Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Kar

Matematika Bsc, Tanári szakirány

Gömbi geometria

Szakdolgozat

Készítette: Horváth Luca Zsóka

Témavezető: Szeghy Dávid

2014

Tartalomjegyzék

Bevezetés

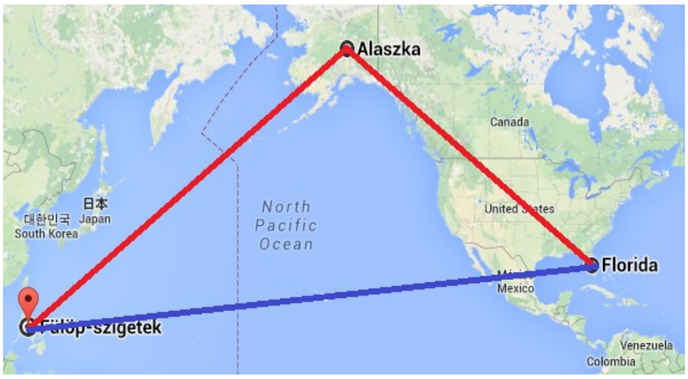
A gömbi geometria fogalmával egyetemi tanulmányaim során ismerkedtem meg. A Geometria előadások során csak érintőlegesen, a gömbi geometria alapjaival ismerkedtünk meg. Egy évfolyamtársam ajánlására jelentkeztem Lénárt István Tanár Úr „Nem euklideszi-geometriák az iskolákban” című kurzusára, ahol rengeteg új ismeretre tehettem szert. Édesanyám matematika tanár, az iskolában, ahol tanít volt Lénárt gömb és hozott haza nekem egyet. Az órán tanult tételeket definíciókat szívesen rajzoltam meg a gömbön, sokat segített ezek megértésében és nagyon érdekesnek találtam. A 10 éves kishúgom is megtalálta a szobámba a gömböt, rajzolgat rá a mai napig, és egy-két érdekességet ő maga is észrevett. Ezelőtt nem gondoltam volna, hogy a matematika egy olyan ága, amivel én is csak az egyetemen ismerkedtem meg, érdekes lehet egy általános iskolás számára. Ez a felismerés még inkább felkeltette az érdeklődésemet a gömbi geometria iránt és elhatároztam, ha az idő szűke miatt a tanórákra nem is, szakkörök alkalmával mindenképpen szeretném majd bevinni az iskolákba a geometria ezen területét is.

Mindig úgy gondoltam, hogy szakdolgozatom a geometria egyik területéről fog szólni, a matematika ezen ága mindig is közel állt hozzám és az egyetemen is a Geometria tárgy ment a legjobban. Hogy mért éppen a gömbi geometria? A fent említett kurzus és a vele járó élmények nagy szerepet játszottak e téma választásában. Emellett azonban azért is találtam érdekesnek ezt a témát, mert tanár szakosként a másik szakom a földrajz. Földrajz tanulmányaim során egy félévig jártam Térképészet szemináriumra, ahol sok érdekességet tanultam a térképek készítéséről, a gömbre vetítésről, azaz gömbi geometriában fontos tényezőkről.

A gömbbel a mindennapjaink során sokszor találkozunk, hiszen a természetben is rengeteg helyen megjelenik ez a geometriai alakzat. A legegyértelműbb maga a Föld, s így ha belegondolunk minden távolság, vagy területmérés, amit a mindennapjainkban is elvégzünk, akár lehetne gömbi távolság, illetve területmérés is.

Abban az időben, mikor felfedezték, hogy a föld nem lapos, hanem gömbölyű, a gömbi geometria segített a tájékozódásban a szárazföld és víz térképi ábrázolásánál. Ennek ellenére, már Kolumbusz előtt, az ősi görög és föníciai tengerészek is használták a gömbi geometria alapelveit az általuk ismert világ tengeri felfedezésében. A közhiedelemmel ellentétben, Ptolemaiosz és nem Kolumbusz Kristóf volt, aki felfedezte, hogy a föld gömbölyű. Ptolemaiosz a következőt mondta: Ha a föld lapos lenne kelettől nyugatig, a csillagok egyszerre jönnének fel a nyugatiaknak és a keletieknek, ami nem igaz. Továbbá, ha a föld lapos lenne északtó délig és vissza, a csillagok amik állandóan láthatóak mindenki számára, mindenhol ugyanazok lennének bárhová is mennénk, ami nem igaz. Azért tűnik laposnak az emberi szem számára, mert annyira kiterjedt. Már 2000 évvel ezelőtt is, a föld íves felszínének felfedezése óriási hatással volt arra, ahogy az emberek a földre tekintettek és ahogy térképeket készítettek róla.

Az egyik leghasznosabb nem-euklideszi geometria a gömbi geometria, ami a gömbfelületet írja le. A nem-euklideszi geometria elnevezés egy gyűjtőnév: minden, ami különbözik az euklideszi geometriától, ide tartozik. A gömbi-geometriát repülőgép-pilóták és hajóskapitányok használják, amikor Föld körüli útjukon tájékozódnak. A gömbi geometriának vannak meglepő következményei. Például, hogy Floridából a Fülöp-szigetekre repülővel Alaszkán keresztül vezet a legrövidebb út. A Fülöp-szigetek Floridától délre vannak – akkor mért rövidebb az út északra, Alaszkának? Mert Florida, Alaszka és a Fülöp-szigetek a gömbi geometriában egy egyenesre (úgynevezett főkörre) esnek. Egy másik érdekes sajátossága ennek a geometriának, hogy a háromszög szögösszege mindig nagyobb, mint 180°. Kicsi háromszögekre, mint amilyet például egy focipálya három szögletzászlója határoz meg, az összeg nagyon közel van 180°-hoz. Ellenben nagy háromszögekre (mint a New York, Los Angeles, Tampa városok által meghatározott háromszög) az összeg jóval több 180°-nál.



Dolgozatomban először a gömbi geometria alapjaival ismerkedhetünk meg, az euklideszi geometria alap definícióit vizsgáljuk meg a gömbön. Ezt követően a gömbháromszögek fontosabb tulajdonságait nézzük meg, majd a sokszögek oldal és szögösszegét vizsgáljuk meg, mely merőben eltér az euklideszi geometriában tanultaktól. Ezután a gömbháromszögek nevezetes tételei kerülnek elő, majd a gömbháromszögek nevezetes pontjait tekintjük át. Ezt követően a gömbi területmérésről olvashatunk, legvégül pedig a gömbi geometria néhány alkalmazása kerül elő.

Szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Szeghy Dávidnak, aki észrevételeivel és tanácsaival segítette munkámat. Köszönöm a türelmet és a nagy odafigyelést mellyel végigkísérte e dolgozat létrejöttét.

1. A gömbi geometria alapadatai

Az euklideszi-geometria alapján a legegyszerűbb elemek definiálásával kezdjük, hiszen ezek nélkül minden további okoskodás értelmetlen lenne. Így most definiáljuk az egyenes, a szakasz, a szög és a háromszög fogalmát.

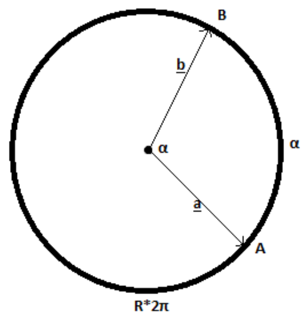
1.1. Definíció: Tekintsük az egységsugarú, O középpontú G gömböt.

Megjegyzés: Elegendő az egységsugarú gömböt nézni, hiszen bármely két gömb hasonló egymáshoz. Így minden, az egységsugarú gömbre belátott tétel igaz lesz bármely r sugarú gömbre is. Az egységsugarú gömbre kiszámolt formulákat ezután az r sugarú gömbre könnyen átírhatjuk, az egydimenziós formulákat r -rel, a kétdimenziós formulákat r^2 -el kell majd megszorozni.

Ha a gömböt síkokkal metszük el, akkor a síkmetszetek körök lesznek. Ezek közül a körök közül azoknak a legnagyobb a sugara, amelyeket úgy kapunk, hogy a metszősík átmegy a gömb középpontján. A maximális sugarú körök a gömbön a főkörök. Ezeket **gömbi egyenes**eknek nevezzük.

1.2 Definíció: Ha A és B a gömb két nem átellenes pontja, akkor az AOB sík kimetsz a gömbből egy főkört. Ennek az A és B pontok közé eső rövidebb íve, a két pontot összekötő **gömbi szakasz**, mely egyértelmű. Ha a pontok átellenes pontok, akkor végtelen sok π hosszúságú szakasz köti össze őket.

A szakasz definiálása után most nézzük meg, hogy a gömbön mit takar a gömbi szakasz hosszának fogalma, illetve hogy hogyan kaphatjuk ezt meg.



Belátható, hogy AB között a gömbi szakasz a legrövidebb görbe, mely a két pontot összeköti, ezért az A és B pontok gömbi távolsága, az őket összekötő gömbi szakasz hossza.
A gömbi szakasz hossza megegyezik a gömb középpontjából az A és B pontokba mutató vektorok által bezárt szög nagyságával. Hiszen egy R sugarú kör esetén a teljes körív hossza $R*2\pi$, az α szöghöz tartozó ívének hossza pedig $R*\alpha$, ahol α a két vektor által bezárt szög (lásd az ábrán). Így egységsugarú gömb esetében a gömbi szakasz hossza megegyezik a gömb

középpontjából az A és B pontokba mutató vektorok által bezárt szög nagyságával.

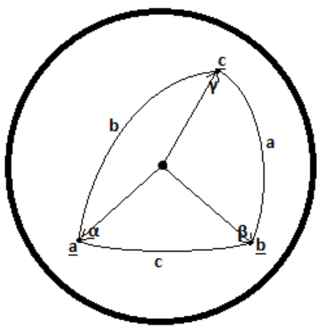
A gömbi geometria egyik érdekessége, hogy az euklideszi geometriával ellentétben itt létezik úgynevezett gömbkétszög. Ez tulajdonképpen a gömbi szög definíciója.

1.3 Definíció: Ha egy lapszög éle a gömb középpontján halad át, akkor a lapszög a gömbfelületből egy **gömbkétszög**et vág ki. A gömbkétszöget két félkör, a kétszög két oldala határolja, és ezek a kétszög két csúcsában (szögpont) találkoznak. A lapszög szögét, azaz a határoló félkörívek szögét a gömbkétszög **szög**ének mondjuk. Két főkör a gömbfelületet négy gömbkétszögre bontja.
A szögmérés a gömbön eltérő módon működik, mint az euklideszi geometriában. Találkozzon a gömbön a két gömbi szakasz az A pontban. Tekintsük a szakaszokhoz tartozó gömbi kétszöget és az ezt meghatározó félsíkokat. Ekkor a két félsík által bezárt szög adja a két szakasz által bezárt szöget.

A gömbkétszög megismerése után most definiáljuk a gömbháromszög fogalmát, illetve a gömbháromszög oldalait és szögeit.

1. 4 Definíció: Ha A, B, C pontok nincsenek egy főkörön, akkor közülük semelyik kettő sem átellenes, így páronként egyértelműen meghatároznak egy gömbi szakaszt. A három gömbi szakasz a gömböt két részre vágja. A két rész közül a kisebb területűt fogjuk az ABC **gömbháromszög**nek nevezni. Ezt normális vagy Euler háromszögnek hívjuk.

A gömbközéppontból a csúcsokhoz vezető $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ egységvektorok betűzését úgy választjuk, hogy ezek a vektorok a megadott sorrendben jobbrendszert alkossanak, hogy tehát $\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c} > 0$ teljesüljön.



Az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektorok hajlásszögeinek nagysága a **gömbháromszög oldalainak hossza**:

$$\sphericalangle(\underline{b}, \underline{c}) = a \qquad \sphericalangle(\underline{c}, \underline{a}) = b \qquad \sphericalangle(\underline{a}, \underline{b}) = c$$

A háromszög oldalai által bezárt szögek a **gömbháromszög szögei**: α, β, γ

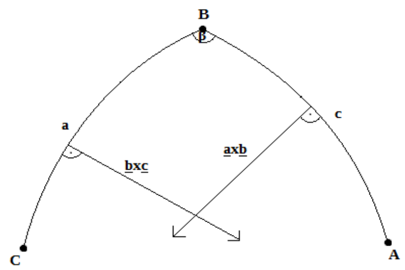
A továbbiakban azokat a háromszögeket tekintjük, amelyek hegyesszögűek, azaz ahol az

OA, OB, OC vektorok szögei hegyesszögűek. Erre azért van szükség mert derék, illetve tompa szöget megengedve formuláink egy része nem maradna az adott formában igaz, így az egyszerűség kedvéért tesszük fel ezt a feltevést, hogy ne kelljen különböző eseteket vizsgálni.

A gömbháromszög néhány fontos tulajdonsága:

1.5 A $\underline{b}\times\underline{c}, \underline{c}\times\underline{a}, \underline{a}\times\underline{b}$ vektorok a gömbháromszög oldalainak síkjára merőlegesek. Hajlásszögeik a gömbháromszög szögeinek kiegészítő szögei:

$$\sphericalangle(\underline{c}\times\underline{a}, \underline{a}\times\underline{b})=\pi-\alpha \qquad \sphericalangle(\underline{a}\times\underline{b}, \underline{b}\times\underline{c})=\pi-\beta \qquad \sphericalangle(\underline{b}\times\underline{c}, \underline{c}\times\underline{a})=\pi-\gamma$$



Hiszen a $\underline{b}\times\underline{c}$ merőleges a BOC síkjára és A felé mutat, azaz az a oldal síkjára merőleges és A felé mutat. Az $\underline{a}\times\underline{b}$ pedig merőleges a BOA síkjára és C felé mutat, azaz a c oldal síkjára merőleges és C felé mutat.
Lásd a mellékelt ábrát.

Most nézzük meg, mit kapunk, ha a gömbháromszög meghatározó vektorainak skaláris szorzatát vesszük.

1.6 Skaláris szorzat: $\underline{a}\,\underline{b}=|\underline{a}||\underline{b}|\cos(\underline{a}\,\textit{és}\,\underline{b}\,\textit{közrezárt szöge})$
Mivel $|\underline{a}|=1$ és $|\underline{b}|=1$, illetve $\underline{a}\,\textit{és}\,\underline{b}\,\textit{közrezárt szöge}\ c$, ezért: $\underline{a}\,\underline{b}=\cos(c)$

Ezután az érdekes felfedezés után érdemes megnézni a vektoriális szorzatot is.

1.7 Vektoriális szorzat: $|\underline{a}\times\underline{b}|=|\underline{a}||\underline{b}|\sin(\underline{a}\,\textit{és}\,\underline{b}\,\textit{közrezárt szöge})$
Mivel $|\underline{a}|=1$ és $|\underline{b}|=1$, illetve $\underline{a}\,\textit{és}\,\underline{b}\,\textit{közrezárt szöge}\ c$, ezért: $|\underline{a}\times\underline{b}|=\sin(c)$

2. Gömbháromszög, polárgömbháromszög

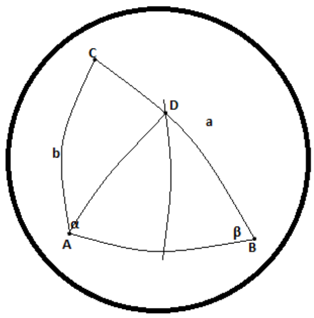
Miután az előző fejezetben megismerkedtünk a gömbi háromszögek alapelemeivel, most megismerkedünk a rájuk érvényes formulákkal, melyek az euklideszi geometriában is megjelennek. Ezután bevezetjük a polárgömbháromszög fogalmát, mely a gömbi geometria sajátossága.

Először nézzünk meg két olyan tételt, mely a gömbháromszög szögeinek és oldalainak különböző tulajdonságait tárja elénk.
A következőkben félgömbön a félgömbhéjat, azaz a 2 dimenziós felületet értjük.

2.1 Tétel: *Egy gömbháromszögben két oldal és az ezekkel szemközti szögek vagy páronként egyenlőek, vagy nem, s ekkor a nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van.*

Ha két oldal és szög egyenlő, akkor a gömbháromszög egyenlőszárú (szimmetrikus), ha pedig mindhárom oldal és szög egyenlő, akkor a gömbháromszög szabályos (egyenlő oldalú).
Bizonyítás:
Tekintsük az ABC gömbháromszög A, B csúcsainál elhelyezkedő szögeit és ezekkel szemközti oldalait. Ha a C az AB oldalt merőlegesen felező körön van, akkor a főkör síkjára vonatkozó szimmetriából következik, hogy a vizsgált szögek és oldalak páronként egyenlők.

Megjegyzés: Az euklideszi geometriához hasonlóan, az oldalfelező merőleges azon pontok halmaza, melyek egyenlő gömbi távolságra vannak a szakaszvégpontoktól.



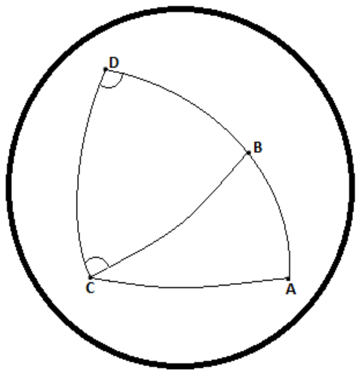
Ha a C pont az említett főkör által határolt egyik, például az A pontot tartalmazó félgömb belsejében van, akkor $a>b$ és feladatunk az $\alpha>\beta$ egyenlőtlenség bizonyítása. Minthogy B és C más-más félgömbön van, az a oldal a két félgömb határát D pontban metszi. Az AD gömbi szakasz kettévágja az α szöget, hiszen az α szögű gömbkétszög tartalmazza a gömbháromszöget. A már említett szimmetriából következik, hogy β a BAD gömbi szöggel egyenlő, tehát az ezt részként tartalmazó BAC gömbi szögnél, azaz α szögnél kisebb.

2.2 Tétel: *Egy gömbháromszög két oldalának összege a harmadik oldalnál nagyobb. (Háromszög-egyenlőtlenség)*

Bizonyítás:

Nyilvánvaló a tétel állítása akkor, ha a szóban forgó két oldal összege 180 gömbi egység, vagy annál nagyobb, hiszen a gömbháromszög harmadik oldala 180 gömbi egységnél kisebb. Ha tehát az ABC gömbháromszög oldalaira vonatkozó $AB+BC>AC$ egyenlőtlenséget akarjuk bizonyítani, feltehetjük, hogy az AB oldalt a BC oldallal egyenlő BD ívvel meghosszabbítva, félkörnél kisebb ABD ívhez jutunk.

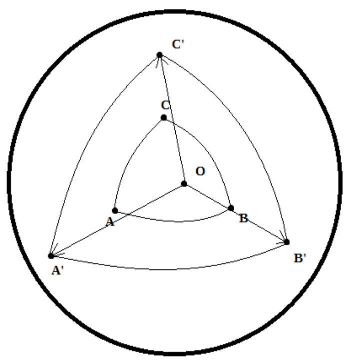
Igaz ekkor, hogy ez az ív az ACD gömbháromszög egyik oldala, s ezt a gömbháromszöget a CB ív kettévágja. A BCD gömbháromszögnek a C és D csúcsoknál elhelyezkedő szögei az előző tétel szerint egyenlőek. Az ACD gömbháromszög C csúcsánál ezért nagyobb szög helyezkedik el, mint a D csúcsnál. Ebből, ismét az előző tétel alapján következik, hogy az ABD ív az AC ívnél hosszabb. Azaz $AB+BC>AC$ és mivel $BC=BD$, ezért $AB+BD>AC$.



A gömbi geometriában minden háromszöghöz tartozik egy úgynevezett polárgömbháromszög. Most ezt a háromszöget definiáljuk, majd megnézzük ennek a tulajdonságait.

2.3 Definíció: A gömbháromszög oldalainak síkjára a gömb középpontjában merőlegest állítunk. E merőlegesek által a gömbfelületből kimetszett két-két pont közül azokat választjuk ki, amelyeket az oldal síkja a gömbháromszögtől nem választ el, amelyek tehát a harmadik csúccsal negyedkörnél kisebb főkörív köt össze. Ez a három pont egy gömbháromszöget, az eredeti gömbháromszög **polárgömbháromszög**ét határozza meg.

Az eredeti gömbháromszög a oldalához a polárgömbháromszög $\underline{\grave{a}}$ csúcsa tartozik.



Megjegyzés: A definícióban szereplő konstrukció egyértelmű.

A gömb középpontjából a polárgömbháromszög csúcsai felé mutató vektorok: $\underline{b}\times\underline{c}, \underline{c}\times\underline{a}, \underline{a}\times\underline{b}$

Polárgömbháromszög oldalai: $\grave{\underline{a}}=\frac{\underline{b}\times\underline{c}}{|\underline{b}\times\underline{c}|}$ $\quad \grave{\underline{b}}=\frac{\underline{c}\times\underline{a}}{|\underline{c}\times\underline{a}|}$ $\quad \grave{\underline{c}}=\frac{\underline{a}\times\underline{b}}{|\underline{a}\times\underline{b}|}$

Most nézzünk meg két tételt, amelyek a gömbháromszög és a polárgömbháromszög kapcsolatát vizsgálják.

2.4 Tétel: *Bármely gömbháromszög a saját polárgömbháromszögének a polárgömbháromszöge. Tehát párba állíthatjuk a gömbháromszögeket, ahol egy háromszöghöz az ő polárisát rendeltük és neki, pedig az eredeti felel meg. Így látszik, hogy a polaritás egy bijektív megfeleltetés a gömbháromszögek körében.*

Bizonyítás:

Az ABC gömbháromszöghöz tartozó $A_1B_1C_1$ polárgömbháromszöget az jellemzi, hogy a $BA_{1,}CA_1;CB_{1,}AB_1;AC_{1,}BC_1$ főkörívek negyedkörök, az $AA_{1,}BB_{1,}CC_1$ főkörívek pedig negyedkörnél kisebbek.

Ha itt az A, A_1 pontok, valamint a B, B_1 és C, C_1 pontok szerepét felcseréljük, ugyanezekhez az ívekhez jutunk. Ez azt jelenti, hogy ha az $A_1B_1C_1$ gömbháromszögből indulunk ki, akkor az ABC gömbháromszög elégíti ki a polárgömbháromszöget jellemző, a 2.3 Definícióban szereplő feltételeket. Így a fenti Megjegyzés miatt az $A_1B_1C_1$ háromszög polárgömbháromszöge az ABC háromszög.

2.6 Tétel: *Egy gömbháromszög és a hozzá tartozó polárgömbháromszög esetén a gömbháromszög oldalát a polárgömbháromszög megfelelő szöge 180°-ra egészíti ki.*

A megfelelő szó azt jelenti, hogy az AB *oldalnak a* C_1 *csúcsú szög felel meg, stb. Ha a két polárgömbháromszög egymásnak megfelelő adata* $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$, *valamint rendre* $\alpha_{1,}\beta_{1,}\gamma_{1,}a_{1,}b_{1,}c_{1,}$ *akkor a tétel szerint:*

$$a+\alpha_1=b+\beta_1=c+\gamma_1=\pi,$$

$$a_1+\alpha=b_1+\beta=c_1+\gamma=\pi.$$

Bizonyítás:

A 2.4 tételre való tekintettel elég pl. csak a $b_1+\beta=\pi$ állítást igazolnunk. Ezt azonban már egy korábbi tételben megtettük (1.6), hiszen b_1 oldal a polárgömbháromszög csúcsai felé mutató $\underline{a}\times\underline{b}, \underline{b}\times\underline{c}$ vektorok hajlásszöge.

Polárgömbháromszög oldalainak polárisa: $(\grave{\underline{a}})=\frac{\grave{\underline{b}}\times\grave{\underline{c}}}{|\grave{\underline{b}}\times\grave{\underline{c}}|}=\frac{(\underline{c}\times\underline{a})\times(\underline{a}\times\underline{b})}{|\grave{\underline{b}}\times\grave{\underline{c}}|}=\frac{(\underline{c}\,\underline{a}\,\underline{b})\underline{a}}{|\grave{\underline{b}}\times\grave{\underline{c}}|}=\frac{\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}}{|\grave{\underline{b}}\times\grave{\underline{c}}|}\underline{a}$, ahol

$\frac{\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}}{|\grave{\underline{b}}\times\grave{\underline{c}}|}>0$, mivel $\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}>0$ és mivel $|(\grave{\underline{a}})|=1$ és $|\underline{a}|=1$ ezért: $(\grave{\underline{a}})=\underline{a}$

Megjegyzés: A fenti megállapításból az alábbi érdekességet vehetjük észre:

$$\frac{\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}}{|\grave{\underline{b}}\times\grave{\underline{c}}|}=1.$$

3. Szabályos gömbi sokszögek oldalösszege és szögösszege

A síkgeometriától eltérően a gömbi geometriában a szabályos sokszögek szögösszeg nem a csúcsok számától függ, hanem a sokszögek „nagyságától”, ahogy majd a területnél látni fogjuk (lásd 6. fejezet).
Mivel a gömbi geometriában a sokszögek oldalait a gömb középpontjából a csúcsokba mutató vektorok hajlásszöge határozza meg, így az első észrevétel, hogy a gömbi sokszögek oldalait fokban mérjük. Ennek következményeként észrevehetjük továbbá, hogy a sokszögek oldalösszeg is bizonyos határok között mozog.
Ebben a fejezetben ezeket a határokat fogjuk megvizsgálni.

Először nézzük meg a gömbi egy- és kétszögeket, melyek a gömbi geometria sajátosságai, ezt követően pedig a gömbháromszöget. A gömbi sokszögek esetében a gömbháromszögnél belátott határokra fogunk alapozni.

3.1 A gömbi geometria érdekessége, hogy a gömbi kétszög mellett, beszélhetünk gömbi egyszögről is, mely tulajdonképpen egy egyenes a gömbön. A gömbi egyszög oldalösszege 360°, a gömbi egyszög szögösszege 180°.

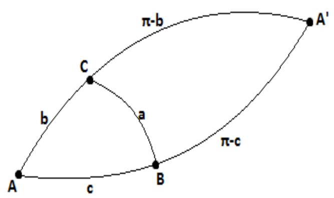
3.2 A gömbi kétszög oldalösszege 360°, a gömbi kétszög szögösszege pedig 0° és 360° között változhat (a 0° és 180° szögek elfajult gömbi kétszögek).

3.3 A gömbi (Euler) háromszög belső szögeinek összege 180° és 540° között változhat, míg az oldalösszeg 0° és 360° között mozog.

3.4 Tétel: *Bármely gömbháromszög oldalösszege kisebb, mint* 2π.

Bizonyítás:

Az ABC gömbháromszög AB és AC oldalait hosszabbítsuk meg az őket tartalmazó főkörök mentén a B, illetve a C pontokon túl az A ponttal átellenes $\grave{A}$ metszéspontig. Az így előálló $\grave{A}BC$ gömbháromszög oldalai rendre $a, \pi-b, \pi-c$, ahol az a, b, c az ABC gömbháromszög oldalai a szokásos jelölések szerint. A háromszög-egyenlőtlenséget az $\grave{A}BC$ gömbháromszögre alkalmazva a $(\pi-b)+(\pi-c)>a$ egyenlőtlenséget kapjuk, ahonnan átrendezéssel $a+b+c<2\pi$ adódik.



3.5 Tétel: *Bármely gömbháromszögben a szögek összege* π *-nél nagyobb.*

Bizonyítás:

Írjuk föl a (3.4)-beli egyenlőtlenséget a poláris gömbháromszögoldalaira: $\grave{a}+\grave{b}+\grave{c}<2\pi$, majd alkalmazzuk a (2.6)-beli összefüggéseket. Ezzel $(\pi-\alpha)+(\pi-\beta)+(\pi-\gamma)<2\pi$, ahonnan átrendezéssel $\pi<\alpha+\beta+\gamma$ adódik.

3.6 Tétel: *Bármely gömbháromszögben a szögek összege maximum* $540°$.

Bizonyítás:

A gömbháromszögben minden szög maximum $180°$ lehet, így a háromszög belső szögeinek össze maximum $3*180°$, azaz $540°$.

Definíció: A gömbi geometriában n egyenes nem egy darab $n-szöget$ határoz meg, hanem sokkal többet, például három egyenes a gömbön nyolc darab háromszöget határoz meg. Ezek közül a legkisebb területű, konvex $n-szöget$ nevezzük **gömbi Euler sokszög**nek.

3.7 Tétel: $n\geqslant 2$ *esetében (* $n=1$ *esetében nem Euler sokszögről beszélünk) a gömbi Euler n-szög belső szögeinek összege:*

$$(n-2)*180°\leq\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\leq n*180°$$

Bizonyítás:

Mivel az euklideszi geometriához hasonlóan a gömbi geometriában is minden gömbi Euler sokszög felbomlik gömbháromszögekre, így a belső szögek összegének meghatározásánál a gömbháromszög belső szögeinek összegéből tudunk kiindulni.

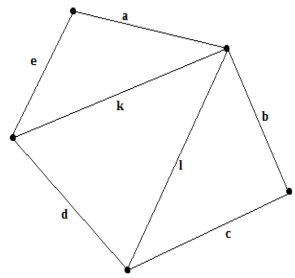
Az alsó határ meghatározása egyértelmű, hiszen az előző tétel szerint, minden gömbháromszögben a belső szögek összege nagyobb, mint 180° és mivel minden Euler n-szög $n-2$ gömbháromszögre bontható fel, így az alsó határ egyértelműen $(n-2)*180°$ lesz.

A felső határ meghatározása is egyértelmű, hiszen mindegyik szög maximum $180°$ lehet, így n szög esetén a felső határ $n*180°$.

Gömbi Euler n-szög oldalösszege 0° és 360° közé esik.

3.8 Lemma: *Minden gömbi konvex sokszögben az egyik oldal hossza, biztosan kisebb a többi oldal hosszának összegénél.*

Bizonyítás:



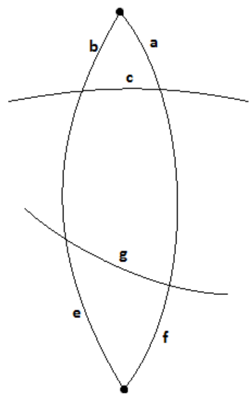
Tekintsük az ábrán látható ötszöget. Azt szeretnénk belátni, hogy $a+b+c+d>e$. Ez a háromszög-egyenlőtlenséget használva könnyen bebizonyítható.

Tekintsük a b,c,l oldalú háromszöget. Tudjuk, hogy $b+c>l$, így a fenti egyenlőtlenséget átalakítva megkapjuk, hogy $a+b+c+d>a+l+d$. Tekintsük most a d,k,l oldalú háromszöget. Tudjuk, hogy $l+d>k$, így a fenti egyenlőtlenséget átalakítva megkapjuk, hogy $a+b+d+c>a+l+d>a+k$. Tekintsük végül az a,e,k oldalú háromszöget. Tudjuk, hogy $a+k>e$, a fenti egyenlőtlenséget újra átalakítva megkapjuk, hogy $a+b+c+d>e$, azaz beláttuk a fenti egyenlőtlenséget.

Hasonló elv alapján láthatjuk be egy tetszőleges n-szög esetén, kihasználva a konvexitást. Azaz háromszögeket levágva, mint az ötszög esetén a háromszög-egyenlőtlenség alkalmazásával tudjuk bizonyítani az egyenlőtlenséget.

3.9 Tétel: *A gömbi Euler n-szög oldalösszege kisebb, mint* 2π.

Bizonyítás:



A bizonyítás során a gömbi sokszögeket úgy képezzük, hogy a gömbkétszögbet kettészeljük, így kapunk két gömbháromszöget. Ezt követően a gömbháromszögből újabb gömbháromszöget metszünk le, így eljutunk a gömbnégyszöghöz. Ezután egy újabb gömbi sokszöget metszünk ki és eljutunk a gömbötszöghöz és így tovább.

Vegyünk tehát egy gömbkétszöget, ennek oldalösszeg $360°$. Szeljük el ezt a gömbkétszöget egy egyenessel, ekkor egy gömbháromszöget kapunk, melynek oldalösszege biztosan kisebb lesz, mint $360°$ a háromszög-egyenlőtlenség miatt. Hiszen az ábrát nézve $b+a>c$.

Ezután a keletkezett háromszöget is szeljük el egy egyenessel, így gömbnégyszöghöz jutunk. A keletkezett alakzat oldalösszege biztosan kisebb lesz az előző alakzat oldalösszegénél, ugyancsak a háromszög-egyenlőtlenség miatt. Hiszen az ábrát tekintve $e+f>g$.

Így folytatva a „szeletelést” minden keletkező gömbi Euler sokszög oldalösszege tehát kisebb lesz, mint $360°$, hiszen a fenti Lemma szerint bármilyen sokszöget szelünk is le a már meglévő sokszögünkből, úgy a „leszelt” sokszög oldalösszeg nagyobb lesz a keletkezett oldanál.

4. Gömbi háromszögek nevezetes tételei

Ebben a fejezetben az euklideszi geometriából jól ismert szinusz- és koszinusztételeket fogjuk megvizsgálni gömbháromszögek esetében.
Nézzük először a gömbi szinusztétel.

4.1 Gömbi szinusztétel

4.1.1 Tétel: *A gömbháromszög oldalainak szinuszai úgy aránylanak egymáshoz, mint a szemközti szögek szinuszai. Azaz:*

$$\sin(a)/\sin(b)/\sin(c)=\sin(\alpha)/\sin(\beta)/\sin(\gamma)$$

Bizonyítás:
Képezzük az $(\underline{a}\times\underline{b})\times(\underline{b}\times\underline{c})$ kifejezést!

$$(\underline{a}\times\underline{b})\times(\underline{b}\times\underline{c})=(\underline{a}(\underline{b}\times\underline{c}))\underline{b}-(\underline{b}(\underline{b}\times\underline{c}))\underline{a}=(\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c})\underline{b}$$

Mivel $\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}>0$ és $\underline{b}$ egységvektor, ezért:

$$|(\underline{a}\times\underline{b})\times(\underline{b}\times\underline{c})|=\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}$$

A vektoriális szorzat tulajdonságai miatt és mivel $\sphericalangle((\underline{a}\times\underline{b}),(\underline{b}\times\underline{c}))=\beta$, így:

$$|\underline{a}\times\underline{b}||\underline{b}\times\underline{c}|\sin(\beta)=\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}$$

Az 1.7 összefüggést használva:

$$\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}=\sin(c)\sin(a)\sin(\beta)$$

Ha $\underline{a},\underline{b},\underline{c}$ vektorok helyett rendre $\underline{c},\underline{a},\underline{b}$ vektorokat írunk, akkor:

$$\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}=\underline{c}\,\underline{a}\,\underline{b}=\sin(b)\sin(c)\sin(\alpha)$$

Mivel $\sin(c)\neq 0$, azaz $c\neq 0,\pi$:
A két eredményt összevetve: $\sin(a)\sin(\beta)=\sin(\alpha)\sin(b)$

4.2 Gömbi koszinusztételek

A gömbi geometria sajátossága, hogy a távolságmérés valójában szögmérés, hiszen a sokszögek oldalait a gömb középpontjából a csúcsokba mutató vektorok hajlásszöge határozza meg. Ezért a gömbi geometriában két koszinusztételről beszélhetünk, egyik a gömbháromszög szögeire, míg a másik a gömbháromszög oldalaira vonatkozik.
Először nézzük a gömbháromszög oldalaira vonatkozó koszinusztételt.

4.2.1 Tétel: *A gömbháromszög szokott módon jelölt oldalaira és szögeire:*

$$\cos(c)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)\cos(\gamma)$$

Bizonyítás:

Képezzük az $(\underline{a}\times\underline{b})(\underline{b}\times\underline{c})$ kifejezést!

$$(\underline{a}\times\underline{b})(\underline{b}\times\underline{c})=((\underline{a}\times\underline{b})\times\underline{b})\underline{c}=((\underline{a}\,\underline{b})\underline{b}-(\underline{b}\,\underline{b})\underline{a})\underline{c}=(\underline{a}\,\underline{b})(\underline{b}\,\underline{c})-\underline{a}\,\underline{c}$$

Egyrészt a bal oldal:

$$(\underline{a}\times\underline{b})(\underline{b}\times\underline{c})=|\underline{a}\times\underline{b}||\underline{b}\times\underline{c}|\cos(\Pi-\beta)=-\sin(c)\sin(a)\cos(\beta)$$

Másfelől viszont a jobb oldal az 1.6 összefüggés alapján:

$$(\underline{a}\,\underline{b})(\underline{b}\,\underline{c})-\underline{a}\,\underline{c}=\cos(c)\cos(a)-\cos(b)$$

Így:

$$-\sin(c)\sin(a)\cos(\beta)=\cos(c)\cos(a)-\cos(b)$$

Átrendezve:

$$\cos(b)=\cos(c)\cos(a)+\sin(c)\sin(a)\cos(\beta)$$

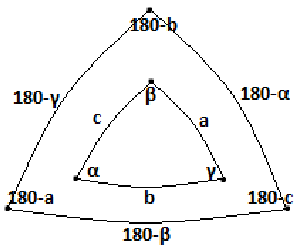
Ezután nézzük meg a másik, a gömbháromszög szögeire vonatkozó koszinusztételt.

4.2.2 Tétel: *A gömbháromszög szokott módon jelölt szögeire és oldalaira:*

$$\cos(\gamma)=-\cos(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\alpha)\sin(\beta)\cos(c)$$

Bizonyítás:

Tekintsük az a,b,c oldalú, α,β,γ szögű gömbháromszög polárháromszögét és írjuk fel erre a már ismert, oldalakra vonatkozó koszinusztételt.



$$\cos(180-\gamma)=\cos(180-\alpha)\cos(180-\beta)+\sin(180-\alpha)\sin(180-\beta)\cos(180-c)$$

Mivel $\cos(180-\alpha)=-\sin(\alpha)$ és $\sin(180-\alpha)=\sin(\alpha)$, ezért:

$$-\cos(\gamma)=(-\cos(\alpha))(-\cos(\beta))+\sin(\alpha)\sin(\beta)(-\cos(c))$$

Mindkét oldalt beszorozva (-1) -el:

$$\cos(\gamma)=-\cos(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\alpha)\sin(\beta)\cos(c)$$

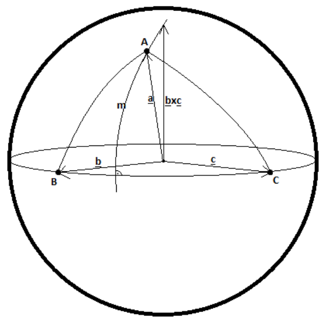
5. Gömbháromszög nevezetes pontjai

A továbbiakban azokat a háromszögeket tekintjük, amelyek hegyesszögűek, azaz ahol az OA, OB, OC vektorok szögei hegyesszögűek.
Először nézzük a gömbháromszög magasságpontját.

5.1 Magasságpont meghatározása a gömbön

Az euklideszi geometriához hasonlóan a gömbi geometriában is a magasságvonal a csúcsot a szemközti oldalegyenessel összekötő szakasz, ezek metszéspontja pedig a magasságpont.

m_a meghatározó vektora: $\underline{a}\times(\underline{b}\times\underline{c})$
m_b meghatározó vektora: $\underline{b}\times(\underline{c}\times\underline{a})$
m_c meghatározó vektora: $\underline{c}\times(\underline{a}\times\underline{b})$



A magasságpont meghatározásához kell: $m_a \cap m_b = m_c \cap m_a$
Azaz:

$$(\underline{a}\times(\underline{b}\times\underline{c}))\times(\underline{b}\times(\underline{c}\times\underline{a}))=(\underline{c}\times(\underline{a}\times\underline{b}))\times(\underline{a}\times(\underline{b}\times\underline{c}))$$

Kifejtései tétel:

$$\underline{a}\times(\underline{b}\times\underline{c})=(\underline{a}\,\underline{c})\underline{b}-(\underline{c}\,\underline{a})\underline{b}$$

A kifejezés bal oldala:

$$((\underline{a}\,\underline{c})\underline{b}-(\underline{a}\,\underline{b})\underline{c})\times((\underline{b}\,\underline{a})\underline{a}-(\underline{b}\,\underline{c})\underline{c})=-(\underline{a}\,\underline{c})(\underline{b}\,\underline{c})(\underline{b}\times\underline{a})+(\underline{a}\,\underline{c})(\underline{b}\,\underline{a})(\underline{b}\times\underline{c})+(\underline{a}\,\underline{b})(\underline{b}\,\underline{c})(\underline{c}\times\underline{a})-(\underline{a}\,\underline{b})(\underline{b}\,\underline{a})(\underline{c}\times\underline{c})$$

ahol,

$$(\underline{a}\,\underline{b})(\underline{b}\,\underline{a})(\underline{c}\times\underline{c})=0$$

A kifejezés jobb oldala:

$$((\underline{c}\,\underline{b})\underline{a}-(\underline{c}\,\underline{a})\underline{b})\times((\underline{a}\,\underline{c})\underline{b}-(\underline{a}\,\underline{b})\underline{c})=(\underline{c}\,\underline{b})(\underline{a}\,\underline{c})(\underline{a}\times\underline{b})-(\underline{c}\,\underline{b})(\underline{a}\,\underline{b})(\underline{a}\times\underline{c})-(\underline{c}\,\underline{a})(\underline{a}\,\underline{c})(\underline{b}\times\underline{b})+(\underline{c}\,\underline{a})(\underline{a}\,\underline{b})(\underline{b}\times\underline{c})$$

ahol,

$$(\underline{c}\,\underline{a})(\underline{a}\,\underline{c})(\underline{b}\times\underline{b})=0$$

A kifejezés két oldalát összevetve:

$$-(\underline{a}\,\underline{c})(\underline{b}\,\underline{c})(\underline{b}\times\underline{a})=(\underline{c}\,\underline{b})(\underline{a}\,\underline{c})(\underline{a}\times\underline{b})$$

$$(\underline{a}\,\underline{c})(\underline{b}\,\underline{a})(\underline{b}\times\underline{c})=(\underline{c}\,\underline{a})(\underline{a}\,\underline{b})(\underline{b}\times\underline{c})$$

$$(\underline{a}\,\underline{b})(\underline{b}\,\underline{c})(\underline{c}\times\underline{a})=-(\underline{c}\,\underline{b})(\underline{a}\,\underline{b})(\underline{a}\times\underline{c})$$

Azaz:

$$baloldal = jobboldal \Rightarrow ugyanazt\ a\ pontot\ adják \Rightarrow m_a, m_b\ és\ m_c\ ugyanazon\ a\ ponton\ megy\ át$$

Tehát a gömbháromszögnek létezik magasságpontja.

Magasságpont meghatározása a polárgömbháromszög oldalainak segítségével:

$$(\underline{c}\,\underline{b})(\underline{a}\,\underline{c})(\underline{a}\times\underline{b}) = \cos(\underline{a})\cos(\underline{b})\sin(\underline{c})\grave{\underline{c}}$$

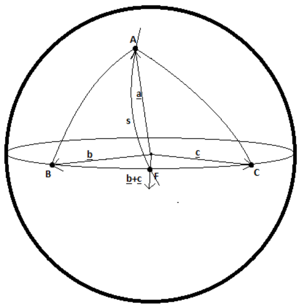
$$-(\underline{c}\,\underline{b})(\underline{a}\,\underline{b})(\underline{a}\times\underline{c}) = \cos(\underline{a})\cos(\underline{c})\sin(\underline{b})\grave{\underline{b}}$$

$$(\underline{c}\,\underline{a})(\underline{a}\,\underline{b})(\underline{b}\times\underline{c}) = \cos(\underline{b})\cos(\underline{c})\sin(\underline{a})\grave{\underline{a}}$$

Tehát a magasságpont: $\cos(\underline{a})\cos(\underline{b})\sin(\underline{c})\grave{\underline{c}} + \cos(\underline{a})\cos(\underline{c})\sin(\underline{b})\grave{\underline{b}} + \cos(\underline{b})\cos(\underline{c})\sin(\underline{a})\grave{\underline{a}}$

5.2 Súlypont meghatározása gömbön

Az euklideszi geometriához hasonlóan a gömbi geometriában is a súlyvonal a csúcsot a szemközti oldal felezőpontjával összekötő szakasz, ezek metszéspontja pedig a súlypont.



s_a meghatározása: $(\underline{b}+\underline{c})\times\underline{a}$

s_b meghatározása: $(\underline{a}+\underline{c})\times\underline{b}$

s_c meghatározása: $(\underline{a}+\underline{b})\times\underline{c}$

A súlypont meghatározáshoz kell:

$$s_a \cap s_b = s_a \cap s_c$$

Ehhez tudnunk kell:

$$((\underline{b}+\underline{c})\times\underline{a})\times((\underline{a}+\underline{c})\times\underline{b}) = (\underline{b}\times\underline{a})\times(\underline{a}\times\underline{b}) + (\underline{b}\times\underline{a})\times(\underline{c}\times\underline{b}) + (\underline{c}\times\underline{a})\times(\underline{a}\times\underline{b}) + (\underline{c}\times\underline{a})\times(\underline{c}\times\underline{b})$$

Itt:

$$(\underline{b}\times\underline{a})\times(\underline{a}\times\underline{b}) = 0$$

$$(\underline{b}\times\underline{a})\times(\underline{c}\times\underline{b}) = ((\underline{b}\times\underline{a})\underline{b})\underline{c} - ((\underline{b}\times\underline{a})\underline{c})\underline{b} = (\underline{b}\,\underline{a}\,\underline{b})\underline{c} - (\underline{b}\,\underline{a}\,\underline{c})\underline{b} = -(\underline{b}\,\underline{a}\,\underline{c})\underline{b}$$

$$(\underline{c}\times\underline{a})\times(\underline{a}\times\underline{b}) = ((\underline{c}\times\underline{a})\underline{b})\underline{a} - ((\underline{c}\times\underline{a})\underline{a})\underline{b} = (\underline{c}\,\underline{a}\,\underline{b})\underline{a} - (\underline{c}\,\underline{a}\,\underline{a})\underline{b} = (\underline{c}\,\underline{a}\,\underline{b})\underline{a}$$

$$(\underline{c}\times\underline{a})\times(\underline{c}\times\underline{b}) = ((\underline{c}\times\underline{a})\underline{b})\underline{c} - ((\underline{c}\times\underline{c})\underline{c})\underline{b} = (\underline{c}\,\underline{a}\,\underline{b})\underline{c} - (\underline{c}\,\underline{a}\,\underline{c})\underline{b} = (\underline{c}\,\underline{a}\,\underline{b})\underline{c}$$

Így:

$$((\underline{b}+\underline{c})\times\underline{a})\times((\underline{a}+\underline{c})\times\underline{b}) = -(\underline{b}\,\underline{a}\,\underline{c})\underline{b} + (\underline{c}\,\underline{a}\,\underline{b})\underline{a} + (\underline{c}\,\underline{a}\,\underline{b})\underline{c} = (\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c})\underline{a}(\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c})\underline{b}(\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c})\underline{c} = (\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c})(\underline{a}+\underline{b}+\underline{c})$$

$$(\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c})(\underline{a}+\underline{b}+\underline{c})\, független\ s_a, s_b\ és\ s_c\ választásától \Rightarrow s_a, s_b\ és\ s_c\ ugyanazok\ a\ ponton\ megy\ át$$

Tehát a gömbháromszögben létezik súlypont.

Súlypont meghatározása: $(\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c})(\underline{a}+\underline{b}+\underline{c})$

5.3 Köré írt kör középpontjának meghatározása a gömbön

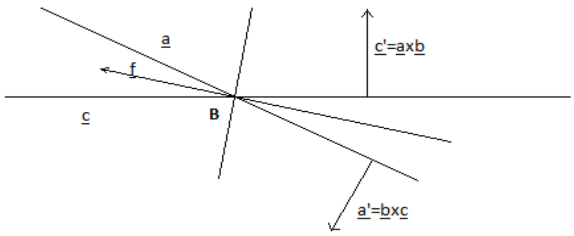
Az euklideszi geometriához hasonlóan a gömbi geometriában is a köré írt kör középpontját az oldalfelező merőlegesek metszéspontja határozza meg.
Tekintsük az ABC pontok által meghatározott S síkot, mely kimetszi a gömbből a háromszög köré írt kört. A köré írt kör középpontjába (o_k) mutató vektor iránya megegyezik a gömbháromszög köré írható kör középpontjába mutató vektorral, csak hosszban térnek el egymástól.
Tehát az o_k középpontba mutató vektor párhuzamos az ABC pontok által meghatározott S sík normálvektorával. Azaz:

$$\underline{n_{(S(ABC))}}=(\underline{b}-\underline{a})\times(\underline{c}-\underline{b})=(\underline{b}\times\underline{c})-(\underline{a}\times\underline{c})-(\underline{a}\times\underline{b})+(\underline{b}\times\underline{b})$$

Tehát a köré írt középpontja: $o_k=(\underline{a}\times\underline{b})+(\underline{b}\times\underline{c})+(\underline{c}\times\underline{a})$

5.4 Beírt kör középpontjának meghatározása a gömbön

Az euklideszi geometriához hasonlóan a gömbi geometriában is a beírt kör középpontját a szögfelezők metszéspontja határozza meg.
Tekintsük az ABC háromszög szögfelezőt. Ezek metszéspontjában lesz a beírt kör középpontja.
A B csúcsnál lévő szögfelezőt (f_B) meghatározó vektort úgy kapjuk meg a $\underline{c}$ és $\underline{a}$ vektorokra merőleges vektorokat kivonjuk egymásból. A $\underline{c}$ vektorra merőleges vektor az $\underline{a}\times\underline{b}$ vektor, melyet felírhatunk a poláris vektor segítségével, és így a $\underline{c}$ vektorra merőleges vektor a $\grave{\underline{c}}$ vektor lesz. Ugyanígy az $\underline{a}$ vektorra merőleges vektor az $\grave{\underline{a}}$ vektor lesz.



Tehát a B csúcsnál lévő szögfelező: $\grave{\underline{c}}-\grave{\underline{a}}$
Ugyanígy az A és C csúcsoknál lévő szögfelezők: $\grave{\underline{c}}-\grave{\underline{b}}$, illetve $\grave{\underline{a}}-\grave{\underline{b}}$.
A beírt kör középpontjához tehát kell:

$$f_B \cap f_A = f_A \cap f_C$$

Ehhez tudnunk kell:

$$(\grave{\underline{c}}-\grave{\underline{b}})\times(\grave{\underline{a}}-\grave{\underline{b}})=\grave{\underline{c}}\times\grave{\underline{a}}-\grave{\underline{b}}\times\grave{\underline{a}}-\grave{\underline{c}}\times\grave{\underline{b}}=\grave{\underline{a}}\times\grave{\underline{b}}+\grave{\underline{b}}\times\grave{\underline{c}}+\grave{\underline{c}}\times\grave{\underline{a}}$$

$$\grave{\underline{a}}\times\grave{\underline{b}}+\grave{\underline{b}}\times\grave{\underline{c}}+\grave{\underline{c}}\times\grave{\underline{a}}\,független\, f_A, f_B, f_C\, választásától \Rightarrow f_A, f_B\, és f_C\, egy\ ponton\ mennek\ át\,.$$

Tehát a gömbháromszögnek létezik bírható köre és ennek középpontja:

$$\underline{\grave{a}}\times\underline{\grave{b}}+\underline{\grave{b}}\times\underline{\grave{c}}+\underline{\grave{c}}\times\underline{\grave{a}}$$

A gömbháromszög nevezetes pontjainak megvizsgálása után érdekes lehet megnézni a gömbháromszög polárgömbháromszögének nevezetes pontjait is. Még mielőtt elkezdünk számolni, meggondolhatjuk, hogy valószínűleg a gömbháromszög és polárgömbháromszöge között egy különleges kapcsolat fog fennállni.

5.5 Kapcsolat egy gömbháromszög és polárgömbháromszögének a köré – és beírt körökkel kapcsolatban

A poláratisnál megfigyeltük, hogy egy gömbháromszög polárisának polárisa éppen önmaga, azaz

$$(\grave{\underline{\grave{a}}})=\underline{a}.$$

Ezt kihasználva tehát a már meglévő képletekbe $\underline{a}$ helyére $\underline{\grave{a}}$ -t írva (és ugyanígy a többi oldal esetében is) megkaphatjuk a polárgömbháromszög nevezetes pontjait.
Ezután a következő észrevételeket tehetjük:

5.5.1 A köré írt kör középpontja:
Egy gömbháromszög köré írt kör középpontja: $(\underline{a}\times\underline{b})+(\underline{b}\times\underline{c})+(\underline{c}\times\underline{a})$
A hozzá tartozó polárgömbháromszög köré írt körének középpontja: $(\underline{\grave{a}}\times\underline{\grave{b}})+(\underline{\grave{b}}\times\underline{\grave{c}})+(\underline{\grave{c}}\times\underline{\grave{a}})$

5.5.2 A beírt kör középpontja:
Egy gömbháromszög beírt körének középpontja: $(\underline{\grave{a}}\times\underline{\grave{b}})+(\underline{\grave{b}}\times\underline{\grave{c}})+(\underline{\grave{c}}\times\underline{\grave{a}})$
A hozzá tartozó polárgömbháromszög beírt körének középpontja: $(\underline{a}\times\underline{b})+(\underline{b}\times\underline{c})+(\underline{c}\times\underline{a})$

5.5.3 Tehát megfigyelhető, hogy egy gömbháromszög beírt körének középpontja egybeesik a hozzá tartozó polárgömbháromszög köré írható kör középpontjával, illetve egy gömbháromszög köré írt körének középpontja egybeesik a hozzá tartozó polárgömbháromszög beírható körének középpontjával.

6. Terület a gömbön

A gömbi és az euklideszi területmérés merőben eltér egymástól, így itt most nem tudjuk az euklideszi geometriában tanultakat alapul venni. Először megvizsgáljuk a gömbháromszög területét, majd ebből következtetünk a gömbi sokszögek területére.

Gömbi területegység: 1 fokos gömbi kétszög fele.

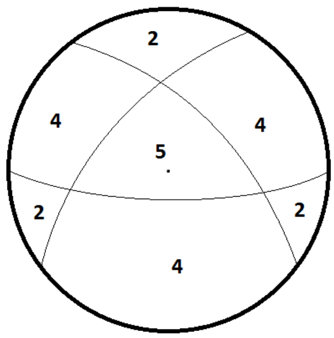
6.1 Gömbi háromszög területe

Általános területképlet: $T=\alpha+\beta+\gamma-180$

Ezt a területképletet kétféleképpen is meg lehet kapni, most ezt a kétféle bizonyítást fogjuk megvizsgálni, az egyik Girard Desargues, a másik Carl Friedrich Gauss bizonyítása.

6.1.1 Girard -féle bizonyítás:

A gömbháromszöget meghatározó 3 gömbi egyenes a gömbfelületet 8 különböző tartományra bontja. A háromszög szögei által meghatározott gömbkétszögek területét szeretnénk megvizsgálni. Egy ilyen gömbkétszög lefedéséhez 2 félgömbre van szükség, így a 3 gömbkétszög lefedéséhez összesen 6 félgömbre, azaz 3 teljes gömbfelszínre van szükség. Ekkor a gömbkétszögek gömbháromszög nélküli részei négyszer-négyszer, a gömbháromszögek ötször-ötször míg a fennmaradt 3 terület kétszer-kétszer vannak lefedve.



Ha mindegyik terület esetében eltekintünk két lefedéstől, akkor az alábbi összefüggés írható fel:

$$T_{gömb}=2*(3\,gömbkétszög\,területe)-2*(gömbháromszög)*2$$

Mindkét oldalt 2 -vel leosztva:

$$\frac{T_{gömb}}{2}=(3\,gömbkétszög\,területe)-(gömbháromszög)*2$$

Azaz, a gömbkétszögek egy olyan félgömböt fednek le, ahol a középső terület, a gömbkétszög $+2$ -szer van lefedve:

$$3\,gömbkétszög\,területe=\frac{T_{gömb}}{2}-(gömbháromszög)*2$$

A gömbháromszög területét x -el jelölve tehát:

$$2\alpha+2\beta+2\gamma=360+2x$$

Azaz a gömbháromszög területe:

$$T_{gömbháromszög}=\alpha+\beta+\gamma-180$$

6.1.2 Gauss-féle bizonyítás:

A gömbháromszög területét úgy határozza meg, hogy a teljes gömbfelületből kivonja a gömbháromszög kiegészítőszögei által meghatározott gömbkétszögek területeit. A gömbfelszínből ezt kivonva a két gömbháromszög területéhez jutunk.

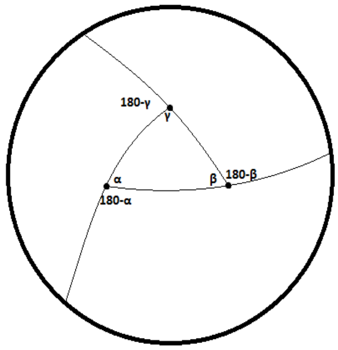
$$T_{gömbháromszög}*2=720-(2*(180-\alpha)+2*(180-\beta)+2*(180-\gamma))$$

Mindkét oldalt 2 -vel leosztva:

$$T_{gömbháromszög}=360-180+\alpha-180+\beta-180+\gamma$$

Azaz:

$$T_{gömbháromszög}=\alpha+\beta+\gamma-180$$



6.2 Szabályos gömbi n-szögek területe

Minden szabályos gömbi n-szög felbontható gömbi háromszögekre, így a szabályos gömbi n-szögek területe felírható a gömbi háromszög területéből:

$$T_n=\sum_{i=1}^{n}\alpha_n-(n-2)*180$$

6.3 Állítás: Legyen a T területű ABC gömbháromszög BC oldalának hossza a, a BC oldalhoz tartozó középvonal hossza pedig k. Ekkor:

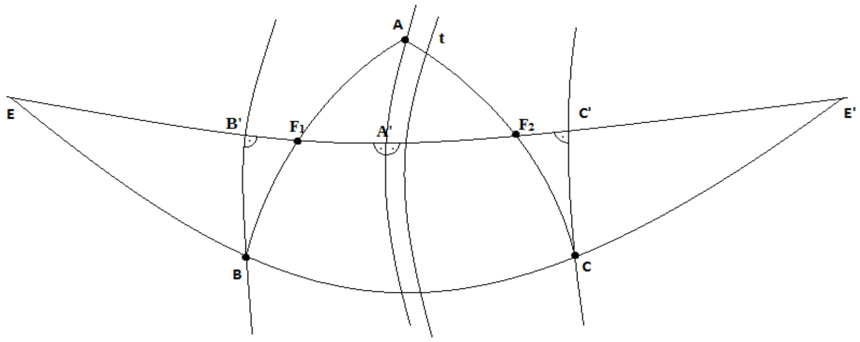
$$\cos(\frac{T}{2})=\frac{\cos k}{\cos(\frac{\alpha}{2})}$$

Megjegyzés: Az euklideszi geometriához hasonlóan a gömbi geometriában is a középvonal a háromszög oldalfelező pontjait összekötő szakasz.

Bizonyítás:

Jelölje F_1 és F_2 az AB, illetve az AC oldal felezőpontját. Bocsássunk a csúcsokból merőleges gömbi egyeneseket az F_1F_2 gömbi egyenesre. Az A, B, illetve C csúcsokon átmenő merőleges A, B, illetve C csúcshoz közelebbi talppontját jelölje rendre A', B', C'. Az $AA'F_1$ és $BB'F_1$ derékszögű gömbháromszögek egybevágóak, mert egyrészt az F_1 csúcsnál fekvő szögeik egyenlőek, hiszen csúcsszögek, másrészt az AF_1 és BF_1 átfogók is ugyanolyan hosszúak, hiszen az F_1 felezőpont, illetve a két háromszög középpontosan szimmetrikus az F_1 pontra. Hasonlóan egybevágóak az $AA'F_2$ és $CC'F_2$ derékszögű háromszögek is. E két háromszögpár egybevágóságának több fontos következménye van:

- az ABC gömbháromszög területe ugyanakkora, mint a $BB'C'C$ gömbnégyszögé
- a B' és C' pontok gömbi távolsága $2k$
- mivel a $BB'C'C$ gömbnégyszög B' és C' csúcsainál derékszög van, és $d(B,B')=d(A,A')=d(C,C')$, a $BB'C'C$ gömbnégyszög szimmetrikus a $B'C'$ gömbi szakasz t felező merőlegesére. A szimmetriából többek között az is következik, hogy $B'BC\sphericalangle = C'CB\sphericalangle$.



Kifejezve a $BB'C'C$ gömbnégyszög területét a szögei segítségével, és felhasználva az előző összefüggéseket:

$$T=(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+B'BC\sphericalangle+C'CB\sphericalangle)-2\pi=2*B'BC\sphericalangle-\pi,$$

$$B'BC\sphericalangle=\frac{\pi+T}{2}$$

egyenlőségekhez jutunk.

A BC és $B'C'$ gömbi egyenesek egymást két átellenes pontban metszik. Jelöljük ezek közül a B oldalára esőt E -vel, a másikat E' -vel. A $BB'C'C$ gömbnégyszög tengelyes szimmetriája miatt az $E\grave{E}$ szakasz hosszából kivonva az a oldal hosszát, éppen a $d(B,E)$ és a $d(C,\grave{E})$ összegét kapjuk, amik azonban egyenlőek, így:

$$d(B,E)=d(C,E')=\frac{(\pi-a)}{2}$$

Ugyanígy az $E\grave{E}$ szakasz hosszából kivonva az $2k$ oldalt, éppen a $d(\grave{B},E)$ és a $d(\grave{C},\grave{E})$ összegét kapjuk, amik azonban egyenlőek, így:

$$d(B',E)=d(C',E')=\frac{(\pi-2k)}{2}$$

Ha alkalmazzuk a gömbi szinusztételt az EBB' derékszögű gömbháromszögre, a következő összefüggést kapjuk:

$$\sin(B'BE\sphericalangle)=\frac{\sin d(B',E)}{\sin d(B,E)}$$

Így a jobboldal:

$$\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-2\frac{k}{2})}{\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{a}{2})}=\frac{\sin(\frac{\pi}{2})\cos(k)-\sin(k)\cos(\frac{\pi}{2})}{\sin(\frac{\pi}{2})\cos(\frac{a}{2})-\sin(\frac{a}{2})\cos(\frac{\pi}{2})}=\frac{\cos(k)}{\cos(\frac{a}{2})}$$

A baloldalon pedig a $\sin(\grave{B}BE\sphericalangle)$ megegyezik $\sin(\pi-\grave{B}BE\sphericalangle)$ -el a szinuszfüggvény tulajdonsága miatt, illetve ez megegyezik $\sin(\grave{B}BC\sphericalangle)$ -el, hiszen egymás kiegészítő szögei. Így tehát a bal oldal felírható az alábbi alakban:

$$\sin(\grave{B}BE\sphericalangle)=\sin(\grave{B}BC\sphericalangle)=\sin(\frac{\pi+T}{2})=\sin(\frac{\pi}{2})\cos(\frac{T}{2})+\sin(\frac{T}{2})\cos(\frac{\pi}{2})=\cos(\frac{T}{2})$$

A két oldalt összevetve kapjuk, hogy:

$$\frac{\cos(k)}{\cos(\frac{a}{2})}=\cos(\frac{T}{2})$$

Ez az állítás lehetőséget ad arra, hogy egy gömbháromszög területét az oldalakkal kifejezzük.

6.4 Első lépésben cseréljük ki a $\cos(k)$ -t az AF_1F_2 háromszögre alkalmazott koszinusztétel segítségével:

$$\cos(\frac{T}{2})=\frac{\cos(k)}{\cos(\frac{a}{2})}=\frac{\cos(\frac{b}{2})\cos(\frac{c}{2})+\sin(\frac{b}{2})\sin(\frac{c}{2})\sin(\alpha)}{\cos(\frac{a}{2})}$$

Második lépésben pedig a megjelenő $\sin(\alpha)$ -t kiküszöbölhetjük az ABC gömbháromszögre vonatkozó koszinusztételből:

$$\cos(\frac{T}{2})=\frac{\cos(\frac{b}{2})\cos(\frac{c}{2})+\sin(\frac{b}{2})\sin(\frac{c}{2})\frac{(\cos(a)-\cos(b)\cos(c))}{\sin(b)\sin(c)}}{\cos(\frac{a}{2})}$$

Ha most az a, b, c szögfüggvényeit kifejezzük az $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}$ szögfüggvényeivel:

$$\cos(\frac{T}{2})=\frac{\cos(\frac{b}{2})\cos(\frac{c}{2})+\sin(\frac{b}{2})\sin(\frac{c}{2})\frac{(\cos(\frac{a}{2}+\frac{a}{2})-\cos(\frac{b}{2}+\frac{b}{2})\cos(\frac{c}{2}+\frac{c}{2}))}{\sin(\frac{b}{2}+\frac{b}{2})\sin(\frac{c}{2}+\frac{c}{2})}}{\cos(\frac{a}{2})}$$

Átalakítva:

$$\cos(\frac{T}{2})=\frac{\cos(\frac{b}{2})\cos(\frac{c}{2})+\sin(\frac{b}{2})\sin(\frac{c}{2})\frac{(\cos^2(\frac{a}{2})-\sin^2(\frac{a}{2}))-(\cos^2(\frac{b}{2})-\sin^2(\frac{b}{2}))*(\cos^2(\frac{c}{2})-\sin^2(\frac{c}{2}))}{2\sin(\frac{b}{2})\cos(\frac{b}{2})*2\sin(\frac{c}{2})\cos(\frac{c}{2})}}{\cos(\frac{a}{2})}$$

További átalakításokkal a következőt kapjuk:

$$\cos(\frac{T}{2})=\frac{\cos^2(\frac{a}{2})+\cos^2(\frac{b}{2})+\cos^2(\frac{c}{2})-1}{2\cos(\frac{a}{2})\cos(\frac{b}{2})\cos(\frac{c}{2})}$$

Ebből a gömbháromszög területe valóban meghatározható, mert a terület csak 0 és 2π közötti értékeket vehet fel, a $[0,\pi]$ intervallumon pedig a koszinusz függvény szigorúan monoton csökken.

Most a terület kiszámítására adunk egy újabb formulát, melyhez az oldalakat és a félkerületet használjuk fel. A bizonyítást Hraskó András: Új matematikai mozaik című könyvében tekinthetjük meg.

6.5 Tétel (L'Huilier tétele): *Egy gömbháromszög* T *területet és* a, b, c *oldalai között az alábbi összefüggés áll fenn:*

$$tg(\frac{T}{2})=\sqrt{tg(\frac{s}{2})tg\frac{(s-a)}{2}tg\frac{(s-b)}{2}tg\frac{(s-c)}{2}}$$

ahol $s=\frac{(a+b+c)}{2,}$ *azaz a kerület fele.*

7. Gömbi geometria alkalmazása

Ebben a fejezetben a gömbi geometria egyik alkalmazását fogjuk áttekinteni.

7.1 Euler poliéder tétel Legendre bizonyítása

7.1.1 Euler tétel: *Ha egy egyszerű poliéder csúcsainak számát* c, *éleinek számát* e *és lapjainak számát* l *jelöli, akkor:* $l+c=e+2$

Az első precíz bizonyítást az Euler formulára Adrien Marie Legendre adta, az 1794-ben publikált Éléments de Géometrie könyvében. A könyv nagy népszerűségnek örvendett, több kiadást megélt és számos nyelvre lefordították, ennek hatására az Euler formula széles körben ismertté vált.

Legendre bizonyítás:
Legendre bizonyítása a gömbi geometrián alapul, a gömbi sokszögek területére használt formulát használja fel. Mielőtt ezt alkalmazná, a poliédereket át kell alakítani sokszöghálóvá a gömbön.
Tegyük fel, hogy a konvex poliéderek oldalai átlátszóak, az élek és a csúcsok pedig (egy nem átlátszó) vázat alkotnak. Képzeljük el, hogy a poliéder benne van egy gömbben, úgy hogy a pliéder és a gömb középpontja egybe esik. Ekkor a gömb középpontjából indulva a poliéder éleit a gömbre vetítjük. A poliéder élei gömbi egyenesek lesznek, melyek a gömböt, gömbi sokszögekre osztják fel, melyek megegyeznek a poliéder sokszögeivel. Ezzel kialakul a poliéder háló a gömbön. Ezt a műveletet sugaras vetítésnek nevezzük.
Azért, hogy bebizonyítsuk, hogy a poliéderre igaz az Euler formula, ahelyett hogy a poliédert figyelnénk meg, Legendre a gömbre történt vetítést vette alapul. A poliéder hálója a gömbön minden szempontból megegyezik az eredeti poliéderrel: ugyanannyi oldala, éle és csúcsa van (bár ezek gömbi sokszögek, gömbi egyenesek.
Tegyük fel, hogy a gömb sugara 1 egység. Ekkor a gömb felszíne 4Π. A felszín megegyezik a háló oldalainak területeinek összegével. Minden oldal egy gömbi sokszög, és ezek területe megegyezik $(a\,sokszögek\,szögeinek\,összege)-(n-2)\Pi$, ahol n a sokszög oldalainak száma. Ezeknek a területeknek az összege 3 részre bomlik:

1. A sokszögek szögeinek összege. Ennek egyenlőnek kell lennie $2\Pi * c$, mert mindegyik szög 2Π -vel járul hozzá a területhez.
2. A sokszögek oldalainak a száma: $2e$ és mindegyik hozzájárul a területhez Π -vel.
3. A sokszögek száma: l és mindegyik hozzájárul a területhez 2Π -vel.

Szimbolikusan kifejezve a következő:

$$4\Pi = A_{gömb} = \sum_{k=1}^{l} T_{(F_k)},$$

ahol F_k a $k.$ lap.

$$\sum_{k=1}^{l} T_{(F_k)} = \left(\sum_{i=1}^{n_k} \alpha_i^k\right) - (n_k - 2)\Pi = \left(\sum_{i=1}^{n_k} \alpha_i^k\right) - n_k\Pi + 2\Pi,$$

ahol n_k az F_k csúcsszáma, illetve α_i^k az F_k szögei.

$$4\Pi = \sum_k \left(T_{(F_k)}\right) = \sum_k \left(\left(\sum_{i=1}^{n_k} \alpha_i^k\right) - n_k\Pi + 2\Pi\right)$$

$$4\Pi = \sum_k \left(\sum_i \alpha_i^k\right) - \sum_k n_k\Pi + \sum_k 2\Pi$$

Azaz:

$$4\Pi = 2\Pi * c - 2\Pi * e + 2\Pi * l$$

Mindkét oldalt 2Π -vel leosztva:

$$2 = c - e + l$$

Átrendezve:

$$l + c = e + 2$$

Összegzés

A szakdolgozatom megírásakor arra törekedtem, hogy olyan témaköröket fejtsek ki, melyek nem tartoznak szorosan az egyetemi tanulmányok közé, ám mégis könnyen érthetőek mindenki számára. A dolgozatban megismerkedhettünk a gömbi geometria alapjaival, különösképpen a gömbháromszögek tulajdonságaival, illetve a gömbi sokszögek területével. Nagyrészt az euklideszi geometriában megismert definíciókat, tételeket vizsgáltuk meg és ezek alapján tárult elénk a gömbi geometria világa. Véleményem szerint a geometria ezen ága igen érdekes és hasznos tudomány lehet már a gimnáziumok diákjainak is, így tanárként szeretném majd a diákjaimmal megismertetni a geometria ezen érdekes területét.

Egyik magántanítványom szokta tőlem a következőt kérdezni, miután kellőképpen elmélyedtünk egy-egy témakörben: És ez mire jó? Most fel tehetjük ezt a kérdést: Mire jó a gömbi geometria? Mivel az euklideszi geometriához képest ez egy viszonylag új tudomány, rengeteg új felfedezési lehetőség rejlik benne annak, aki kicsit jobban belemélyed, tehát a felfedezés élményét biztosítja. Emellett nagy mértékben fejleszti a térlátást is. Tulajdonképpen egy gömbön élünk, így földrajzi szempontból is érdekes és hasznos minden észrevétel, amit a gömbi geometria kapcsán teszünk.

Azt gondolom a szakdolgozatomban sok érdekes felfedezést tettünk és remélem ezzel a kis „ízelítővel” sikerült felkeltenem az Olvasó érdeklődését a gömbi geometria tudománya iránt.

Irodalomjegyzék

1. Hajós György: Bevezetés a geometriába, Tankönyvkiadó, 1984
2. Hraskó András: Új matematikai mozaik, Typotex
3. Peter R. Cromwell: Polyhedra, Cambridge University Press