(k, n)-ívek a véges projektív síkokban

Fehér Orsolya
matematika–informatika szakos hallgató
ELTE TTK

Témavezető:
Héger Tamás
tudományos segédmunkatárs
ELTE TTK Számítógéptudományi tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem Budapest, 2014.

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

1.1. Előszó

Ez a szakdolgozat – ahogy a címe is mutatja – a (k, n)-ívekről szól a véges projektív síkokban. Véleményem szerint ez egy izgalmas témakör, támaszkodik geometriai, algebrai és kombinatorikai ismeretekre is. A szakdolgozat elején van egy elméleti bevezetés példákkal, ebben a fejezetben összefoglalom azt a tudást, ami a szakdolgozat érdemi részét érthetővé teszi. A következő fejezet konkrétan a (k, n)-ívekről, illetve annak speciális eseteiről szól, míg az utolsó fejezet bemutatja Raymond Hillnek ebben a témakörben elért eredményeinek egy részét.

Itt szeretném még összefoglalni, hogy az irodalomjegyzékben megjelölt könyveket hol használtam. Az algebrai részeknél Freud Róbert [1] és Kiss Emil [5] könyvét használtam, a geometriai részekhez Kiss György és Szőnyi Tamás [6], Reiman István [7], illetve Hajós György [2] könyvét használtam fel. Raymond Hill eredményeinek prezentálásához a Some problems concerning (k, n)-arcs in finite projective planes [4] című cikkét használtam fel.

1.2. Köszönetnyilvánítás

Ezúton is szeretném köszönetemet kifejezni a témavezetőmnek, Héger Tamásnak, aki a témaválasztástól az utolsó simításokig végigkísérte munkámat. Segítségével egy számomra teljesen új, ám annál izgalmasabb témakörrel ismerkedhettem meg. Számos hasznos és érdekes forrást és gondolkodtató feladatot kaptam tőle. Azt gondolom, hogy a segítségével kellőképp megismertem ezt a témakört és szívesen foglalkozom majd vele a későbbiekben is.

2. fejezet

Elméleti bevezetés

A dolgozatban a $\mathcal{P}$ halmaz elemeit mindig pontoknak fogjuk hívni, az $\mathcal{L}$ halmaz elemeit pedig mindig egyeneseknek (függetlenül attól, hogy mik az elemeik). A pontokat latin nagybetűkkel, míg az egyeneseket latin kisbetűkkel fogjuk jelölni. Általában egy egyenesre úgy tekintünk, mint a pontok egy részhalmazára, de a szakdolgozatban kényelmi okokból egy illeszkedési relációt is használunk. Az $\mathcal{I}$ illeszkedési reláció azt mondja meg, hogy egy pont illeszkedik-e egy egyenesre. Természetesen egy egyenest nyugodtan azonosíthatunk a ráilleszkedő pontok halmazával, és így visszakapjuk a részhalmazos szemléletet. Használhatjuk a geometriában szokásos fogalmakat és jelöléseket az absztrakt projektív síkok esetében is. Így nyugodtan beszélhetünk két egyenes metszéspontjáról és két pontot összekötő egyenesről. Tehát a szakdolgozatban bátran támaszkodni fogunk a geometriai jelölések, fogalmak és tételek használatára.

2.1. Véges projektív sík

Klasszikus projektív síkon (azaz az ideális egyenessel kibővített euklideszi síkon) a pontok és egyenesek illeszkedésére teljesülnek az alábbi tulajdonságok:

- Bármely két különböző pontra pontosan egy egyenes illeszkedik (a két pontot összekötő egyenes).
- Bármely két különböző egyenesre pontosan egy pont illeszkedik (a két egyenes metszéspontja).

Az absztrakt projektív sík definiálásánál is ezt a két tulajdonságot tartjuk szem előtt. A dolgozatban leginkább az első definícióra fogunk támaszkodni. A második definíció a már említett részhalmazos szemléleten alapul. A két definíció tartalmilag azonos, más a kiinduló koncepció, de ugyanazt fogalmazzák meg.

2.1.1. Definíció. (Projektív sík I.) Egy Π *projektív sík alatt* a $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ hármast értjük, ahol $\mathcal{P}$ és $\mathcal{L}$ két diszjunkt nem üres halmaz, és $\mathcal{I} \subset \mathcal{P} \times \mathcal{L}$ egy illeszkedésnek nevezett reláció (illeszkedési reláció), amely kielégíti a következő axiómákat:

P1 $\mathcal{P}$ bármely két különböző eleméhez pontosan egy olyan eleme van $\mathcal{L}$-nek, amely mindkettővel relációban áll.

P2 $\mathcal{L}$ bármely két különböző eleméhez pontosan egy olyan eleme van $\mathcal{P}$-nek, amely mindkettővel relációban áll.

P3 $\mathcal{L}$ minden eleme legalább három különböző $\mathcal{P}$-beli elemmel áll relációban.

P4 $\mathcal{P}$ minden eleme legalább három különböző $\mathcal{L}$-beli elemmel áll relációban.

2.1.2. Definíció. (Projektív sík II.) Legyen $\mathcal{P}$ egy nem üres halmaz, és legyen $\mathcal{L}$ a $\mathcal{P}$ halmaz részhalmazainak egy halmaza (azaz ha $\ell \in \mathcal{L}$, akkor $\ell \subset \mathcal{P}$). Azt mondjuk, hogy a $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ pár egy *projektív sík*, ha teljesülnek az alábbi axiómák:

P1 $\mathcal{P}$ bármely két különböző P, Q eleméhez létezik pontosan egy $\ell \in \mathcal{L}$, melyre $P \in \ell$ és $Q \in \ell$.

P2 $\mathcal{L}$ bármely két különböző ℓ, e eleméhez létezik pontosan egy $P \in \mathcal{P}$, melyre $P \in \ell$ és $P \in e$.

P3 Minden $\ell \in \mathcal{L}$ -hez létezik legalább 3 különböző P, Q, S eleme $\mathcal{P}$-nek úgy, hogy $P \in \ell$, $Q \in \ell$ és $S \in \ell$.

P4 Minden $P \in \mathcal{P}$ -hez létezik legalább 3 különböző ℓ, e, f eleme $\mathcal{L}$-nek úgy, hogy $P \in \ell$, $P \in e$ és $P \in f$.

2.1.3. Megjegyzés. (A megjegyzés mindkét definícióra vonatkozik.)

1) Az első két axiómára vonatkozólag nem szükséges mindkettő axiómánál kikötni azt, hogy *pontosan egy* összekötő egyenes (metszéspont) létezzen; elég, ha az egyik axiómánál kikötjük, hogy létezzen *pontosan egy* összekötő egyenes (metszéspont). A másik axiómánál csak a *létezést* elvárva automatikusan teljesülni fog az is, hogy *pontosan egy* metszéspont (összekötő egyenes) létezik.

2) *Dualitás.* Vegyük észre, hogy a **P1** és **P2**, illetve a **P3** és **P4** axiómák egymás duálisai.

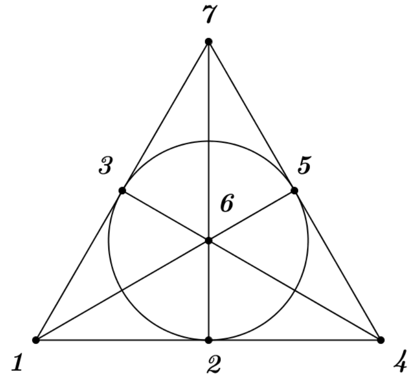
3) *Nemelfajulási variációk.* A **P3** és **P4** axióma helyettesíthető lenne a következő két axióma valamelyikével:

   P3' Létezik négy általános helyzetű pont, vagyis létezik négy olyan pont, melyek közül semelyik három nem kollineáris.

   P3'' A sík bármely két egyeneséhez létezik olyan pont, amelyik a két egyenes egyikén sincs rajta.

2.1.4. Definíció. Ha a projektív sík ponthalmaza véges, akkor *véges projektív síknak* nevezzük.

2.1.5. Példa. (Fano-sík) Legyen $\mathcal{P}$ az euklideszi sík egy szabályos háromszög csúcsaiból, oldalfelező pontjaiból, és beírható körének középpontjából álló ponthalmaz, $\mathcal{L}$ legyen a háromszög oldalegyeneseiből, szögfelezőiből, és beírható köréből álló egyeneshalmaz, az illeszkedés pedig legyen a tartalmazás. (Lásd 2.1-es ábra.) Az ábra alapján $\mathcal{P}$ halmaz pontjai: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ és $\mathcal{L}$ halmaz egyenesei:



2.1. ábra. Fano-sík

$\{1, 2, 4\}$, $\{2, 3, 5\}$, $\{3, 4, 6\}$, $\{4, 5, 7\}$, $\{5, 6, 1\}$, $\{6, 7, 2\}$, $\{7, 1, 3\}$. Könnyen ellenőrizhető, hogy ez az alakzat kielégíti a **P1** – **P4** axiómákat. Ez a példa a Fano-sík, Gino Fano olasz matematikusról nevezték el, aki elsőként építette fel a projektív geometriát axiomatikusan 1892-ben. (Axiómái között szerepelt, hogy a projektív síkon nincs izomorf konfiguráció a Fano-síkkal.)

A következőkben megnézünk egy általános példát, amely véges testekre épül, de előtte betekintünk egy kicsit a véges testekről tanultakba. Minden véges test elemszáma prímhatvány (beleértve az első hatványokat, azaz magukat a prímeket is). Bármely p^k prímhatványhoz izomorfiától eltekintve pontosan egy T véges test létezik, amelyre $|T| = p^k$. T-n értelmezve van két művelet, az egyiket összeadásnak, a másikat szorzásnak hívjuk; az összeadás asszociatív és kommutatív, létezik nullelem, és minden elemnek létezik ellentettje; a szorzás asszociatív és kommutatív, létezik egységelem, és a nullelemen kívül minden elemnek létezik inverze; teljesül rájuk a disztributivitás. Fontos még megemlíteni, hogy míg az egész illetve valós számok körében van rendezés, itt nincs, hiszen $\underbrace{1 + \ldots + 1}_{p} = 0$, mert mod p számolunk, így az 1 hozzáadásával nem feltétlenül kapunk egyre nagyobb számokat. Emiatt a valós síkon edződött szemléletünk néha tévútra vezethet a véges síkokon.

2.1.6. Példa. A q elemű véges testet $\mathrm{GF}(q)$ -val fogom jelölni (ez a jelölés a *Galois field* elnevezésből származik, amelyet Évariste Galois francia matematikusról neveztek el, aki megalkotta a Galois-elmélet, amely kapcsolatot teremt a testelmélet és a csoportelmélet között). Itt $q = p^h$, ahol p prím, h pedig pozitív egész szám. Legyen V egy $\mathrm{GF}(q)$ feletti háromdimenziós vektortér, $\mathcal{P}$ a V egydimenziós altereinek halmaza (origón átmenő egyenesek), $\mathcal{L}$ a V kétdimenziós altereinek halmaza (origón átmenő síkok). Az illeszkedési reláció legyen a halmazelméleti tartalmazás. Ezen feltételek mellett az axiómák teljesülése könnyen ellenőrizhető:

P1 Két különböző egydimenziós altér egyértelműen generál egy kétdimenziós alteret.

P2 Két különböző kétdimenziós altérnek mindig van metszete, és ez egy egydimenziós altér, mivel V háromdimenziós.

P3 Legyen V_2 kétdimenziós altér, bázisvektorai b_1 és b_2. Ekkor V_2 biztosan tartalmazza a b_1, b_2 és $b_1 + b_2$ által generált egydimenziós altereket. Ezek egymástól különbözőek, így teljesül a **P3** axióma.

P4 Legyen V_1 egy b_1 vektor által generált egydimenziós altér. Ekkor léteznek olyan b_2, b_3 vektorok, melyek b_1-el együtt V bázisait alkotják. Ekkor $\langle b_1, b_2 \rangle$, $\langle b_1, b_3 \rangle$ és $\langle b_1, b_2 + b_3 \rangle$ kétdimenziós alterek egymástól különbözőek, és mindegyik tartalmazza V_1-et, így **P4** is teljesül.

2.1.7. Definíció. ($\mathbf{PG(2,q)}$) Az így kapott projektív síkot $\mathrm{PG}(2,q)$-nak nevezzük. (Itt a 2 a sík dimenziójára utal, a q pedig arra, hogy q elemű testre épített.)

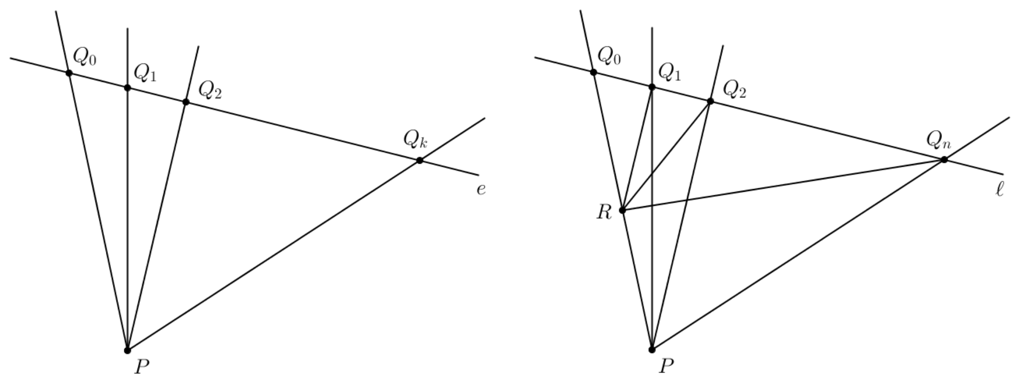
2.1.8. Tétel. *Minden Π véges projektív síkhoz létezik egy olyan n szám, amelyre igaz az, hogy ha Π projektív sík valamely $\ell \in \mathcal{L}$ egyenesnek $n+1$ pontja van, akkor:*

1. *Minden* $e \in \mathcal{L}$ *egyenesnek* $n+1$ *pontja van.*

2. *Minden* $P \in \mathcal{P}$ *ponton át* $n+1$ *egyenes megy.*

3. Π *összesen* n^2+n+1 *pontot és ugyanennyi egyenest tartalmaz.*

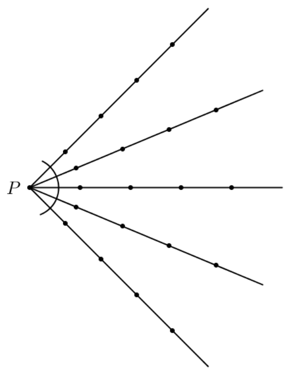
Bizonyítás. Először belátjuk, hogy ha egy e egyenesnek k pontja van, akkor egy rá nem illeszkedő P ponton keresztül k egyenes megy. Az e egyenes pontjait Q_1-nek, Q_2-nek, $\dots Q_k$-nak nevezzük. A **P1** axióma miatt minden i-re $(1 \leq i \leq k)$ létezik pontosan egy PQ_i egyenes. Most már csak azt kell belátni, hogy P ponton át pontosan k egyenes megy (se több, se kevesebb). Ha például $Q_2 \in PQ_1$ lenne, akkor Q_1 és Q_2 pontot e és PQ_1 egyenes is összekötné, ez ellentmondana a **P1** axiómának. Ez ugyanígy belátható e egyenes bármely másik két pontjára, vagyis P ponton át van legalább k darab egyenes. P-n át nincsen k-nál több egyenes, mert a **P2** axióma miatt minden P-n átmenő egyenes metszi e-t. Ebből következik, hogy nincs más egyenes P-n át, csak PQ_1, PQ_2, $\dots PQ_k$. Így P-n át k egyenes megy. (Lásd a 2.2-es bal oldali ábrán.) Hasonlóan belátható, hogy ha $P \notin e$, és P-n át k egyenes megy, akkor e egyenesnek k pontja van (a dualitásból azonnal adódik).



2.2. ábra.

Most belátjuk, hogy ha egy egyenesnek $n+1$ pontja van, akkor az összes ponton át $n+1$ egyenes megy. Legyen ℓ az az egyenes, amelynek $n+1$ pontja van.

Az előző gondolatmenet alapján már csak az l pontjairól kell ezt megmutatnunk. A **P3'** axióma miatt létezik négy általános helyzetű pont, tehát létezik $P \notin \ell$ és $R \notin \ell$. Legyen $PR \cap \ell = Q_0$. P-n át $n+1$ egyenes van, mert $P \notin \ell$. Az RQ_i $(1 \leq i \leq n)$ egyenesek nem mennek át P-n, ezért $n+1$ pontjuk van. Például $|RQ_n| = n+1$, ebből következik, hogy a $Q_0, \ldots, Q_{n-1}$ pontokon keresztül $n+1$ egyenes van. Másrészt $Q_n \notin RQ_0$ alapján Q_n-re is teljesül. (Lásd a 2.2-es jobb oldali ábrán.) Dualitás miatt az is könnyen belátható, hogy ha egy ponton át $n+1$ egyenes megy, akkor az összes egyenes $n+1$ pontú lesz.



2.3. ábra.

Végül belátjuk, hogy $|\mathcal{P}| = n^2 + n + 1$. Vegyünk egy P pontot, a P ponton keresztül $n+1$ egyenes van, és ezek mindegyike tartalmaz n pontot P-n kívül. Azaz $1 + (n+1) \cdot n = n^2 + n + 1$ pontot számoltunk. Minden pontot látunk, mivel van összekötő egyenese a P-vel, tehát nincs több pont. (Lásd a 2.3-as ábrán.) Ugyanígy belátható az is, hogy $|\mathcal{L}| = n^2 + n + 1$. $\square$

2.1.9. Definíció. Az előző tételből az n számot a *projektív sík rendjének* nevezzük.

2.1.10. Állítás. Ha a projektív sík q elemű véges testre épül, akkor q lesz a sík rendje, azaz $\mathrm{PG}(2, q)$ rendje q.

Bizonyítás. Ehhez elég belátni, hogy egy egyenesnek $q+1$ pontja van. Vegyünk egy háromdimenziós vektorteret q-felett. Az egydimenziós alterek a pontok, míg a kétdimenziós alterek az egyenesek. Az a kérdés, hogy egy projektív egyenesnek hány pontja van, ekvivalens azzal, hogy egy kétdimenziós altérnek hány egydimenziós altere van. (Egy egydimenziós alteret egy, míg egy kétdimenziós alteret két bázisvektor segítségével kaphatunk meg.) Minden nem nulla vektor generál egy egydimenziós alteret, tehát azt kell megvizsgálni, hogy hány nem nulla vektora van egy kétdimenziós altérnek. Vegyünk két bázisvektort a kétdimenziós altérben. Ezek lineáris kombinációjaként a kétdimenziós altér minden vektora egyértelműen előáll, így q^2 darab vektorunk van. Ebből először is kivonjuk a nullvektort, így q^2-1 vektor marad. Egy egydimenziós altérnek q darab vektora van, ebből a nullvektort elhagyva $q-1$ vektor marad; ennyi vektor generálja ugyanazt az alteret. Ez minden egydimenziós altérre vonatkozik, így a meglévő vektorok számát le kell osztani $q-1$-el. Mivel $\frac{q^2-1}{q-1}=q+1$, így beláttuk, hogy egy kétdimenziós altérnek $q+1$ egydimenziós altere van, vagyis egy projektív egyenesnek $q+1$ darab pontja van. □

2.2. Véges affin sík

Mint ahogy a projektív síkoknál láttuk, hogy az illeszkedési tulajdonságok alapján megfogalmazott axiómarendszernek van véges modellje, ugyanígy a klasszikus affin sík illeszkedési axiómáit is megfogalmazzuk, és erre az axiómarendszerre véges modellt is fogunk tudni adni. A fő eltérés a projektív síkokhoz képest a párhuzamos egyenesek engedélyezése, sőt előírása.

2.2.1. Definíció. Két egyenes *párhuzamos*, ha nem metszik egymást, vagy egybeesnek.

2.2.2. Definíció. (Affin sík I.) Egy pont-egyenes illeszkedési struktúrát *affin síknak* nevezünk, ha pontjai és egyenesei teljesítik az alábbi axiómákat:

A1 Bármely két különböző pontot pontosan egy egyenes tartalmaz.

A2 Ha P pont nem eleme az ℓ egyenesnek, akkor egyértelműen létezik egy olyan e egyenes, amely áthalad P ponton és párhuzamos ℓ egyenessel, azaz $e \cap \ell = 0$.

A3 Létezik három nem kollineáris pont.

2.2.3. Megjegyzés. Két egyenest akkor is párhuzamosnak tekintünk, ha egybeesnek ($\ell = e$), tehát a P pont akár lehetne eleme az ℓ egyenesnek. Az **A3** axiómára azért van szükség, hogy ne legyenek elfajuló esetek.

2.2.4. Példa. Definiáljuk $\mathrm{AG}(2, q)$ affin síkot: pontjai $\mathcal{P} = \mathrm{GF}(q) \times \mathrm{GF}(q)$, egyenesei $\mathcal{L} = \{\{(x, y) \in \mathrm{GF}(q) \times \mathrm{GF}(q) \colon y = mx + b\} : m, b \in \mathrm{GF}(q)\} \cup \{\{(x, y) \in \mathrm{GF}(q) \times \mathrm{GF}(q) \colon x = c\} : c \in \mathrm{GF}(q)\}$. Magyarán egy számpárnak megfelelő pont akkor illeszkedik egy egyenlet által leírt egyenesre, ha a számpár kielégíti az adott egyenletet (ahogy a koordináta-geometriában megszoktuk). Könnyen ellenőrizhető, hogy $\mathrm{AG}(2, q)$ valóban egy affin sík.

2.2.5. Definíció. Ha az affin sík ponthalmaza véges, akkor *véges affin síknak* nevezzük.

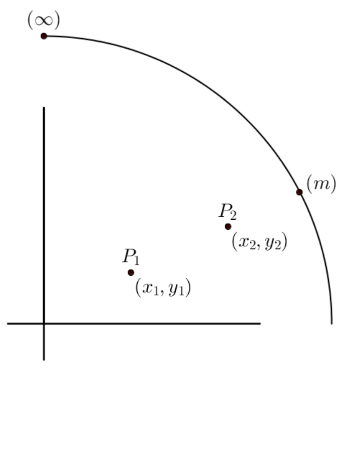
2.2.6. Állítás. A párhuzamosság affin síkon ekvivalencia-reláció.

Bizonyítás. Ahhoz, hogy belássuk, hogy a párhuzamosság ekvivalencia-reláció, arra van szükségünk, hogy reflexív, szimmetrikus és tranzitív legyen. A reflexivitás és a szimmetria a párhuzamosság definíciójából azonnal adódik, így a tranzitivitást kell megvizsgálni. Vagyis ha $a \| b$ és $b \| c$, abból következik-e, hogy $a \| c$. Tegyük fel, hogy nem igaz; ebben az esetben a és c egyenesnek lesz metszéspontja (P), és így b egyenesnek a P ponton át két párhuzamos egyenese lenne. Ezzel ellentmondáshoz jutottunk. $\square$

2.2.7. Megjegyzés. A párhuzamossági reláció egy ekvivalencia osztályát párhuzamossági osztálynak nevezzük.

2.3. Átjárás affin és projektív sík között

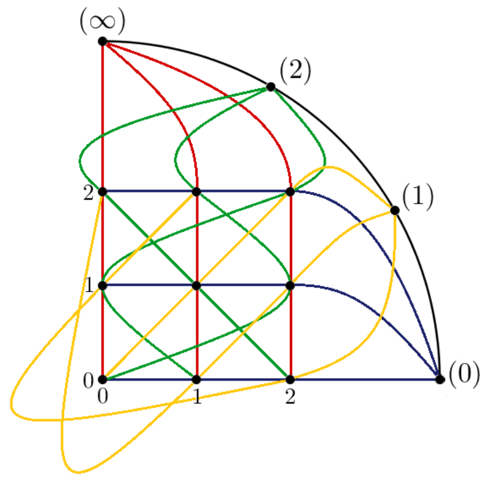
Először nézzük meg, hogy affin síkból hogyan csinálunk projektív síkot. A klasszikus esetben megszokott eljárást követjük. A sík egyeneseinek egy párhuzamossági osztályához hozzárendelünk egy pontot (ezt nevezzük ideális pontnak), amely a párhuzamossági osztály minden egyenesén rajta van, és csakis ezeken az egyeneseken; egy egyenesnek csakis egy ideális pontja van; egy ideális pontot a párhuzamossági osztály egy tetszőleges egyenesével adhatunk meg. Ezzel elértük, hogy a párhuzamos egyeneseknek is lesz közös pontja. Az ideális ponttal szemben a sík többi pontját közönséges pontnak nevezzük. Egy közönséges és egy ideális pont összekötő egyenesén egy olyan egyenest értünk, amely átmegy az adott közönséges ponton és párhuzamos az ideális pontot meghatározó egyenessel. Egy sík egyeneseinek ideális pontjai a sík ideális egyenesét alkotják, tehát felveszünk egy új egyenest is. (Minden párhuzamossági osztályhoz más ideális pont tartozik.) A sík bármely két egyenese így metszővé válik, vagy közönséges pontban, vagy pedig ideális pontban metszik egymást; a sík ideális egyenese is metsz minden egyenest a síkban. Egy adott affin síknak definíció szerint pontosan egy ideális egyenese van. (Két ideális pontnak a közös egyenese az ideális egyenes lesz.) Így tehát az ideális egyenessel kibővített affin sík projektív sík lesz.



2.4. ábra.

A 2.4-es ábra mutat egy szemléletet, hogy hogyan lehet elképzelni egy ideális egyenessel kibővített affin síkot. A testre épített síkon az ideális pontokat legegyszerűbben azok meredekségével tudjuk megadni, így a P_1 és P_2 pont által meghatározott egyenes ideális pontja (m), ha az összekötő egyenesük egyenlete $y = mx + b$ alakú (ahol $b \in \mathrm{GF}(q)$). A függőleges egyenesek ideális pontját (∞)-vel jelöljük.

Másodszor megnézzük, hogy a projektív síkból hogyan lehet újra affin síkot csinálni. Ehhez érdemes megjegyezni, hogy a projektív síkon nincs szerepe annak, hogy egy pont ideális vagy közönséges, tehát tekinthetjük egyformának őket. Ugyanez vonatkozik az egyenesekre is. Így, hogy minden pont illetve egyenes egyforma, egy tetszőleges egyenest elhagyva (az egyenes összes pontjával) könnyen láthatóan újra egy affin síkot kapunk.



2.5. ábra.

A 2.5-ös ábrán egy 3 elemű véges testre épített affin síkon és projektív lezártján mutatjuk be a párhuzamos egyeneseket és ideális pontjaikat. Ezen az ábrán könnyen szemléltethető a 2.1.8-as tétel. A sík rendje $q = 3$. Minden egyenesnek $q + 1 = 4$ pontja van és minden ponton keresztül $q + 1 = 4$ egyenes megy. Az ábrán összesen $q^2+q+1 = 13$ egyenes és $q^2+q+1 = 13$ pont van. Ezen az ábrán látható még az is, hogy ha az ideális egyenest nem tekintjük, akkor affin síkrészről beszélhetünk, az affin síkrészben a pontokat a $\mathrm{GF}(q) \times \mathrm{GF}(q)$ halmazból kapjuk.

2.3.1. Tétel. *Minden véges affin síkhoz létezik egy olyan n szám, melyre igaz az, hogy ha az affin sík valamely egyenesnek n pontja van, akkor:*

1. *Minden egyenesnek n pontja van.*
2. *Minden ponton át $n+1$ egyenes megy.*
3. *Az affin sík összesen n^2 pontot tartalmaz.*
4. *Az affin sík összesen n^2+n egyenest tartalmaz.*

Bizonyítás. Legyen ℓ az n pontú egyenes. Zárjuk le az affin síkot projektív síkká, vagyis vegyünk még hozzá egy ideális egyenest a szokott módon. Így felhasználhatjuk a projektív sík 2.1.8-as tételében belátottakat. Az ℓ egyenesnek $n+1$ pontja van a projektív lezártban.

Minden projektív egyenesnek $n+1$ pontja van. Ha elhagyjuk az ideális egyenest, annak összes pontjával, akkor minden egyenesnek elhagyjuk az ideális pontját, így minden affin egyenesnek n pontja lesz.

Minden projektív ponton át $n+1$ egyenes megy. Ha elhagyjuk az ideális egyenest, az nem befolyásolja azt, hogy egy ponton keresztül hány egyenes megy, így minden affin ponton át $n+1$ egyenes megy. (Abban az esetben befolyásolta volna, ha a pont is ideális, de az ideális pontokat is elhagytuk.)

A projektív sík összesen n^2+n+1 pontot tartalmaz. Ha elhagyjuk az ideális egyenest, aminek $n+1$ pontja van, akkor azt kapjuk, hogy az affin sík összesen n^2 pontot tartalmaz.

A projektív sík összesen n^2+n+1 egyenest tartalmaz. Ha elhagyjuk az ideális egyenest, vagyis elhagyunk egy egyenest, akkor azt kapjuk, hogy az affin sík összesen n^2+n egyenest tartalmaz. $\square$

2.3.2. Definíció. Az előző tételben szereplő n számot az *affin sík rendjének* nevezzük.

Megadjuk az affin sík egy másik definícióját, amelyből könnyen láthatóan következik a párhuzamossági axióma.

2.3.3. Definíció. (Affin sík II.) Legyen $n \geq 2$ egész szám. Az olyan pont-egyenes illeszkedési struktúrát, aminek n^2 pontja van, az egyenesei n pontot tartalmaznak és bármely két pontján át létezik pontosan egy egyenes, *affin síknak* nevezzük.

2.4. Desargues-i és nem desargues-i síkok

A (k, n)-ívekre legrészletesebben tárgyalt eredmény olyan módszereket használ, amelyek nem használják ki a testel való koordinátázottságot; pusztán kombinatorikus eszközökkel az illeszkedési axiómára épít. Így érdekes lehet egy konkrét példa, amely nem testre épített. A klasszikus projektív síkokon teljesül a következő jól ismert tétel.

2.4.1. Tétel. (Desargues) *Ha két háromszög pontra nézve perspektív, akkor egyenesre nézve is perspektív, illetve ha két háromszög egyenesre nézve perspektív, akkor pontra nézve is perspektív.*

2.4.2. Megjegyzés. Két háromszögről akkor mondjuk, hogy pontra nézve perspektív, ha a megfelelő pontjaikat összekötő egyenesek egy pontban találkoznak. Hasonlóan akkor mondjuk, hogy egyenesre nézve perspektív két háromszög, ha megfelelő oldalaik metszéspontjai egy egyenesre esnek.

2.4.3. Megjegyzés. A Desargues-tételt véges síkon is ugyanolyan jól lehet értelmezni.

2.4.4. Definíció. Egy projektív síkot *desargues-inak* hívunk, ha igaz rá a Desargues-tétel.

A véges projektív síkok elméletében alapvető a következő tétel.

2.4.5. Tétel. *Véges projektív sík pontosan akkor desargues-i, ha izomorf egy véges testre épített síkkal.*

2.4.6. Definíció. (Részsík) Egy $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ illeszkedési geometria részgeometriája a $(\mathcal{P}', \mathcal{L}', \mathcal{I}')$ illeszkedési geometria, ha $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}$, $\mathcal{L}' \subset \mathcal{L}$, és $\mathcal{I}' \subset \mathcal{I}$ megszorítása $\mathcal{P}' \times \mathcal{L}'$-re. Egy affin vagy projektív sík *részsíkja* egy olyan részgeometria, amely maga is affin vagy projektív sík.

A részsíkok önmagukban is affin, illetve projektív síkok, így van rendjük.

2.4.7. Állítás. Egy s rendű részsíkot egy egyenes 0, 1 illetve $s+1$ pontban metszhet. Vagyis ha van legalább 2 közös pontjuk, akkor van $s+1$ közös pontjuk is.

2.4.8. Tétel. (Bruck) *Ha* Π *projektív sík rendje* q*, akkor* Π *részsíkjának a rendje legfeljebb* $\sqrt{q}$ *lehet.*

Különösen fontosak lesznek számunkra a lehető legnagyobb részsíkok.

2.4.9. Definíció. (Baer-részsík) A *Baer-részsík* rendje éppen $\sqrt{q}$.

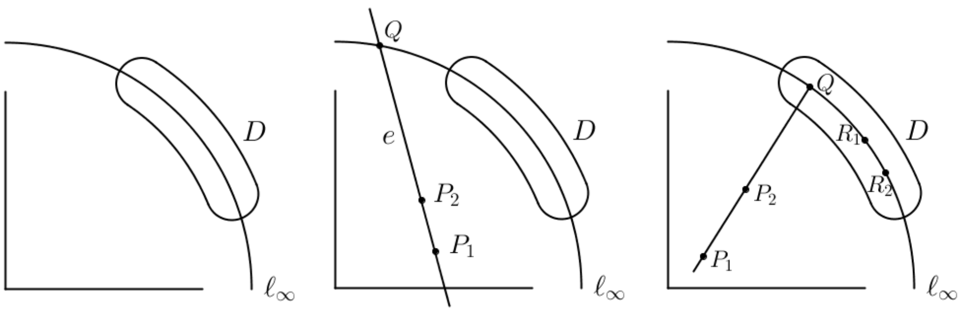
Szükségünk lesz a Baer-részsíkok néhány alapvető tulajdonságára.

2.4.10. Tétel. *Abban az esetben, ha* q *négyzetszám akkor* $\mathrm{PG}(2,q)$*-ban bármely négy általános helyzetű pontot pontosan egy Baer-részsík tartalmaz.*

2.4.11. Tétel. *Egy Baer-részsíknak és egy egyenesnek* 1 *vagy* $\sqrt{q}+1$ *közös pontja van.*

2.4.12. Tétel. *Abban az esetben, ha* q *négyzetszám* $\mathrm{PG}(2,q)$*-ban, akkor két Baer-részsík közös egyenesén* 1, 2 *vagy* $\sqrt{q}+1$ *közös pontja van. Vagyis ha van legalább* 3 *közös pontja két Baer-részsíknak egy egyenesen, akkor lesz* $\sqrt{q}+1$ *közös pontjuk azon az egyenesen.*

2.4.13. Példa. (Hall-sík) Adott egy projektív sík. Vegyünk egy Baer-részsíkot és válasszuk ki ennek egy egyenesét. A teljes egyenes, amely tartalmazza a Baer-részsík egyenesét, legyen az ideális egyenes. Az ideális egyenes és a Baer-részsík metszete $\sqrt{q}+1$ pontot tartalmaz, ezt a halmazt nevezzük el D-nek. (Lásd 2.6-os bal oldali ábra.) Tekintsük most az előálló affin síkot. Azokat az egyeneseket, amelyeknek az ideális pontja a D halmaz elemei között van, azokat eldobjuk; azaz a megfelelő q elemű részhalmazokat nem tekintjük többé egyeneseknek (de a pontjaikat megtartjuk). Tekintsük a D halmazt tartalmazó Baer-részsíkokat. Ezeknek a Baer-részsíkoknak $q+\sqrt{q}+1$ pontjuk van (mert a rendjük $\sqrt{q}$), és mivel $\sqrt{q}+1$ pontjuk van az ideális egyenesen, így marad mindegyiknek még q pontja az affin síkrészen. A vizsgált Baer-részsíkok fennmaradó q pontjai lesznek az új egyenesek; azaz ezeket a q elemű halmazokat egyeneseknek fogjuk tekinteni. (Azok az egyenesek, amiket nem változtattunk meg, azok megmaradnak.) Azt állítjuk, hogy az így kapott egyenesekkel egy affin síkot kapunk.



2.6. ábra.

Azt, hogy affin síkot kaptunk, a 2.3.3-as definíció alapján látjuk be. Kell, hogy bármely két pontot pontosan egy egyenes tartalmazzon. (Természetesen az ideális egyenes nem lesz az affin sík része.) Ha veszünk két olyan pontot (P_1-et és P_2-t), aminek megmaradt a közös egyenese (azaz az összekötő egyenes ideális pontja, Q, nincs D-ben), akkor azt már tudjuk, hogy van közös egyenesük (hívjuk e-nek); még azt kell belátni, hogy nincs másik közös egyenesük. Ha lenne, az csak egy új, Baer-részsíkból származó egyenes lehetne, azaz lenne olyan $\mathcal{B}$ Baer-részsík, amely tartalmazná P_1-et, P_2-t és a D halmazt is. Mivel $\mathcal{B}$-nek és e-nek van legalább 2 közös pontja (P_1, P_2) az e egyenes egyenese a Baer-részsíknak; azonban az ℓ_∞ szintén egyenese $\mathcal{B}$-nek, ezért $Q = e \cap \ell_\infty \in \mathcal{B}$. Viszont Q nem eleme D-nek, így ellentmondáshoz jutunk. (Lásd 2.6-os középső ábra.) Meg kell még vizsgálnunk azt az esetet, amikor a két pont eredeti közös egyenesét eldobtuk. Ebben az esetben a két pont (P_1, P_2) által meghatározott eredeti egyenes ideális pontján (Q) kívül választunk két pontot (R_1, R_2) a D halmazból. A P_1, P_2, R_1, R_2 négy általános helyzetű pont, tehát meghatároz pontosan egy Baer-részsíkot ($\mathcal{B}$). $P_1P_2 \cap R_1R_2 = Q \in \mathcal{B}$, ebből következik, hogy $|\mathcal{B} \cap \ell_\infty \cap D| \geq 3$ így $|\mathcal{B} \cap \ell_\infty \cap D| = \sqrt{q}+1$. Tehát $\mathcal{B}$ egy olyan Baer-részsík, aminek része a D halmaz, így van P_1 és P_2 pontot összekötő új egyenes. Van-e több? Nincs, mert ha $\mathcal{B}'$ Baer-részsík tartalmazza P_1-et és P_2-t, akkor amiatt, hogy $D \subset \mathcal{B}'$ tartalmazza R_1-et és R_2-t is, és így $\mathcal{B}' = \mathcal{B}$. (Lásd 2.6-os jobb oldali ábra.) Az nyilvánvaló, hogy ennek az új struktúrának q^2 pontja van, hiszen az eredeti affin sík pontjait nem változtattunk meg; az is világos, hogy minden egyenes q pontú, hiszen vannak azok az egyeneseink, amiket nem változtattuk meg, és vannak még az új Baer-részsíkból származó egyenesek, amelyekről tudjuk, hogy q pontjuk van; és épp most láttuk be, hogy bármely két pontnak pontosan egy közös egyenese van. Így beláttuk, hogy affin síkot kapunk. Ezt az affin síkot le lehet zárni projektív síkká, és belátható, hogy nem teljesül rá a Desargues-tétel, így nem izomorf a testre épített projektív síkkal.

3. fejezet

(k, n)-ívek

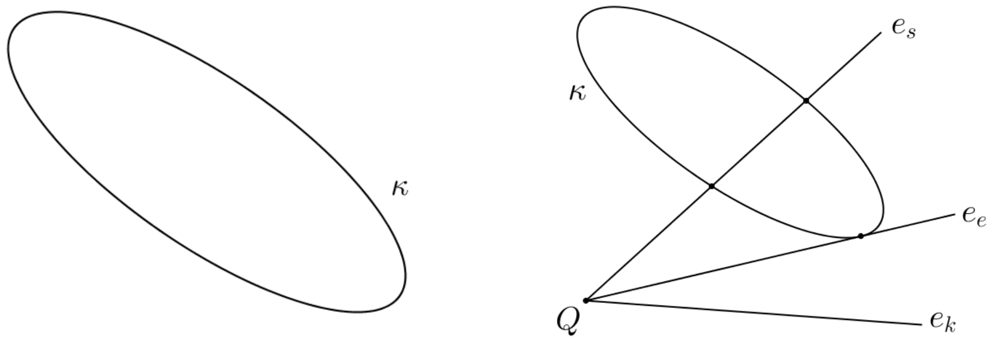
Innentől az n jelölést nem a sík rendjére fogjuk használni, ezért mostantól q-val jelöljük a szóban forgó síkok rendjét, attól függetlenül, hogy a sík testre épített-e vagy sem. A testre épített síkokat továbbra is $\mathrm{PG}(2, q)$-val jelöljük, míg a tetszőleges q-adrendű projektív síkot mostantól Π_{q}-val jelöljük. Mostantól az összes definíció véges affin vagy projektív síkokra vonatkozik. Először a (k, n)-ívek egy speciális esetével foglalkozunk.

3.1. Ívek, oválisok, hiperoválisok

3.1.1. Definíció. (Ív) Egy olyan ponthalmazt, melynek nincs három kollineáris pontja, *ívnek* nevezünk. Egy k pontú ívet k-*ívnek* nevezünk.

3.1.2. Definíció. A sík valamely egyenese az adott k-ívre nézve *szelő*, *érintő*, illetve *kitérő egyenes* lehet, ha a k-ívvel rendre 2, 1, illetve 0 közös pontja van.

A 3.1-es bal oldali ábrán egy ív szemléletes ábrája látható, míg a jobb oldali ábrán az előző definíció egyenesei láthatók. Az ábrán látható e_s, e_e és e_k egyenesek rendre szelő, érintő, illetve kitérő egyenesek.



3.1. ábra.

3.1.3. Megjegyzés. Egy k-ív bármely pontjából $k-1$ szelő és $q+2-k$ érintő egyenes van. (Ez könnyen ellenőrizhető a körbenézős módszerrel.) Ebből könnyen kiszámítható, hogy egy k-ívnek összesen $\frac{k(k-1)}{2}$ szelő, $k(q+2-k)$ érintő és $q^2-(k-1)q+\frac{k}{2}(k-3)+1$ kitérő egyenese van.

3.1.4. Definíció. (Teljes ív) A *k-ívet teljesnek* tekintjük, ha tartalmazásra nézve maximális, azaz nem része $(k+1)$-ívnek.

3.1.5. Tétel. (Lunelli és Sce) Π_q *k-íve nem lehet teljes, ha* $q \geq \frac{k\cdot(k-1)}{2}$.

Bizonyítás. Egy ív akkor és csak akkor teljes, ha az ív szelő egyenesei lefedik a sík pontjait (hiszen egy pontot akkor lehet hozzávenni az ívhez, ha nem megy át rajta szelő). Számoljuk meg, hogy a szelő egyenesek legfeljebb hány pontot fednek le. Egy egyenes $q+1$ pontot fed le. Az ívnek $\frac{k\cdot(k-1)}{2} \leq q$ szelője van, és q darab egyenes legfeljebb $q(q+1)=q^2+q$ pontot fed le, így lesz legalább egy pont amit nem fed le, ezt a pontot hozzávehetnénk az ívhez, így nem teljes. □

Érdemes megemlíteni, hogy ívet, sőt teljes ívet is egyszerűen tudunk konstruálni mohó algoritmussal. Választunk egy pontot, majd hozzáveszünk még egyet, természetesen az ív definícióját szem előtt tartva, és így tovább. Ez az eljárás addig folytatható, amíg teljes ívet kapunk; azt azonban nem tudjuk megmondani, hogy a kapott teljes ív mekkora lesz. Az előző állítás azt mondja ki, hogy a mohó algoritmus nem akad el, amíg a k el nem éri az egyenlőséget, vagyis közelítőleg $\sqrt{2q}$-t. Kim és Vu meg tudták mutatni, hogy minden q-adrendű síkon vannak legfeljebb $\sqrt{q} \cdot \log^c q$ pontú teljes ívek, valamely c rögzített számra.

A dolgozatban használunk egy körülnézés kifejezést, ami annyit jelent, hogy a síkot egy adott pontjából vizsgáljuk úgy, hogy az adott pontot tartalmazó egyenesek fennmaradó pontjait, illetve metszéspontjait egy másik egyenessel vagy ívvel számoljuk meg. Az ív pontjait mindig P-vel, míg az íven kívüli pontokat mindig Q-val fogjuk jelölni.

3.1.6. Tétel. (Bose) *A q-adrendű projektív sík bármely k-ívére teljesül, hogy $k \leq q+2$. Abban az esetben, ha q páratlan, akkor $k \leq q+1$ is teljesül.*

Bizonyítás. Legyen κ az ív, $P \in \kappa$. P ponton át $q+1$ egyenes megy, minden egyenesen P-n kívül legfeljebb még egy pontja lehet κ-nak (mert κ ív). Ebből következik, hogy $|\kappa| \leq 1 + (q+1) = q+2$.

Tegyük fel, hogy $|\kappa| = q+2$. Belátjuk, hogy ebben az esetben q csak páros lehet. Az ív bármely pontjából körülnézve κ-nak $q+2$ pontja kell legyen, vagyis nincs érintő. Tehát minden $P \in \kappa$, minden $l \ni P$ egyenesre $|l \cap \kappa| = 2$; ebből következik, hogy minden l egyenesre $|l \cap \kappa| = 0$ vagy $|l \cap \kappa| = 2$. Legyen $Q \notin \kappa$, nézzünk körbe a Q pontból. Az egyenesek két részre oszthatók, amelyek 2 pontban metszik, illetve amelyek nem metszik az ívet. A metsző egyenesek darabszámát s-sel jelölve adódik a következő képlet: $|\kappa| = s \cdot 2 = q+2$, ebből következik, hogy $s = \frac{q}{2} + 1$. Tudjuk, hogy $s \in \mathbb{Z}$, így q csak páros lehet. $\square$

3.1.7. Definíció. (Ovális) A $q+1$ pontú íveket *oválisnak* hívjuk.

3.1.8. Állítás. Az oválisok általános tulajdonsága, hogy minden pontjában pontosan egy darab érintőjük van, és összesen $q+1$ darab érintőjük van.

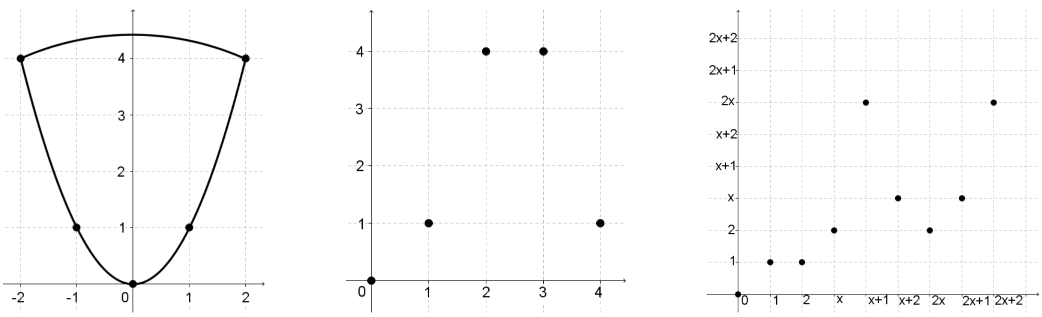
Bizonyítás. A 3.1.3-as megjegyzés megfelelő képleteibe $k = q + 1$-et helyettesítve automatikusan adódik. □

3.1.9. Definíció. (Hiperovális) Az olyan ívet, melynek $q + 2$ pontja van *hiperoválisnak* nevezzük.

3.1.10. Megjegyzés. A 3.1.3-as megjegyzés megfelelő képleteibe $k = q + 2$-t helyettesítve rögtön adódik, hogy a hiperoválisoknak nincs érintője.

3.1.11. Állítás. Léteznek oválisok $\mathrm{PG}(2, q)$-ban. Ha q páros, akkor léteznek hiperoválisok is.

Bizonyítás. Legyen $\kappa = \{(x, x^2) : x \in \mathrm{GF}(q)\} \cup \{(\infty)\}$. Ebben az esetben κ ovális, mert $|\kappa| = q + 1$ és az $y = mx + b$ egyenes metszéspontjait κ-val az $x^2 = mx + b$ egyenlet megoldásával kapjuk meg, így legfeljebb két metszéspontjuk lehet. Az $x = c$ egyenesek pontosan két pontban metszik κ-t. Abban az esetben, ha q páros hozzávehetjük κ-hoz a (0) ideális pontot is, mert az $x \to x^2$ leképezés a $\mathrm{GF}(q)$ test automorfizmusa, így az $x^2 = 0x + b$ „vízszintes” egyeneseknek pontosan 1 pontja van κ-val. □



3.2. ábra.

Erre egy konkrét példa látható a 3.2-es bal oldali ábrán egy 5 elemű véges testre épített síkon, ugyanez a szokásos koordináta-rendszerben elhelyezve a 3.2-es középső ábrán szerepel. Érdemes még megvizsgálni a 9 elemű testre épített projektív síkon az oválist. (Lásd 3.2-es jobb oldali ábra.) Mivel itt már másodfokú bővítés kell, a test elemei nem csak számok lesznek, így a tengelyeken rendre 0, 1, 2, x, $x+1$, $x+2$, $2x$, $2x+1$, $2x+2$ szerepel (a bővítésnél x^2+1 polinommal faktorizáltunk).

3.1.12. Tétel. Π_q*-ban páros* q*-ra minden ovális kiegészíthető hiperoválissá.*

Bizonyítás. Legyen κ a vizsgált ovális. Először belátjuk, hogy minden κ-n kívüli Q ponton át megy érintő. Indirekten bizonyítunk, vagyis tegyük fel, hogy Q ponton át nem megy érintő. A Q-n áthaladó külső egyenesek darabszámát k-val, míg a szelő egyenesek darabszámát s-el jelölve a következő képlet adódik: $k + s = q + 1$, ebből következik, hogy $|\kappa| = 2 \cdot s = q + 1$. Ekkor amiatt, hogy q páros és $s \in \mathbb{Z}$, ellentmondáshoz jutunk, szóval az ovális minden külső pontján át megy érintő egyenes. Korábban már beláttuk, hogy az oválisnak minden pontján (P) át van érintő. Tehát a sík minden pontján át megy érintő. Tudjuk, hogy az érintő egyenesek száma $q + 1$, és ezek az egyenesek a sík összes, azaz $q^2 + q + 1$ pontját lefedik. Legyenek l_0, l_1, $\ldots l_q$ az érintő egyenesek. Most azt vizsgáljuk, hogy hány pontot fednek le. Az l_0 lefed $q + 1$ pontot, az l_1 lefed q darab új pontot (mert van egy metszéspontja l_0-al), az l_2 maximum q darab új pontot fed le (ez abban az esetben fordul elő, hogy ha l_2 metszéspontja l_0-al és l_1-gyel egybeesik); ugyanígy minden további érintőre igaz, hogy maximum q darab új pontot fed le. Így összesen $q + 1 + q \cdot q = q^2 + q + 1$ pontot fedhetnek le az érintők. Ez éppen az összes pont, tehát minden érintő a maximális mennyiségű új pontot fedi le, így $l_1, l_2, \ldots, l_q$ pontosan q darab új pontot fed le, vagyis az összes érintőnek van egy közös metszéspontja. Az érintők metszéspontját hozzávéve az ovális pontjaihoz hiperoválist kapunk. □

A következő állítás azonnal láthatóan ekvivalens az előző tétellel, csak más szempontból vizsgálja.

3.1.13. Állítás. Páros rendű síkon a $(q + 1)$-ívek nem teljesek.

Megemlítünk még egy nagyon meglepő tételt, ami igazán lendületet adott az ívek vizsgálatának.

3.1.14. Tétel. (Segre) *Ha q páratlan, akkor* $\mathrm{PG}(2, q)$ *minden oválisa másodrendű görbe.*

3.2. (k, n)-ívek általánosan

3.2.1. Definíció. ((k, n)-ív) Egy ponthalmazt (k, n)*-ívnek* nevezünk, ha k elemű és minden egyenes legfeljebb n pontban metszi.

3.2.2. Megjegyzés. A (k, n)-ívek definíciójában gyakran kikötik, hogy legyen egyenes, amely pontosan n pontban metszi a ponthalmazt. Mi ettől most eltekintünk.

A (k, n)-íveknek egy fontos speciális esete a korábban definiált ív, illetve k-ív. Vegyük észre, hogy a k-ívek megegyeznek a $(k, 2)$-ívekkel.

3.2.3. Definíció. Ha egy tetszőleges ponthalmazt (például ívet) egy egyenes i pontban metsz a ponthalmaz (ív) i*-szelőjének* nevezzük.

Létezik egy komplementer fogalom, amit szintén sokat vizsgálnak a véges geometriákban.

3.2.4. Definíció. A Π_q projektív sík valamely B ponthalmaza *lefogó ponthalmaz*, ha minden egyenes metszi B-t.

3.2.5. Definíció. Egy B ponthalmazt t*-szeres lefogó ponthalmaznak* nevezünk, ha B-t minden egyenes legalább t pontban metsz.

3.2.6. Megjegyzés. A t-szeres lefogó ponthalmaz definíciójában ki szokták még kötni azt is, hogy legyen olyan egyenes, aminek pontosan t metszéspontja van a B halmazzal. Mi ettől eltekintünk.

3.2.7. Megjegyzés. Egy (k,n)-ív komplementere $q^2+q+1-k$ pontú $q+1-n$-szeres lefogó ponthalmaz és fordítva.

3.2.8. Példa. Egy egyenes $q+1$ méretű egyszeres lefogó ponthalmaz.

3.2.9. Példa. Ahogy azt már a 2.4.11-es tételben is láttuk, egy Baer-részsíknak minden egyenessel van legalább egy közös pontja, így egy Baer-részsík szintén egy egyszeres lefogó ponthalmaz, melynek $q+\sqrt{q}+1$ pontja van.

3.2.10. Példa. Könnyen látható, hogy három nem egy ponton átmenő egyenes, $3q$ pontú kétszeres lefogó ponthalmazt alkot.

Egy közismert, de egyáltalán nem nyilvánvaló eredmény a következő:

3.2.11. Tétel. (Bruck) $\mathrm{PG}(2,q)$*, ha q négyzet, felbontható diszjunkt Baer-részsíkok uniójára.*

3.2.12. Következmény. $\mathrm{PG}(2,q)$-ban, ha q négyzet és t legfeljebb $q-\sqrt{q}$, létezik t-szeres lefogó ponthalmaz, aminek $tq+t\sqrt{q}+t$ pontja van. Ezt úgy kapjuk meg, ha t darab diszjunkt Baer-részsík ponthalmazának unióját vesszük.

3.3. Eredmények (k,n)-ívekről

A dolgozatban (k,n)-íveket elsősorban nem testre épített síkokban vizsgáljuk. Jelölje a Π_q sík legnagyobb (k,n)-ívének pontszámát rögzített n mellett $\max(n)_{2,\Pi_\mathrm{q}}$, továbbá jelölje $\max(n)_{2,q}$ az összes q-adrendű síkra vett maximumot. Közvetlen felső korlátját a $\max(n)_{2,q}$-nak a következő jól ismert tétel adja.

3.3.1. Tétel. (Barlotti) *Ha* $1\le n\le q+1$*, akkor*

$$\max(n)_{2,q}\le(n-1)q+n. \tag{3.1}$$

Bizonyítás. Legyen κ (k, n)-ív Π_q-ban. Legyen $P \in \kappa$. Most használjuk a már jól ismert körbenézést: a P ponton át pontosan $q+1$ egyenes megy, és ezek mindegyike legfeljebb $n-1$ pontot tartalmazhat P-n kívül, ami rajta lehet az íven. Ha hozzá vesszük még a P pontot is, akkor az ívnek legfeljebb $(q+1)(n-1)+1 = (n-1)q+n$ pontja van. Vagyis $\max(n)_{2,q} \leq (n-1)q+n$. $\square$

Az $n = 1$, $n = q$, $n = q+1$ érdektelen esetek, ezért érdekesebb, hogyha feltesszük, hogy $2 \leq n \leq q-1$.

3.3.2. Tétel. (Barlotti) *Ha* $\max(n)_{2,\Pi_\mathrm{q}} = (n-1)q+n$ *és* $n \leq q$*, akkor* n *osztja* q*-t.*

Bizonyítás. Legyen κ (k, n)-ív Π_q-ban, ahol $k = (n-1)q+n$ és $n \leq q$. A 3.3.1-es tétel bizonyításából tudjuk, hogy az egyenlősség csak úgy teljesülhet, ha minden egyenes, amelynek van közös pontja κ-val, szükségképpen egy n-szelője κ-nak. Így Π_q-nak minden egyenese vagy 0-szelője, vagy n-szelője κ-nak. Legyen $Q \notin \kappa$. A Q ponton áthaladó n-szelők darabszámát jelöljük s-el; így $k = ns$, ezért n osztója k-nak. A $k = (n-1)q+n$ képletből következik, hogy n osztója q-nak is. $\square$

$\mathrm{PG}(2, q)$-ban, ha $2 \leq n \leq q-1$, akkor csak $q = 2^h$ esetén érhető el a (3.1)-es korlát (ahol h pozitív egész szám):

3.3.3. Tétel. (Cossu, Denniston) *Ha* $q = 2^h$*, akkor minden olyan* n*-re, amely osztja* q*-t, igaz az hogy,* $\max(n)_{2,\mathrm{PG}(2,q)} = (n-1)q+n$.

3.3.4. Tétel. (Ball–Blokhuis–Mazzoca) *Ha* q *páratlan és* $2 \leq n \leq q-1$*, akkor* $\max(n)_{2,\mathrm{PG}(2,q)} < (n-1)q+n$.

Abban az esetben, ha n nem osztója q-nak, a (3.1)-es korlátot a következőképpen lehet javítani:

3.3.5. Tétel. (Lunelli–Sce) *Ha* $4 \leq n \leq q$ *és* n *nem osztója* q*-nak, akkor* $\max(n)_{2,q} \leq (n-1)q+n-3$.

Még általánosabban Lunelli és Sce mutatta meg, hogy ha n nem osztója q-nak és n elég nagy q-hoz képest akkor egy hozzávetőleges felső korlát $\max(n)_{2,q} \leq (n-1)q + \frac{8}{13}n$. Mivel ismert, hogy $\max(n)_{2,q} \leq (n-1)q + 1$ ha $n = 2, 3, 4$ és n nem osztója q-nak, Lunelli és Sce megalkotta a következő sejtést.

3.3.6. Sejtés. Ha $n < q$ és n nem osztja q-t, akkor $\max(n)_{2,q} \leq (n-1)q + 1$.

Azóta belátták, hogy ez a sejtés nem igaz.

3.3.7. Tétel. *Ha q négyzetszám és $n \geq \sqrt{q} + 1$, akkor*

$$\begin{aligned}\max(n)_{2,q} &\geq (q + \sqrt{q} + 1)(n - \sqrt{q}) = \\ &= (n-1)q + 1 + (\sqrt{q} + 1)\left(n - \left(q - \sqrt{q} + 2 - \frac{1}{\sqrt{q} - 1}\right)\right).\end{aligned}$$

Ez ad egy ellenpéldát abban az esetben, ha $\sqrt{q} + 1 \leq n \leq q - \sqrt{q} + 2$.

Bizonyítás. Vegyük $q + 1 - n$ diszjunkt Baer-részsík uniójának komplementerét, a 3.2.7-es megjegyzés és 3.2.12-es következmény alapján ez egy (k, n)-ív lesz. Kiszámoljuk, hogy mennyi a k. Egy Baer-részsíknak $q + \sqrt{q} + 1$ pontja van, így a lefogó ponthalmazunk $(q + \sqrt{q} + 1)(q + 1 - n)$ pontú lesz, így a komplementere:

$$k = (q^2 + q + 1) - (q + \sqrt{q} + 1)(q + 1 - n) =$$

$$= (q + \sqrt{q} + 1)(q - \sqrt{q} + 1) - (q + \sqrt{q} + 1)(q + 1 - n) =$$

$$= (q + \sqrt{q} + 1)(n - \sqrt{q})$$

Ezzel az állítást beláttuk. □

4. fejezet

Néhány fontosabb eredmény bemutatása a Hill cikkből

4.1. A $\max(n)_{2,q}$ felső korlátjának javítása

Ebben az alfejezetben (k, n)-ívek lehetséges maximális méretének megtalálásával fogunk foglalkozni, rögzített n mellett a [4] cikk alapján. Jelöljük ezt a szokott módon $\max(n)_{2,q}$-nak. Rögzített κ ponthalmazra, κ i-szelőinek számát jelöljük r_i-vel. A következő összefüggések állnak fenn az r_i-k között.

4.1.1. Lemma. (Standard egyenletek) Π_{q}*-ban tetszőleges* k *elemű* κ *ponthalmazra fennáll, hogy:*

(i) $\sum_{i=0}^{q+1} r_i = q^2 + q + 1$

(ii) $\sum_{i=1}^{q+1} ir_i = k(q + 1)$

(iii) $\sum_{i=2}^{q+1} i(i-1)r_i = k(k - 1)$

Bizonyítás. A bizonyításhoz a kettős leszámolási módszert használjuk.

(i) $\sum_{i=0}^{q+1} r_i = |\{e : e \in \Pi_q\}| = q^2 + q + 1$

(ii) $\sum_{i=1}^{q+1} ir_i = |\{(P, e) : P \in \kappa, P \in e\}| = k(q + 1)$

(iii) $\sum_{i=2}^{q+1} i(i-1)r_i = |\{(P, Q, e) : P \in \kappa, Q \in \kappa, P \in e, Q \in e\}| = k(k-1)$

Mindhárom esetben a bal oldalt az egyenesek, míg a jobb oldalt a pontok segítségével számoljuk meg. □

4.1.2. Lemma. *Legyen κ egy (k, n)-ív, ahol $k = (n-1)q + t$ és $0 \le t \le n$. Ekkor*

(i) $r_1 = r_2 = \ldots = r_{t-1} = 0$

(ii) $-tnr_0 + \sum_{i=t}^{n}(i-t)(n-i)r_i = qt^2 - (q^2 + nq)t + n^2q - nq$

Bizonyítás. **(i)** Tegyük fel, hogy l egy i-szelője κ-nak, ahol $i \ge 1$, és P legyen egy pontja az $l \cap \kappa$-nak. Megszámoljuk κ pontjait úgy, hogy körbenézünk a P pontból. Van i darab pontunk az l-ről (beleértve P-t); P ponton át még q darab egyenes megy, amit nem vizsgáltunk, és ezek mindegyikén még lehet $n-1$ pont a P ponton kívül. Tehát $k \le i + q(n-1)$. Tudjuk, hogy $k = (n-1)q + t$, így az előző egyenlőtlenségbe behelyettesítve $(n-1)q + t \le i + q(n-1)$ adódik, amiből következik, hogy $t \le i$. Tehát l legalább t pontban metszi κ-t.

(ii) Ha a lemma **(i)** állítását felhasználjuk a 4.1.1-es lemmában szereplő három egyenlőségre, akkor a következő egyenleteket kapjuk:

(a) $r_0 + \sum_{i=t}^{n} r_i = q^2 + q + 1$

(b) $\sum_{i=t}^{n} ir_i = (nq - q + t)(q + 1)$

(c) $\sum_{i=t}^{n} i(i-1)r_i = (nq - q + t)(nq - q + t - 1)$

Tekintsük a $(t-1+n)$**(b)** $-$ **(c)** $- tn$**(a)** egyenletet. Az egyenlet két oldalát külön-külön alakítjuk át. A bal oldal:

$$(t-1+n)\cdot\sum_{i=t}^{n} ir_i - \sum_{i=t}^{n} i\,(i-1)\,r_i - tn\left(r_0+\sum_{i=t}^{n} r_i\right) =$$
$$-tnr_0 + \sum_{i=t}^{n}(t-1+n)\,ir_i - \sum_{i=t}^{n} i\,(i-1)\,r_i - \sum_{i=t}^{n} tnr_i =$$
$$-tnr_0 + \sum_{i=t}^{n}\left((t-1+n)\,ir_i - i\,(i-1)\,r_i - tnr_i\right) =$$
$$-tnr_0 + \sum_{i=t}^{n} r_i\left((t-1+n)\,i - i\,(i-1) - tn\right) =$$
$$-tnr_0 + \sum_{i=t}^{n} r_i\left(it+in-i^2-tn\right) =$$
$$-tnr_0 + \sum_{i=t}^{n}(i-t)\,(n-i)\,r_i.$$

A jobb oldal:

$$(t-1+n)\,(nq-q+t)\,(q+1)-$$
$$-(nq-q+t)\,(nq-q+t-1) - tn\left(q^2+q+1\right) =$$
$$= -tq^2+t^2q+n^2q-nq-nqt = qt^2-\left(q^2+nq\right)t+n^2q-nq.$$

Az átalakítások után az egyenlet:

$$-tnr_0 + \sum_{i=t}^{n}(i-t)\,(n-i)\,r_i = qt^2-\left(q^2+nq\right)t+n^2q-nq$$

Így megkapjuk a 4.1.2-es lemma **(ii)** egyenletét. $\square$

4.1.3. Tétel. *Ha* $2 \le n \le q-1$, *akkor*

$$\max(n)_{2,q} \le (n-1)q + [f(n,q)],$$

ahol

$$f(n,q) = \begin{cases} q-n, & \textit{ha } n \le \frac{2q}{3} \\ g(n,q) = \frac{1}{2}\left(q+n-\frac{n}{q}\right) - \frac{1}{2}\left[\left(q+n-\frac{n}{q}\right)^2 - 4\left(n^2-n\right)\right]^2, & \\ & \textit{ha } \frac{2q}{3} < n \le q-1. \end{cases}$$

Bizonyítás. Legyen κ (k, n)-ív Π_q-ban, és legyen $n \leq q - 1$. Helyettesítsük be a $k = (n-1)q + t$ kifejezést, ahol $t \leq n$. Megmutatjuk, hogy $t \leq f(n, q)$; feltehető még, hogy $t > 0$, különben automatikusan igaz lenne.

Első esetben tegyük fel, hogy $r_0 \geq 2$. A két kitérő egyenesnek a metszéspontját jelöljük Q-val. Ha a Q pontból körbenézünk, látunk két egyenest, amelynek nincs metszéspontja κ-val, az összes többi egyenesen pedig legfeljebb n metszéspont lehet, így $k \leq (q-1)n$. Ezért $(n-1)q + t \leq (q-1)n$, így $t \leq q - n$.

Második esetben tegyük fel, hogy $r_0 \leq 1$. Felhasználjuk a 4.1.2-es lemma **(ii)** egyenletét. A $\sum_{i=t}^{n}(i-t)(n-i)r_i \geq 0$ mindig teljesül, mert t-től n-ig adunk össze, így minden i-re igaz, hogy $(i - t) \geq 0$ és $(n - i) \geq 0$. Ezért, ha ezt a tagot kihagyjuk az egyenletből a következő egyenlőtlenséget kapjuk (az oldalakat felcseréltük):

$$qt^2 - (q^2 + nq)t + n^2q - nq \geq -tn$$

Felhasználtuk, hogy $r_0 \leq 1$, így szerepel az egyenlőtlenség jobb oldalán $-tn$. Átvisszük a bal oldalra $-tn$-t és leosztunk q-val, így kapjuk a következő egyenlőtlenséget:

$$P_{n,q}(t) := t^2 - \left(q + n - \frac{n}{q}\right)t + n^2 - n \geq 0$$

Ha behelyettesítjük q-t, akkor $P_{n,q}(q) = (n-q)n < 0$, hiszen $2 \leq n \leq q - 1$. Amiatt, hogy $t \leq n < q$ és $P_{n,q}(q) < 0$, t legfeljebb akkora lehet, mint $P_{n,q}(t)$ kisebbik gyöke, ebben az esetben állhat fenn a $P_{n,q}(t) \geq 0$ egyenlőtlenség. A kisebbik gyök $g(n,q) := \frac{1}{2}\left(q + n - \frac{n}{q}\right) - \frac{1}{2}\left[\left(q + n - \frac{n}{q}\right)^2 - 4\left(n^2 - n\right)\right]^{\frac{1}{2}}$.

Most vegyük mind a két esetet. Így azt kapjuk, hogy $t \leq \max\{q-n, g(n,q)\}$. Kiszámítjuk, hogy hol melyik érték nagyobb:

$$\begin{array}{rcl} g(n,q) & \leq & q-n \\ & \Updownarrow & \\ \left(q+n-\dfrac{n}{q}\right)^2 - 4(n^2-n) & \geq & \left(q+n-\dfrac{n}{q}-2(q-n)\right)^2 \\ & \Updownarrow & \\ 3n^2 - 2qn - \dfrac{n^2}{q} & \leq & 0 \\ & \Updownarrow & \\ n & \leq & \dfrac{2q^2}{3q-1} = \dfrac{2}{3}q + \dfrac{2}{9} + \dfrac{2}{9(3q-1)}. \end{array}$$

Mivel az n és q egész számok, így az utolsó egyenlőtlenség csak akkor teljesül, ha $n \leq \frac{2}{3}q$. A $\max\{q-n, g(n,q)\}$ függvényt jelölje az $f(n,q)$ függvény, így a tételt beláttuk. $\square$

Az előző képlet elég bonyolult, így nehéz vele számolni, ezért mutatunk egy kevésbé pontos, ellenben szebb képletet a $g(n,q)$ helyett. Azt állítjuk, hogy $P_{n,q}(q-\sqrt{(q-n)q}) \leq 0$. Az egyenletbe $n = (1-s)q$-t helyettesítve, ahol $s \leq 1$ a következő egyszerűbb egyenletet kapjuk:

$$P_{(1-s)q,q}(q - q\sqrt{s}) = q\sqrt{s}(s^{\frac{3}{2}}q - sq + s - 1).$$

Könnyen meggondolható, hogy $(s^{\frac{3}{2}}q - sq + s - 1) \leq 0$, így valóban $P_{n,q}(q - \sqrt{(q-n)q}) \leq 0$. Tehát $q - \sqrt{(q-n)q}$ egy közelítő becslés $f(n,q)$-ra abban az esetben, ha az n közel van a q-hoz, vagyis:

4.1.4. Következmény. Ha $\frac{2}{3}q < n \leq q-1$, akkor

$$\max(n)_{2,q} \leq (n-1)q + q - \sqrt{(q-n)q}.$$

Az alábbi speciális esetet külön kiemeljük. Ha a 4.1.3-as tételbe behelyettesítjük az $n = q-1$-et, a következő képletet kapjuk:

4.1.5. Következmény.

$$\max(q-1)_{2,q} \leq (q-2)q + q - 1 - \sqrt{q}$$

Hill adott még egy leheletnyi javítást arra, amikor $\mathrm{PG}(2,q)$-ban az $n = q-1$ esetet vizsgáljuk.

4.1.6. Tétel. *Ha* $q \geq 8$, *akkor* $\max(q-1)_{2,\mathrm{PG}(2,q)} < (q-2)q + q - \frac{3}{2} - \sqrt{q + \frac{5}{4}}$.

Itt nem bizonyítjuk be, de a javítás a következőn alapul. A 4.1.2-es lemmából tudjuk, hogy ha veszünk egy $((n-1)q+t, n)$-ívet $\mathrm{PG}(2,q)$-ban, arra igaz az, hogy $r_1 = r_2 = \ldots = r_{t-1} = 0$. Ha tudjuk, hogy $n = q-1$, akkor egy kicsivel többet is lehet mondani.

4.1.7. Lemma. *Legyen* κ *egy* $((q-2)q-t, q-1)$*-ív* Π_q*-ban, ahol* $q \neq 2$*. Ekkor* $r_0 > 0$ *esetén* $r_t = 0$.

4.2. Összevetés néhány újabb eredménnyel

Ebben az alfejezetben összevetjük Hill eredményeit olyan újabb eredmények átfogalmazásával, amiket eredetileg lefogó ponthalmazokra mondtak ki.

Először nézzünk konkrét példákat kétszeres lefogó ponthalmazokra. A 3.2.10-es példában már láttunk egy $3q$ méretűt (három megfelelő egyenes). Mivel ez minden egyenesnek legalább 2 pontját tartalmazza, így a komplementere egy olyan ív lesz, amelynek $(q^2+q+1) - 3q$ pontja van, és minden egyenesnek legfeljebb $(q+1)-2$ pontját tartalmazza, vagyis $(q^2-2q+1, q-1)$-ív. A másik példa az, amikor két diszjunkt Baer-részsík unióját vesszük, melynek $2q+2\sqrt{q}+2$ pontja van, így a komplementere egy $(q^2-q-2\sqrt{q}-1, q-1)$-ív. Ezekből azonnal adódik a következő tétel:

4.2.1. Tétel.

(i) *Minden q-ra igaz az, hogy* $\max(q-1)_{2,q} \geq (q-2)q+1$.

(ii) *Ha q prímhatvány négyzete, akkor* $\max(q-1)_{2,q} \geq (q-2)q+q-1-2\sqrt{q}$.

Hill idevonatkozó eredménye 4.1.5-ös következmény szerint $\max(q-1)_{2,q} \leq (q-2)q+q-1-\sqrt{q}$. Ez a becslés az előző tétel **(ii)** pontja szerint bizonyos esetekben legfeljebb $\sqrt{q}$-val tér el a pontos értéktől.

A többszörös lefogó ponthalmazok elemszámára ismert alsó becslésekből kaphatunk felső becslést a (k,n)-ívek méretére.

4.2.2. Tétel. ([3]) *Legyen B egy t-szeres lefogó ponthalmaz egy tetszőleges q-adrendű projektív síkban,* $2 \leq t \leq q-3$. *Ekkor* $|B| \geq tq+\sqrt{(t-1)q}-t+3$.

Ezt a tételt, ha átfogalmazzuk $(k, q+1-t)$-ívekre és olyan formában adjuk meg, ahogy Hill prezentálta az eredményeit, a következő egyenlőtlenséget kapjuk: $\max(n)_{2,q} \leq (n-1)q+2q-\sqrt{(q-n)q}-n-1$. Hill eredménye 4.1.4-es következmény erősebb ennél a lefogó ponthalmazokra vonatkozó tételnél.

A következőkben $\mathrm{PG}(2,q)$-ra vonatkozó újabb eredményeket mutatunk be.

4.2.3. Tétel. (Ball–Blokhuis) *Legyen B egy 2-szeres lefogó ponthalmaz* $\mathrm{PG}(2,q)$-*ban, ahol* $q \geq 9$. *Ekkor* $|B| \geq 2(q+\sqrt{q}+1)$.

4.2.4. Következmény. Ha ezt a tétel átfogalmazzuk ívekre, akkor azt kapjuk, hogy $\max(q-1)_{2,\mathrm{PG}(2,q)} \leq q^2-q-2\sqrt{q}-1$. A 4.2.1-es tétel **(ii)** pontja alapján, ha q prímhatvány négyzete, azt is tudjuk, hogy $\max(q-1)_{2,\mathrm{PG}(2,q)} = q^2-q-2\sqrt{q}-1$.

A Hill-eredmény $\max(q-1)_{2,\mathrm{PG}(2,q)} < q^2-q-\sqrt{q+\frac{5}{4}}-\frac{3}{2}$, aminél a fenti körülbelül $\sqrt{q}$-val jobb, és bizonyos esetekben éles is.

4.2.5. Tétel. (Blokhuis–Strome–Szőnyi) *Legyen B egy t-szeres lefogó ponthalmaz $\mathrm{PG}(2,q)$-ban, $q = p^h$, ahol p prím és $h \geq 2$, melyre $|B| = t(q+1) + C$. Legyen $c_2 = c_3 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ és $c_p = 1$, ha $p > 3$.*

- ***(i)*** *Ha q nem négyzet és $t < \frac{q}{2} - c_p q^{\frac{2}{3}}$, akkor $C \geq c_p q^{\frac{2}{3}}$.*
- ***(ii)*** *Ha q négyzet, $q > 4$, $t < \frac{\sqrt[4]{q}}{2}$ és $C < c_p q^{\frac{2}{3}}$, akkor $C \geq t\sqrt{q}$, és B tartalmazza t diszjunkt Baer-részsík unióját.*

4.2.6. Következmény. Az előző tétel feltételeinek teljesülése mellett (vagyis $t = q+1-n$-nel) az **(i)** pontból $|B| \geq t(q+1)+c_p q^{\frac{2}{3}}$ adódik; ebből kapunk egy becslést a (k,n)-ívekre: $\max(n)_{2,\mathrm{PG}(2,q)} \leq (n-1)q + n - c_p q^{\frac{2}{3}}$. A **(ii)** pontnál hasonlóan járunk el, így a lefogó ponthalmazos egyenlőtlenség: $|B| \geq t(q+1)+t\sqrt{q}$, amiből $\max(n)_{2,\mathrm{PG}(2,q)} \leq (n-1)q + n - (q+1-n)\sqrt{q}$ következik. A második becslés éles, ha q négyzet a 3.3.7-es tétel alapján.

Vessük össze ezeket Hill eredményével. A lefogó ponthalmazokra vonatkozó becslések akkor működnek, ha a t kicsi, azaz n nagy, ezért célszerű $n = q-\varepsilon$-t választani, ahol ε-ra egy q-hoz képest kicsi egész számként gondolunk. **(i)**-ből, **(ii)**-ből és Hill eredményének egyszerűsített változatából, a 4.1.4-es következményből (a megfelelő feltételek mellett) rendre a következő becslések adódnak.

$$\max(n)_{2,\mathrm{PG}(2,q)} \leq (n-1)q + q - \varepsilon - c_p q^{\frac{2}{3}} \tag{4.1}$$

$$\max(n)_{2,\mathrm{PG}(2,q)} \leq (n-1)q + q - \varepsilon - (\varepsilon+1)\sqrt{q} \tag{4.2}$$

$$\max(n)_{2,q} \leq (n-1)q + q - \sqrt{\varepsilon q} \tag{4.3}$$

Abban az esetben, ha $\varepsilon < \sqrt[3]{q}$, akkor a (4.3) becslésben szereplő $\sqrt{\varepsilon q} < q^{\frac{2}{3}}$, tehát ilyenkor a (4.1) becslés a jobb. (Legalábbis $p > 3$ esetén biztosan.) A (4.2) azonnal láthatóan jobb eredményt ad, mint a (4.3). A (4.1) és (4.2) becslések nagy n-re tehát erősebbek; hátrányuk viszont, hogy erősebb feltételek mellett és csak desargues-i síkokon érvényesek.

Irodalomjegyzék

[1] Freud Róbert: Lineáris algebra, ELTE Eötvös kiadó, Budapest, 2009

[2] Hajós György: Bevezetés a geometriába, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest 1999

[3] Héger Tamás: A véges geometriák néhány gráfelméleti vonatkozása (tézisfüzet), Budapest, 2013

[4] Raymond Hill: Some problems concerning (k, n)-arcs in finite projective planes, Rendiconti del Seminario Matematico di Brescia 7, 1984

[5] Kiss Emil: Bevezetés az algebrába, TypoTeX 2007

[6] Kiss György–Szőnyi Tamás: Véges geometriák, Polygon, Szeged, 2001

[7] Reiman István: A geometria és határterületei, Gondolat, Budapest 1986