d(x_1) + d(x_2)d(x_2) + ... + d(x_n)d(x_n) \leq n \cdot e,$$

azaz

$$d(x_1)^2 + d(x_2)^2 + ... + d(x_n)^2 \leq n \cdot e. \tag{2.1}$$

Mivel tudjuk, hogy a fokszámok összege $2e$, így alkalmazhatjuk a számtani és négyzetes közép közti egyenlőtlenséget:

$$\frac{d(x_1) + d(x_2) + ... + d(x_n)}{n} \leq \sqrt{\frac{d(x_1)^2 + d(x_2)^2 + ... + d(x_n)^2}{n}},$$

átrendezve

$$(d(x_1) + d(x_2) + ... + d(x_n))^2 \leq (d(x_1)^2 + d(x_2)^2 + ... + d(x_n)^2) \cdot n.$$

Rendezés után látható, hogy a jobb oldalon szereplő négyzetösszeget becsültük felülről az (2.1) egyenlőtlenségnél, illetve hogy bal oldalon a fokszámok összegének négyzete áll. Így azt kapjuk, hogy

$$4 \cdot e^2 \leq n \cdot (n \cdot e),$$

tehát

$$e \leq \frac{n^2}{4}.$$

$\square$

Vizsgáljuk meg, hogy mikor lesz a tételben egyenlőség, mikor lesz az élek száma maximális.

A számtani és négyzetes közép közti egyenlőtlenségben csak akkor lesz egyenlőség, ha az összeg tagjai egyenlőek, jelen esetben akkor, ha a fokszámok megegyeznek. Szükséges még, hogy létezzen egy olyan x, y él, melyre $d(x) + d(y) = n$. Ebből már következik, hogy G páros gráf, mert x szomszédai ($N(x)$) és y szomszédai ($N(y)$) kiteszik az egész G-t. Az osztályokon belül pedig nincs él, mert akkor tiltott háromszöget kapnánk. Ha az egyik osztály elemszáma k, a másiké $n-k$, akkor az élek száma:

$$e \leq k(n-k).$$

Ez mikor maximális? Bontsuk két esetre: ha n páros, akkor $k = \frac{n}{2}$, és $n-k = \frac{n}{2}$ esetben, illetve ha n páratlan, akkor $k = \frac{n-1}{2}$ és $n-k = \frac{n+1}{2}$, vagy fordított esetben lesz maximális.

Mi helyzet akkor, ha nem létezik olyan x, y él, melyre $d(x) + d(y) = n$? Két eset lehetséges.

1. eset: ha a gráf páros. Legyen k, az A osztály, $n-k$ pedig a B osztály csúcsainak száma.

a) Ha B-ben van egy olyan csúcs, aminek k a foka, akkor A-ban viszont minden csúcs foka maximum $n-k-1$ lehet. Ekkor $e \leq k(n-k-1)$.

b) Ha B-ben nincs k fokú csúcs, akkor minden B-beli csúcs foka maximum $k-1$, tehát $e \leq (k-1)(n-k)$.

Az a) és a b) esetben is akkor maximális az élszám, ha a szorzat mindkét tényezője $\frac{n-1}{2}$. Így páros gráf esetén, ha $\nexists\, x, y$ melyre $d(x) + d(y) = n$, akkor

$$e \leq \left(\frac{n-1}{2}\right)^2.$$

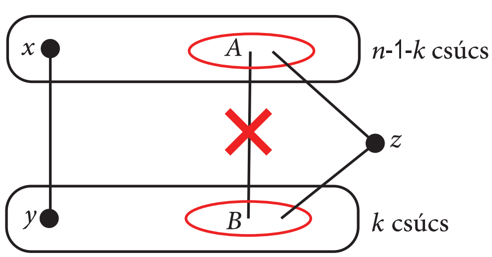
2.eset: ha a gráf nem páros. Két alesetet kell megvizsgálni.

a) $\nexists\ x, y$ melyre $d(x) + d(y) = n - 1$. Ebben az esetben a Mantel-tétel második bizonyításának gondolatmenetét tudjuk módosítani; $d(x) + d(y) \leq n$ helyett $\leq n - 2$-re. Így az jön ki, hogy

$$e \leq \frac{n(n-2)}{4}.$$

b) $\exists\ x, y$ melyre $d(x) + d(y) = n - 1$. Ekkor x szomszédainak halmaza legyen $N(x)$, y szomszédainak halmazát pedig jelölje $N(y)$. A feltétel miatt ez a két halmaz egy híján az összes csúcsot fedi. Ez az egy kimaradó csúcs legyen z. Mivel G nem páros, így z-nek biztos, hogy van szomszédja $N(x)$-ben és $N(y)$-ban is. Jelölje A az $N(y)$-beli csúcsok azon részhalmazát, melyek z szomszédai, B pedig az $N(x)$-beli z-vel szomszédos csúcsok halmazát. Legyen $a = |A|$ és $b = |B|$. Jegyezzük meg, hogy a és b pozitívak. Ekkor az élek száma legfeljebb $(n-1-k)k - ab + a + b$, mert ha a z csúcs nem lenne, akkor maximum $(n-1-k)k$ él lehetne, de most ab darab él nem lehet behúzva, mert akkor z-vel együtt háromszöget alkotnának. A z csúcs pedig $a + b$ csúccsal van összekötve. Az $(n-1-k)k$ szorzat akkor maximális, ha $k = \frac{n-1}{2}$; ekkor a szorzat $\frac{(n-1)^2}{4}$. A $-ab + a + b$ kifejezés pedig akkor maximális, ha $a = 1$ vagy $b = 1$, így mindig maximum $+1$-et ad. Tehát

$$e \leq \frac{(n-1)^2}{4} + 1.$$



A két esetben született felső becslések közül melyiket kell választanunk? Az utóbbit, mert az a nagyobb. Ez a becslés egyébként el is érhető a következő módon: ahogy a számolásban is láthattuk, legyen

z-nek 1-1 szomszédja $N(x)$-ben és $N(y)$-ban, továbbá $N(x)$ és $N(y)$ elemszáma legyen egyenlő. (Ez a becslés eszerint páratlan n esetén érhető el.)

Foglaljuk össze egy táblázatba a megkapott eredményeket! Jelölje $x \sim y$ azt, hogy az x és y csúcs között van él.

Háromszögmentes gráfok

	Maximális élszám	
	Páros gráf	Nem páros gráf
$\exists x \sim y$: $d(x) + d(y) = n$	$\frac{n^2}{4}$	-
$\nexists x \sim y$: $d(x) + d(y) = n$	$\left(\frac{n-1}{2}\right)^2$	$\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 + 1$

2.1.2. Megjegyzés. *Vegyük észre, hogy a maximális $n^2/4$-es élszám megközelítéséhez szükséges, hogy létezzen $x \sim y$, melyekre $d(x) + d(y) = n$ (amiből következik, hogy a gráf páros). Ha ez a feltétel nem teljesül, legalább $n/2$ éllel kevesebb lehet csak a gráfban (közelítőleg). Ezek után meglepő lehet, hogy a táblázat alsó sora a megadott feltétel mellett azt mondja, hogy nem páros gráf esetén eggyel több él érhető el, mint páros gráf esetén.*

Mantel tétele a háromszögmentességet vizsgálta. Milyen irányba mehetnénk tovább? A háromszög egy három csúcsú teljes gráf, és egy három hosszú kör is egyben. Így két új kérdés is felmerülhet: zárjunk ki nagyobb teljes gráfot, vagy nagyobb kört. Először a teljes gráf kizárását vizsgáljuk, egy későbbi fejezetben pedig a négy hosszú kör (C_4) kizárását.

2.2. Turán-gráf, Turán-tétel

A Turán-féle gráftétel meghatározza, hogy legfeljebb hány éle lehet egy n csúcsú egyszerű gráfnak, amely nem tartalmaz adott nagyságú teljes gráfot: K_{r+1}-et. Vegyük észre, hogy egyetlen r osztályú gráf sem tartalmazhat K_{r+1}-et, mert ha tartalmazna, akkor a skatulya elv szerint ennek a K_{r+1}-nek lenne két olyan csúcsa, amely azonos osztályba kerül. Ez viszont ellentmondásra vezet, hiszen egy osztályon belül nem futhat él.

2.2.1. Definíció. *Az n csúcsú, r osztályú* Turán-gráf *egy (izomorfia erejéig egyértelmű) teljes r-osztályú gráf, amelyben bármely két osztály mérete leg-*

feljebb eggyel tér el egymástól. Az n csúcsú, r osztályú Turán-gráfot $T(n,r)$ jelöli.

2.2.2. Tétel (Turán tétele). *Ha az n csúcsú G gráf nem tartalmaz K_{r+1}-et (vagyis teljes $r+1$ csúcsú gráfot) részgráfként, akkor legfeljebb annyi éle lehet, mint a $T(n,r)$ Turán-gráfnak. Ha G-nek éppen ennyi éle van, akkor G nem lehet más, mint $T(n,r)$.*

Bizonyítás (Erdős). Célunk az, hogy az n csúcsú G gráfot úgy módosítsuk, hogy közben az éleinek száma nem csökken, és az átalakítás végén a kapott gráf már r osztályú legyen. Feltehető, hogy $n \geq r$, hiszen $n \leq r$ esetén a tétel triviális.

Keressük meg az egyik legnagyobb fokú csúcsot, legyen ez x. Nevezzük el V_1-nek x szomszédainak halmazát, V_2-nek pedig a gráf többi csúcsát (x-et is beleértve).

Kössünk össze minden V_2-beli csúcsot minden V_1-belivel, és töröljük a V_2-ben futó éleket. Ezzel a művelettel minden csúcsnak növeltem, legalábbis nem csökkentettem a fokszámát. A V_1 csúcshalmazon belül pedig maradnak az élek, úgy ahogy voltak. Ekkor az új gráfban a fokok nem csökkentek, így az élek száma sem csökkent.

Mivel az eredeti G gráfban nem volt K_{r+1}, így V_1-ben nincs K_r, mert akkor x-szel együtt K_{r+1}-et alkotnának. Most figyeljük csak a V_1 által feszített részgráfot. Ezen is hajtsuk végre a lépéseket, és ezt ismételgessük. Végül kapunk egy k osztályú teljes gráfot ($k \leq r$). Azt kéne belátni, hogy akkor lesz a legtöbb éle a gráfnak, ha r osztályú. Ez nyilvánvaló hiszen, ha szétvágunk egy osztályt, akkor az eddigi élek megmaradnak, és hozzájönnek a két új osztály közti élek, így a fokszám nő.

Tudjuk, hogy a gráf r osztályú. Megmutatjuk, hogy ebben az esetben akkor van a legtöbb éle, ha Turán-gráf. Indirekt tegyük fel, hogy G, aminek a legtöbb éle van, nem a $T(n,r)$. Ekkor G-ben van két olyan osztály melyre igaz, hogy az egyikben x csúcs van, a másikban $x+2$ db. csúcs van. Tegyünk át az $x+2$ csúcsú osztályból egy csúcsot az x csúcsú osztályba. Ezzel a művelettel maximum x élet töröltünk, és $x+1$ új élet húztunk be. Így ellentmondásra jutunk, mert nem G volt a legtöbb élű r osztályú gráf.

Mikor van egyenlőség? Azt akarjuk belátni, hogy ha $e(G) = e(T(n,r))$, akkor $G = T(n,r)$. Ha az átalakítás során V_2-ből töröltünk volna élet, akkor helyette egy-egy újat húztunk volna be. Ezt megtehettük, mert nem lehettek minden V_1-belivel összekötve, mert akkor ezen csúcsok fokszáma a maximálisnál több lett volna. Tehát minden V_2-beli él törlésénél elmondható, hogy egy él törlésével két új élet húztunk be. Tehát ha nem növeltük az élszámot, V_2-ben nem lehettek élek; ez minden további lépésben elmondható. Azaz csak akkor nem növeltük az élszámot, ha a teljes k osztályú gráf, amit az eljárás végén kaptunk, az maga az eredeti gráf volt. $\square$

Az előbbiekben azt vizsgáltuk, hogy ha egy teljes r csúcsú részgráfot zárunk ki, akkor maximum mennyi éle lehet a gráfnak. A tétel azt mondta, hogy annyi, mint az $r-1$ osztályú Turán-gráfnak. Számoljuk ki, hogy ez hány élet jelent nagyjából. Egy osztályban durván $\frac{n}{r-1}$ csúcs van, így egy csúcs foka: $n - \frac{n}{r-1}$. Tehát az élek száma:

$$e(T(n, r-1)) \approx \frac{n \cdot \left(n - \frac{n}{r-1}\right)}{2} = \frac{n \cdot \left(\frac{r-2}{r-1} \cdot n\right)}{2} = \frac{n^2}{2} \cdot \frac{r-2}{r-1} \approx \binom{n}{2}\frac{r-2}{r-1}.$$

Ha általánosabban szeretnénk vizsgálni, tehát egy bármilyen kizárt részgráf esetén akarjuk meghatározni a gráf maximális élszámát, akkor erre a következő általánosabb tétel ismert. Vezessünk be egy jelölést: $ex(n, T)$ jelentse az n csúcsú, T gráfot részgráfként nem tartalmazó gráfok maximális élszámát.

2.2.3. Tétel (Erdős–Stone–Simonovits-tétel). *Ha T a kizárt részgráf, és $\chi(T) = r \geq 2$, akkor az elérhető legtöbb élszám n csúcson nagyságrendileg annyi, mint egy n csúcsú $r-1$ osztályú Turán-gráfnak, pontosabban*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{ex(n, T)}{\binom{n}{2}} = \frac{r-2}{r-1}.$$

Mit is jelent ez? Ha például $r = 3$, tehát a kizárt részgráf kromatikus száma 3, akkor $\frac{3-2}{3-1} = \frac{1}{2}$-szer annyi éle lehet, mint n csúcson az összes lehetséges élek száma. Vagyis a tétel megmondja konkrétan a konstans szorzót is. Mit mond az Erdős–Stone–Simonovits-tétel $r = 2$ esetre? Ebben az esetben a határérték 0. Tehát csak annyit tudtunk meg, hogy $\binom{n}{2}$-höz képest kevés éle van, de nem tudjuk, hogy mennyire. Az $r = 2$ azt jelenti, hogy a kizárt részgráf kromatikus száma 2, vagyis a kizárt gráf páros. Tehát ez a tétel páros kizárt részgráf esetén nem mondja meg a gráf élei számának nagyságrendjét. Külön kell vizsgálnunk ezt az esetet ahhoz, hogy a nagyságrendről képet kapjunk.

2.3. C_4-mentes gráfok

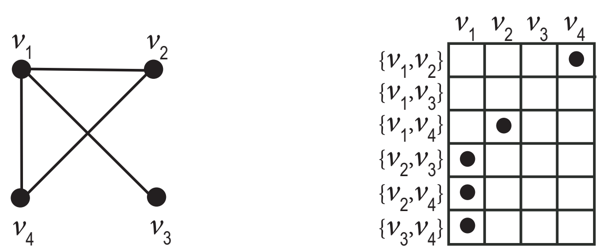
A C_4 kizárása egy gráfból már két okból is érdekes számunkra: egyrészt, mert ez egy páros gráf, így az Erdős–Stone–Simonovits-tétel nem ad választ az élek maximális számára. Másrészt ez a Mantel-tétel másik általánosítása, amikor a háromszög helyett, egy eggyel nagyobb kört zárunk ki a gráfból.

2.3.1. Tétel (Erdős). *Ha az n csúcsú egyszerű G gráf nem tartalmaz részgráfként négy hosszú kört (vagyis G C_4-mentes), akkor élszámára teljesül:*

$$|E(G)| \leq \frac{n}{4} \cdot \left(1 + \sqrt{4n-3}\right).$$

Bizonyítás. Számoljuk meg a gráfban kétféleképpen a „cseresznyéket”, vagyis olyan $(v, \{u_1, u_2\})$ párokat, ahol v, u_1, $u_2 \in V(G)$ és $\{v, u_1\} \in E(G)$, $\{v, u_2\} \in E(G)$. Szemléletesen a v a „cseresznye hegye”, a pár másik része pedig egy halmaz, ami két elemből áll; u_1, u_2 a „cseresznye végei”. Szárnak fogom nevezni a cseresznye vége és hegye közti éleket.

A cseresznyéket rendszerezhetjük egy táblázat segítségével az ábrán látható módon. A $|(v, \{u_1, u_2\})|$ elemszámra, vagyis a cseresznyék számára vagyunk kíváncsiak. Legyenek a négyzetrács oszlopai a $v_1 \ldots v_n$ csúcsok. Válasszunk ki az összes lehetséges módon két csúcsot a gráfból, egy sort jelöljön egy u_1, u_2 lehetséges csúcspár. Az (i, j)-edik négyzetet jelöljük meg akkor, ha az i-edik sorban lévő csúcspár minkét csúcsa össze van kötve a j-edik oszlopban lévő v_j csúccsal. Bizonyításunkban kétféleképpen számoljuk meg a jelöléseket(azaz a cseresznyéket), először oszloponként, aztán soronként.



2.1. ábra. Példa egy gráfban lévő cseresznyék táblázatba rendezésére

Először vizsgáljuk meg a gráfban található cseresznyéket a hegyüknél számolva, vagyis oszloponként. Nézzük meg a cseresznyék számát, ha v rögzített: először $d(v)$ féle első szárat választhatok, aztán $d(v) - 1$ féle második szárat, de ekkor minden cseresznyét kétszer számoltunk. Ha ezt megnézzük minden csúcsra, akkor ezt kapjuk:

$$\text{A gráfban található cseresznyék száma} = \sum_{v \in V} \frac{d(v) \cdot (d(v) - 1)}{2}.$$

Most nézzük a cseresznyéket a végüknél számolva, vagyis a négyzetrácsban soronként. Rögzített u_1, u_2 csúcsokhoz keressük a cseresznye hegyét. Azt tudjuk, hogy két véghez maximum egy hegy tartozhat, mert ha több is lenne, úgy már C_4-et alkotnának. Tehát az összes csúcs közül kettőt kell kiválasztani, ezt $\binom{n}{2}$ féle módon tehetem meg. Így azt kaptuk, hogy a cseresznyék száma maximum $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$.
A kétféle számolásból adódik, hogy:

$$\sum_{v \in V} \frac{d(v) \cdot (d(v) - 1)}{2} \leq \frac{n \cdot (n-1)}{2}.$$

Az egyenlőtlenséget rendezve kapjuk:

$$\sum_{v \in V} (d(v))^2 - \sum_{v \in V} d(v) \leq n \cdot (n-1).$$

A négyzetes tag becsülésére használjuk a számtani-négyzetes közép közti egyenlőtlenséget:

$$n \cdot \left(\frac{d(v_1) + ... + d(v_n)}{n} \right)^2 \leq \sum_{v \in V} (d(v))^2,$$

ahol tudjuk, hogy $\sum_{v \in V} d(x) = 2e$. Ezt visszaírva az egyenlőtlenségbe:

$$n \cdot \left(\frac{2e}{n} \right)^2 - 2e \leq n \cdot (n-1).$$

Ezt e-re rendezve egy másodfokú egyenlőtlenséget kapunk:

$$4e^2 - 2en - n^2(n-1) \leq 0,$$

melynek lesz egy negatív és egy pozitív gyöke. Nekünk a pozitív gyökre lesz szükségünk, ami

$$e = \frac{n}{4} \cdot \left(1 + \sqrt{4n-3}\right).$$

Tehát azt kaptuk, hogy

$$|E(G)| \leq \frac{n}{4} \cdot \left(1 + \sqrt{4n-3}\right).$$

□

2.3.1. Klein Eszter modellje

Adtunk egy becslést C_4-mentes gráfok élszámára. Kérdés, hogy ez a becslés mennyire jó. Nagyságrendileg ha kiszámoljuk, a becslés szerint: $\frac{n \cdot \sqrt{n}}{2}$ éle lehet maximum egy C_4-mentes gráfnak. Klein Eszter adott egy konstrukciót, ami megmutatja, hogy a becslés nagyságrendileg éles.

2.3.2. Tétel. *Végtelen sok olyan n csúcsú C_4-mentes G gráf van, melynek $|E(G)| \approx \frac{n \cdot \sqrt{n}}{2 \cdot \sqrt{2}}$ éle van.*

2.3.3. Megjegyzés. *Vegyük észre, hogy ez az eredmény csak konstans szorzóban tér el a becsléstől.*

Bizonyítás. Adjuk meg a konstrukciót. Szokásos koordináta geometriából ismert egyenesegyenleteket, pontokat fogjuk használni. Egy véges modellt akarunk adni, ezért a koordinátákat egy véges testből fogjuk venni. A q elemű véges testet $\mathbb{F}_q$ fogja jelölni, ahol q prímhatvány. Készítsünk egy páros gráfot, melynek egyik osztálya: P, pontokat reprezentál (x, y) koordinátákkal, másik osztálya: E, pedig egyeneseket $[m, b]$-vel, ahol m a meredekség, b az egyenes y tengellyel vett metszete; illetve a függőleges egyeneseket $[c]$-vel reprezentálja, ahol c a megfelelő abszcissza, $x, y, m, b, c \in \mathbb{F}_q$.

Él akkor és csak akkor megy az (x, y) pont és $[m, b]$, illetve $[c]$ egyenes között, ha a pont rajta van az egyenesen, vagyis ha az egyik teljesül: $y = mx+b$, illetve $x = c$. Amint azt megmutatjuk, a gráf C_4-mentes lesz, mert nem lesz két olyan egyenes, melyeknek két metszéspontjuk van, ez persze azt is jelenti, hogy nem lesz két olyan pont, amelyek két egyenesre is illeszkednek. Az utóbbi megközelítésből kiindulva vizsgáljuk meg, hogy miért igaz ez. Vegyünk két tetszőleges egymástól különböző pontot: (x_1, y_1), (x_2, y_2). Hány összekötő egyenesük van? Két eset lehetséges.

1. eset: a két pontot függőleges egyenes akkor és csak akkor köti össze, ha $x_1 = x_2$, ez az $[x_1]$ egyenes.

2. eset: Mikor van a két pont között $y = mx + b$ alakú egyenes? Jelöljön egy ilyen egyenest $[m, b]$. Ekkor az illeszkedés miatt teljesül:

$$y_1 = mx_1 + b \tag{2.2}$$

$$y_2 = mx_2 + b \tag{2.3}$$

Ekkor (2.2) – (2.3): $y_1 - y_2 = m(x_1 - x_2)$. Ha $x_1 = x_2$, akkor $y_1 = y_2$-nek is teljesülnie kéne, de ez nem lehet, mert akkor a két pont megegyezne. Ha

$x_1 \neq x_2$, akkor $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$. Tehát a két ponton átmenő egyenes meredeksége egyértelmű. Az egyenletbe m értékét behelyettesítve b-t is egyértelműen megkapjuk.

A két esetből azt kaptuk, hogy bármely két pontnak pontosan egy összekötő egyenese van.

A P-beli csúcsok száma q^2, mert q-féle x és q-féle y koordinátát tudok összepárosítani. Az E osztályban lévő csúcsok száma pedig $q^2 + q$, ahol q a függőleges egyenesek száma.

Számoljuk meg a gráf éleit. Egy (x, y) pont foka $q+1$, hiszen q-féleképpen rögzíthetem m-et, és minden m esetén pontosan az $[m, y - mx]$ ferde egyenes megy át az (x, y) ponton, továbbá egy függőleges egyenes illeszkedik rá: $[x]$. Így az élek száma:

$$e = q^2 \cdot (q + 1).$$

Fejezzük ki most az élek számát a csúcsszámmal is. Az összes csúcs száma: $n = 2q^2 + q$. Ha kerekítünk, akkor $q \approx \sqrt{\frac{n}{2}}$, így az élek száma:

$$|E(G)| \approx \frac{n \cdot \sqrt{n}}{2 \cdot \sqrt{2}}.$$

□

Látszik, hogy a konstrukcióban kapott élszám tényleg csak egy konstans szorzóban tér el a becsléstől, tehát a becslés nagyságrendileg éles.

Mikor érhető el az egyenlőség a 2.3.1 tételben?

Nézzük meg, hogy vajon van-e olyan eset, amikor a becslés ténylegesen elérhető. Mikor állhat fenn az egyenlőség? A bizonyítás két lépésénél használtunk becslést, ezeket kell megvizsgálni.

A számtani-négyzetes egyenlőtlenség esetén akkor van egyenlőség, ha minden csúcs foka egyenlő. A másik becslésünk a cseresznyék számolásnál volt, amikor az n csúcsból kettőt választunk ki az összes lehetséges módon, mert minden két csúcshoz maximum egy hegy tartozhat. Ez akkor érhető el, ha minden kiválasztható két csúcshoz tényleg létezik is pontosan egy hegy. Mit is jelent ez? Azt, hogy egy olyan reguláris gráfot keresünk, melyben bármely két csúcsnak pontosan egy közös szomszédja van. Kérdés, hogy létezik-e ilyen gráf. Az alábbi tétel az Erdős–Rényi–Sós-féle ún. barátságtétel Wilf-féle bizonyításának gondolatmenetén alapul, melyet a konzultációkon [3] kapott részfeladatok megoldása nyomán állítottam össze.

2.3.4. Tétel. *Nem létezik olyan G reguláris gráf, melyben bármely két csúcsnak pontosan egy közös szomszédja van, kivéve a háromszög (K_3).*

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy létezik olyan k-reguláris gráf, melyben bármely két csúcsnak pontosan egy közös szomszédja van. A csúcsokat jelölje $v_1, v_2, \ldots, v_n$, és jelöljük egy v_i csúcs szomszédainak halmazát $N(v_i)$-vel. Ekkor a gráf különleges tulajdonsága azt mondja ki, hogy $|N(v_i) \cap N(v_j)| = 1$ $\forall\ i, j$-re, ha $i \neq j$, és $i, j = 1, \ldots, n$. Elemezzük ezt a tulajdonságot. Ha kiválasztunk két csúcsot; v_i, v_j-t, akkor nézzük meg hány olyan v_k csúcs van, hogy $v_i \in N(v_k)$ és $v_j \in N(v_k)$. Ez azt jelenti, hogy a v_k szomszédja a v_i-nek és v_j-nek is; tehát közös szomszéd. Ilyenből pedig pontosan egy van.

Készítsünk egy szomszédsági mátrixot, melyet jelöljünk A-val. Az oszlopokat a csúcsokkal indexeljük, a sorokat pedig a csúcsokhoz tartozó szomszédsághalmazokkal. (A csúcsokat ugyanolyan sorrendben soroljuk fel.) Az A mátrix elemei nullák és egyesek: az $(A)_{ij}$ legyen 1, ha $v_j \in N(v_i)$, 0, ha $v_j \notin N(v_i)$.

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & \cdots & v_n \end{array} \\
\begin{array}{c} N(v_1) \\ N(v_2) \\ N(v_3) \\ \vdots \\ N(v_n) \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & & 0 & & \\ & 0 & & & \\ & & & & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

A példában $v_1 \in N(v_2)$, $v_2 \in N(v_1)$, hiszen a szomszédság szimmetrikus. Természetesen $v_1 \notin N(v_1)$, $v_n \notin N(v_n)$, mert egyik csúcs sem szomszédja önmagának (az hurokélet jelentene).

Ekkor egy sorban pontosan k darab 1-es lesz, mert $|N(v_i)| = k$ $\forall\ i = 1, \ldots, n$. Megállapíthatjuk, hogy v_i pontosan akkor van benne az $N(v_j)$-ben, ha v_i és v_j szomszédosak. Ezért az oszlopokban is pontosan k darab 1-es lesz. A mátrix főátlója csupa 0, mert $v_i \notin N(v_i)$ $\forall i$-re. Mivel a szomszédság szimmetrikus reláció, a mátrix szimmetrikus lesz.

Tekintsük az A mátrix négyzetét. Érdemes gondolatban az $A \cdot A^T$-at összeszorozni, ezt megtehetjük, mert A szimmetrikus.

Nézzük meg, hogy általában az $(A^2)_{ij}$ mátrix eleme mi lesz. Az $N(v_i)$-t szorozzuk össze az $N(v_j)$ vektorral; az összeadandókban pontosan akkor kapunk 1-et az l-edik helyen, ha v_i-nek és v_j-nek is szomszédja v_l. Ha $i \neq j$, akkor ilyenből pontosan egy lesz, hiszen bármely két csúcsnak pontosan egy közös szomszédja van. A főátlóban azt az esetet nézzük, amikor $i = j$. Ekkor v_i önmagával vett közös szomszédainak számát keressük. Ez mindig k, mert a gráf k-reguláris. Tehát azt kaptuk hogy:

$$A^2 = \begin{pmatrix} k & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & k & & \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & k \end{pmatrix}.$$

Az A^2 mátrix felbontható a következőképpen: $A^2 = (k-1) \cdot I + 1 \cdot J$, ahol I az egységmátrix, J pedig a csupa 1-esből álló mátrix. Vizsgáljuk meg az A mátrix sajátértékeit, sajátvektorait. Az A mátrix valós, szimmetrikus, tehát van sajátvektorokból álló bázisa. Tudjuk, hogy különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok merőlegesek egymásra. Az egyik sajátvektor könnyen észrevehető: $\underline{v}_1 = (1, \ldots, 1)^T$ vektor sajátvektor lesz k sajátértékkel, hiszen $A \cdot \underline{v}_1 = k \cdot \underline{v}_1$. Legyen $\underline{v}$ egy $\underline{v}_1$-re merőleges sajátvektor, melynek sajátértéke λ. (Ilyen $\underline{v}$-t akkor is találunk, ha $\lambda = k$ lenne, csak ekkor a k sajátértékhez tartozó saját alterében kellene keresnünk.) A merőlegesség miatt $\underline{v} \cdot \underline{v}_1 = 0$ (skaláris szorzatuk 0). Nézzük meg λ lehetséges értékeit. Az $A^2 = (k-1) \cdot I + 1 \cdot J$ egyenlőséget beszorozva $\underline{v}$-vel ezt kapjuk:

$$A^2\underline{v} = (k-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{v} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \underline{v}.$$

Itt a $J\underline{v} = \underline{0}$, mert J sorai merőlegesek a $\underline{v}$ vektorra, tehát $A^2\underline{v} = (k-1)I\underline{v}$. Továbbá

$$A^2\underline{v} = A(A\underline{v}) = A\lambda\underline{v} = \lambda A\underline{v} = \lambda^2\underline{v}.$$

Ha a két egyenlőséget összevetjük, azt kapjuk, hogy

$$\lambda^2\underline{v} = (k-1)I\underline{v} = (k-1)\underline{v},$$

azaz

$$(\lambda^2 - (k-1))\underline{v} = \underline{0}.$$

Egy v vektor skalárszorosa kétféleképpen lehet a $\underline{0}$: ha $\underline{v} = \underline{0}$, de ez nem lehet, mert $\underline{v}$ sajátvektor, vagy ha $\lambda^2 - (k-1) = 0$, azaz

$$\lambda^2 = k - 1,$$

amiből

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{k-1}.$$

Azt kaptuk, hogy bármely a $\underline{v}_1$-re merőleges vektor sajátértéke kétféle lehet. Tehát van egy k sajátértékű sajátvektor, és a többi $k-1$ sajátvektornak csak kétféle sajátértéke lehet: $\pm\sqrt{k-1}$. Legyen a $\sqrt{k-1}$ sajátérték multiplicitása x. Ismeretes, hogy egy mátrix nyoma (a főátlóban lévő elemek összege) mindig egyenlő a sajátértékek multiplicitással vett összegével. A jelenlegi mátrix esetén ez 0. Ekkor felírhatjuk a sajátértékekre az alábbi összefüggést:

$$1 \cdot k + x \cdot \sqrt{k-1} + (n - x - 1) \cdot (-\sqrt{k-1}) = 0.$$

Mi az összefüggés n és k között? Figyeljünk meg egy csúcsot; legyen ez v_i. Ekkor minden csúcs vagy az ő szomszédja, vagy van pontosan egy közös szomszédjuk. Mivel v_i-nek k darab szomszédja van, és ennek a k csúcsnak csúcsonként még $k-2$ további szomszédja van, így $n = (k-2) \cdot k + k + 1 = k^2 - k + 1$. Ezt beírva az egyenletbe:

$$k + x \cdot \sqrt{k-1} + (k^2 - k + 1 - x - 1) \cdot (-\sqrt{k-1}) = 0$$

$$2x \cdot \sqrt{k-1} = k^2 \cdot \sqrt{k-1} - k \cdot \sqrt{k-1} - k$$

$$2x = k^2 - k - \frac{k}{\sqrt{k-1}}$$

Mivel x és k is egész, így ez az egyenlőség csak úgy teljesülhetne, ha $\frac{k}{\sqrt{k-1}}$ is egész lenne. Ez hogy lehetne egész? Csak akkor, ha a nevező egész, tehát ha $k = a^2 + 1$ alakú. Ekkor viszont $\frac{k}{\sqrt{k-1}} = \frac{a^2+1}{a} = a + \frac{1}{a}$. Egy szám és reciproka viszont csak az $a = 1$ esetben egész. Tehát $k = 2$ esetben teljesül csak az egyenlőség. Ez azt jelenti, hogy egyetlen olyan gráf létezik, melyre igaz, hogy k reguláris, és bármely két csúcsnak pontosan egy közös szomszédja van; ez a K_3. $\square$

2.3.5. Definíció. *Legyen $\mathcal{P}$ egy halmaz, $\mathcal{L}$ pedig $\mathcal{P}$ részhalmazainak egy halmaza. Nevezzük $\mathcal{P}$ elemeit pontoknak, $\mathcal{L}$ elemeit egyeneseknek. Ez a pont-egyenes struktúra akkor projektív sík, ha a következő axiómák teljesülnek:*

(1) *$\forall$ $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$-hez egyértelműen létezik $l \in \mathcal{L}$, hogy $P_1 \in l$ és $P_2 \in l$.*

(2) *$\forall$ $l_1, l_2 \in \mathcal{L}$-hez egyértelműen létezik $P \in \mathcal{P}$, hogy $P \in l_1 \cap l_2$.*

(3) *Minden egyenesnek legalább három pontja van, és minden pontra legalább három egyenes illeszkedik.*

2.3.6. Megjegyzés. *Észrevehetjük, hogy egy $k \geq 3$ reguláris gráf, melyben bármely két csúcsnak pontosan egy közös szomszédja van, egy projektív síkot adna. Legyenek a $v_1 \dots v_n$ csúcsok a pontok, az $N(v_1) \dots N(v_n)$ halmazok pedig az egyenesek. Ekkor bármely két egyenesnek pontosan egy közös pontja van, és bármely két pontra pontosan egy egyenes illeszkedik.*

Sőt egy így előálló projektív síkban van egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés a pontok és az egyenesek között úgy, hogy minden v csúcshoz hozzárendeljük az $N(v)$ egyenest (ekkor minden pontból csináltunk egy egyenest), és minden $N(v)$-hez hozzárendeljük a v pontot (tehát minden egyenesből csináltunk egy pontot). Ez a megfeleltetés még illeszkedéstartó is: ha egy pont és egy egyenes illeszkedett egymásra, akkor az ő megfeleltetett képük is illeszkedni fog. (Pl: van egy csúcs: v_1, ami rajta van az $N(v_6)$ egyenesen, akkor ha vesszük ezekhez hozzárendelt elemeket, akkor $N(v_1)$-en pedig rajta lesz a v_6 csúcs.) Egy ilyen megfeleltetést a geometriában polaritásnak nevezzük.

A fenti gráf által megadott projektív síkban egy olyan polaritást kapnánk, ahol nincsen olyan pont, ami rajta lenne a hozzá rendelt egyenesen. Az ilyen pontokat a polaritás autokonjugált pontjainak nevezzük.

Az előbbi bizonyításban lényegében azt tudtuk meg, hogy bármely véges projektív síknak ha van egy polaritása, akkor muszáj, hogy legyen autokonjugált pontja.

2.3.2. Az Erdős–Rényi-, avagy a polaritás gráf egy egyszerűbb változata

A konstrukció bemutatásával az a célunk, hogy megmutassuk, hogy a C_4-mentes gráfok élszámára adott becslés még Klein Eszter modelljénél is jobban közelíthető.

Alakítsuk át a Klein féle modellt egy kicsit. Az egyenesek osztályából vegyük ki a függőleges egyeneseket, így ugyanannyi csúcs lesz mindkét osztályban, és minden csúcsot két koordináta jelöl. Az $[m, b]$ egyenes jelölje most az m meredekségű, $-b$ eltoltságú egyenest. Ekkor az $[m,b]$ egyenesre illeszkedik egy (x,y) pont, ha $y+b=mx$.

Azonosítsuk a kétfajta csúcsot, alkalmazzuk az „összecsippentést” a csúcsokra: töröljük el a különböző zárójeleket, maradjon csak a kerek zárójel. Ettől kezdve a gráf egy csúcsára kétféleképpen gondolunk: egyszerre egy pont és egy egyenes koordinátái is. Él akkor menjen két csúcs között, ha teljesül rájuk az illeszkedés. (Például: (a,b) és (c,d) között legyen él akkor és csak akkor, ha teljesül: $b+d=ac$). Ekkor mindegy, hogy melyik volt a pont, és melyik az egyenes, hiszen ez a zárójelcsere egy szimmetrikus megfeleltetés, egy polaritás.

A csúcsok száma a gráfban q^2 lesz, mert minden csúcs két koordinátából áll, és mivel a pontokat az $\mathbb{F}_q$ q elemű testből vesszük, így q-féle első és q-féle második koordinátát választhatunk.

Hány él lesz a gráfban? Egy ponton pontosan q db. egyenes megy át, és egy egyenesen pontosan q db. pont van. Vajon hány olyan pont van, amelyik rajta van a saját egyenesén, vagyis aki saját magával szomszédos? Ezek sajnos hurokélet alkotnak, így le kell vonnunk az összes élből. Rögzítsük az (a,b) pont első koordinátáját, ezt q-féleképpen tehetjük meg. Ha q páratlan, akkor minden a-hoz pontosan egy olyan b létezik, melyre a pont rajta van a saját egyenesén (autokonjugált lesz): $b+b=aa$, azaz $b=\frac{a^2}{2}$. Ha q páros (azaz a karakterisztika kettő), akkor pedig a $0=b+b=a^2$ esetén lesz autokonjugált. Ekkor q féle második koordináta lehet. Tehát mindkét esetben q db. hurokélet kell levonnunk.

Tehát az éleket összeszámolva $n=q^2$ csúcsunk van, minden csúcs foka q, de le kell vonnunk a q db. hurokélet:

$$|E(G)|=\frac{q^2\cdot q}{2}-q=\frac{q^3}{2}-q=\frac{n\cdot\sqrt{n}}{2}-\sqrt{n}.$$

Ez a gráf igazán megmutatja, hogy a becslés éles, mert konstans szorzóban sem tér el, míg Klein Eszter eredeti modelljében az élszám $\frac{1}{\sqrt{2}}$-es szorzóval tért el a becsléstől.

3. fejezet

Zarankiewicz-probléma

Láttuk az Erdős–Stone–Simonovits-tételnél, hogy a nagyságrend már csak akkor kérdéses, ha a kizárt részgráf páros. A C_4-mentes gráfokat már elkezdtük vizsgálni. Egy újabb kérdés, hogy hogyan alakul az élszám akkor, ha eleve egy páros gráfból zárunk ki egy páros gráfot (például C_4-et).

A C_4-mentes esettel foglalkozott Zankiewicz [7]. A problémát többféleképpen is meg lehet fogalmazni. Például táblázatos formában: adott egy $n \times m$-es négyzetrács, amelyben a rácspontok közül bizonyosakat kijelölünk. A kikötés az, hogy bármely négy jelölést kiválasztva, azok nem alkothatják egy a tengelyekkel párhuzamos oldalú téglalap négy sarkát (ezt nevezzük tiltott négyesnek). A megfogalmazás könnyebb megértéséhez lapozzunk a 3.1. ábrán lévő példához. A kérdés az, hogy maximálisan hány pontot jelölhetünk ki a feltételnek megfelelően.

Egy másik megfogalmazás: legyen egy $n \times m$-es mátrix minden eleme 0, vagy 1. Legfeljebb hány 1-est tartalmazhat a mátrix, ha bármely két sort és bármely két oszlopot kiválasztva nem állhat ezek keresztezési mezőiben mindenütt 1-es.

Könnyen átfogalmazható a kérdés gráfokra: ha egy $n + m$ csúcsú páros gráfból kizárjuk a C_4-et, ami egyébként megegyezik a $2+2$ csúcsú teljes páros gráffal; $K_{2,2}$-vel, akkor maximum hány éle lehet a megmaradó gráfnak.

3.1. A Reiman-becslés

3.1.1. Tétel (Reiman-tétel). *Ha az $n+m$ csúcsú G egyszerű, páros gráf nem tartalmaz részgráfként négy hosszú kört, akkor éleinek száma:*

$$|E(G)| \leq \frac{1}{2} \cdot \left(n + \sqrt{n^2 + 4nm(m-1)}\right).$$

Bizonyítás. Nevezzük el az n csúcsból álló osztályt A-val, az m csúcsból állót B-vel. Számoljuk meg azokat a cseresznyéket, amelyek hegye az A osztályban van. Hegyüknél számolva ennyi ilyen cseresznye van:

$$\sum_{x \in A} \frac{d(x) \cdot (d(x)-1)}{2}.$$

Ezeknek a cseresznyéknek a végei a B osztályban találhatóak. Tehát m csúcsból kell kiválasztani a két véget. Így maximum $\binom{m}{2}$ ilyen cseresznye van. Rendezés után azt az egyenlőtlenséget kapjuk, hogy:

$$\sum_{x \in A} (d(x))^2 - \sum_{x \in A} d(x) \leq m \cdot (m-1).$$

Tudjuk, hogy $\sum_{x \in A} d(x) = \sum_{y \in B} d(y) = e$. A korábbi cseresznyés bizonyítással analóg módon, itt is megbecsülhetjük a négyzetes tagot a számtani-négyzetes közép közti egyenlőtlenség segítségével:

$$d(x_1)^2 + ... + d(x_n)^2 \geqslant n \cdot \left(\frac{d(x_1) + ... + d(x_n)}{n}\right)^2,$$

$$\sum_{x \in A} d(x)^2 \geqslant \frac{e^2}{n}.$$

Ezt az egyenlőtlenségbe visszaírva a következőt kapjuk:

$$\frac{e^2}{n} - e \leq m \cdot (m-1).$$

Ez e-ben másodfokú, ennek pozitív gyökét kiszámolva az kapjuk, hogy:

$$|E(G)| \leq \frac{1}{2} \cdot \left(n + \sqrt{n^2 + 4nm(m-1)}\right).$$

$\square$

Az alábbiakban a $\mathrm{Re}(m,n)$ jelölje az $m+n$ csúcsú páros gráfra adott Reiman-becslés értékét, ahol $m \leq n$.

Tudjuk, hogy a Klein Eszter féle modell egy páros gráfról szól, ahol az egyik osztály q^2+q, a másik q^2 csúccsal rendelkezik. Az általános C_4-mentes gráfokról szóló becslést konstans szorzó eltéréssel tudta közelíteni. Nézzük, hogy a páros gráfokról szóló C_4-mentes becslést mennyire élesen közelíti meg a modell.
$m = q^2$, és $n = q^2 + q$ esetben:

$$\mathrm{Re}(q^2, q^2+q) = \frac{1}{2}\left(q^2 + q + \sqrt{(q^2+q)^2 + 4(q^2+q)q^2(q^2-1)}\right).$$

A gyökjel alatti műveletek elvégzése után kapjuk:

$$\mathrm{Re}(q^2, q^2+q) = \frac{1}{2}\left(q^2 + q + \sqrt{q^2 \cdot (4q^4 + 4q^3 - 3q^2 - 2q + 1)}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(q^2 + q + q \cdot \sqrt{(2q^2+q-1)^2}\right)$$

Mivel $2q^2+q-1$ mindig pozitív (kivéve az érdektelen $q=0$ eset), így a négyzetre emelés és gyökvonás után az abszolút érték elhagyható:

$$\mathrm{Re}(q^2, q^2+q) = \frac{1}{2} \cdot \left(q^2 + q + q \cdot (2q^2+q-1)^2\right).$$

Rendezés után azt kapjuk, hogy:

$$\mathrm{Re}(q^2, q^2+q) = q^2 \cdot (q+1).$$

A Klein Eszter-féle modellnek pont ennyi éle volt, tehát eléri a felső becslést a páros gráfok esetén.

3.2. A Reiman-becslés javításai

A következőkben vegyük alapul az [1] cikket. Ebben a 22. oldalon található táblázat néhány esetét elemezzük az alábbiakban. A táblázat, ami a következő oldalon megtalálható, jónéhány m, n esetre megadja a maximális méretű konstrukciók Guy által közölt élszámát, ezt az élszámot az alábbiakban $Z(m,n)$-nel fogom jelölni. Továbbá a táblázat megadja a cikk általános módszereiből kapott felső és alsó becslést is. (A táblázat fejlécében a felső becslést f.b., az alsó becslést pedig a.b. jelöli.)

Vizsgáljunk meg néhány esetet alaposan. Hogyan jöhet ki a maximális élszámú konstrukció?

1. Mutatunk olyan példát, amikor a Reiman-becslés azonnal megadja a pontos értéket.

2. Látunk példát arra is, amikor Klein Eszter modelljét vesszük alapul.

3. Vannak olyan esetek is, amikor például a Reiman-becslés nem elég pontos, és ennek megjavításával jön ki az élszám.

   Miért nem mindig pontos a Reiman-becslés? Egyik oka az lehet, hogy a becslés nem veszi figyelembe, hogy a fokszámok egész számok, pedig amikor a becslésben a számtani-négyzetes közép közti egyenlőtlenséget használtuk, kihasználhattuk volna ezt a tényt.

4. Előfordul olyan eset is, amikor ezek az észrevételek sem segítenek, ilyenkor például további fokszámvizsgálattal léphetünk előrébb.

Nézzünk az imént felsorolt esetekre egy-egy példát!

1. Reiman-becslés segítségével

Az $n = 12$, $m = 10$ esetre a Reiman-féle becslés ezt adja:

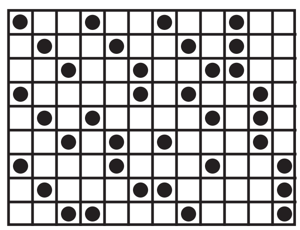
$$\mathrm{Re} = \frac{1}{2} \cdot \left(12 + \sqrt{12^2 + 4 \cdot 12 \cdot 10 \cdot 9}\right) = 39,4 \approx 39.$$

A felső becslésnél az alsó egészrészt kell venni, így pont a legnagyobb konstrukció élszámát adta meg. Látható, hogy ebben az esetben a becslés éles.

m	n	a.b.	$Z(m,n)$	f.b.	m	n	a.b.	$Z(m,n)$	f.b.
8	8	24	24	24	13	13	52	52	52
8	9	26	26	26	13	14	53	53	53
8	10	28	28	28	13	15	54	55	55
					13	16	57	57	58
9	9	29	29	29	13	17	59	59	59
9	10	31	31	31	13	18	61	61	61
9	11	33	33	33	13	19	64	64	64
					13	20	66	66	66
10	10	34	34	34	13	21	67	67	68
10	11	36	36	36	13	22	69	69	70
10	12	39	39	39	13	23	71	71	72
10	13	40	40	40	13	24	73	73	73
10	14	42	42	43	13	25	75	75	75
10	15	44	44	44					
10	16	46	46	46	14	14	56	56	56
10	17	47	47	47	14	15	58	58	58
					14	16	60	60	61
11	11	39	39	39	14	17	63	63	63
11	12	42	42	42	14	18	65	65	65
11	13	44	44	44	14	19	68	68	68
11	14	45	45	46	14	20	70	70	70
11	15	47	47	48	14	21	72	72	72
11	16	50	50	50	14	22	73	73	74
11	17	51	51	51	14	23	75	75	76
11	18	53	53	53	14	24	78	78	78
11	19	55	55	55	14	25	80	80	80
					14	26	81	81	82
12	12	45	45	45	14	27	83	83	84
12	13	48	48	48	14	28	84	85	86
12	14	49	49	49					
12	15	51	51	52	15	15	60	60	62
12	16	53	53	54	15	16	64	64	64
12	17	55	55	55	15	17	67	67	67
12	18	57	57	57	15	18	69	69	69
12	19	60	60	60	15	19	72	72	72
12	20	61	61	62	15	20	75	75	75
12	21	63	63	64	15	21	77	77	77
12	22	64	65	65					
12	23	66	66	67	16	20	80	80	80
12	24	68	68	68					

2. Klein Eszter-modellre egy példa

Az $n = 12$, $m = 9$ eset pont a Klein Eszter modellre ad példát. Ez a $q = 3$ eset, hiszen az egyik osztályban 3^2, a másik osztályban $3^2 + 3$ csúcs van. Korábban kiszámoltuk, hogy $e = q^2 \cdot (q + 1)$, vagyis a képletbe behelyettesítve $e = 9 \cdot 4 = 36$ kapjuk. Ez pont megegyezik a $Z(9, 12)$-vel, ami a legjobb konstrukció mérete. (Ekkor egy csúcs foka a 12 elemű osztályban $36 \div 12 = 3$, a 9 elemű osztályban pedig $36 \div 9 = 4$.) Mit is jelent ez a modellre visszagondolva? A pont osztályban 9 csúcs van, az egyenes osztályban 12. Zarankiewicz táblázatban ez azt jelentené, hogy 9×12-es táblázatot rajzolnánk, ahol minden sorban 4 jelölés, és minden oszlopban 3 jelölés van. A 3.1. ábrán látunk egy példát.



3.1. ábra. Klein Eszter modell

3. Nem elég a Reiman-becslés

Az $n = 20$, $m = 14$ esetben a legnagyobb konstrukció élszáma 70. Meg lehet mutatni, hogy ennél több éle nem is lehet egy ilyen gráfnak. A Reiman-becslésbe beírva az adatokat sajnos azt kapjuk, hogy $|E(G)| \leq 71,1$. Valahogy meg kell javítanunk a becslést. Tegyük fel, hogy van 71 élű ilyen gráf. Reimannál az egyik lépésben a számtani-négyzetes közép közti egyenlőtlenséget használtuk:

$$\sum_{x \in A} (d(x))^2 - \sum_{x \in A} d(x) \leq m \cdot (m - 1).$$

Azt mondtuk, hogy:

$$\sum_{x \in A} (d(x))^2 \geq \frac{\left(\sum_{x \in A} d(x)\right)^2}{n} = \frac{71^2}{20} = 252.$$

Ez elég pontatlan becslést ad, tudunk rajta javítani. A számtani-négyzetes becslést azért lehet javítani, mert a fokszámok egész számok. Nézzük meg, hogyan lesz minimális $\sum_{x \in A}(d(x))^2$. Van 71 él, amit 20 csúcs között úgy kell felosztani, hogy a fokszámok négyzetösszege minimális legyen. Ezt úgy érhetjük el, hogy a fokszámok között a lehető legkisebb legyen az eltérés. Miért így lesz minimális? Gondoljuk meg, hogy ha x kettővel kisebb y-nál, akkor az ő négyzetösszegüknél találunk kisebbet, méghozzá úgy, hogy a két fokszámot egymáshoz „közelebb toljuk”: $x^2 + y^2 \geq (x+1)^2 + (y-1)^2 = x^2 + y^2 + 2 + 2(x-y)$. Ez legalább 2-vel kisebb lesz. Tehát a fokszámokat egymáshoz a lehető legközelebb kell megválasztanunk. Mivel $71 \div 20 \approx 3,5$, a csúcsok harmad és negyedfokúak legyenek. Az egyetlen jó felosztás, ha 9 db. harmadfokú és 11 db. negyedfokú csúcsunk van. Ekkor négyzetösszegük: $9 \cdot 3^2 + 11 \cdot 4^2 = 257$. Ezzel jelentősen javult a becslés. Helyettesítsünk vissza a képletbe:

$$257 - 71 \leq 14 \cdot 13$$

vagyis $186 \leq 182$. Ellentmondásra jutottunk, tehát a 71 él nem érhető el ezen feltételek mellett.

4. További fokszámvizsgálatok segítségével

Az $n = 15$, $m = 11$ esetre a táblázat 47-et ír. Be akarjuk látni, hogy legfeljebb 47 éle lehet egy 15+11 csúcsú C_4-mentes páros gráfnak. Nevezzük A-nak a 11 csúcsú osztályt, és B-nek a 15 csúcsút. Indirekt tegyük fel, hogy van olyan konstrukció, melynek 48 éle van.

Próbálkozzunk az előző módszerek bevetésével. A Reiman-becslés ezt adja:

$$\mathrm{Re} = \frac{1}{2} \cdot \left(15 + \sqrt{15^2 + 4 \cdot 15 \cdot 11 \cdot 10}\right) = 48,8 \approx 48.$$

Nézzük, hogy egész fokokra élesítve mit mond. A fokszámok a következőképpen oszlanak meg: 12 db. harmad és 3 db. negyedfokú csúcs van, így a négyzetösszeg 156. Ezt visszaírva a képletbe:

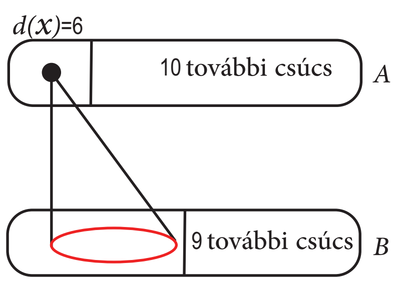
$$156 - 48 \leq 11 \cdot 10,$$

nem kaptunk ellentmondást. Ezek a módszerek ebben az esetben nem segítettek. További fokszámvizsgálatra lesz szükség.

Egy csúcs elhagyása esetén kétféle változat lehetséges: $n = 15, m = 10$, ekkor $e \leq 44$ a táblázat alapján, vagy $n = 14, m = 11$, ekkor $e \leq 45$. Ezek után lássuk be, hogy A-ban csak negyed és ötödfokú csúcsok vannak, míg B-ben csak harmad és negyedfokú csúcsok vannak. Indirekt tegyük fel, hogy van egy harmadfokú csúcs az A osztályban. Ha ezt a csúcsot elhagynám, akkor $48 - 3 = 45$ éle maradna a gráfnak, de ez nem lehetséges, mert egy A osztálybeli csúcs elhagyása esetén maximum 44 él maradhat. Tehát minden A-beli csúcs foka legalább 4.

Nézzük, hogy B-ben lehet-e másodfokú csúcs. Ha lenne, akkor azt elhagyva $48 - 2 = 46$ él maradna a gráfban, de a táblázat szerint egy B-beli csúcs elhagyása után maximum 45 él maradhat. Tehát minden B-beli csúcs foka legalább 3.

Az A osztályban 6-od fokú és ennél nagyobb fokú csúcs pedig nincs, mert ha lenne nem tudnánk elég élet behúzni. Számoljuk meg, hogy mennyi éle lehetne így a gráfnak. Nevezzük az A-beli hatodfokú csúcsot x-nek. Ekkor 6 él megy x-ből. Az x csúcs szomszédai és az A-ban maradt 10 csúcs között maximum 10 él futhat (mert a 10 csúcs mindegyikéből maximum egy a C_4-mentesség miatt). Ezeken kívül már csak az A-beli 10 csúcs és a B-beli 9 csúcs közti éleket nem számoltuk: ez maximum annyi, mint $Z(10, 9)$-nek, vagyis 31. Tehát az összes élszám $|E(G)| \leq 6 + 10 + 31 = 47$. Ez ellentmondásra vezet, hiszen azt tettük fel, hogy 48 élünk van.



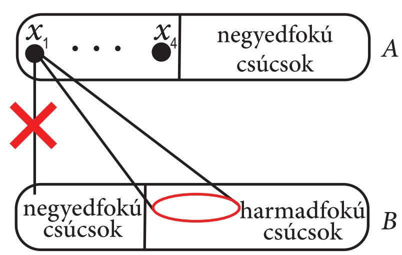
3.2. ábra.

Könnyen meggondolható az eset 6-nál nagyobb fokú csúcsokra. Ha lenne az A osztályban hetedfokú (vagy annál nagyobb fokú) csúcs, akkor ezen csúcs élszáma nőne eggyel, a következő összeadandó tag maradna 10, de a $Z(10, m - 1)$ a $Z(10, m)$-nél mindig legalább eggyel kisebb.

Meg kell vizsgálnunk azt is, hogy a B osztályban nem lehet ötödfokú és annál nagyobb fokú csúcs. Ezt az előző gondolatmenettel analóg módon tesszük. Tegyük fel, hogy van egy ötödfokú B-ben. Számoljuk össze az éleket: 5 él az ötödfokú csúcsból; az ő szomszédai és a B-ben maradt 14 további csúcs között maximum 14 él mehet (C_4-mentesség miatt); az A-ban lévő 6 csúcs és a B-beli 14 között pedig maximum annyi él lehet, mint $\mathrm{Re}(6,14) = 28$. Tehát $|E(G)| \leq 5 + 14 + 28 = 47$, de a feltevés szerint 48 éle van a gráfnak.

Ezzel beláttuk, hogy A-ban csak negyed és ötödfokú csúcsok, B-ben pedig csak harmad és negyedfokú csúcsok vannak. A fokszámok csak egyféleképpen oszthatók fel: az A osztályban 7 db. negyedfokú és 4 db. ötödfokú csúcs van, B-ben pedig 12 db. harmadfokú és 3 db. negyedfokú csúcs van.

Vizsgáljuk meg, hogy egy A-beli ötödfokú csúcsnak lehet-e negyedfokú szomszédja. Jelöljük A-ban az ötödfokú csúcsokat $x_1 \ldots x_4$-gyel. Ha például x_1-nek lenne negyedfokú szomszédja, akkor a negyedfokú csúcsnak x_1-en kívül még 3 szomszédja van, x_1 további szomszédainak (melyek legalább harmadfokúak) még $2-2$ egymástól különböző szomszédja lenne x_1-en kívül. (A szomszédoknak azért kell egymástól különbözőeknek lennie, mert ezen csúcsoknak már megvan az egyetlen lehetséges közös szomszédja: x_1.) Így az A osztályban összesen $1 + 3 + 4 \cdot 2 = 12$ csúcs lenne, de csak 11 van. Tehát minden ötödfokú csúcsnak csak harmadfokú szomszédai vannak. Ez esetben hány harmadfokú csúcsra van szükség B-ben?



3.3. ábra.

Nézzük meg az A osztályban lévő további ötödfokú csúcsokat. Bármely két csúcsnak maximum egy közös szomszédja lehet. Tehát ha vesszük a következő ötödfokút, x_2-t, annak 4 db. x_1 szomszédaitól különböző harmadfokú csúcsot kell lefoglalni a B-osztályból, mert csak egy közös szomszédja lehet x_1-el. A következő ötödfokúnak, x_3-nak, x_1 és x_2 szomszédaitól különböző 3 db. harmadfokú kell, x_4-nek már csak 2 az előzőektől különböző harmadfokú kell. Számoljuk össze, hogy hány harmadfokú csúcsra van szükség a B osztályban: $5 + 4 + 3 + 2 = 14$, de csak 12 db. van. Ellentmondásra jutottunk. Tehát nem lehet a gráf 48 élű.

A 4. módszer általános megfogalmazására az alábbi tétel szolgál.

3.2.1. Tétel. *Legyenek e, n, m pozitív egészek, és $n, m \geq 2$. Legyen $d = e - Z(n-1, m)$, és $\delta = e - Z(n, m-1)$, továbbá legyen $x = n(d+1) - e$, és $y = m(\delta + 1) - e$. Tegyük fel, hogy teljesülnek az alábbi feltételek:*

1. $e > d + 2 + (n-1) + Z(n-1, m-d-2)$,
2. $e > \delta + 2 + (m-1) + Z(n-\delta-2, m-1)$,
3. $d(\delta - 1) + \delta \geq n$,
4. $k \cdot d - \binom{k-1}{2} \geq y$, *ahol* $k = min\{x, d+2\}$.

Ekkor nincs olyan C_4-mentes páros gráf $n + m$ csúcson, melynek élszáma e.

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy mind a négy feltétel teljesül, és G mégis C_4-mentes. Ekkor persze $e \leq Z(n, m)$, a C_4-mentesség miatt. Jelöljük A-val az n csúcsú, B-vel az m csúcsú osztályt.

Mennyi lehet az A osztályban a minimális fokszám? Ha törlünk egy csúcsot az A osztályból, akkor a megmaradt gráfban maximum $Z(n-1, m)$ él lehet. Tehát ha az összes élből kivonjuk a megmaradt gráf maximális élszámát: $e - Z(n-1, m)$, akkor megkapjuk, hogy minimum mennyi volt a törölt csúcs foka. A tételben pont így definiáltuk d-t. Tehát A-ban a minimális fokszám d. Ehhez analóg módon az is kijön, hogy B-ben a minimális fokszám pedig pont a tételben definiált δ-val egyenlő.

Az 1. feltétel miatt a maximális fokszám A-ban $d + 1$, mert ha lenne $d + 2$ fokú csúcs, akkor az éleket összeszámolva a gráfban azt kapnánk, hogy $e \leq d + 2 + (n-1) + Z(n-1, m-d-2)$. Ez ellentmond a feltételnek, tehát A-ban a maximális fokszám $d + 1$. A 2. feltételből ugyanilyen módon pedig az jön ki, hogy B-ben a maximális fokszám $\delta + 1$.

Most már tudjuk, hogy az A osztályban csak d és $d + 1$ fokú csúcsok vannak. Vajon melyikből mennyi? Legyen $x_0 d + (n - x_0)(d + 1) = e$. Ezt rendezve: $x_0 = n(d + 1) - e$, így x_0 pont a tételben meghatározott x-szel egyenlő. Tehát A-ban x db. d fokú, és $n - x$ db. $d + 1$ fokú csúcs van. Ehhez hasonlóan kijön, hogy B-ben y db. δ fokú, és $m - y$ db. $\delta + 1$ fokú csúcs van.

A 3. feltétel miatt egy A-beli $d + 1$ fokú csúcsnak csak δ fokú szomszédja lehet, mert ha lenne egy v csúcs, aminek van egy $\delta + 1$ fokú szomszédja, akkor azt mondhatnánk, hogy $d(\delta - 1) + \delta + 1 \leq n$. (Az első összeadandó tag a v csúcs δ fokú csúcsainak v-től különböző szomszédait számolja össze;

a második tag a v csúcs $\delta + 1$ fokú szomszédjának v-n kívüli szomszédait számolja meg; a $+1$ pedig a v csúcs.) A 3. feltétel ennek ellentmond, tehát az A osztályban lévő $d+1$ fokú csúcsoknak csak δ fokú szomszédai lehetnek.

Nézzük meg, hogy hány δ fokú csúcs kell ahhoz, hogy a 3. feltétel teljesülhessen. Nevezzük a $d+1$ fokú csúcsokat $v_1, v_2, \ldots v_{n-x}$-nek. Ha veszünk k darab $d+1$ fokú csúcsot A-ban , ahol $k = \min\{x, d+2\}$, akkor v_1-nek $d+1$ szomszéd csúcs kell, v_2-nek lehet egy közös szomszédja v_1-gyel, így neki még d darab az előzőektől különböző δ fokú csúcs kell, és így tovább. Tehát ahhoz, hogy minden $d+1$ fokú csúcsnak jusson elég δ fokú, az kell, hogy $(d+1) + d + (d-1) + \ldots + d + 1 - (k-1) \leq y$ teljesüljön. Ezt átalakítva azt kapjuk, hogy $k \cdot d - \binom{k-1}{2} < y$. Ez ellentmond a 4. feltételnek. Az jött ki, hogy nem tud mind a négy feltétel teljesülni, így a vizsgált gráf nem lehetett C_4-mentes. $\square$

Nézzünk egy példát a tétel használatára. Legyen $n = 17$, $m = 16$, $e = 71$, mert azt akarjuk belátni, hogy egy c_4-mentes $17 + 16$ csúcsú páros gráfnak nem lehet 71 éle. Számoljunk ki mindent, amire a tételben szükség lesz:

$$\begin{aligned} d &= 71 - Z(16,16) = 71 - 67 = 4, \\ \delta &= 71 - Z(17,15) = 71 - 67 = 4, \\ x &= 17 \cdot 5 - 71 = 14, \\ y &= 16 \cdot 5 - 71 = 9. \end{aligned}$$

Lássuk, teljesülnek-e a feltételek.

1. $71 > 4 + 2 + 16 + Z(16,10) = 68$, ✓

2. $71 > 4 + 2 + 15 + Z(16,10) = 67$, ✓

3. $4 \cdot 3 + 4 \geq 17$, ✓

4. $k = min\{14, 6\} = 6$, $6 \cdot 4 - \binom{5}{2} \geq 14$. ✓

Tehát a tétel azt mondja, hogy nincs olyan $17 + 16$ csúcsú páros, C_4-mentes gráf, aminek 71 éle van.

3.3. Zarankiewicz játék

A Zarankiewicz-játék ötlete az ELTE 2010-es Kutatódiák Program keretében merült föl [2]. A táblázatos megfogalmazásból már csak egy lépés táblás játékot készíteni. A játék egyszerű, könnyen megérthető, hasonlít a közismert amőbához. A játék menete a következő: jelöljünk ki egy $n \times m$-es négyzetrácsot. A két játékos felváltva korongot tesz egy-egy négyzetre. A játékot többféleképpen is játszhatjuk egyrészt aszerint, hogy mi a nyerés feltétele, másrészt, hogy ugyanolyan, vagy különböző színű korongokkal játszunk. Az alábbiakban nevezzük téglalapnak négy korong együttesét, ha azok egy rácsvonalakkal párhuzamos oldalú téglalap négy csúcsát jelölik.

- Egy szín esetén:
  1. az a játékos nyer, aki először ér el téglalapot,
  2. az a játékos veszít, aki az első téglalapot kényszerül kirakni.
- Két szín esetén:
  3. az a játékos nyer, aki először tesz ki a saját színéből téglalapot,
  4. az a játékos veszít, aki először tesz ki a saját színéből téglalapot.

Jelöljük J_1-gyel a kezdő, J_2-vel a második játékost. Nevezzünk a következőkben egy sort szabadnak, ha abban a sorban még nincs korong, egy oszlopot pedig akkor, ha abban az oszlopban nincs még korong. Egy mezőt akkor hívunk szabadnak, ha az ő sora és oszlopa is szabad. A foglalt jelentése: nem szabad.

Az alább ismertetendő nyerő stratégia [2]-ből származik, azonban ott a stratégia helyessége nincs bizonyítva; mi részletesen tárgyaljuk.

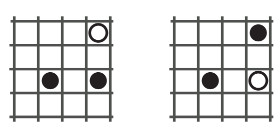
3.3.1. Tétel. *Az egyszínű játék első típusában, ha n és m páratlan, akkor az első játékosnak van nyerő stratégiája, különben a másodiknak.*

Bizonyítás. Ha n vagy m páros, akkor J_2-nek van nyerő stratégiája. Ha például páros sok sor van, akkor amíg J_1 szabad sorba tesz, addig J_2 tegyen ugyanabba az oszlopba, de szabad sorba. (Ha J_1 nem szabad sorba tesz, akkor J_2 egyből nyerni tud.) Így mindig két szabad sor fogy el egy körben, a sorok pedig páros sokan vannak. Ha elfogytak a szabad sorok, akkor J_1 jön, és ő csak úgy tud rakni, hogy a következő lépésben J_2 nyer.

Nézzük most azt az esetet, amikor n és m is páratlan. Ekkor J_1-nek van nyerő stratégiája. A nyerő stratégia a következő: ha valamely lépésben J_1 nyerni tud, akkor lépjen annak megfelelően, különben kövesse a következőket: először J_1 nyilván szabad mezőre teszi a korongot. Ez után, ha J_2 szabad mezőre tesz, tegyen J_1 is szabad mezőre. Ha J_2 foglalt sorba tesz, akkor J_1 tegyen ugyanabba a sorba, de olyan mezőre, melynek oszlopa szabad. Ezt betartva J_1 fog először nyerő helyzetbe kerülni, mint azt a következőkben belátjuk.

Kérdés, hogy miért jó ez a stratégia. J_1 célja, hogy lépése után mindig páros sok oszlop és páros sok sor legyen szabad, így ő tehet utoljára szabad sorba, szabad oszlopba vagy szabad mezőre. Ha elfogytak a szabad sorok és szabad oszlopok, akkor J_2 csak úgy tud tenni, hogy azzal egy téglalap harmadik csúcsát teszi ki korongjával, ezáltal J_1 nyer. Hogyan tudja J_1 a szabad sorok és oszlopok számát párosan tartani? Az biztos, hogy J_1 először szabad mezőre tesz, ezzel egy szabad sor és egy szabad oszlop válik foglalttá, így páros lesz a szabad oszlopok és sorok száma is. Ha J_2 szabad mezőre tesz, akkor páratlan sok sor és oszlop lesz szabad, ekkor J_1 is szabad mezőre tesz, így újra páros sok oszlop és sor marad szabadon. Ha viszont J_2 egy olyan sorba tesz, ahol már van korong, akkor azzal a szabad sorok száma nem változik (páros marad), míg a szabad oszlopok száma páratlan lesz. Azért kell J_1-nek ugyanabba a sorba tennie, hogy a szabad sorok paritásán ne változtasson, és azért kell szabad oszlopba tennie, hogy a szabad oszlopok száma újra páros legyen. Így tudja J_1 lépésével párosan tartani a szabad oszlopok és sorok számát, ez vezet a nyeréséhez.

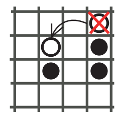
Miért nem kerül J_1 soha vesztő pozícióba? Vesztő pozícióba az kerül, aki egy tiltott négyszög harmadik csúcsát kényszerül lerakni. Két esetet különböztetünk meg, ahogy ezt a 3.4. ábra is mutatja. A jobb oldali ábrán



3.4. ábra. Az üres korong lett legutoljára letéve mindkét esetben.

látható esetben J_1 a stratégiájából adódóan nem tesz ilyet, csak akkor ha ez már a téglalap utolsó korongja lenne, és azzal nyer. Tehát ilyet csak J_2 tesz, így J_1 nyer.

A bal oldali ábrán látható esetben mikor tesz J_1 ilyet? A stratégia szerint akkor, ha J_2 ugyanabba az oszlopba, mint foglalt oszlopba tett. Ez viszont



3.5. ábra.

azt jelenti, hogy J_1 lépése előtt ebben az oszlopban már két korong volt, így J_1 nyilván nem a stratégiának megfelelően tesz, hanem nyerni tud, ahogy az ábra mutatja. J_1 tehát soha nem kerül vesztő pozícióba. $\square$

Mostantól a kétszínű esetet vizsgáljuk. Az alábbi változat is szerepel [2]-ben, de a játék elemzésére egyáltalán nem került sor. Nevezzünk egy lépést kényszerítő lépésnek, ha azzal egy téglalap harmadik csúcsát tettük ki, (így a másik játékos arra kényszerül, hogy a negyedik csúcsát ő tegye ki). Nevezzünk egy kényszerítő lépést jónak, ha azzal a kényszerített játékos nem kerül nyerő helyzetbe (nem egy saját színű téglalap harmadik vagy negyedik csúcsát tette le).

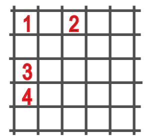
3.3.2. Tétel. *A harmadik játéktípusban J_1-nek van nyerő stratégiája 4×4-es és annál nagyobb méretű táblák esetén.*

3.3.3. Megjegyzés. *Egy $n \times m$-es tábla esetén valaki biztosan nyer, ha teljesül, hogy $Z(n,m)\cdot 2+1 \leq n\cdot m$. (Ha eddig tartana egy mérkőzés, akkor az első játékos már csak olyan helyre tud tenni, hogy az C_4-et alkosson.)*

Az ilyen típusú játékoknál a második játékosnak sosincs nyerő stratégiája, mert ha lenne, akkor azt az első játékos el tudná „lopni”: a második lépésétől kezdve azt imitálja, hogy a másik játékos az előző lépésével kezdte meg a játékot, és innentől a második játékos számára nyerő stratégiával játszik. Mivel a játékosok különböző színű korongokat tesznek, így az elsőként letett korong a második játékost nem segíti, az első játékost pedig nem hátráltatja.

Bizonyítás. Az ábrákon a korongokat az elhelyezésnek megfelelő sorszámmal, és a játékosnak megfelelő színnel jelöljük. Először vizsgáljuk az 5×5-ös esetet. (Tegyük fel, hogy ha J_1 jó kényszer lépést tesz, akkor J_2 a kényszerített helyre fog tenni.)

Legyen J_1 korongjának színe piros, J_2 korongja pedig kék. J_1 célja, hogy az első négy lépésben egy L alakot tegyen ki, például úgy, ahogy az a képen látható.

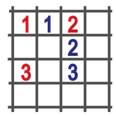


3.6. ábra. Két piros korong egy sorban, és az egyik korong oszlopában még két korong.

Egy jó kezdő lépés lehet például az ábrán látható első két lépés. J_1 harmadik lépése legyen jó kényszerítő lépés: J_1 tegyen egy még üres sorba (üres sor még biztos van, mert maximum 3 sor lehet foglalt), az 1-es vagy a 2-es piros koronggal egy oszlopba. A 4. lépésben J_1 tegyen ugyanabba az oszlopba, amibe az előző piros korongját helyezte, egy üres sorba (még mindig volt üres sor, mert az előző lépésekben maximum 4 sor vált foglalttá). Ezzel létrejött a J_1 nyerő stratégiájának kulcsát jelentő L alak. J_2 4. lépése is egy kényszerlépés. Hová tegye J_1 az 5. korongot? Ekkor van legalább egy üres oszlop, (mert J_2 az első két lépésében maximum két oszlopot tett foglalttá, J_1 korongjai ezeken kívül maximum két oszlopot foglalnak el, J_2 3. és 4. lépése pedig J_1 valamely oszlopában van); tegyen J_1 ebbe az üres oszlopba egy olyan sorba, amiben már van piros színű korong. Ezzel létrehozott egyszerre két nyerő helyzetet, J_2 persze csak az egyiket tudja kivédeni, így J_1 nyer.

Próbáljuk meg a stratégiát a 4×4-es táblára is alkalmazni. A stratégia szemléletesen tehát a következő: két korongot tesz J_1 egy sorba, utána az egyik korong alá szabad sorokba teszi a következő korongokat, ezzel folyamatosan kényszeríti J_2-t. Így készül az L alak. Nevezzünk egy oszlopot L-üres sorúnak, ha az oszlopban van három olyan üres sor, amelyekben a kezdő három lépés által meghatározott (később esetleg kiegészített) L-alak korongjai vannak. Továbbá ennek elforgatottját nevezzük L-üres oszlopú sornak. A stratégiát addig kell csinálni, amíg létre nem jön egy L-üres sorú oszlop. Ezzel nyer J_1. A 4×4-es táblánál három esetet különböztetünk meg a stratégia elkezdésének szempontjából.

1. eset: J_2 a J_1 első korongjával azonos sorba vagy oszlopba tesz. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy pontosan mellé tett. (A sorok és oszlopok felcserélhetők, illetve a tábla tükrözhető az átlóra; ez a nyerést jelentő téglalap kirakását nem befolyásolja.) J_1 a második lépésben tegyen ugyanabba a sorba, mint J_2. Ezután J_2 bárhová tesz, J_1-nek lesz lehetősége szabad sorba tenni, valamely saját korongjával azonos oszlopba, ezzel saját színéből egy téglalap harmadik csúcsát tette ki, ez egy jó kényszerítő lépés. Tegyen J_1 ugyanabba az oszlopba, mint ahová az előző piros korongját tette,



3.7. ábra. A kék játékos első lépésében a piros játékossal azonos sorba tett.

méghozzá szabad sorba. (Ekkor szabad sor van még, mert maximum három foglalt.) Ezzel J_2-t megint kényszeríti. Kész az L alak. Ha nincs L-üres sorú oszlop, akkor folytassa a stratégiát még egy lépésben. (Ez akkor fordulhat elő, ha J_2 a második korongját is ugyanabba a sorba tette, mint az elsőt, ekkor viszont van még egy szabad sor, így J_1 tud még egy korongot tenni az előző piros korongja alá.) Ezután J_1 tegyen az L-üres sorú oszlopba, egy L-beli korong sorába. Ezen helyek egyikére téve egyszerre két leendő téglalap harmadik csúcsát tette le. J_2 csak az egyik téglalapot tudja kivédeni, így J_1 nyer.

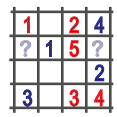
2. eset: A második esetben azt vizsgáljuk, amikor J_2 szabad mezőre tesz először. Ekkor J_1 a második korongját az első korongjával azonos sorba, szabad oszlopba tegye. Három esetet különböztetünk meg: J_2 az első két korongját azonos sorba, azonos oszlopba, vagy két szabad mezőre tette. Ha azonos sorba, akkor az L alakunk függőlegesen lesz hosszabb, ha azonos oszlopba tette, akkor pedig vízszintes irányba fog állni a hosszabb szár.

Ha J_2 az első két korongját azonos sorba tette, akkor még van két üres sor, így azon két sorban J_1 két jó kényszerítő lépést tud tenni, és ezzel kialakul egy L-üres sorú oszlop.

Ha J_2 az első két lépésben azonos oszlopba tett, akkor pedig legalább egy üres sor maradt. Így J_1 3. lépésében tegyen ebbe az üres sorba olyan oszlopba, amiben csak piros van. Ez egy jó kényszerítő lépés. Negyedik lépésben tegyen abba a sorba, amiben már két piros korong van, szabad oszlopba (ilyen van, mert maximum három oszlop foglalt). Létrejött az L-alak, csak most elfektetve. Így az előző esethez analóg módon, most L-üres oszlopú sor jött létre, J_1 ezzel nyer.

3. eset: A harmadik esetben sajnos nem teljesen működik a stratégiánk, mert a végén nem marad sem L-üres sorú oszlop, sem L-üres oszlopú sor.

Mivel J_2-nek csak az első két lépése változhat, így sorcserével és oszlopcserével előállítható az alábbi képen látható eset. Harmadik lépésben tegyen J_1 a



3.8. ábra. A kérdőjelek a piros játékos két nyerő helyzetét mutatják.

megmaradt üres sorba a második korongja alá. Ez egy jó kényszerítő lépés. A következő korongokat is tegye J_1 az ábrán látható módon. A lépéseket követve J_1 hatodik korongjával nyerni fog. □

Az imént említett két eset nyerő stratégiáját sikerült megfejtenünk. Az előbbiekhez hasonló más játéktípusokat is ki lehet próbálni. Például eszünkbe juthat egy olyan változat is, amikor az nyer, aki egy négyzet négy csúcsát teszi ki. Egy másik változat például, amikor a nyerést jelentő négyzet mérete meghatározott. Számtalan Zarankiewicz-játék változata vár még megfejtésre.

Köszönetnyilvánítás

Köszönetemet fejezem ki témavezetőimnek, Szőnyi Tamásnak, aki a témát ajánlotta és segített elkezdeni a munkát, valamint Héger Tamásnak, aki mindvégig figyelemmel kísérte munkámat, akihez kérdéseimmel bizalommal fordulhattam, aki türelmét és rengeteg idejét rám áldozta.

Irodalomjegyzék

[1] G. Damásdi, T. Héger, T. Szőnyi, The Zarankiewicz problem, cages and geometries. *Annales Univ. Eötvös Loránd* **LVI** (2013), 3–37.

[2] Fábián K., Hörömpöli B., Sápi A.: A Zarankiewicz-problémáról. *ELTE TTK Országos Diákkutatói Program, Kutatási Összefoglaló*,2010.

[3] Héger T., Szőnyi T., szakdolgozati konzultáció, 2014.

[4] Kiss Gy., Szőnyi T.: Véges geometriák. *Polygon kiadó*, Szeged, 2001.

[5] Lovász L., Pelikán J., Vesztergombi K.: Diszkrét matematika. *Typotex kiadó*, Budapest, 2006.

[6] Saját véges matematika jegyzet (előadó: Szőnyi Tamás), 2011-2012-es tanév I., II. félév

[7] K. Zarankiewicz, Problem of P101. *Colloq. Math.*, **2** (1951), p. 301.