EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

SZAKDOLGOZAT

JÁTÉKOS GONDOLATKÍSÉRLETEK SZÁMOKKAL ÉS SZÁMLÁNCOKKAL

Témavezető:
Török Judit
egyetemi adjunktus
Matematikatanítási és Módszertani Központ

Készítette:
Károlyi Enikő
ÁITFK

Budapest, 2014

TARTALOMJEGYZÉK

Előszó

A játék szerepe a matematika tanulásában

„Én nemcsak azért szeretem a matematikát, mert alkalmazni lehet a technikában, hanem főleg azért, mert szép. Mert játékos kedvét is belevitte az ember és a legnagyobb játékra is képes: megfoghatóvá tudja tenni a végtelent.”·(PÉTER RÓZSA) **[1] 5.o**

Szakdolgozatom a nem matematikai érdeklődésű intellektuális embernek is szól.

Bevezetésként az egyszerűnek, kézenfekvőnek tűnő pozitív egészekből és a 0-ból álló természetes számsor meglepő törvényszerűségeiről szólok néhány szót. Utána, mintegy a természetes számsort még a nevében is magában hordozó számsorozatok közül néhány kiválasztott számlánc szabályszerűségei következnek. Pozitív egész számokból álló — adott szabályok szerint képzett, — végtelen számsorozatokat — számláncokat vizsgálok.

Gyárthatunk például úgy is számláncot, hogy minden pozitív egész szám rákövetkezője a nála kisebb pozitív osztóinak összege legyen. (Egy szám osztóján azokat a számokat értjük, melyek maradék nélkül megvannak benne. A nála kisebb pozitív osztók, azon osztók, melyek közé a szám maga, mint önmaga osztója nem tartozik bele.) Ekkor barátságos láncokhoz jutunk. PÁLFALVI JÓZSEFNÉ „*Barátkozzunk a számokkal*” című könyvében olvashatjuk:

„Legyen például a kezdőszám 12.
A 12 saját magánál kisebb osztói: 1, 2, 3, 4, 6; ezek összege 16.
A 16 szóba jövő osztói 1, 2, 4, 8; összegük 15.
Tovább folytatva kapjuk a sorozatot:
12, 16, 15, 9, 4, 3, 1.

Itt a végére értünk, hiszen képzési szabályunk szerint nincs az 1-nek rákövetkezője.

Próbálkozzunk más kezdőszámmal! Néhány kísérlet után valószínűleg sokan gondolnak arra, hogy előbb-utóbb minden esetben eljutunk az 1-hez.
Lehet azonban, hogy máris ellenpéldára bukkan valaki. Ilyen ellenpélda lehet, pl. a 6 vagy a 28. Ezek olyan különleges számok, amelyek szabályunk alapján mindig önmagukat adják (1+2+3=6; 1+2+4+7+14=28).

Vizsgáljuk tovább, hogy milyen lehetőségeket rejt még magában képzési szabályunk.

> *Válasszuk kezdőszámnak a 220-at. A nála kisebb osztói:*
> *1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 44, 55, 110.*
> *Ezek összege 284, aminek a nála kisebb osztói:*
> *1, 2, 4, 71, 142.*
> *Ezek összege 220. Így sorozatunkban ez a két szám fog felváltva ismétlődni:*
> *220, 284, 220, 284, 220, …*

Felmerülhet az a kérdés is, hogy előfordulhat-e, hogy képzési szabályunkkal olyan sorozatot kapunk, melyben 2-nél több (különböző) számból álló szakasz ismétlődik.

A legkisebb ilyen számnégyes: 1 264 460, 1 547 860, 1 727 636, 1 305 184.

Még mindig nyitott azonban az a kérdés, hogy az 1-re végződő és a szakaszosan ismétlődő sorozatokon kívül adhat-e másfajta sorozatokat is képzési szabályunk. Kisebb számokkal kezdve könnyű megfigyelni sorozataink viselkedését. Gyakran tapasztalhatjuk, hogy először nőnek, egy idő után pedig csökkennek, egészen 1-ig. Érdekes kezdőszám például a 138. Nem kevesebb, mint 117 tag után éri el a maximumot, és csak utána csökken egészen 1-ig, ami a sorozat 117. tagja. A maximum értéke: 179 931 895 322.

Újabb érdekességgel szolgál a 276. Ez a 172. tagnál éri el a maximumát, amely 28 számjegyből áll, ezután csökken, majd újra elkezd növekedni, és még nem találtak újabb csökkenő tagot. ” [5] Az eddig ismert legnagyobb tag már 180 jegyű.

A számláncok képzése játékos tapasztalatszerzés, kísérletezés. Érzékelteti, hogy a matematikában ugyanúgy, mint a többi természettudományban, próbálkozások sorozata közben lobban fel a szikra, sejtjük meg, érzünk rá a bizonyítandó tételekre.

A számláncok megfigyelésével szinte a végtelenbe hatolunk be. Nehéz feladatnak tűnik menetük leírása. A példaként felhozott számláncok viselkedése mégis egyszerűen megjósolható az első tag ismeretében. A feladat könnyed, játékos megközelítése példa arra, hogy a megfoghatatlannak tűnő problémáktól való rettegés, ami fölösleges gát, akadály, elfedi a valódi nehézségeket, és akadályozza gondolkodást, feloldható.

A feladatokkal való merész, bátor szembenézést leginkább olyan problémák, megoldásával lehet edzeni, erősíteni, melyek első látásra megfoghatatlanok, de egy ötlet hatására szinte maguktól megoldódnak.

A függelék a felhasznált tételek bizonyítását tartalmazza, apró, jól ismert, szinte triviálisnak tűnő állítások egymásutánjaként, melyek végül a meglepő tételek igazolásához vezetnek.

A bevezető hátralévő részében a matematika és a játék rokon természetéről, s ebből következőleg, a játéknak a matematika tanításában betöltött fontos szerepéről írok le néhány gondolatot.

Tudjuk, hogy minden matematikai feladat, tulajdonképpen „játék”, hisz — például a matematikai feladatokra leginkább hasonlító logikai játékok közben is, ugyanúgy, mint játék közben próbálkozunk, kísérletezünk — a megoldás keresésekor, új megközelítésben, új elméleti környezetben, a „matematikai” valóság más és más pontjához próbáljuk illeszteni jól bevált módszereinket, s alakítunk ki újakat.

Többféle szabályjátékot ismerünk. Vannak mozgásra épülők, pl.: sportjátékok, ügyességi játékok, és vannak szellemi sportok is pl.: társasjátékok, kártyajátékok. Alapvetően jellemzi őket a szabályrendszer és a győzelem. Kis képzelőerővel ide sorolhatjuk a matematikát is, mint játékos szabálykövetést. Annak ellenére, hogy a matematika tanulása közben tulajdonképpen önmagunkkal versenyezünk, a győzelem érzése, ugyanolyan felszabadító, örömteli, önbecsülést serkentő.

Próbáljuk pontosabban meghatározni, mi is az, hogy játék?

Szent AUGUSZTINUSZ szerint a játék a léhaság egyik formája.

A Pszichológiai Lexikon szerint a játék: *„tágabb értelemben az állatoknak és embereknek minden olyan élvezettel teli tevékenysége, amelyet maga a tevékenység fölött érzett öröm motivál, és nincsen közvetlen vonatkozása az előrelátó viselkedésmódokra (a szükségletek kielégítésére), habár közvetetten (bizonyos funkciók gyakorlása, az utánzás és játékos tanulás, ill. a pihenést szolgáló hasznossága révén) mégiscsak valamiképpen vonatkozik a megfontolt magatartásmódokra.”*

A játék tanulás serkentő szerepére utal a következő idézet: *„ A játék megolajozza a testet és a lelket”*(BENJAMIN FRANKLIN).

Mint köztudott, az ismeretek elsajátítása tanulással történik, ugyanakkor a „tanulás” bővebb fogalom az ismeretek elsajátításánál. (A tanulás egy olyan céltudatos tevékenység, mely során, az ismereteken túl még gyakorlati készségeket, jártasságokat is a magunkévá teszünk.) Az ismeretek elsajátítása annyit jelent, mint megérteni valamit, kapcsolatba hozni a korábban tanultakkal, emlékezetbe vésni, megőrizni, és szükség esetén felidézni, vagy megismételni az elsajátított ismereteket vagy gyakorlati tevékenységet.

A tapasztalatok azt mutatják, hogy, különösen a matematikai ismeretek elsajátítása során, a tanulók nagy kísértésnek vannak kitéve. Hiszen gyors eredményre vezet, ha gondolkodás — azaz a tanulandó anyag megértése, s ahányszor előkerül, újra megértése— helyett az emlékezetre támaszkodunk, a valaha megértett, esetleg részben vagy egészében tekintélyelv alapján elfogadott kész sablonokat (módszereket, recepteket) keressük, alkalmazzuk.

Erre utal MOSONYI KÁLMÁN is**:**

„A matematika fogalmait, problémáit, eredményeit már kezdeti fokon is matematikai jelekkel, formákkal rögzítjük. Ezekkel a jelekkel bizonyos eljárásokat végzünk és ezek az eljárások előbb jártassággá, majd készséggé válnak. Ilyenkor gyakori eset, hogy az eljárások, jelek mögötti tartalom a tudatban elsüllyed, feledésbe merül, s a forma önálló életet kezd” és ekkor a tanuló „megértés helyett az emlékezetre támaszkodik, mindenütt sablonokat keres, a matematikát szabálygyűjteménynek tekinti, a valósággal való összefüggését nem látja.”
[2] 72. o.

A fentiek kiküszöbölésére — azaz a matematikának elsődlegesen a megértésen alapuló elsajátításához — elengedhetetlen, hogy a feldolgozandó anyag érdekfeszítően, játékos formában kerüljön a gyermekek elé.

Mit is értünk — „játékos” formán? A céltudatos emberi tevékenységnek három fő formája létezik: a munka, a tanulás és a játék. A fenti tevékenységek a mindennapi életben gyakran önállóan mennek végbe, de keverednek is egymással. Most az — olykor akár munkának, sőt kemény munkának érzett, akként átélt — tanulási folyamatot vizsgáljuk. A játékos formában való megértésnek a legfőbb célja, hogy a „kínkeserves munka-érzetet”— amennyire csak lehetséges — enyhítsük. Ehhez hívjuk segítségül a harmadik céltudatos emberi tevékenységet: a játékot. Nem érezzük a kimerültséget, ha hajt a rejtvény megfejtésének vágya, a kíváncsiság. A játék hevében feledjük, hol vagyunk, feledjük az idő múlását; észrevétlenül, teljesítő képességünk határáig, a végsőkig hajtjuk gyakran magunkat.

Azt is érdemes megjegyeznünk, hogy a matematikai feladatok elvégzése során, annak a mindennapi élettel való kapcsolata megsokszorozza a munkakedvet. Ha az elsajátítandó anyag, (a megoldandó feladat) kellően érdekfeszítő, akkor a tanuló gondolatai állandóan a problémán járnak, a feladat megoldása körül keringenek, amíg — esetleg, berögzült hibáit is magától javítva — meg nem kapja a helyes eredményt.

Ezen kívül a játékos feladatok, akár észrevétlenül is, — a matematika tanulása során elengedhetetlen — gyakorlásra késztethetnek.

Keressük tovább mi is az, hogy „játék”?

A néprajzi lexikonban a játék szóval a gyermekjátéknál találkozunk: *„a gyermekvilágot egy köztünk élő kis társadalmi rétegnek foghatjuk fel, amelynek közösségi életét a játék törvényei szabályozzák. A játék mozgató ereje, a felnőtt életre való készülődés a testi-szellemi adottságok folytonos gyakorlásával. A gyermek alkotó ereje 6-12 éves kora között a legnagyobb…”*

MASZLER IRÉN Játékpedagógia című könyvében így foglalja össze a játék jelentését: *„a játék feszültségoldó, örömszerző, önkéntes és szabadon választott tevékenység melynek során az egyén az átélt kellemes és kellemetlen élmények újra alkotásával hatást gyakorol környezetére, s közben fejleszti… személyiségét.”*

Végül RANSCHBURG JENŐ a következőkkel foglalja össze a játék lényegét: *„a játék… korántsem játék, nem puszta szórakozás, időtöltés, hanem fontos ismeretek szerzésének és kifejezésének módja, valamint a kínzó belső feszültségek csillapításának, az öngyógyításnak is eszköze.”*

A gyermek fejlődésével játéka is változik.

Egyetértek azzal a véleménnyel, hogy az óvodás korú gyermek játékára jellemző, hogy kezdetben inkább a cselekvés dominál, a szabályok betartása számára önálló örömforrásként jelenik meg.

A kisiskolások már képesek alárendelni viselkedésüket a szabályrendszereknek, és ezek válnak a játékok lényegévé. A szabályjáték csak addig érdekes, amíg mindenki betartja a szabályokat.

Többféle szabályjátékot ismerünk. Vannak mozgásra épülők, pl.: sportjátékok, ügyességi játékok, és vannak szellemi sportok is, pl.: társasjátékok, kártyajátékok. Alapvetően jellemzi őket a szabályrendszer és a győzelem. Ide sorolhatjuk a matematikát, mint játékos szabálykövetést.

Amíg a gyakorlásból, ismétlésből álló játékoknál, az „én csinálom" élménye, a szerepjátékoknál az örömforrást, a szerepek megszemélyesítése, jelentette, addig a szabályjátéknál egy egészen új cél jelenik meg. A gyermek a játékában győzni akar. Már elért egy olyan fejlettségi szintet, ahol nem a szerep vagy a tárgy a lényeg, hanem a gyermek úgy szeretne a játékban részt venni, hogy ő legyen a nyertese. A győzelem érzése az újdonság a számára, ezt gyakorolja. Így ez a legfontosabb örömforrás, ez teszi boldoggá. Azonban a legtöbb játéknak csak egy nyertese lehet, így természetes, hogy vannak vesztesei is. A szabályjáték egyik nagy veszélye a kudarckerülő magatartás, hiszen ha nem játszik, nem is veszthet, például, ha nem próbál megoldani egy matematikafeladatot, nem is vallhat kudarcot. A másik veszélye, ha valaki gyakran, esetleg mindig nyer, túlzottan magabiztossá válik, s így még nagyobb csalódás éri, ha nem ő kerül ki győztesen, és ez végleg, a kudarckerülő magatartás védőbástyái mögé, űzi.

A gyermekjátékokról tehát megállapíthatjuk, hogy a játéknak feladata van a gyermek életében, annak egyik legfontosabb tevékenysége. Ezt fejezi ki a játék szó görög megfelelője is: PAIDIÁ, melynek jelentése: mindaz, ami a gyermekhez tartozik.[3]

Már az ókori görögök is tapasztalták, hogy a játéktevékenység közbeiktatása hatékonyabbá tehetik a tanítást és a tanulást. PLATÓN így szólt erről:*„Kerüljük a kényszert, s hagyjuk, hogy a kisgyerek örömmel tanuljon. A gyerekek játékok révén okosodnak, a kényszeres okítás nem jut el a lelkükig."* **[4]**

A játék a gyermek életének szerves része, hiszen a természet és a gyermeket körülvevő világ megismerésének valamint a környezethez valóalkalmazkodásának az eszköze. Általa tudja a gyermek a belső világát, vágyait és problémáit kifejezésre juttatni, azokat jobban megérteni és feldolgozni. A játék közben fejlődik önkifejező és másokkal való kommunikációs készsége. A játék által ismeri meg, és fejleszti észrevétlenül a legkülönfélébb képességeit. Játék közben tanul meg másokhoz alkalmazkodni, és velük együttműködni. Játék közben sajátítja el környezetének viselkedési normáit. A játék során hosszabb ideig képes figyelmét koncentrálni. S végül a játék egy olyan örömforrás a gyermek számára, mely csökkenti, sőt akár teljesen meg is szüntetheti a gyermek belső feszültségét.

Az elmondottak alapján, hihető, hogy az iskolai matematika-tanításban kellő érzékkel vegyítve az ismeretek átadását a játékkal, számos kívánatos tanulási eredményt és sikert érhetünk el.

A játékos feladatok elősegítik a koncentrálás képességének fejlődését, a külső feszültségektől, megfelelési kényszertől mentes, elmélyedő, egyetlen célra összpontosító gondolkodás kialakulását, mely lehetővé teszi a gyors, mély, alapos tanulást.

A játszó emberben — gyerekben — óriási fizikai és szellemi energiák lépnek működésbe. Ezért az ekkor megjelenő új ismeretek könnyebben válnak készséggé, tartósabban megmaradnak az emlékezetben, s így előmozdíthatják a megszokáson alapuló hibák elmaradását is.

A játék a matematika tanulásában központi szerepet tölt be. A matematika eredményes tanulása során — ugyanúgy, mint játék közben — önállóságra, kezdeményezőkészségre, a megszokott sablonok „felrúgására”, új utak keresésére van szükség. A problémák eredményes megoldásához szükséges hozzáállás ezért leginkább játék közben sajátítható el. Ezen kívül a játékos matematikai feladatok, fejtörők újból és újból összeköthetik a matematikai fogalmakat a valósággal; gondolkodásra ösztönözhetnek, és rámutathatnak a szabályok automatikus alkalmazásának veszélyeire is.

A. *A természetes számsor*

Mivel a számláncok pozitív egész számokból állnak, bevezetőként néhány szó a természetes számokról (pozitív egészek és a nulla):

PÉTER RÓZSA írja:

„Az ember megteremtette a maga céljaira a természetes számsort, ez az ő alkotása, a számlálás és a számlálásból eredő műveletek céljait szolgálja. De ha már egyszer megteremtette, többé már nincs hatalma fölötte. A természetes számsor van, önálló létet kapott, többé nem lehet módosítani rajta, megvannak a saját törvényei, saját egyéni tulajdonságai, olyan tulajdonságok, amikre álmában sem gondolt az ember, amikor megalkotta. A bűvészinas káprázó szemmel áll a felidézett szellemek előtt. A matematikus „semmiből teremt új világot”, azután ez a világ a maga rejtelmes, váratlan törvényszerűségeivel megfogja őt, most már nem alkotó, hanem kutató: a maga felidézte világ összefüggéseit, titkait kutatja.” [1]32. o

Tehát a természetes számok a „matematikai-természet” legkézenfekvőbb mennyiségi egységei, amelyeket szabadon számlálhatunk, és amelyekkel szabadon számolhatunk.

Ráhangolódásképpen lássunk néhány különleges — váratlan, ha úgy tetszik: játékos — törvényszerűséget a természetes számok halmazán belül a pozitív egész számok körében.

A1.
A pozitív egész felbonthatatlan számokról szóló meglepő állítások:

Próbáljuk felírni rendre a pozitív egész felbonthatatlan számokat!

Pozitív egész felbonthatatlan számok, (pozitív prímszámok), más néven törzsszámok: olyan n pozitív egész számok, $n \neq 0, 1$ amelyek csak 1-el és önmagukkal oszthatók, azaz az a 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47 stb.

<u>A1. a.)</u>

Ha veszünk egy törzsszámot (p) és egy számot (a), mely e törzsszámmal nem osztható, akkor a számot csupán önmagával többször szorozva, eljuthatunk olyan számhoz, melyből egyet kivonva a p-vel osztható számot kapunk. (Ez a szám: a^{p-1}, természetesen hatványai ugyanilyen tulajdonságúak.) Ez az úgynevezett kis FERMAT–tétel.[8], 154. o.

A1. a.) 1. Feladat: Igazoljuk!

Példa:

Legyen $p = 3$, $a = 10$ Ekkor $a^{p-1}-1=99$

Legyen $p = 5$, $a = 2$ Ekkor $a^{p-1}-1=15$

<u>Megoldás:</u>

A tételt úgy is fogalmazhatjuk, hogy ha a és p relatív prímek, akkor $a^{p} - a$ osztható p-vel.

Ha $a = 1$, akkor teljesül az állítás, hiszen: $1^{p} - 1 = 0$, osztható p -vel.

Lássuk be, hogyha az állítás a-ra igaz, akkor $a+1$-re is igaz.

A binomiális tételből következik:

$$(a+1)^{p} = a^{p} + \binom{p}{1} \cdot a^{p-1} + \ldots + \binom{p}{p-1} \cdot a + 1$$

Mivel

$$\binom{p}{k} = \frac{p \cdot (p-1) \cdot (p-2) \ldots (p-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k}$$

$1 \leq k \leq p-1$, esetén p osztója $\binom{p}{k}$ -nak

Tehát p osztója $\binom{p}{1} \cdot a^{p-1} + \ldots + \binom{p}{p-1} \cdot a$ összeg tagjainak, külön-külön.

Ezért p osztója $(a+1)^{p} - a^{p} - 1$ összegnek.

A feltétel szerint viszont p osztója $(a^{p} - a)$ összegnek is.

Így p osztója a kettő összegének

$$(a+1)^{p} - a^{p} - 1 + a^{p} - a = (a+1)^{p} - (a+1)$$

Ezzel állításunk bizonyítást nyert. □

A1. b.)

EUKLIDÉSZ 2000 évvel ezelőtt közölt bizonyítást arra, hogy végtelen sok pozitív felbonthatatlan egész, törzsszám van.
A1. b.) 1. Feladat: Igazoljuk!

Első megoldás:
Minden összetett számnak, vagyis olyan számnak mely nem csak önmagával és az eggyel osztható, van törzsszám osztója, nevezetesen, a legkisebb abszolút értékű valódi osztója törzsszám. Ha csak véges sok törzsszám volna, $P_1, P_2, \ldots P_k$, tekintsük, az $A = P_1 \cdot P_2 \cdot \ldots \cdot P_k + 1$ számot. Nyilvánvaló, hogy A nem egyenlő a felsorolt összes törzsszám egyikével sem, ezért összetett szám. Az is nyilvánvaló, hogy nem osztható a felsorolt törzsszámok egyikével sem. Mivel feltételünk szerint a felsoroltakon kívül több törzsszám nem létezik, A-nak nincs törzsszám osztója. Ez ellent mond annak, a már régebben bebizonyított tételnek, hogy minden összetett szám legkisebb abszolút értékű valódi osztója törzsszám. □

A1. b.) 1. Feladat második megoldása:
Megmutatjuk, hogy minden $n \geq 1$ számnál van nagyobb törzsszám.

Legyen $N = n! + 1 > 1$
N vagy törzsszám, vagy van n –nél nagyobb törzsszám osztója.□

Segéd feladat az A1. b.) 1. Feladat harmadik megoldásához:

Lássuk be, hogy az $F_n = 2^{2^n} + 1;\ n \geq 0$ számsorozat tagjai relatív prímek.

Megoldás:

Belátjuk, hogy $F_0 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \ldots \cdot F_{n-1} = F_n - 2$

Ha $n = 1$, akkor $F_0 = 3$, $F_1 - 2 = 5 - 2 = 3$

Feltesszük, hogy az állítás igaz m –ig, belátjuk, hogy ekkor $m+1$ –re is igaz:

$$F_0 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \ldots \cdot F_m = (F_0 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \ldots \cdot F_{m-1}) \cdot F_m =$$

$$= (F_m - 2) \cdot F_m = (2^{2^m} - 1)(2^{2^m} + 1) = 2^{2^{m+1}} - 1 = 2^{2^{m+1}} + 1 - 2 = F_{m+1} - 2$$

Tehát:
$$2 = F_n - (F_0 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \ldots \cdot F_{n-1})$$

A fenti egyenlőségből adódik, hogy, ha egy szám egyszerre osztja F_n –t és a sorozat valamely előző elemét, akkor 2-nek is osztója, kell, hogy legyen.

Így a közös osztó, csak 1, vagy 2 lehet. Viszont a sorozat minden tagja páratlan, ezért a sorozat tagjai relatív prímek. □

A1. b.) 1. Feladat harmadik megoldása:
Tekintsük a $F_n = 2^{2^n} + 1;\ n \geq 0$ számsorozatot.

Minden F_n szám vagy törzsszám, vagy létezik egy q_n törzsszám osztója.

Belátható, hogy az $F_n = 2^{2^n} + 1;\ n \geq 0$ számsorozat tagjai relatív prímek.

Így a q_n törzsszámok páronként különbözők, tehát a $q_1, q_2 \ldots$ törzsszámok végtelen sorozata. □

Definíció:
$F_n = 2^{2^n} + 1;\ n \geq 0$ számokat FERMAT–számoknak, az ilyen alakú törzsszámokat, FERMAT–prímeknek nevezzük.

FERMAT azt sejtette, hogy, a FERMAT–számok mind törzsszámok. $F_0=3$, $F_1=5$, $F_2=17$, $F_3=257$, $F_4=65537$ prímek, F_5 viszont nem törzsszám, osztható 641 -el. (Ezt először EULER igazolta, $f(5)=2^{32}+1= 4\ 294\ 967\ 297$.) Nem tudjuk, hogy léteznek-e további FERMAT–prímek.

A1. b.) 2. Feladat:
A 2 az egyedüli páros törzsszám, nagyobb felbonthatatlan számok $4k-1$, vagy $4k+1$ alakúak ahol k pozitív egész. Bizonyítsuk be, hogy mindkét-féléből, külön-külön is, végtelen sok van!

Megoldás:

I. rész
Először mutassuk meg, hogy végtelen sok $4k-1$ alakú törzsszám létezik, (k pozitív egész).

Megoldás
Tegyük fel, hogy véges sok $4k-1$ alakú törzsszám van: $p_1, p_2, \ldots p_k$.

Ekkor a $4 \cdot (p_1 p_2 \ldots p_k) - 1$ számnak csak $4k+1$ alakú törzsszám osztója lehet.

$4k+1$ alakú számok szorzata azonban $4k+1$ alakú:

$$(4k+1)(4j+1)=16kj+4k+4j+1$$

(j és k pozitív egészek). Ez ellentmondás. □

Segédfeladat az A1. b.) 2. Feladat megoldásának II. részéhez, és az A1. b.) 6. Feladathoz:

Legyenek a, b, c, d, q egész számok. Mutassuk meg, hogy ha a és b egyforma maradékot ad q-val osztva, és c és d is egyforma maradékot ad q-val osztva, akkor $a \cdot c$ és $b \cdot d$ is egyforma maradékot ad q-val osztva.

Megoldás:
Ez nyilvánvaló, hiszen, legyen:

$$a = k_1 q + r_1,$$

$$b = k_2 q + r_1,$$

$$c = k_3 q + r_2,$$

$$d = k_4 q + r_2$$

Ekkor:

$$a\,c = (k_1 q + r_1 k_1)(k_3 q + r_2) = k_3 q^2 + (r_1 k_3 + k_1 r_2)\,q + r_1 r_2$$

$$b\,d = (k_2 q + r_1)(k_4 q + r_2) = k_2 k_4 q^2 + (r_1 k_4 + k_2 r_2)\,q + r_1 r_2 \quad □$$

Következmény:
A fentiek alapján nyilvánvaló, hogy ha a és b egyforma maradékot ad q -val osztva, akkor a^n és b^n is egyforma maradékot ad q -val osztva. □

II

A1. b.) 2. Feladat megoldásának második része

Mutassuk meg, hogy végtelen sok $4k+1$ alakú törzsszám létezik, (k pozitív egész).

Első megoldás:

Tegyük fel, hogy véges sok $4k+1$ alakú szám van: $p_1, p_2, \ldots p_k$. Ekkor a $4(p_1p_2\ldots p_k)^2+1$, páratlan szám nem törzsszám. Így kell, hogy legyen egy $4k-1$ alakú törzsszám osztója. Jelölje ezt q .

Továbbá jelöljük $2 \cdot (p_1p_2\ldots p_k)$ -t x-el.

$x{:=}2 \cdot (p_1p_2\ldots p_k)$

Az eddig elmondottak, a bevezetett jelekkel, így hangzanak:

q osztója (x^2+1)-nek, vagyis x^2 ugyanannyit ad maradékul q-val osztva, mint (-1), (mindkettőjükhöz ugyanannyit kell adni ahhoz, hogy q-val osztható számhoz jussunk.)

Mivel x^2 és (-1) egyforma maradékot ad q-val osztva, a segéd feladatból következik, hogy $(x^2)^n$ és $(-1)^n$,*is* ugyanakkora maradékot ad q-val osztva, (n pozitív egész).

Viszont $(-1)^n$ maradékul q-val osztva, ha n páros ugyanannyit ad mint 1, ha n páratlan ugyanannyit ad, mint (-1).

Válasszuk meg n-t a következőképpen: $n := \frac{q-1}{2}$

A segédfeladatból következik, hogy $(x^2)^{\frac{q-1}{2}}$ és $(-1)^{\frac{q-1}{2}}$ ugyanakkora maradékot ad q-val osztva.

Mint már szó volt róla, a q törzsszám, és a $4(p_1p_2\ldots p_k)^2+1= x^2+1$ összetett szám osztója. Ezért q nem osztója sem x^2-nek, sem x -nek.

Mivel q különbözik $p_1, p_2, \ldots p_k$ törzsszámok mindegyikétől, ezért q egy $4k-1$ alakú felbonthatatlan szám (k pozitív egész), $q=4k-1$-t behelyettesítve:

$$(x^2)^{\frac{q-1}{2}} = x^{(q-1)}$$

$$(-1)^{\frac{q-1}{2}} = (-1)^{2k-1} = -1 \ .$$

Ebből az adódik, hogy $x^{(q-1)}$ ugyanannyit ad q -val osztva maradékul, mint (-1) .

Viszont az A1. a.) 1. Feladatból tudjuk, hogy x-et a $q-1$ –edik hatványra emelve olyan számot kapunk mely q-val osztva 1 maradékot ad. Ez ellentmondás. Ezért a kiindulási hipotézisünk, az hogy véges sok $4k+1$ alakú törzsszám létezik, téves. □

Második megoldás (az A1. b.) 2. Feladat megoldásának második részéhez):

Legyen $n > 1$.

Olyan $4k+1$ alakú törzsszámot szerkesztünk, amely n -nél nagyobb.

Tekintsük, az $m = (n!)^2 + 1$ páratlan szám valamely p törzsszám osztóját.

Ekkor $p > n$, és $(n!)^2$ ugyanakkora maradékot ad p -vel osztva, mint (-1).

A segédfeladatból következik, hogy ekkor $(n!)^{2\cdot\frac{p-1}{2}}$ ugyanannyit ad maradékul p -vel osztva, mint $(-1)^{\frac{p-1}{2}}$

Viszont az 1. Feladatból tudjuk, hogy $(n!)^{(p-1)}$ ha p -vel osztjuk, maradékul 1-et ad,.

Így $(-1)^{\frac{p-1}{2}}$ -nek is 1 maradékot kell adnia p –vel osztva.

Ebből $(-1)^{\frac{p-1}{2}} = 1$, innen $\frac{p-1}{2}$ páros, $2k = \frac{p-1}{2}$ tehát: $p = 4k+1$ alakú törzsszám. □

A1. b.) 3. Feladat

Minden $3n + 1$ alakú törzsszám $6m + 1$ alakú is.

Megoldás:

A $3n + 1$ alakú törzsszámban n páros kell hogy legyen, különben $3n + 1$ páros lenne. □

A1. b.) 4. Feladat:

Ha p és q olyan törzsszámok, hogy $p \geq q \geq 5$, akkor 24 osztója $p^2 - q^2$ -nek.

Megoldás:

$$p^2 - q^2 = (p-q)(p+q)$$

Mivel p és q páratlan, $(p-q)$ és $(p+q)$ is páros. Mivel minden 2-nél nagyobb törzsszám $4k+1$, vagy $4k-1$ alakú, $(p-q)$ vagy $(p+q)$ osztható 4-gyel.

Mivel minden 3-nál nagyobb törzsszám $3k+1$, vagy $3k-1$ alakú, $(p-q)$ vagy $(p+q)$ osztható 3-mal. □

A1. b.) 5. Feladat
A kapitánynak három unokája van, életkoruk három különböző prímszám. Ezek négyzetének összege ismét prímet ad. Hány éves a kapitány legkisebb unokája?

Megoldás:

$x^2 + y^2 + z^2 = p$
$x < y < z < p$
Ha $x = 2$, akkor mivel y és z is páratlan, p páros lenne.

Ha $x \neq 3$, akkor $x^2 = 3k+1$, és ez igaz a másik két prímszámra, y-ra, és z-re is. Hiszen egy prímszám $3k+1$, vagy $3k-1$ alakú. Négyzetre emelve mindkettő $3k+1$ alakú lesz. Tehát ha $x \neq 3$, akkor p osztható 3-mal. Ebből, a megadott feltételek alapján, a kapitány legkisebb unokája 3 éves kell, hogy legyen. A többi unokára megoldás például az: $y=5$, és $z=7$, mivel:
$3^2 + 5^2 + 7^2 = 83$ □

A1. b.) 6. Feladat
A 3-nál nagyobb $6k$, $6k+2$, $6k+3$ és $6k+5$ alakú számok biztosan összetettek. . Ezért a 2 és 3 törzsszámok kivételével minden törzsszám $6k-1$,vagy $6k+1$ alakú. Lássuk be, hogy mindkét féléből végtelen sok van.

Megoldás:

I. rész
Mutassuk meg, hogy végtelen sok $6k-1$ alakú törzsszám létezik, (k pozitív egész).

Megoldás:
Tegyük fel, hogy véges sok $6k-1$ alakú törzsszám van: $p_1, p_2, \ldots p_k$.

Ekkor a $6 \cdot (p_1 p_2 \ldots p_k) - 1$ számnak csak $6k+1$ alakú törzsszám osztója lehet.

$6k+1$ alakú számok szorzata azonban $6k+1$ alakú:
$(6k+1)(6j+1) = 36kj + 6k + 6j + 1$
(j és k pozitív egészek).

Ez ellentmondás. □

II. rész

Mutassuk meg, hogy végtelen sok $6k+1$ alakú törzsszám létezik, (k pozitív egész).

Megoldás

Legyen $n > 1$.

Olyan $6k+1$ alakú törzsszámot szerkesztünk, amely n-nél nagyobb.

Tekintsük, az $m = (n!)^3 + 1$ páratlan szám valamely törzsszám osztóját, jelöljük p-vel.

Ekkor $p > n$.

$(n!)^3$ ha p -vel osztjuk, maradékul ugyanannyit ad, mint (-1).

A segédfeladatból következik, hogy ekkor $(n!)^{\frac{3(p-1)}{3}}$ ha p -vel osztjuk, maradékul ugyanannyit ad, mint $(-1)^{\frac{p-1}{3}}$

Viszont az 1. Feladatból tudjuk, hogy $(n!)^{p-1}$ ha p -vel osztjuk, maradékul 1 –et ad. Így $(-1)^{\frac{p-1}{3}}$ -nak is 1 maradékot kell adnia p –vel osztva.

Ebből $(-1)^{\frac{p-1}{3}} = 1$, innen $\frac{p-1}{3}$ páros, $2k = \frac{p-1}{3}$ tehát: $p = 6k+1$ alakú prím. □

A $4k-1$, és a $4k+1$ alakú törzsszámok számának, vagy a $6k-1$, és a $6k+1$ alakú törzsszámok számának, (k pozitív egész)problémája, a DIRICHLET–tétel speciális esete.

Tétel

a, b, k pozitív egész számok. A DIRICHLET féle tétel szerint, ha a-nak, és b-nek nincs közös osztója, akkor az $a \cdot k + b$ számtani sorozatban végtelen sok törzsszám van. A bizonyítása nehéz.

A1. b.) 7. Feladat

Viszont könnyen belátható a DIRICHLET féle tétel következő speciális esete :

q törzsszám. A $q^L \cdot k + 1$ $(k=1,2, \ldots)$, , számtani sorozatban végtelen sok törzsszám van Igazoljuk!¨ (lásd Függelék)

A1. c.)

A törzsszámok: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47 stb.

Az egymásután következő rések a törzsszámok között:
1, 2, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 6, 2, 6, 4, 2, 4 stb.

Meg lehet mutatni, hogy bármilyen nagy réseket találhatunk a törzsszámok között, ha elég messzire megyünk a számsorban.

A1. c.) 1. Feladat
Mutassuk meg, hogy tetszőleges nagy N pozitív egész számhoz meg lehet adni N-számú szomszédos összetett számot.

Megoldás:
Legyen p az N-nél nagyobb törzsszámok között a legkisebb. Ilyen törzsszám az előző feladat alapján létezik. Tekintsük az $A_1 \ldots A_N$ szomszédos számokat.

$A_1 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot p + 2$
$A_2 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot p + 3$
$A_3 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot p + 4$
$\ldots$
$A_{N-1} = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot p + N$
$A_N = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot p + (N+1)$

Megmutatjuk, hogy az $A_1, \ldots, A_N$ számok között nincs törzsszám. A $2, 3, 4, 5 \ldots N, (N+1)$ számok törzsszám osztói $N+1 \leq p$ miatt a $2, 3, 5 \ldots p$ törzsszámok közül kerülnek ki. S így a megfelelő törzsszámokkal az összeg mindkét tagja osztható. □

A1. d.)

Mindamellett, ameddig csak megvizsgálták a számsort, bármilyen hosszú réseken túl is, újra meg újra találtak szomszédos páratlan számokat, amelyek felbonthatatlannak bizonyultak.

Például a rés hossza 2 a számsor elején a 2-3; 3-5; 5-7; 11-13; 15-17; 17-19; törzsszámok között, vagy később például a 179-181 között, de még sokkal később is találhatunk ilyen törzsszám párokat.
Például :
1 000 000 000 061, és 1 000 000 000 063 ,vagy a
$2\,003\,663\,613 \cdot 2^{195\,000} - 1$, és a $2\,003\,663\,613 \cdot 2^{195\,000} + 1$ törzsszámok ,vagy a
10^9+7, és a 10^9+9 törzsszámok különbsége is kettő.

Megmutatható, hogy végtelen sok olyan prím létezik, mely nem tagja ikerprímszám-párnak. A prímszámelmélet egy nevezetes, mindmáig megoldatlan kérdése az, hogy létezik-e végtelen sok ikerprímszám-pár.

A sejtést először EUKLIDÉSZ fogalmazta meg időszámításunk előtt 300 körül.

1973-ban CHEN igazolta, hogy végtelen sok olyan p felbonthatatlan szám van, hogy $p+2$ felbonthatatlan szám vagy két felbonthatatlan szám szorzata.

2013 áprilisában JITANG CSANG, a DURHAMBAN található NEW HAMPSHIRE–i Egyetem professzora bebizonyította, hogy végtelen sok olyan felbonthatatlan szám-pár létezik, amelyek különbsége kevesebb, mint 70 millió.

Ez azért nagy eredmény, mert a különbség véges szám. A lényeg, hogy végtelen sokszor valamilyen konkrét véges határ alatt marad a szomszédos törzsszámok különbsége.

Ugyancsak ismert és régóta megoldatlan sejtés, hogy minden k pozitív természetes számhoz végtelen sok olyan p törzsszám található, hogy $p+2k$ is törzsszám, az is hogy végtelen sok x^2+1 alakú törzsszám létezik, és az is, hogy végtelen sok olyan p törzsszámra bukkanhatunk, hogy $2p+1$ is törzsszámnak bizonyul.

A1. d.) 1.Feladat:
Mely p törzsszámokra teljesül, hogy p^2+2 is törzsszám?

Megoldás:
$p^2+2=(p^2-1)+3=(p+1)(p-1)+3$
Mivel p háromnál nagyobb törzsszám, nem osztható 3-mal. Viszont három egymásután következő szám közül, egy osztható hárommal, ezért $(p+1)(p-1)$ osztható hárommal.
□

A1. d.) 2.Feladat:
Milyen n egész számokra törzsszám $n^4 + 4$?

Megoldás:
$n^4 + 4 = (n^2 + 2)^2 - (2n)^2 = (n^2 + 2 + 2n)\ (n^2 + 2 - 2n)$
Ha $n > 1$, mindkét tényező nagyobb, mint 1, mindkettő $n^4 + 4$ valódi osztója. □

A1. d.) 3.Feladat:
Ha $p, q \geq 5$ ikerprímek, akkor 12 osztója $(p+q)$ -nak.

Megoldás:
Minden törzsszám $6k+1$, vagy $6k-1$ alakú. Mivel p és q ikerprímek, $6k+1$ és $6k-1$ alakúak, ugyanazzal a k-val, $p + q = 12k$. □

A1. d.) 4.Feladat:
Lehetnek-e 2^n-1 és 2^n+1 ikerprímek, ha $n \geq 1$?

Megoldás:
Három egymást követő szám közül egy osztható hárommal. 2^n nem osztható 3-mal, így 2^n-1 és 2^n+1 egyike osztható 3-mal. Így 2^n-1 és 2^n+1 nem lehetnek ikerprímek . □

A1. d.) 5.Feladat:
Ha p és $8p-1$ törzsszámok, lehet-e $8p+1$ is törzsszám?

Megoldás:
Ha a p prímszám nagyobb 3-nál, akkor $8p$ nem osztható 3-mal, $8p-1$ sem osztható hárommal, mert törzsszám. Három egymásután következő prímszám közül azonban az egyik osztható hárommal. Így $8p+1$ összetett szám kell, hogy legyen.

Ha $p=3$, akkor $8p-1=23$ is prímszám, a feltételek teljesülnek, és $8p + 1 = 25$ ekkor is összetett szám. □

A1. d.) 6.Feladat:
Mutassuk meg, ha p és $8p^2 +1$ törzsszámok, akkor $8p^2 - 1$ is törzsszám?

Megoldás:
Ha p háromnál nagyobb törzsszám akkor p^2 maradékul 1-et ad 3-mal osztva, így tehát $8p^2+1$ osztható 3-mal.

Ha $p = 3$, akkor $8\ p^2 + 1 = 71$, prímszám, tehát a feladat feltételei csak ebben az egy esetben teljesülnek.
Ha a feladat feltételei teljesülnek $8p^2+1= 73$ valóban prímszám. □

A1. d.) 7.Feladat
Mutassuk meg, hogy végtelen sok olyan törzsszám van, amely nem tagja egyetlen ikerprímszám-párnak sem!

Megoldás:
Mivel 15, és 7 relatív prímek, így a DIRICHLET–tételből adódik, hogy végtelen sok $15k+7$ alakú törzsszám létezik. Könnyű belátni, hogy a $15k+7$ alakú törzsszámok nem tagjai ikerprímszám-pároknak. $(15k + 7) - 2 = 15k + 5$ osztható 5-tel, $(15k+7) + 2 = 15k + 9$ osztható 3-mal. □

A1. d.) 8.Feladat
Mutassuk meg, hogy minden $k \geq 1$ esetén létezik végtelen sok olyan törzsszám, hogy a $[p-k,\ \text{és}\ p+k]$ zárt intervallumban (az intervallumba a határok is bele tartoznak), p az egyedüli törzsszám!

Megoldás:

Legyen q egy $k+2$-nél nagyobb törzsszám.

Tekintsük az $a=2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(q-2)(q-1)(q+1)(q+2)\ldots(2q-2)$ számot.

Ekkor a és q relatív prímek, tehát a DIRICHLET–tétel szerint végtelen sok $p = a\,L + q$ alakú törzsszám létezik (L pozitív egész).

Belátjuk, hogy ezek a törzsszámok mind megfelelnek a feladat követelményének, vagyis a $[p-k,\ \text{és}\ p+k]$ zárt intervallumban (az intervallumba a határok is bele tartoznak), p az egyedüli törzsszám.

Megmutatjuk, hogy bármely $k > i$ -re, $(p - i)$ összetett szám.

$$p - i = (a\cdot L + q) - i = 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots(q-2)(q-1)(q+1)(q+2)\ldots(2q-2)\cdot L + q - i$$

Látható, hogy $(q-i)$ kiemelhető.

Mivel $(q-i)$ nagyobb, mint 2, és kisebb, mint $(p-i)$, valódi osztója $(p-i)$-nek.
$q - i > q - k > 2$
$q - i < (a\cdot L + q) - i = p - i$ □

A1. d.) 9.Feladat:
Lehet-e a $p,\ p+2,\ p+4$ számok mindegyike törzsszám?

Példa rá:
3, 5, 7

Megoldás:
Ha a 3-nál nagyobb p törzsszám $3k+1$ alakú, akkor $p+2$ osztható 3-mal.

Ha $3k+2$ alakú, akkor $p+4$ osztható 3-mal.

Ezért több megoldás nincsen. □

A1. d.) 10.Feladat:
Lehet-e egy pozitív egészekből álló, nem konstans, végtelen számtani sorozat minden tagja törzsszám?

Megoldás:
Legyen

$a,$
$a+r,$
$a+2r,$
$a+3r$
$, \ldots,$
$a+nr,$
$\ldots.$

egy számtani sorozat, ahol $a > 1$, (mivel az 1 nem törzsszám, $a=1$, nem lehetséges), $r \geq 0$.

Ha $r = 0$, akkor lehet minden tag törzsszám, eza konstans sorozat, például, minden tagja 2.

Ha $r > 1$, akkor $a + a \cdot r = a (1 + r)$ összetett, hisz $a \geq 2$, és $1 + r \geq 2$ valódi osztói $a \cdot r$-nek . □

A1. d.) 11.Feladat:
Adjunk példákat véges sok tagú számtani sorozatokra, amelyek tagjai mind törzsszámok!

Példák:
Háromtagú:

$3, 5, 7$
$3, 7, 11$
$3, 11, 19$

Négytagú:

$41, 47, 53, 59$

Öttagú:

$5, 11, 17, 23, 29$

Hattagú:

$7, 37, 67, 97, 127, 157$

A1. d.) 12.Feladat
Tíz 3000-nél kisebb törzsszám számtani sorozatot alkot. Melyek ezek a számok?

Megoldás:
Minthogy a prímszámok a 2 kivételével páratlan számok, ezért ha sorozat kettőnél több tagot tartalmaz, vagy két tag esetén az első tag nem a kettő, akkor a számtani sor különbsége páros szám.

Továbbá, ha a sorozat különbsége nem lenne osztható 3-mal, akkor a sorozat egymásután következő 3 elemét véve: $a_1,\ a_1+d,\ a_1+2d,$ akárhogy választunk ki belőlük kettőt, a különbségük: d, vagy $2d,$ nem lenne osztható 3-mal. Így mind különböző maradékokat adnának hárommal osztva. Egyikük osztható volna 3-mal. Következésképpen, ha a sorozat kettőnél több tagot számlál, vagy 3 tag esetén, ha $a_1 \neq 3$, akkor d osztható kell hogy legyen 3-mal.

Ugyanilyen meggondolás alapján, ha d nem lenne osztható 5-tel, akkor az $a_1,\ a_1+d,\ a_1+2d,\ a_1+3d,\ a_1+4d$ számok valamennyien különböző maradékot adnának 5-tel osztva, hiszen akárhogy választunk ki belőlük kettőt, a különbségük: $d,\ 2d,\ 3d,\ 4d$ lenne, nem osztható 5-tel. Mivel mind különböző maradékokat adnának öttel osztva, egyikük osztható volna 5-tel.
Hasonló módon megmutatható, hogy a 10 tagú, prímszámokból álló számtani sorozat különbsége, kell hogy osztható legyen 7-tel.

Az eddigieket összegezve: a számtani sor különbsége $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$ többszöröse kell, hogy legyen, vagyis $d = 210\ k.$

Másrészt a keresett 10 tagú számtani sor minden tagja kisebb 3000-nél:
$a_{10} = a_1 + 9\ d = a_1 + 1890\ k < 3000$
Ebből látható, hogy csak $k = 1$ jöhet szóba. Így $d = 210$.

Mivel $210 = 11 \cdot 9 + 1,$ a sorozat $m+1$-ik eleme felírható a következő alakban:
$a_{m+1} = a_1 + (11 \cdot 19 + 1) \cdot m = 11 \cdot 19m + (a_1 + m)$

Eszerint, ha a_1 maradékul 2-őt ad 11-el osztva, akkor a_{10} osztható 11-el.

Ha a_1 maradékul 3-at ad 11-el osztva, akkor a_9 osztható 11-el.

Ha a_1 maradékul 4-et ad 11-el osztva, akkor a_8 osztható 11-el.

…

Ha a_1 maradékul 10-et ad 11-el osztva, akkor a_2 osztható 11-el.

Tehát a_1 maradékul 1-et ad vagy egyenlő 11-el, vagy a 11-el való osztáskor.

Továbbá kihasználva azt, hogy $210 = 13 \cdot 16 + 2$, a sorozat $m+1$-ik eleme felírható a következő alakban:
$a_{m+1} = a_1 + (13 \cdot 16 + 2) \cdot m = 13 \cdot 16\, m + (a_1 + 2m)$

a_1 a következő maradékokat adhatja 13-mal osztva $1, 2, \ldots 12$. Behelyettesítve $m=1, 2, \ldots 10$, értékeket az $(a_1 + 2m)$ kifejezésbe, az a_1 következő 13-mal adott maradékai esetén kaphatunk 13-mal osztható számot: $1, 3, 5, 7, 9, 11$.

Tehát, ha a_1 maradékul 1-et ad 13-mal osztva, akkor a_7 osztható 13-mal.

Ha a_1 maradékul 3-at ad 13-mal osztva, akkor a_6 osztható 13-mal.

Ha a_1 maradékul 5-öt ad 13-mal osztva, akkor a_5 osztható 13-mal.

Ha a_1 maradékul 7-et ad 13-mal osztva, akkor a_4 osztható 13-mal.

Ha a_1 maradékul 9-et ad 13-mal osztva, akkor a_3 osztható 13-mal.

Ha a_1 maradékul 11-et ad 13-mal osztva, akkor a_2 osztható 13-mal.

Tehát a_1 olyan szám, mely vagy egyenlő 11-el, vagy 11-el osztva pedig 1-et ad maradékul, és 13-mal osztva a $2, 4, 6, 8, 10, 12$ számok egyikét adja maradékul.

A legkisebb olyan szám, mely 11-el osztva 1-et ad maradékul, és 13-al osztva 10-et: 23 .

A legkisebb olyan szám, mely 11-el osztva 1-et ad maradékul, és 13-al osztva 6-ot: 45 .

A legkisebb olyan szám, mely 11-el osztva 1-et ad maradékul, és 13-al osztva 2-öt: 67 .

A legkisebb olyan szám, mely 11-el osztva 1-et ad maradékul, és 13-al osztva 12-öt: 155 .

A legkisebb olyan szám, mely 11-el osztva 1-et ad maradékul, és 13-al osztva 4-at: 199 .

Így a keresett, páratlan a_1 szám a következő kifejezések valamelyikével írható fel:
$2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot k + 23$
$2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot k + 45$
$2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot k + 67$
$2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot k + 155$
$2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot k + 199$
ahol $k = 1, 2, \ldots$

Mivel $a_1 < 1110$, ezért a_1 -re csak a következő értékek jöhetnek számításba:
$11; 23; 309; 595; 881; 45; 331; 615; 903; 67; 353; 637; 925; 155; 441; 727; 1013; 177; 463; 749; 1035; 199; 485; 771; 1057$.

E számok közül, csak a következők prímek:
11; 23; 881; 331; 67; 353; 727; 1013; 463 és 199 .

A követelményeknek a lehetséges *10* sorozat közül csak a következő sorozat tesz eleget:
199; 409; 619; 829; 1039; 1249; 1459; 1669; 1879; 2089 . □

A1. d.) 13. Feladat:
Bizonyítsuk be, hogy nem létezik *11* darab *20 000*-nél kisebb olyan törzsszám, amelyek számtani sorozatot alkotnának!

Megoldás:
Ugyanúgy ahogy az előző feladatban tettük, kimutathatjuk, hogy ha az a_1 szám *11*-től különböző, akkor a *11* prímszámból álló számtani sor különbsége $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310$-el osztható kell, hogy legyen. Ebből következik, hogy a_{11} a következő alakban írható:
$a_{11} = a_1 + 23\,100\, k > 20\,000 \quad (k = 1, 2, \ldots)$

Már csak az $a_1 = 11$ esetet kell megvizsgálnunk. Annyit tudunk róla, hogy $d = 210\, k$.

Kihasználva, hogy $210 = 13 \cdot 6 + 2$, a sorozat általános elemét a következő alakban írhatjuk fel:
$a_{n+1} = 11 + (13 \cdot 16 + 2)\, k \cdot n = 13\,(16\, k\, n + 1) + 2(k \cdot n - 1)$

Ha $k = 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10$ akkor a megfelelő n értékekkel:
$n = 1, 7, 9, 10, 8, 2, 5, 3, 4$
$(k \cdot n - 1)$ osztható 13-mal.

Ha pedig $k = 6$, akkor $d = 6 \cdot 210 = 1260$, és $a_4 = 11 + 3 \cdot 1260 = 3791$ osztható *17*-tel.

Így tehát, ha $a_1 = 11$, akkor $k > 10$, következésképpen $d \geq 2100$ és ezért $a_{10} > 20\,000$.
□

Tétel:
Belátható, hogy minden $k \geq 1$ számra, a törzsszámok sorozatában létezik végtelen sok k hosszúságú számtani sorozat. (Ben Green, Terenc Tao 2004)

A1. e.)

CSEBISEV orosz matematikus bebizonyította, hogy 2-től kezdve bármely szám és a kétszerese között,— a szám és a kétszerese nem számít bele a vizsgált halmazba—, mindig van felbonthatatlan szám [1] 71. o:

Példák:

a 2 és a 4 közé esik a 3 felbonthatatlan szám,
a 3 és a 6 közé esik az 5 felbonthatatlan szám,
a 4 és a 8 közé esik az 5 és a 7 felbonthatatlan szám,
az 5 és a 10 közé esik a 7 felbonthatatlan szám,
a 6 és 12 közé esik a 7 és a 11 felbonthatatlan szám,

Sőt, ha elég messze megyünk és elég nagy számokat, választunk, akárhány felbonthatatlan szám is eshet a számok és kétszereseik közé.

Jelölje p_n az n -ik törzsszámot. Például: $p_1=2,\ p_2=3,\ p_3= 5,\ p_4=7,\ p_5=11, \ldots$

A1. e.) 1. Feladat:

Igazoljuk, hogy $p_{n+1} < 2p_n$, minden $n \geq 1$ esetén!

<u>Megoldás</u>

A CSEBISEV–tételből következik, hogy p_n és $2p_n$ között van prím. Ebből $p_{n+1} < 2p_n$

□

A1. e.) 2. Feladat

Igazojuk, hogy minden $n \geq 2$ esetén $p_n < 2^n$

<u>Megoldás:</u>

Ha $n = 2$, akkor $p_2 = 3 < 2^2$, igaz az állítás.

Belátjuk, hogy ha valamely k-ra igaz az állítás, akkor, $k+1$-re is igaz.

Tegyük fel, hogy valamely $k \geq 2$ -re igaz az állítás, azaz $p_k < 2^k$.

A CSEBISEV–tétel alapján 2^k és 2^{k+1} között létezik prímszám, amely nagyobb, mint p^k.

Így $p_{k+1} < 2^{k+1}$ □

A1. e.) 3. Feladat
Igazoljuk, hogy létezik végtelen sok olyan törzsszám, melynek első számjegye 1-es (a 10-es számrendszerben felírva)!

Megoldás:
A CSEBISEV–tétel szerint minden $k \geq 1$-re 10^k és $2 \cdot 10^k$ között van prímszám, és ez olyan szám, amelynek első jegye 1-es és $k+1$ jegyű. Így különböző k értékekre különböző ilyen prímeket kapunk. □

A1. e.) 4. feladat:
Tekintsük a pozitív egész számokat 1-től n-ig: $1, 2, 3\ldots, n$.
1,
Két csoportra bonthatók-e úgy, hogy az egy csoportba tartozók szorzatát képezve, a két szorzat megegyezzen?
2,
Két csoportra bonthatók-e úgy, hogy az egy csoportba tartozók összegét képezve, a két összeg megegyezzen?

Megoldás:

1,

I. n páros

A CSEBISEV–tétel alapján kijelenthetjük, hogy $\frac{n}{2}$ és n közé esik törzsszám. Ennek a törzsszámnak a kétszerese már nagyobb n-nél. Így a szorzattá alakítandók törzstényezőinek halmazában csak egyszer szerepel. Ezért ez a halmaz nem bontható ketté úgy, hogy az egy csoportba tartozók szorzatát képezve, a két szám megegyezzen. □

II. n páratlan

A CSEBISEV–tételből következik, hogy $\frac{n+1}{2}$ és $n+1$ közé esik törzsszám. Ennek a törzsszámnak a kétszerese már nagyobb n -nél. Így a szorzattá alakítandók törzstényezőinek halmazában csak egyszer szerepel. Ezért ez a halmaz nem bontható ketté úgy, hogy az egy csoportba tartozók szorzatát képezve, a két szám megegyezzen. □

2.)

I. n páros

1-től n-ig a számok összege: $\frac{n(n+1)}{2}$. Az egy halmazba tartozók összege ezért $\frac{n(n+1)}{4}$ kell, hogy legyen. Ez akkor egész szám, ha n osztható 4-el. Ebben az esetben például a következőképpen oszthatjuk szét a megfelelő módon a számokat: alkossunk szám-párokat a következő módon:

$1, n;$
$2, n-1;$
$3, n-2\ldots$
$\frac{n}{2}, \frac{n}{2}+1.$

Mindegyik szám-pár összege $n+1$, és $\frac{n}{2}$ darab van belőlük. Mivel $\frac{n}{2}$ páros szám, a párokat két egyenlő nagyságú csoportra oszthatjuk. □

II. n páratlan

Az egy halmazba tartozók összege $\frac{n(n+1)}{4}$, kell, hogy legyen. Ez akkor egész szám, ha $(n+1)$ osztható 4-el. Ekkor például a következőképpen oszthatjuk szét a megfelelő módon a számokat: alkossunk szám-párokat a következőképpen:

$1, n-1;$
$2, n-2;$
$3, n-3\ldots$
$\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2}+1.$

Mindegyik szám-pár összege n, és $\frac{n-1}{2}$ darab van belőlük. Mivel $(n+1)$ osztható 4-el, $\frac{n-1}{2}$ páratlan szám. Páratlan számú egyenlő nagyságú csomagokhoz, még hozzávesszük a legnagyobb számot, n-t. Most már páros számú egyforma nagy csomagunk van. Ezeket két csoportra bonthatjuk úgy, hogy az egy csoportba tartozók összegét képezve, a két szám megegyezzen. □

A1. f.)

Vajon milyen sűrűn helyezkednek el a prímszámok a számegyenesen?

Ismert, hogy a pozitív egész számok reciprokjaiból képzett

$a_1 = \frac{1}{1}$

$a_2 = \frac{1}{2}$

$a_3 = \frac{1}{3}$

$a_4 = \frac{1}{4}$

$a_5 = \frac{1}{5}$

$\vdots$

Egyszerűbben leírva:

$$a_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$$

sorozat divergens, (tetszőleges valós számnál van nagyobb tagja a sorozatnak), míg a négyzetszámok reciprokjaiból képzett sorozat konvergens.

Ez azt jelenti, hogy a négyzetszámok viszonylag ritkán fordulnak elő a pozitív egészek között. Vajon mi a helyzet a prímekkel? Erről szól a következő tétel:

Tétel:
A pozitív prímszámok reciprokaiból képzett

$$c_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i}$$

sorozat divergens.

E tétel szerint a törzsszámok sűrűbben fordulnak elő a természetes számok között, mint a négyzetszámok.(átlagosan valamely n-ig több a törzsszám, mint a négyzetszám, vagyis n-ig nagyságrendben több mint $\sqrt{n}$ törzsszám található. Nagy vonalakban, a k-ik pozitív prímszám „gyakran" kisebb, mint a k-ik négyzetszám, $p_k \le k^2$)

Jelölje π_x az x pozitív egész számig található törzsszámok számát.

A prímszámok sűrűségének jellemzésére, hogy egy adott korlátig a pozitív egészek hányad része prímszám, bevezetjük a $\frac{\pi_x}{x}$ hányadost.

Azt tapasztaljuk, hogy kezdetben körülbelül a számok fele prím. Folytatva a vizsgálódást azt tapasztaljuk, hogy — kisebb-nagyobb ingadozásokkal ugyan, de csökken ez az arány, például

$\pi_{100} = 25$

, vagyis 100-ig a számok negyedrésze prím. Vajon mi a helyzet a későbbiekben? Nagy vonalakban csökken a prímek aránya, vagy sűrűsödések és ritkulások váltogatják egymást? Létezik-e határértéke a végtelenben?

A prímek szabálytalan elhelyezkedése, számos érdekessége sokakat késztetett arra, hogy megpróbáljanak olyan függvényt keresni, amelynek az n helyen felvett helyettesítési értéke az n-ik prím, vagy olyat, amely minden természetes számhoz prímet rendel eddig nem sikerült megadni.

A1. f.) 1. Feladat

Mutassuk meg, hogy az $f(n) = n^2 - n + 41$ polinom az n=1, 2, 3,…,40 értékek mindegyikére prímet ad.

A1. g.) [1] 71. o.

Meglepő, hogy a kicsiben, a számsor vizsgálható darabjain szabálytalanul eloszló törzsszámok — a maguk végtelen összességében — mégis alá vannak vetve valamiféle rendnek.

Tekintsük a következő sorozatot:

> 2-ig egy törzsszám van: maga a 2. Ezért legyen a sorozat első tagja: 1.
> 3-ig már 2db.: a 2 és a 3. Ezért legyen a sorozat második tagja: 2.
> 4-ig 2db.: a 2 és a 3. Ezért legyen a sorozat harmadik tagja: 2.
> 5-ig 3db.: a 2, a 3, és az 5. Ezért legyen a sorozat 4-edik tagja: 3.
> 6-ig 3db.: a 2, a 3 és az 5. Ezért legyen a sorozat 5-ödik tagja: 3.

Olyankor vált ez a sorozat, amikor egy-egy új törzsszámhoz jutunk, és ez egészen szabálytalan időközökben következik be. Mégis fel lehet írni egy bizonyos szabály szerint képezhető, jól ismert sorozatot, amelynek egyre távolabbi tagjai, egyre jobban és jobban hasonlítanak a mi sorozatunk tagjaihoz, és így e sorozatok távoli részei „majdnem” egyenlőknek tekinthetők, (ASSZIMPTOTIKUSAN egyenlők), szemléletesen összesimulnak.

Ez a sorozat: $\frac{2}{ln\,2}$, $\frac{3}{ln\,3}$ $\ldots$ ahol $ln\,2$ a 2-es szám természetes alapú logaritmusát jelenti.

(Mint ismeretes, a alapú logaritmus b, az a szám: $log_a b = c$, , melyre teljesül $a^c = b$.
A természetes alapú logaritmus alapjára, e-re teljesül, hogy e egyenlő azzal a számmal, amelyhez $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ tart, ha n tart a végtelenhez.)

π_n jelöli az n pozitív egész számig található törzsszámok számát. A felfedezett szabályszerűség szerint, ha az n pozitív egész szám elég nagy, az n pozitív egész számig található törzsszámok száma, π_n, közelítőleg: $\frac{n}{\ln n}$. Ez a nagy prímszám-tétel.

Ebből következik, hogy $\frac{\pi_n}{n}$, tart a 0 –hoz, ha n tart a végtelenhez.

A1. h.)

Figyeljük meg!

$4=2+2;\ 6=3+3;\ 8=3+5;\ 10=5+5;\ 12=7+5;\ 14=11+3;\ 16=11+5;\ 18=11+7;\ 20=13+7$

$7=2+2+3;\ 9=2+2+5;\ 11=3+3+5;\ 13=3+5+5;\ 15=5+5+5;\ 17=5+5+7;\ 19=3+5+11;$

A GOLDBACH–sejtés azt mondja ki, hogy
A sejtés egyike azoknak a szélesebb körben ismert matematikai állításoknak, melyekről a szakemberek túlnyomó többsége azt gondolja, hogy minden valószínűség szerint igaz, ugyanakkor a mai napig nem rendelkezünk bizonyítással a helyességüket illetően.

CHRISTIAN GOLDBACH 1742-ben egy EULERHEZ írott levelében fogalmazta meg azt, a megfigyelését, hogy minden 5-nél nagyobb páratlan szám három prímszám összege.

EULER válaszul rámutatott, hogy ez következik abból az állításból, hogy minden 2-nél nagyobb páros szám előáll két törzsszám összegeként (, hiszen minden, két páratlan szám összegeként előállított páros számhoz a 3-as törzsszámot hozzáadva, megkapjuk három törzsszám összegeként előállítva, az összes 5-nél nagyobb páratlan számot).

Ezért erős GOLDBACH–sejtésnek nevezik azt az állítást, hogy minden 2-nél nagyobb páros szám előáll két törzsszám összegeként.

Azt az állítást pedig, hogy minden 5-nél nagyobb páratlan szám három prímszám összege, gyenge GOLDBACH–sejtésnek szokás nevezni.

2012-ben TERENCE TAO bebizonyította, hogy minden 5-nél nagyobb páratlan szám előáll legfeljebb öt törzsszám összegeként.

A1. h.) 1. Feladat:

Igazoljuk, hogy minden $n \geq 2$ szám felírható törzsszámok összegeként!

Megoldás:
$n = 2k = 2 + 2 + \ldots + 2$ (k darab 2-es)
$n = 2k + 1 = 2 + 2 + \ldots + 2 + 3$ ($k-1$ darab 2-es) □

A1. h.) 2. Feladat

Igazoljuk, hogy minden $n \geq 12$ szám felírható két összetett szám összegeként!

Megoldás:
$12 = 8 + 4$, ha n páros: $n = \{(n - 12) + 8\} + 4$
$12 = 9 + 3$, ha n páratlan: $n = \{(n - 12) + 3\} + 9$, ahol $\{(n - 12)\} + 3$ páros szám. □

A1. h.) 3. Feladat

Felírható-e $F_n = 2^{2^n} + 1 \quad n \geq 0$ két törzsszám összegeként?

Megoldás:

Mivel $F_n = 2^{2^n} + 1 \quad n \geq 0$ páratlan szám, a két törzsszám közül az egyiknek párosnak kell lennie.

Tehát átfogalmazható úgy a kérdés, hogy $2^{2^n} - 1$ mikor lehet prímszám?

$k = j \cdot m$ esetén (j, és m pozitív egész), $2^m - 1$ osztója $2^k - 1$-nek, hiszen:

$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2} b + a^{n-3} b^2 + \ldots + b^{n-1})$.

Ezért $2^{2^n} - 1 \quad (n \geq 0)$ csak akkor lehet prímszám, ha 2^n prím, és ez csak $n = 1$ esetén teljesül.

Ekkor valóban prímet is kapunk: $n=1$ esetén $2^{2^n} - 1 = 3$

Ezért a feladatnak csak $n=1$ esetén lehet megoldása:
$F_n = 2^{2^n} + 1$
$F_1 = 5 = 2 + 3$
□

A2.
Az oszthatóság fogalma is sok érdekességre vezet:

A2. a.)

Mint már szó volt róla, olyan szám is van, mely saját valódi osztóinak összegével egyenlő.

Példák:

$6=2\cdot 3 \rightarrow 6=1+2+3$

$28=2\cdot 2\cdot 7 \rightarrow 28=1+2+7+4+14$

Az ilyen számokat, mint már említettük „tökéletes számoknak" nevezték a régmúlt idők papjai, és mágikus tulajdonságokkal ruházták fel őket.

Páros tökéletes számok előállítására már az ókorban tudtak receptet adni:

EUKLIDÉSZ Elemek c. könyvének IX.36 tétele így szól:

„Ha az egységtől kezdve kétszeres arányban képezünk egy mértani sorozatot, amíg a sorösszeg prím nem lesz, és az összeggel megszorozzuk az utolsó tagot, akkor a szorzat tökéletes szám lesz."

Jelekkel leírva: ha $1+2+2^2+\ldots+2^{k-1}=2^k-1$ felbonthatatlan szám, akkor $2^{k-1}(2^k-1)$ tökéletes szám.

(Ekkor, természetesen k is prímszám, hiszen $k=j\cdot m$ esetén (j, és m pozitív egész), 2^m-1 osztója lenne 2^k-1-nek, a közismert összefüggés,
$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+b^{n-1})$
alapján.)

Példák:

1.
$p=2$ akkor $2^p-1=2^2-1=3$. Így a 3 felbonthatatlan szám eleget tesz a recept feltételeinek.
$n=2^{p-1}(2^p-1)=2\cdot 3=6$ tökéletes szám.

2.
$p=3$ akkor $2^p-1=2^3-1=7$. Így a 7 felbonthatatlan szám megfelel a receptnek.
$n=2^{p-1}(2^p-1)=4\cdot 7=28$ tökéletes szám.

A $2^p-1=M_p$ alakú felbonthatatlan számokat MERSENNE–prímeknek nevezzük. A recept annyi tökéletes számot szolgáltat, ahány MERSENNE–prím létezik.

A tökéletes számokat előállító tételt először NIKOMAKHOSZ (I-II sz.) görög matematikus mondta ki, de máig sem tudjuk, hogy ez a recept akárhány tökéletes számot szolgáltat-e, vagy pedig megakad valahol, hiszen nem tudjuk, hogy hány MERSENNE–prím van.
Bár a törzsszámok száma végtelen, nincs képlet az előállításukra, ezért felfedezésükhöz hatalmas számítási teljesítményre van szükség. Maga MERSENNE írja, hogy, *„ahhoz, hogy egy 15- vagy 20-jegyű számról megállapítsuk, törzsszám-e vagy sem, egy egész élet ideje sem elég."*

A prímek jelentősége napjainkban megnőtt, hiszen a titkosításban, kódolásban kulcsszerepet játszanak

Az M_2, M_3, M_5 *és* M_7 MERSENNE–prímeket már az ókorban ismerték.

Az M_{13}, M_{17} és M_{19} prímeket P. A. CATALDI fedezte fel 1588-ban.

LEONHARD EULER nevéhez fűződik az M_{31} MERSENNE–prím felfedezése 1750-ben. Több mint 100 éven át ez volt a legnagyobb ismert prím.

1876-ban E. LUCAS (1842-1891) megállapította, hogy M_{127} is prím - ez *39* számjegyű:
170 141 183 460 469 231 731 687 303 715 884 105 727.

További MERSENNE–prímek: M_{61}, M_{89}, M_{107}, M_{521}, M_{607}, M_{1279}, M_{2203}, M_{2281},

2013. Februárjában négyévnyi csendet törtek meg a legnagyobb törzsszám keresésében. Az új törzsszám, ami több mint 17 millió számjegyből áll, és csupán a negyvennyolcadik valaha felfedezett MERSENNE–prím. A mostani törzsszám megtalálása után kétszer is ellenőrizték más számítógépekkel, hogy valóban törzsszámról van-e szó, vagyis tényleg csak önmagával és 1-gyel osztható. A feladat nagyságát mutatja, hogy ha elkezdenénk papíron elosztani a most megtalált törzsszámot minden nála kisebb számmal, akkor az tovább tartana, mint amilyen idős a világegyetem. Az igazi rajongók poszter alakban is megvásárolhatják a törzsszámokat, a messziről csak nagy szürkeségnek tűnő képen közelről nagyítóval is alig lehet látni a számokat.

A2. a.) 1. Feladat

Igazoljuk, hogy az $n=2^{p-1}(2^p-1)$ alakú pozitív, páros, egész számok tökéletes számok, és hogy más alakú páros tökéletes szám nem létezik.

Megoldás:

1. rész

Vegyünk egy 2^p-1 alakú törzsszámot, ahol p maga is törzsszám. Mutassuk meg, hogy ekkor az $n=2^{p-1}(2^p-1)$ pozitív egész szám, tökéletes szám.

Megoldás

Az $n=2^{p-1}(2^p-1)$ nála kisebb osztói:

$1, 2, 2^2, 2^3,\ldots, 2^{p-2}, 2^{p-1}, q, 2q, 2^2q, 2^3q,\ldots, 2^{p-2}q$ (ahol $q=2^p-1$)

Ezek összege:

$1, 2, 2^2, 2^3,\ldots, 2^{p-2}, 2^{p-1}$ összege:

$$\mathbf{1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{p-1}} = 2^p-1 = \mathbf{q}$$

Hiszen:

$$S = 1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{p-2}+2^{p-1}$$
$$2S = 2+2^2+2^3+\ldots+2^{p-2}+2^{p-1}+2^p$$
$$2S-S = 2^p-1$$

$q, 2q, 2^2q, 2^3q,\ldots, 2^{p-2}q$, (ahol $q=2^p-1$) összege:

$$\mathbf{q+2q+2^2q+2^3q+\ldots+2^{p-2}q} = (2^{p-1}-1)\,q = 2^{p-1}q-q = \mathbf{n-q}$$

Így a kettő összege, valóban n.
□

2. rész

Mutassuk meg, hogy ha n páros szám tökéletes, akkor $n=2^{p-1}(2^p-1)$ alakú, ahol 2^p-1 prím.

Megoldás:

Jelölje $\sigma(n)$, az n osztóinak összegét.

Ekkor, ha n tökéletes szám, vagyis n egyenlő a nála kisebb pozitív osztóinak összegével, akkor $n = 2\ \sigma(n)$

Segédfeladat, az A2, a.) 1. Feladat megoldásának második részéhez:

Mutassuk meg, hogy, ha a és b relatív prím, nincs közös osztójuk, akkor $\sigma(a \cdot b) = \sigma(a) \cdot \sigma(b)$

Megoldás:

Ha a összes osztója: $a_0 = 1, a_1, a_2, \ldots, a_n$, és b összes osztója $b_0 = 1, b_1, b_2, \ldots, b_m$, akkor $a \cdot b$ összes osztóját megkapjuk úgy, hogy ha a minden osztóját megszorozzuk b minden osztójával.

Azt kell még csak belátnunk, hogy ha a és b relatív prím, akkor, a listán $a \cdot b$ minden osztója csak egyszer szerepel.

Ha egy osztó kétszer szerepelne, az azt jelentené, hogy valamely $a_i\, b_j = a_f\, b_g$, ahol $a_i \neq a_f$, és $b_j \neq b_g$.

Legyen $a_i = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r}$ az a szám egyik osztója, és $b_j = q_1^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot q_n^{\beta_n}$ a b szám egyik osztója, ahol a p_k és q_k számok különböző prímek.

Tegyük fel, hogy $a_i \cdot b_j = p_1^{\alpha_1}{}_1 \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r} \cdot q_1^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot q_n^{\beta_n} = a_f \cdot b_g$, ahol a_f az a egy osztója, b_g a b szám egyik osztója.

A p_k számok egyike sem lehet osztója b_g-nek, hiszen akkor b-nek lenne egynél nagyobb közös osztója a-val, ugyanígy, a q_k számok egyike sem lehet osztója a_f-nek, tehát $b_j = b_g$, és $a_i = a_f$. □

Most térjünk vissza az eredeti feladathoz.

Tegyük fel, hogy az n páros szám tökéletes, vagyis $\sigma(n) = 2n$, és mutassuk meg, hogy, ekkor az n szám, $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ alakú, ahol $2^p - 1$ prím.

Ekkor felírhatjuk n-et $n = 2^k \cdot m$ alakban, ahol $k \geq 1$, *és* m páratlan pozitív egész szám . Természetesen 2^k, és m relatív prímek, ezért:

$$\sigma(n) = \sigma(2^k \cdot m) = \sigma(2^k) \cdot \sigma(m) = (2^{k+1} - 1)\, \sigma(m)$$

Másrészt: $\sigma(n) = 2n = 2 \cdot (2^k \cdot m) = 2^{k+1} \cdot m$

A fenti két egyenletet egyesítve: $\mathbf{2^{k+1} \cdot m = 2^{k+1} \cdot \sigma(m) - \sigma(m)}$ $*$

Vonjunk ki mindkét oldalból m-et: $(2^{k+1} - 1) \cdot m = (2^{k+1} - 1) \cdot \sigma(m) - m$

$$m = (2^{k+1} - 1) \cdot (\sigma(m) - m)$$

Mivel $(2^{k+1} - 1) \geq 3$ ezért $(\sigma(m) - m) \neq m$, vagyis $(\sigma(m) - m)$ valódi osztója m-nek.

A csillagozott egyenlet átrendezésével kapjuk:

$$\mathbf{\sigma(m) = 2^{k+1} \cdot (\sigma(m) - m)} \quad **$$

, tehát $(\sigma(m) - m)$ osztója $\sigma(m)$-nek.

$\sigma(m)$ az m pozitív osztóinak összege, ezért $\sigma(m) = (\sigma(m) - m) + m + 1 + \ldots$

Ez ellentmondás, hiszen: $\sigma(m) \neq \sigma(m) + 1 + \ldots$

Úgy oldható csak fel ez az ellentmondás, ha feltételezzük, hogy $(\sigma(m) - m)$ a két, mindig szereplő osztó közül az egyikkel egyenlő, tehát $(\sigma(m) - m) = m$, vagy $(\sigma(m) - m) = 1$, így kétszer számítottuk be ugyanazt az osztót.

$(\sigma(m) - m) = 1$-ből adódik, hogy m törzsszám. $\sigma(m) = m + 1$

Ezt vissza helyettesítve a két csillaggal jelölt ($m) = 2^{k+1} \cdot (\sigma(m) - m)$ összefüggésbe:, kapjuk: $2^{k+1} = m + 1$

Tehát $m = 2^{k+1} - 1$ alakú prímszám, és ekkor $k+1$ is prímszám.

Ezt felhasználva n-re az adódik, hogy:

$$n = 2^k \cdot m = 2^k \cdot (2^{k+1} - 1) = 2^{p-1}(2^p - 1)$$

alakú, amit bizonyítani akartunk. □

Páratlan tökéletes számot eddig még egyet sem találtak; nyitott kérdés, hogy van-e egyáltalán.

A2. b.)

NIKOMAKHOSZ (I-II sz.) görög matematikus nevéhez fűződnek a bővelkedő és a hiányos számok definiálása is. Három csoportra osztotta a páros számokat: hiányos, tökéletes és bővelkedő számokra. Hiányos egy szám, ha nagyobb, mint a nála kisebb pozitív osztóinak összege és bővelkedő, ha kisebb.

NIKOMAKHOSZ példákat is említett mindhárom csoportra, ő írta le az ókori görögök által is ismert első négy tökéletes számot: *6, 28, 496, 8128*. Ezek alapján megfogalmazta azt a (téves, de hosszú évszázadokon keresztül számos nagy matematikus által megismételt) állítást is, hogy a tökéletes számok felváltva végződnek 6-ra és 8-ra. IAMBLIKHOSZTÓL (i. sz. 300 körül) származik az akkor ismert négy tökéletes szám egy másik, NIKOMAKHOSZ által is megállapított tulajdonságának szintén téves, de hosszan igaznak vélt általánosítása, miszerint a tíz minden egymást követő két hatványa közé pontosan egy tökéletes szám esik.

Az első néhány páros bővelkedő szám: *12, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 42, 48…*

Az első néhány páratlan bővelkedő szám: *945, 1575, 2205, 2835, 3465…*

Belátható, hogy végtelen sok bővelkedő szám létezik, páros és páratlan egyaránt.

Azon számokat, amelyeket kivonva náluk kisebb osztóik összegéből 1-et kapunk, <u>majdnem-tökéletes számoknak</u> nevezzük. Belátható, hogy ezek páratlan négyzetszámok volnának — ha lennének, de eddig még egyet sem találtak belőlük. Az is belátható, hogy ha létezik, akkor legalább hét különböző prím osztója van, és nagyobb, mint 10^{35}.

Belátható, hogy minden *20161*-nél nagyobb egész felírható két bővelkedő szám összegeként.

Hiányos számnak nevezünk minden olyan egész számot, amelyek nagyobbak a náluk kisebb pozitív osztóik összegénél. Azon számokat, amelyek 1-el nagyobbak a náluk kisebb osztóik összegénél <u>alig hiányos számoknak</u> nevezzük.

Belátható, hogy végtelen sok hiányos szám létezik, páros és páratlan egyaránt; többek között, minden prím és prímhatvány az.

Az első néhány hiányos szám: *1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 19…*

A2. b.) 1. Feladat
Igazoljuk, hogy egy bővelkedő szám minden többszöröse is bővelkedő szám!

<u>Megoldás:</u>
Azt kell belátnunk, hogy ha $\sigma(a) - a > a$ teljesül, akkor $\sigma(k\cdot a) - k\cdot a > k\cdot a$ is igaz. Átalakítva, ha $\sigma(a) > 2a$ teljesül, akkor $\sigma(k\cdot a) > 2k\cdot a$ is igaz.

Ha a minden osztóját megszorozzuk k-val, akkor a kapott számok mind osztói k·a-nak és mind különbözőek, k·a-nak azonban ezeken az osztókon kívül is vannak még osztói. Például a összes osztója is osztója k·a-nak. Ezért: $\sigma(k\cdot a) > k\,\sigma(a) > 2k\cdot a$ □

A2. b.) 2. Feladat
Igazoljuk, hogy minden prím és prímhatvány hiányos szám!

<u>Megoldás:</u>
Lássuk be, hogy $\sigma(n) - n < n$, vagyis $\sigma(n) < 2n$ minden $n = p^{\alpha}$ esetén, ahol p tetszőleges prímszám, α tetszőleges pozitív szám.

p^{α} osztói: $1, p, p2, \dots, p^{\alpha}$

Ezek összege :

$$\sigma(p^{\alpha}) = 1 + p + \dots + p^{\alpha}$$

$$p\cdot\sigma(p^{\alpha}) = p + p^2 + \dots + p^{\alpha+1}$$

$$p\cdot\sigma(p^{\alpha}) - \sigma(p^{\alpha}) = p^{\alpha+1} - 1$$

$$\sigma(p^{\alpha}) = \frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1}$$

$\frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1} < 2p^{\alpha}$ akkor és csak akkor teljesül, ha $p^{\alpha+1} - 1 < 2p^{\alpha+1} - 2p^{\alpha}$ teljesül.

$p^{\alpha+1} - 1 < 2p^{\alpha+1} - 2p^{\alpha}$ akkor és csak akkor teljesül, ha $(-1) < p^{\alpha+1} - 2p^{\alpha}$ teljesül.

$p^{\alpha+1} - 2p^{\alpha} = (p-2)\,p^{\alpha}$ biztosan nagyobb egy negatív számnál, mivel

$0 \le (p-2)$ és $0 < p^{\alpha}$, tehát az utolsó egyenlőtlenség igaz, így a vele ekvivalens első egyenlőtlenség is igaz, ezzel az állítást beláttuk. □

A2. b.) 3. Feladat

Igazoljuk, hogy ha egy n páratlan számnak csak két különböző prímosztója van, akkor n hiányos szám!

<u>Megoldás:</u>

Legyenek p és q páratlan törzsszámok, $n = p^{\alpha}q^{\beta}$.

Azt szeretnénk belátni, hogy $\sigma(p^{\alpha}q^{\beta}) - p^{\alpha}q^{\beta} < p^{\alpha}q^{\beta}$, vagyis, hogy:

$$\sigma(p^{\alpha}q^{\beta}) = \sigma(p^{\alpha}) \cdot \sigma(q^{\beta}) = \frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1} \cdot \frac{q^{\beta+1}-1}{q-1} < 2p^{\alpha}q^{\beta}$$

Átalakítva:

$$\frac{p-\frac{1}{p^{\alpha}}}{p-1} \cdot \frac{q-\frac{1}{q^{\beta}}}{q-1} < 2$$

Mivel $\frac{p-\frac{1}{p^{\alpha}}}{p-1} < \frac{p}{p-1}$, tehát a fentiek helyett igazolhatjuk, az erősebb $\frac{p}{p-1} \cdot \frac{q}{q-1} < 2$

állítást.

p növelésével, $\frac{p}{p-1}$ szigorúan csökkenő sorozatot alkot, hiszen: $\frac{p+1}{p} < \frac{p}{p-1}$ mert:

$$(p+1)\cdot(p-1) = p^2-1 < p^2$$

Mivel p és q különböző páratlan prímek,a legkisebb lehetséges értékeik 3 és 5, tehát

$$\frac{p}{p-1} \cdot \frac{q}{q-1} \le \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} < 2$$

Ezzel az állítást beláttuk. □

A2. b.) 4. Feladat

Igazoljuk, hogy minden $k \geq 3$ egész számra végtelen sok olyan páratlan bővelkedő szám, és végtelen sok olyan páratlan hiányos szám létezik, amelynek pontosan k különböző prímosztója van!

Megoldás:

a.)
Mivel egy bővelkedő szám minden többszöröse bővelkedő, az állítás első feléhez elég találnunk egyetlen olyan bővelkedő számot, amelynek három különböző prímosztója van: $33 \cdot 5 \cdot 7 = 945$ ilyen, mert $\sigma(945)=1920$. Ezt a számot (vagy bármely olyan bővelkedő számot, amelynek három különböző prímosztója van) olyan prímek hatványaival szorozva, amelyek már szerepeltek a felbontásban, végtelen sok bővelkedő számot kapunk $k=3$-ra, tetszőleges c darab ezektől és egymástól különböző prímmel (illetve hatványaikkal) szorozva pedig végtelen sok bővelkedő számot kapunk $k=3+c$-re

b.)
Egy minden prímtényezőjét csak egyszer tartalmazó $n= p_1 p_2 \ldots p_k$ számra:

$$\sigma(n)= (p_1+1)(p_2+1)\ldots(p_k+1)$$

Az n szám akkor hiányos, ha $n > \sigma(n)-n$, vagyis $2n > \sigma(n)$, behelyettesítve n és $\sigma(n)$ értékét:

$$2p_1 p_2 \ldots p_k > (p_1+1)(p_2+1)\ldots(p_k+1)$$

Ennek elégséges feltétele, ha a szám minden pi prímosztójára teljesül, hogy
$\sqrt[k]{2} \cdot p_i > p_i + 1$, vagyis $p_i \cdot \left(\sqrt[k]{2} - 1\right) > 1$, más szóval $p_i > \frac{1}{\sqrt[k]{2}-1}$

Ez egy alsó korlátot ad a prímtényezőkre, tehát mindig lesz végtelen sok prím, amely megjelel ennek a feltételnek, és k darab különböző ilyen prím szorzata mindig hiányos szám lesz. □

A2. c.)

Mint már szó volt róla, vannak „barátságos" szám-párok, vagyis olyan szám-párok, melyek közül az egyik nálánál kisebb pozitív osztóit összeadva a másik számot kapjuk eredményül.

Ilyen barátságos szám-párok például: 220 és 284.
220=2·2·5·11
220 nálánál kisebb osztói: 1, 2, 5, 11, 4, 10, 22, 20, 55, 44, 110.
Ezek összege: 284

284=2·2·71
284 nálánál kisebb osztói: 1, 2, 71, 4, 142
Ezek összege: 220

Már az ókori görögök is ismerték a 220, 284 párt. PÜTHAGORASZ szerint a barát: egy másik én, mint a 220 és a 284.

PIERRE DE FERMAT egy MARIN MERSENNE–nek 1636-ban írt levelében megírta, hogy 17296 és 18416 is barátságos szám-pár. WALTER BORHO szerint ezt a számpárt már IBN AL-BANNA (1265 - 1321) és KAMALADDIN FARIST is megtalálta a 14. században.

SZÁBIT IBN KURRA (9. SZÁZAD) tétele szerint könnyű barátságos szám-párokat találni:
Legyen n rögzített pozitív egész szám, és
$q = 3\cdot 2^{n}-1$,
$p = 3\cdot 2^{n-1}-1$ és
$r = 9\cdot 2^{2n-1}-1$.
Ha q, p és r törzsszámok, akkor az
$N = 2^{n}\cdot q\cdot p$ és a
$M = 2^{n}\cdot r$
számok barátságos számpárt alkotnak.

Példák:

$n = 2$, ekkor

$q = 11$,

$p = 5$,

$r = 71$.

Ebből adódik a

$$N= 4 \cdot 11 \cdot 5 = 220$$
$$M = 4 \cdot 71 = 284$$

220, 284 szám pár.

$n = 3$-ra

$r = 287 = 7 \cdot 41$,

nem prím, az $n=3$ eset nem ad barátságos számpárt.

$n = 4$-re a FERMAT által is ismert szám pár adódik.

Az $n = 7$ esettel DESCARTES foglalkozott, így talált rá 1638-ban a

9 363 584 és a 9 437 056 alkotta párra.

BORHO szerint ezt a számpárt már 1600-ban ismerte MUHAMMAD BÁKIR JAZDI.

Ma már azt is tudjuk, hogy ezzel a tétellel
$n \leq 191600$
esetén nem adódik több barátságos számpár.

Euler1747-ben 30 párból álló listát tett közzé, amelyet később 64 eleműre bővített.

A módszeresen dolgozó matematikusok által, meg nem talált, második legkisebb barátságos szám-párra, jóval később, 1866-ban, bukkant rá egy 16 éves olasz diák: ez a 1184 és 1210 alkotta barátságos páros.

2003 februárjában már több mint 4 millió barátságos szám-pár volt ismert. Közülük a legnagyobb szám 5577 jeggyel írható le tízes számrendszerben. ERDŐS PÁL egy sejtése szerint végtelen sok barátságos szám van.

Néhány barátságos szám-pár:

(220; 284) (1184; 1210) (2620; 2924) (5020; 5564) (6232; 6368).(10744; 10856)

(12285; 14595) (17296; 18416) (66928; 66992) (67095; 71145) (63020; 76084).

(69615; 87633) (79750; 88730) (122368; 123152) (100485; 124155) (122265; 139815).

(141664; 153176) (142310; 168730) (171856; 176336) (176272; 180848) (196724; 202444).

(185368; 203432) (280540; 365084) (308620; 389924) (356408; 399592) (319550; 430402).

(437456; 455344) (469028; 486178) (503056; 514736) (522405; 525915) (643336; 652664).

(600392; 669688) (609928; 686072) (624184; 691256) (635624; 712216) (667964; 783556).

(726104; 796696) (802725; 863835) (879712; 901424) (898216; 980984).

Könnyen beláthatók a barátságos szám-párokról szóló következő állítások:

A2. c.) 1. Feladat
Igazoljuk, hogy egy barátságos szám-pár egyik tagja bővelkedő, a másik pedig hiányos szám!

Megoldás:
Legyen a és b barátságos számpár. Ekkor:

$\sigma(a) - a = b,\ \sigma(a) = a + b$

$\sigma(b) - b = a,\ \sigma(b) = a + b$

$\sigma(a) > 2a$

$a+b > 2a$

$b > a$

$2b > a+b$

$2b > \sigma(b)$

Tehát ha az egyik bővelkedő, akkor a másik hiányos, és viszont, hiszen a és b szerepe itt felcserélhető. Ha egyik sem hiányos vagy bővelkedő, akkor mindkettő tökéletes, de ekkor $\sigma(a) = \sigma(b) = 2a = 2b$, vagyis $a = b$, hiszen a tökéletes számok „önmagukkal barátságosak”, tehát ez már nem egy barátságos számpár. □

A2. c.) 2. Feladat
Igazoljuk, hogy barátságos szám-pár egyik tagja sem lehet kettő-hatvány!

Megoldás:

Segédfeladat az A2. c.) 2. Feladahoz:
$\sigma(n)$ jelenti n osztóinak összegét, magát n-t is beleértve. $\sigma(n)$, akkor és csak akkor páratlan, ha $n = t^2$, vagy $n = 2t^2$

Megoldás:
Legyen n prímtényezős felbontása: $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r}$

$\sigma(n) = \sigma(p_1^{\alpha_1}) \cdot \ldots \cdot \sigma(p_r^{\alpha_r})$, ahol $\sigma(p_i^{\alpha_i}) = 1 + p_i + p_i^2 + \ldots + p_i^{\alpha_i}$

$(i = 1, \ldots r)$

Ez a szorzat akkor, és csak akkor lesz páratlan, ha a szorzat minden tényezője páratlan.

$1+p_i+p_i^2+\ldots+p_i^{\alpha_i}$ összeg $p_i=2$ esetén bármilyen α_i kitevőre páratlan.

Ha $p_i \neq 2$, akkor az összeg minden tagja páratlan, tehát páratlan sok tag esetén lesz az összeg is páratlan, így α_i páros kell, hogy legyen n minden $p_i \neq 2$ prímtényezőjére. Egy szám négyzetszám, ha minden prímtényezője páros kitevőn szerepel. Tehát $\sigma(n)$ akkor és csak akkor lesz páratlan, ha $n = 2t^2$ vagy $n = t^2$. □

Most térjünk rá az eredeti feladatra, mutassuk meg, hogy barátságos számpár egyik tagja sem lehet kettő-hatvány.

Legyen a és b egy barátságos számpár. Ha $a = 2^k$ (ahol $k > 1$ egész), akkor $\sigma(a)=1+2+2^2+\ldots+2^k= 2^{k+1}-1$, és $a+b=\sigma(a)=\sigma(b)$ alapján:

$$b = \sigma(a) - a = 2^{k+1} - 1 - 2^k = 2\cdot 2^k - 1 - 2^k = 2^k - 1$$

Mivel $b = 2^k-1$, *és* $\sigma(b) = a+b = 2k + 2k - 1$ is páratlan szám, ezért a segédfeladat állítása szerint, $b = t^2$ alakú, ahol t páratlan szám. $b = 2^k - 1$ ha elosztjuk $2^2 = 4$-el, akkor mínusz egyet kapunk maradékul. Egy páratlan szám négyzetét ha elosztjuk néggyel, akkor, hiszen: $(2k+1)^2=4k^2+4k+1$, egyet kapunk maradékul. Ellentmondásra jutottunk. □

A2. c) 3. Feladat

Igazoljuk SZÁBIT IBN KURRA tételét!

Emlékeztetőül, a tétel kimondja, hogy, ha n rögzített pozitív egész szám, és

$q = 3\cdot 2^{\boldsymbol{n}}-1,$

$p = 3\cdot 2^{\boldsymbol{n-1}}-1$

$r = 9\cdot 2^{\boldsymbol{2n-1}}-1.$

és q, p és r törzsszámok, akkor az

$N = 2^{\boldsymbol{n}} \cdot q \cdot p$ és a

$b = 2^{\boldsymbol{n}} \cdot r$

számok barátságos számpárt alkotnak.

<u>Megoldás:</u>

Belátjuk, hogy ha p, q, r 2-nél nagyobb prímszámok, akkor ez a formula barátságos számokat ad.

$$\boldsymbol{N= 2^n\cdot p\cdot q = 2^n \cdot (3 \cdot 2^{n-1} - 1) \cdot (3 \cdot 2^n - 1)}$$

$$\boldsymbol{M=2^n\cdot r= 2^n \cdot (9\cdot 2^{n-1} - 1)}$$

Az N nála kisebb osztóinak összege:

$$1+2+\ldots+2^{n-1}+2^n+p\cdot(1+2+\ldots+2^n)+q\cdot(1+2+\ldots+2^n)+p\cdot q\cdot(1+2+\ldots+2^{n-1})$$

Itt kihasználtuk, hogy p és q 2-nél nagyobb prímszámok. Hiszen, ha p, vagy q kettővel lenne egyenlő, akkor $2p$, vagy $2q$ nem jelentene újabb osztót.

Alkalmazzuk, a $1+2+\ldots+2^n=2^{n+1}-1$ összefüggést, ezért az összeg:

$$2^n-1+2^n+p\cdot(2^n-1+2^n)+q\cdot(2^n-1+2^n)+p\cdot q\cdot(2^n-1)=$$

$$=(2^n-1)\cdot(1+p+q+p\cdot q)+2^n(1+p+q)$$

Helyettesítsük be p, q, r-t:
$q=3\cdot 2^n-1$,
$p=3\cdot 2^{n-1}-1$
$r=9\cdot 2^{2n-1}-1$.

$$(2^n-1)\cdot[1+3\cdot 2^{n-1}+3\cdot 2^n-1+(3\cdot 2^{n-1}-1)]+2^n\cdot(3\cdot 2^{n-1}+3\cdot 2^n-1)$$

Használjuk fel, hogy $3\cdot 2^n=3\cdot 2\cdot 2^{n-1}=6\cdot 2^{n-1}$ és azt, hogy $2^{2\cdot n-1}=2^n\cdot 2^{n-1}$
A belső zárójeleket felbontjuk és összevonunk:

$$(2^n-1)\cdot(9\cdot 2^{n-1}-1+9\cdot 2^{2\cdot n-1}-3\cdot 2^{n-1}-3\cdot 2^n+1)+2^n\cdot(3\cdot 2^{n-1}+3\cdot 2^n-1)=$$

$$=(2^n-1)\cdot 9\cdot 2^{2\cdot n-1}+2^n\cdot(3\cdot 2^{n-1}\cdot 3-1)=$$

$$=2^n\cdot 9\cdot 2^{2\cdot n-1}-9\cdot 2^{2\cdot n-1}+2^n\cdot 9\cdot 2^{n-1}-2^n=$$

$$=2^n\cdot(9\cdot 2^{2\cdot n-1}-9\cdot 2^{n-1}+9\cdot 2^{n-1}-1)=2^n\cdot(9\cdot 2^{2\cdot n-1}-1)=M$$

Beláttuk, hogy az N nála kisebb osztóinak összege éppen M. Hasonló módszerekkel ellenőrizzük a fordítottját is. Az M nála kiseb osztóinak összegét írjuk fel:

$$1+2+2^2+\ldots+2^{n-1}+2^n+r\cdot(1+2+2^2+\ldots+2^{n-1})=$$

$$=2^n-1+2^n+r\cdot(2^n-1)=2^n-1+2^n+9\cdot 2^{2\cdot n-1}-1)\cdot(2^n-1)=$$

$$=(2^n-1)\cdot(1+9\cdot 2^{2\cdot n-1}-1)+2^n=(2^n-1)\cdot 9\cdot 2^{2\cdot n-1}+2^n=$$

$$=2^n\cdot 9\cdot 2^{2\cdot n-1}-9\cdot 2^{2\cdot n-1}+2^n=2^n\cdot(9\cdot 2^{2\cdot n-1}-9\cdot 2^{n-1}+1)=$$
$$=2^n\cdot(3\cdot 2^{n-1}-1)\cdot(3\cdot 2^n-1)=2^n\cdot p\cdot q=N \quad \square$$

A3.
Egyéb érdekességek

A3. a.)

Jól ismertek a következő tulajdonságú számok, a PITAGORASZI számhármasok: $3^2+4^2=5^2$.

A FERMAT–sejtés a következő matematikai állítás: ha $n > 2$ egész, akkor nincsenek olyan csupa nullától különböző x, y, z egészek, amelyekre $x^n + y^n = z^n$ teljesül.

Ezt PIERRE FERMAT francia gondolkodó fogalmazta meg vélhetően 1637 táján egy lapszéli jegyzet formájában.

FERMAT itt arra is utalt, hogy az állítást bizonyítani tudja, ám egészen 1995-ig a sejtés nyitott maradt.

A3. a.) 1. Feladat

Mutassuk meg, hogy végtelen sok PITAGORÁSZI számhármas található! Adjunk módszert, amellyel az összes megtalálható!

Megoldás:

A legegyszerűbbek a 3, 4, 5,($3^2 + 4^2 = 5^2$) , vagy ezeknek bármely többszöröse. Az a kérdés, hogy a fentieken kívül vannak-e még ilyen számok.

Először is könnyen belátható, hogy x, y, és z közül nem lehet mind a három páratlan, sem pedig kettő páros szám, és egy páratlan. Lehet mind a három páros, vagy x, és y közül az egyik, és z páratlan.

Nem lehet x, és y páratlan és z páros. Hiszen, ha x és y páratlan akkor a következő alakban írható: $x=2k+1$, és $y=2j+1$ (ahol k és j pozitív egész számok). Ezért $x^2+y^2=(2k+1)^2+(2j+1)^2= 4k^2+4k+1+4j^2+4j+1= 4(\ldots)+2$. Tehát x^2+y^2 4-gyel osztva 2-őt ad maradékul. Viszont a z páros szám négyzete osztható 4-gyel.

Osszuk el x-et, y-t, z-t (x, y, z) legnagyobb közös osztójával, hogy ne valamely kisebb számhármas egyszerű többszörösét nyerjük. Ekkor nem kaphatunk három páros számot, hiszen akkor még eloszthatnánk mindhármat 2-vel. Így csak a második eset fordulhat elő: x, és y közül az egyik, és z páratlan.

Mivel x-nek és y-nak a szerepe teljesen azonos, legyen x páratlan.
$x^2 = z^2 - y^2$
Látható, hogy ekkor z és y is relatív prímek, hiszen a képletből adódik, hogy z és y közös osztója x-nek is osztója.

$x^2 = (z+y) \cdot (z-y)$
Vezessük be a következő jelöléseket: $z + y = m$, és $z - y = n$

$x^2 = m \cdot n$
Egy páratlan négyzetszámot azonban csak két páratlan tényező szorzatára lehet bontani.
A szorzat csak úgy lehet négyzetszám, ha mind a két tényezője négyzetszám.
A fenti egyenlet tehát így írható: $x^2 = u^2 \cdot v^2$, ahol $u^2 = m$, $v^2 = n$,

$x = u \cdot v$
x-et tehát két páratlan tényező szorzatára kell bontani.

$z + y = u^2$
$z - y = v^2$

Tehát:

$2z = u^2 + v^2$
$2y = u^2 - v^2$

Ebből:

$z = \frac{u^2+v^2}{2}$, és $y = \frac{u^2-v^2}{2}$
Az egyenletekből látható, hogy mivel z és y relatív prímek, u és v is relatív prímek kell, hogy legyenek.

Tehát x, y, és z minden lehetséges értékét megkapjuk, ha az x páratlan számot, minden lehetséges módon felbontjuk két, egymáshoz relatív prím, páratlan pozitív szám szorzatára. (x=1, 3, …) □

A3. b.)

A FIBONACCI–sorozat olyan számsorozat, melynek első eleme: $f_1 = 1$, második eleme: $f_2=1$, n- dik eleme $n > 2$ esetén: $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$. A FIBONACCI–sorozat tagjait FIBONACCI–számoknak nevezzük.

A FIBONACCI–számok nem csak egy-egy matematika feladat megoldása során bukkannak fel. A természetes növekedés szabályszerűségeinek megtestesítői, ezért gyakran találkozhatunk velük, a természetet ábrázoló művészeti alkotások tanulmányozása közben is.

A 3. 1. Feladat

Mutassuk meg, hogy a FIBONACCI–sorozat első n tagjának összege, az $n+2$ -ik tagnál 1-el kevesebb: $f_1+ f_2 +\ldots+ f_n= f_{n+2} -1$,

Megoldás:

$f_1=1$; $f_2 =1$; $f_3=2$; $f_4=3$

$n=2$ -re igaz az állítás: $f_1+ f_2= f_4 - 1$

Tegyük fel, hogy n-re igaz az állítás:

$$f_1+ f_2 +\ldots+ f_n= f_{n+2} -1$$

Ezt felhasználva lássuk be, hogy $n+1$ -re is igaz az állítás:

$$f_1+ f_2 +\ldots+ f_n+ f_{n+1} = f_{n+2} -1+ f_{n+1}= f_{n+3} -1 \quad \square$$

A 3. 2. Feladat

Mutassuk meg, hogy a FIBONACCI–sorozat első n tagjának négyzetösszege, az n -dik és az $n+1$ -dik tag szorzatával egyenlő: $f_1^{\,2} + f_2^{\,2} +\ldots+ f_n^{\,2} = f_n \cdot f_{n+1}$.

Megoldás:

$n=2$-re igaz az állítás: $f_1^{\,2} + f_2^{\,2} = f_2 \cdot f_3$

$f_1=1$

$f_2 =1$

$f_3=2$

Tegyük fel, hogy n-re igaz az állítás:

$$f_1^{\,2}+ f_2^{\,2} +\ldots+ f_n^{\,2} = f_n\cdot f_{n+1}$$

Ezt felhasználva lássuk be, hogy $n+1$ -re is igaz az állítás:

$$f_1^{\,2}+ f_2^{\,2} +\ldots+ f_n^{\,2} + f_{n+1}^{\,2} = f_n \cdot f_{n+1}+ f_{n+1}^{\,2} = f_{n+3} -1 \quad \square$$

A3. c.)

A3. c.) 1. Feladat

Tekintsük a 3025 négyjegyű számot. Erre teljesül, hogy $(30+25)^2=3025$. Vannak-e még ilyen tulajdonságú számok? Készítsünk algoritmust, melynek segítségével, ha időnk végtelen lenne, az összes ilyen tulajdonságú számot megtalálhatnánk (nem csak a négyjegyűek között)!

Megoldás:

Vizsgáljuk meg, hogy mely x és y számokra igaz, hogy ha az x és y számokat egymás mellé írjuk a tízes számrendszerben, $(x+y)$ érték négyzetét kapjuk.

1.

Tegyük fel, hogy $10x+y=(x+y)^2$ egyenletben y egyjegyű.

Azokat az x és y pozitív egész számokat keressük, melyekre igaz, hogy: $10x+y=(x+y)^2$.
Legyen $a=x+y$. Ekkor $y=a-x$, tehát $a\geq x$, és $10x+y=a^2$.

$y=a-x$ miatt, $10x+y=a^2$–ből következik, hogy $9x=a^2-a$.

Ebből: $x=\frac{a(a-1)}{9}$; $a\geq x$ miatt, $a\geq\frac{a(a-1)}{9}$, vagyis $9\geq a-1$, tehát: $10\geq a$.

$x=\frac{a(a-1)}{9}$, mivel a és $(a-1)$ relatív prímek, és x egész, a és $a-1$ közül az egyik, és csak az egyik osztható 9-cel.

I: Először vizsgáljuk meg a 9 osztója a-nak, esetet: mivel $a\leq 10$, az első esetben $a=9$,
II: Majd nézzük a 9 osztója $(a-1)$-nek esetet: ekkor, mivel $a\leq 10$, ebben az esetben $a=10$.

I, $a=9$; $x=\frac{a(a-1)}{9}=8$; $y=a-x=1$. Ellenőrzés: **81** $=(8+1)^2$

II, $a=10$; $x=\frac{a(a-1)}{9}=10$; $y=a-x=0$. Ellenőrzés: **100** $=(10+0)^2$ □

2.

Tegyük fel, hogy a $10x+y=(x+y)^2$ egyenletben y kétjegyű.

Ekkor, az előbbi gondolatmenet alapján: $x=\frac{a(a-1)}{99}$; $y=a-x$; és $100\geq a$ adódik.

x egész szám, ezért $99=11\cdot 9$ osztója $a(a-1)$-nek.
a és $(a-1)$ relatív prím, ezért ez háromféleképpen lehetséges: I: 99 osztója a-nak; II: 11 osztója a-nak, és 9 osztója $(a-1)$-nek; III: 9 osztója a-nak, és 11 osztója $(a-1)$-nek.

I. 99 osztója a-nak. Mivel $a \le 100$, ekkor $a = 99$, $a–1 = 98$, és így $x = \frac{a(a-1)}{99} = 98$, $y = a - x = 01$. Ellenőrzés: **9801**$=(98+01)^2=99^2$

II. 11 osztója a-nak, és 9 osztója $(a–1)$ –nek. Ez azt jelenti, hogy $a = 11x_0$, $a–1 = 9y_0$. Keressük meg az x_0, y_0 értékeket!

$a=11x_0=9y_0+1$. Fejezzük ki a kisebb együtthatójú ismeretlent.
$y_0 = \frac{11x_0-9}{9} = x_0 + \frac{2x_0-1}{9}$
Mivel y_0 egész szám, $\frac{2x_0-1}{9}$ is egész szám. Vizsgáljuk az $u = \frac{2x_0-1}{9}$ egyenletet, ahol u egész. A kapott új egyenlet együtthatói kisebbek, mint az eredeti egyenlet együtthatói. Ismét fejezzük ki a kisebb együtthatójú ismeretlent: $x_0 = \frac{9u+1}{2} = 4u + \frac{u+1}{2}$
Mivel x_0 egész, $\frac{u+1}{2}$ is egész. Vizsgáljuk az $u_1 = \frac{u+1}{2}$ egyenletet, ahol u_1 egész.
$u = 2u_1–1$, ez az egyenlet $u_1=0,1,2,3,\ldots$ minden értéke esetén ad megoldást u-ra.

Fejezzük ki az előző egyenletek ismeretlenjeit mind, u_1 segítségével.
$u = 2u_1–;$, $x_0 = \frac{9u+1}{2} = \frac{18u_1-8}{2} = 9u_1–4$; $y_0 = \frac{11x_0-1}{9} = \frac{99u_1-45}{9} = 11u_1–5$
$a=11x_0=11(9u_1–4)$, $(u_1=0,1,2,3,\ldots)$

Ha $u=0$, a-ra negatív érték jön ki, ezért $u = 0$ nem ad megoldást.
Ha $u_1=1$, akkor $a=11(9u_1-4)=55$

Ebből:
$x = \frac{a(a-1)}{99} = 30$; $y = a–x = 25$; Ellenőrzés: **3025**$=(30+25)^2=55^2$
Ha $1 > u_1$ akkor $a > 100$, így több megoldás nincsen. □

,

III. 9 osztója a-nak, és 11 osztója $(a–1)$ -nek.

Ez azt jelenti hogy $a = 9x$; $a–1=11y_0$. Keressük meg az x_0, y_0 értékeket!
$a = 9x_0 = 11y_0 + 1$. $x_0 = y_0 + \frac{2y_0+1}{9}$. Mivel x_0 egész szám, $\frac{2y_0+1}{9}$ is egész szám. Fejezzük ki a kisebb együtthatójú ismeretlent az $u = \frac{2y_0+1}{9}$ egyenletből! Ezt addig folytatjuk, míg olyan egyenletet nem kapunk, ahol az egyik ismeretlen együtthatója 1.
$9u = 2y_0 + 1$, $y_0 = 4u + \frac{u-1}{2}$. Mivel y_0 egész szám, $\frac{u-1}{2}$ is egész szám.
Vizsgáljuk, az $u_1 = \frac{u-1}{2}$ egyenletet! $u = 2u_1+1$ $u_1=0,1,2,3,\ldots$
Helyettesítsük az előző egyenletekben u_1-el az ismeretleneket!

$u=2u_1+1;\ y_0=4u+\frac{u-1}{2}=9u_1+4;\ x_0=y_0+\frac{2y_0+1}{9}=11u_1+5;\ y_0=9u_1+4$

Tudjuk, hogy $a=9\,x_0$; $a-1=11y_0$; $x=\frac{a(a-1)}{99}$; $y=a-x$; $100\ge a$

Ha $u_1=0$, akkor $a=9x_0=45$. Így $x=\frac{a(a-1)}{99}=5\cdot4=20$, és végül $y=a-x=25$.

Ellenőrzés: **2025**$=(20+25)^2$. Ha $0<u_1$, akkor $100<a$, ezért több megoldás nincsen. □

3. Tegyük fel, hogy a $10x+y=(x+y)^2$ egyenletben y háromjegyű.

Az előbbiekhez hasonló módon adódik: $x=\frac{a(a-1)}{999}$; $y=a-x$; $1000\ge a$.

Mivel $999=27\cdot37$, és a és $a-1$ relatív prím, a következő három esetet kell megvizsgálnunk I: $a=999$; II: 27 osztója a-nak és 37 osztója $(a-1)$ -nek; III: 37 osztója a-nak és 27 osztója $(a-1)$ -nek.

I. $a=999$; $x=\frac{a(a-1)}{999}=a-1=998$; $y=a-x$;

Ellenőrzés: ***998001***$=(998+001)^2=999^2$ □

II. 27 osztója a-nak és 37 osztója $(a-1)$ -nek . $a=27\,x_0$; $a-1=37\,y_0$; $a=27x_0=37y_0+1$ Csökkentsük újból az ismeretlenek együtthatóit:

$x_0=y_0+\frac{10y_0+1}{27}$; legyen $u=\frac{10y_0+1}{27}$; $27u=10y_0+1$; $y_0=2u+\frac{7u-1}{10}$

Legyen $u_1=\frac{7u-1}{10}$; $10\,u_1=7u-1$; $u=u_1+\frac{3u_1+1}{7}$. Legyen $u_2=\frac{3u_1+1}{7}$; $7u_2=3u_1+1$

$u_1=2u_2+\frac{u_2-1}{3}$; Legyen $u_3=\frac{u_2-1}{3}$; $u_2=3u_3+1$. $u_3=0,1,2,3,$

Fejezzük ki az előző egyenleteket u_3 segítségével!

$u_1=2u_2+\frac{u_2-1}{3}=6u_3+2+u_3=7u_3+2$; $u=u_1+\frac{3u_1+1}{7}=7u_3+2+\frac{21u_3+7}{7}=10u_3+3$

$y_0=2u+\frac{7u-1}{10}=20u_3+6+\frac{70u_3+20}{10}=27u_3+8$

$x_0=y_0+\frac{10y_0+1}{27}=27u_3+8+\frac{270u_3+81}{27}=37u_3+11$

Ha $u_3=0$: $y_0=8$. Ekkor $a-1=37\,y_0=37\bullet8$; $x_0=11$. Ekkor $a=27x_0=27\cdot11$

$x=\frac{a(a-1)}{999}=\frac{27\cdot11\cdot37\cdot8}{27\cdot37}=11\cdot8=88$; $y=a-x=27\cdot11-11\cdot8=19\cdot11=209$

Ellenőrzés: **88209** $=(88+209)^2=297^2$

III. 37 osztója a-nak és 27 osztója $(a-1)$ –nek: $a=37x_0$; $a-1=27y_0$

Az előzőhöz hasonló gondolatmenettel kapjuk: $x=494$; $y=209$.

Ellenőrzés: ***494209***$=(494+209)^2=703^2$ □

4.

Tegyük fel, hogy a $10x+y=(x+y)^2$ egyenletben y négyjegyű.

Az előbbiekhez hasonlóan adódik: $x=\frac{a(a-1)}{9999}$; $y=a-x$; $10000 \geq a$

Mivel $9999=9\cdot 11\cdot 101$ és a és $(a-1)$ relatív prím, a következő hét esetet kell megvizsgálnunk: I. $a=9999$;

II. 9 osztója a-nak és $11\cdot 101$ osztója $(a-1)$ -nek;
III. $11\cdot 101$ osztója a-nak, 9 osztója $(a-1)$-nek.

IV. 11 osztója a-nak és $9\cdot 101$ osztója $(a-1)$-nek;
V. $9\cdot 101$ osztója a-nak, 11 osztója $(a-1)$-nek.

VI. 101 osztója a-nak és $9\cdot 11$ osztója $(a-1)$-nek;
VII. $9\cdot 11$ osztója a-nak, 101 osztója $(a-1)$-nek.

A kapott számok rendre: ***99980001, 4941729, 60481729, 7441984, 52881984, 25502500, 24502500.*** □

5. Tegyük fel, hogy a $10x+y=(x+y)^2$ egyenletben y ötjegyű.
Az előbbiekhez hasonlóan adódik: $x=\frac{a(a)}{9-99999}$; $y=a-x$; $100000>a$
Mivel $99999=9\cdot 41\cdot 271$, és a és $(a-1)$ relatív prím, ismét 7 esetet kell megvizsgálnunk. □

6.Tegyük fel, hogy a $10x+y=(x+y)^2$ egyenletben y hatjegyű.
Az előbbiekhez hasonlóan adódik: $x=\frac{a(a)}{9-999999}$; $y=a-x$; $1000000 \geq a$
Mivel $999999=27\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 37$, és a és $(a-1)$ relatív prím, 31 esetet kell megvizsgálnunk. □

Tehát az algoritmus röviden:
Vizsgáljuk meg, hogy mely x és y számokra igaz, hogy ha az x és y számokat egymás mellé írjuk a tízes számrendszerben, $(x+y)$ érték négyzetét kapjuk.Ha az y tizes számrendszerbeli szám n-jegyű, jelőlje $F(n)$ az n darab kilencesből álló tízes-számrendszerbeli számot. $x=\frac{a(a-1)}{F(n)}$; $y=a-x$; $F(n)+1 \geq a$;
Bontsuk fel $F(n)$-t prímtényezők szorzatára. $a(a-1)$ kell hogy osztója legyen $F(n)$-nek, és a és $(a-1)$ relatív prímek. Ezért bontsuk $F(n)$ prímtényezőinek halmazát két csoportra, ahányféleképpen csak lehetséges, úgy, hogy egyféle prímtényező csak az egyik halmazban szerepeljen. Mindegyik esetben keressük meg a megoldásokat, az együtthatók csökkentésének módszerével. □

B.

Néhány egyszerű példa számláncra

Számláncok vizsgálatával kapcsolatban szeretném megmutatni, hogy egy feladat több oldalról való körüljárása, játékos megközelítése akkor is hozhat eredményt, ha nem várnánk tőle. A próbálkozás sosem hiába való.

Mik is azok a számláncok?

Azt a végtelen számsort, melyben az n pozitív egész szám után, a megadott szabály szerint képzett $F(n)$ következik, számláncnak nevezzük!

Például rendeljük minden pozitív egész számhoz a számjegyeinek összegét. Jelöléssel: $F(n)=\{n$ számjegyeinek összege$\}$. Ekkor adódnak a következő számsorok:

$5678 \to 26 \to 8$
$2376485932 \to 49 \to 13 \to 4$

B. 1. Feladat
Tekintsük azt a láncot, melyben minden egész számhoz a számjegyeinek összegét rendeljük. Mely számokról tudjuk előre, hogy a belőlük induló lánc mire végződik?

<u>Megoldás:</u>
A lánc szigorúan monoton csökken, míg egyjegyű számhoz nem érünk.

Hiszen, ha a szám $n > 2$ jegyű akkor legalább $10^{\,n-1}$, a rákövetkezője, pedig legfeljebb $9 \cdot n$. Belátható, hogy ha n-re teljesül a $10^{n-1} > 9n$ egyenlőtlenség, akkor $n+1$-re is igaz, már pedig $n=3$-ra, a szám legalább 1000, rákövetkezője a jegyek összege pedig, legfeljebb 27.

Ha a szám kétjegyű $10a+b$ alakba írható (a és b pozitív egyjegyű egészek). Rákövetkezője $a+b$. A lánc ekkor is szigorúan monoton csökken, hiszen $10a+b > a+b$

Egy szám pontosan akkor osztható 9-cel, ha számjegyeinek összege osztható 9-cel, és a szám annyit ad maradékul 9-cel osztva, mint számjegyeinek összege. Ezért, ha a lánc 9-cel osztható számból indul, a lánc minden tagja osztható 9-cel, ezért csak 9-re végződhet. Hasonlóan, ha a lánc első száma m maradékot ad 9-cel osztva, akkor ez tovább öröklődik a lánc további tagjaira, és ezért a lánc utolsó száma csak m lehet. □

Ha úgy gyártunk számláncot, hogy minden szám rákövetkezője a nála kisebb pozitív osztóinak összege legyen, mint már az előszóban említettük, barátságos lánchoz jutunk E számláncok vizsgálata során, mutattuk meg, hogyan bukkanhatunk meglepő jelenségekre, hogyan hatolhatunk be a végtelen pozitív egész számsor rejtelmeibe a számláncok megfigyelése közben. Most képezzük, vizsgáljuk az ehhez hasonló osztóösszeg láncot. Ebben minden szám rákövetkezője pozitív osztóinak összege, $\sigma(n)$.

B. 2. Feladat

Igazoljuk, hogy egy n pozitív egész szám pozitív osztóinak összege, akkor és csak akkor páratlan, ha $n = 2t^2$, vagy $n = t^2$ alakú (ahol t pozitív egész szám).

Megoldás:

A2. c.) 2. Feladat megoldása közben már volt róla szó./45. o./

B. 3. Feladat

Igazoljuk, hogy egy n pozitív egész szám osztóinak összege akkor, és csak akkor kettő-hatvány, ha n egy MERSENNE–prím ($2^k - 1$ alakú prímszám), vagy különböző MERSENNE–prímek szorzata.

Megoldás:

Nyilvánvaló, hogy $\sigma(n)$, az n pozitív egész szám osztóinak összege kettő-hatvány, ha n MERSENNE–prím vagy különböző MERSENNE–prímek szorzata, hiszen ekkor $\sigma(n)$ képletében minden tényező $(1 + (2^k - 1))$ alakú. Lássuk be, hogy egyébként nem az!

Tegyük fel, hogy $\sigma(n)$ kettő-hatvány és $(1+p+p^2+\ldots+p^{\alpha})$ az egyik tényező a képletében, vagyis a p prím α kitevővel szerepel n prímtényezős felbontásában. Ekkor $(1+p+p^2+\ldots+p^{\alpha})$ is kettő-hatvány, tehát biztosan páros, így $p \neq 2$ és α páratlan.

Ekkor

$$2^k = (1+p+p^2+\ldots+p^{\alpha}) = (1+p)(1+p^2+p^4+\ldots+p^{\alpha-1}).$$

Mivel a bal-oldal kettő-hatvány, ezért a jobb oldalon is mindkét tényezőnek kettő-hatványnak kell lennie, tehát p olyan prím, hogy $1+p$ kettő-hatvány, vagyis MERSENNE–prím.

Mit mondhatunk a p, MERSENNE–prím α kitevőjéről?

Tegyük fel, hogy az $(1+p^2+p^4+\ldots+p^{\alpha-1})$ kettő-hatvány páros sok szám összege, ekkor a fentihez hasonlóan felbontható:

$$(1 + p^2 + p^4 + \ldots + p^{\alpha-1}) = (1 + p^2)(1 + p^4 + p^8 + \ldots + p^{\alpha-3})$$

Mivel a bal-oldal kettő-hatvány, ezért a jobb oldalon is mindkét tényezőnek kettő-hatványnak kell lennie, tehát $2^L = 1 + p^2$, ezért $2^L - 1 = p^2$.

Négyzetszám nem lehet $4k - 1$ alakú, hiszen, ha $a = 2k$ páros, akkor $a^2 = 4k^2$ osztható 4-gyel, ha $a = 2k+1$, páratlan akkor $a^2 = 4k^2+4k+1$ maradékul 1-et ad 4-gyel osztva .

Ez csak akkor teljesülhetne, ha $L = 1$ és így $p = 1$, tehát p prímszámra ellentmondást kaptunk, mivel az 1 nem prím.

Ebből következik, hogy az $(1+p^2+p^4+\ldots p^{\alpha-1})$ kettő-hatvány páratlan sok szám összege.

Mivel páratlan sok páratlan szám összege mindenképp páratlan, $(1+p^2+p^4+\ldots p^{\alpha-1})$ csak úgy lehet kettő-hatvány, ha 1-el egyenlő, vagyis $\alpha = 1$. Ezzel beláttuk, hogy n csak különböző MERSENNE–prímek szorzata lehet. □

B. 4. Feladat
Igazoljuk, hogy végtelen sok természetes szám nem áll elő egy másik szám osztóinak összegeként, vagyis igazoljuk, hogy az osztóösszeg láncokból, ha a kiindulási pontokat nem vesszük figyelembe, végtelen sok természetes szám kimarad.

Megoldás:
Lássuk be, hogy végtelen sok olyan páratlan szám létezik, mely nem áll elő valamely pozitív egész osztóinak összegeként!

Tetszőleges N számnál kisebb páratlan $\sigma(n)$ esetén, { $\sigma(n)$ jelenti n osztóinak összegét, magát az n számot is az osztók közé sorolva}, teljesülnie kell a következő feltételeknek, a 2. Feladat alapján:
$n < N$ és $n = s^2$ vagy $n = 2t^2$ ahol t és s pozitív egész szám.

(2. Feladat: Igazoljuk, hogy egy n pozitív egész szám pozitív osztóinak összege, magát az n számot is az osztók közé sorolva, akkor és csak akkor páratlan, ha $n = 2\,t^2$, vagy $n = t^2$, ahol t pozitív egész szám).

Ha $n = 2t^2$ alakú:

$2t^2 < N$

$t^2 < \frac{N}{2}$

$t < \sqrt{\frac{N}{2}}$

Ebből következik, hogy t lehetséges értékeinek száma kevesebb mint $\sqrt{\frac{N}{2}}$

Mivel
$s^2 < N$
$s < \sqrt{N}$
így s lehetséges értékeinek száma kevesebb mint $\sqrt{N}$

A fenti kettő összege felső korlátot ad az n lehetséges értékeinek számára, és ezáltal a $\sigma(n)$ lehetséges N-nél kisebb páratlan értékeinek számára is.

Ezt az összeget az N-nél kisebb páratlan számok mennyiségéből kivonva a $\sigma(n)$ érték készletéből kimaradó páratlan számok mennyiségére alsó korlátot kapunk:

$$\left[\frac{N}{2}\right] - \left(\sqrt{\frac{N}{2}} + \sqrt{N} \right),$$

ahol N egészrészét $\left[\frac{N}{2}\right]$ jelöli.

Ez pedig tart a végtelenhez, ha N tart a végtelenhez.

Legyen N páros:

$$\left[\frac{N}{2}\right] - \left(\sqrt{\frac{N}{2}} + \sqrt{N} \right) = \sqrt{\frac{N}{2}} \left(\sqrt{\frac{N}{2}} - 1 - \sqrt{2} \right)$$

□

A különféle számláncok készítése, vizsgálata elősegítheti a pozitív egészekből álló végtelen számsor áttekintését egy adott szempont szerint.

B. 5. Feladat

Mutassuk meg, hogy ha egy számláncban minden szám rákövetkezője a számjegyek négyzeteinek összege,

Pl.: $18 \to 65 \to 61 \to 37 \to 58 \to 89 \to 145 \to 42 \ldots$

akkor, egy számsor vagy leér az 1-hez vagy ciklusba keveredik.

Megoldás:

Míg háromnál több jegyű a szám, a lánc monoton csökken, hiszen, ha az $10^{n-1} > 81n$ egyenlőtlenség egy n-re teljesül, akkor $n+1$-re is teljesül, és $n=4$-re $10^3 > 4 \cdot 81$.

Ha $n < 4$, a lánc hol nő, hol csökken, viszont, mivel csak véges sok variáció lehetséges, ha nem érünk le az egyhez, előbb-utóbb elő kerül valamely, már egyszer felhasznált szám, s onnantól már minden ismétlődik. Tehát előbb-utóbb vagy leérünk az 1-hez, vagy ciklusba keveredünk. □

Szakkörökön különböző egész számokból kiindulva képeztették ezt a láncot a diákokkal. Ha a számlánc ciklusba keveredett, többet kellett számolniuk a gyerekeknek, mintha levezetett az *1*–hez, ezért a tanulók az utóbbi tulajdonságú számokat szerencsés* számoknak nevezték el.

Ezt a hagyományt követve, bármely szabály szerint képzett számláncot tekintve, nevezzük a sorozatra vonatkozó szerencsés számoknak azokat a számokat, amelyekből induló lánc levezet az 1-hez, s azután ezt már csupa 1 követi.

Hasonlóan általánosítsuk a tökéletes és a barátságos szám-pár fogalmát is. Egy pozitív egész számokból álló számlánc egy eleme legyen a számláncra vonatkozó tökéletes szám, ha rákövetkezője önmaga; barátságos, ha kételemű ciklus tagja.

Például az *F(n)={n* számjegyeinek összege} szabály által meghatározott láncban Az egyjegyű számok önmaguk rákövetkezői, két elemű ciklus nincsen.

Előre megadott számláncban nehéz megtalálni a láncra vonatkozó szerencsés és tökéletes számokat, barátságos szám-párokat. Mint előbb szó volt róla, például: *F(n)={n* nála kisebb pozitív osztóinak összege*}*, szabállyal megadott számlánc esetén, senki sem tudja, hány a számláncra vonatkozó tökéletes szám, és barátságos szám–pár létezik.

Ezért próbáljuk megfordítani a feladatot: előre adjuk meg az 1-hez levezető láncok tagjait, az egy és kételemű ciklusokat, s konstruáljunk hozzájuk számláncokat. A következőkben erre fogok tenni néhány kísérletet.

*A számelmélet szakirodalmában más tulajdonságú számokat szokás szerencsés számoknak nevezni.
A szerencsés számokat az alábbi eljárással kapjuk. Vegyük az1, 2, 3, ..., N sorozatot. Ebből minden második számot törölve az 1, 3, 5, 7, 9,...sorozatot kapjuk. A megmaradt számok közül a következő, még nem használt szám a 3, így elhagyjuk a sorozat minden harmadik tagját: 1, 3, 7, 9 13, 15, 19, 21... marad. Most minden hetediket kell elhagyni, s kapjuk az 1, 3, 7, 9, 13, 15, 21 … sorozatot, és így tovább. Azokat a számokat hívjuk szerencsés számoknak melyek megmaradnak.

B.1. Számrendszerek segítségével képzett számláncok

B1. 1. Feladat
Keressünk olyan szabályt, mely alapján képzett számláncban pontosan az

$$2, 2^2, 2^{2^2} \dots\ 2^{2^{2^{\dots 2}}}$$

alakú számokból induló lánc vezet le az 1-hez!

<u>Megoldás</u>
Ezen kettő-hatványok esetén nyilvánvalóan jó lesz, ha egy számhoz mindig a kitevőjét rendeljük hozzá, a lánc végül leér az 1-hez, de még gondoskodnunk kell arról is, hogy ha egy n pozitív szám nem a megfelelő alakú, akkor a rákövetkezője, se legyen megfelelő alakú. Ebben lesz segítségünkre a következő feladat:

B1. 2. Feladat
Vizsgáljuk meg, hogy a következő, <u>B1. 1. lánc</u> képzési szabálya eleget tesz-e ennek a követelménynek! Keressünk a láncban egy és két elemű ciklusokat is!

<u>B1. 1. Példa számláncra:</u>
Legyen $F(1) = 1$;
ha $n \neq 1$, (tetszőleges pozitív egész szám), és n-t a kettes számrendszerben felírva, α az egyesek és β a nullák száma, akkor legyen: $F(n) = 2^{n(\alpha-1)(\alpha+\beta)} + (\alpha-1) + (\beta-1)$

Számítások:
$3 = 11_{(2)}$ $\quad \alpha=2, \beta=0$, $F(3) = 2^6$
$4 = 100_{(2)}$ $\quad \alpha=1, \beta=2$, $F(4) = 2$
$6 = 110_{(2)}$ $\quad \alpha=2, \beta=1$, $F(6) = 2^{18}+1 = 182145$

Képezzük a számláncot:
$3 \to 2^6 \to 6 \to 182145 \to \dots$
$4 \to 2 \to 1$

<u>B1. 2. Feladat megoldása:</u>

<u>1.Segédfeladat a B1. 2. Feladat megoldásához:</u>

Mutassuk meg, hogy ha a <u>B1. 1. Példa</u> szabályait alkalmazzuk a $2, 2^2, 2^{2^2} \dots\ 2^{2^{2^{\dots 2}}} \dots$ alakú számokból induló láncok levezetnek az egyhez!

<u>Megoldás:</u>

$2^k\ (k\neq 0)$ a kettes számrendszerben felírva: $10\ldots0$ {k db. 0} Így $\alpha= 1$, és $\beta= k$

$$F(n)=F(2^k)= 2^{n(\alpha-1)(\alpha+\beta)} +(\alpha-1)+(\beta-1)= 2^{2^k(1\text{-}1)(k+1)} + (1-1) + (k-1) = k<2^k$$

Ezért a <u>B1. 1. Szabály</u> szerint képzett láncban minden kettő-hatvány rákövetkezője, a kitevő. A lánc minden kettő-hatvány helyen szigorúan monoton csökken, és természetesen a $2\ ,2^2, 2^{2^2}\ \ldots\ 2^{2^{2^{\cdots 2}}}\ \ldots$ alakú számokból induló láncok levezetnek az 1-hez. □

<u>2. Segédfeladat a B1. 2. Feladat megoldásához:</u>

Mutassuk meg, hogy ha a <u>B1. 1 Példában</u>, ha n nem kettő-hatvány, akkor $F(n)> n$. A lánc minden nem kettő-hatvány helyen szigorúan monoton nő.

<u>Megoldás:</u>

Ha n nem kettő-hatvány, akkor — a kettes számrendszerben felírva — legalább két egyest tartalmaz, így az egyesek számára, α -ra: $\alpha-1\geq 1$. Ezért:

$$F(n) = 2^{n(\alpha-1)(\alpha+\beta)} + (\alpha-1)+ (\beta-1) \ \geq\ 2^{n(\alpha-1)(\alpha+\beta)} > n(\alpha-1)(\alpha+\beta) > n \quad □$$

<u>3. Segédfeladat a B1. 2. Feladat megoldásához:</u>

Mutassuk meg, hogy ha az 1. 1 láncban, $n\neq 3$, és n nem kettő-hatvány, akkor n rákövetkezője nem lehet kettő-hatvány.

<u>Megoldás:</u>

n rákövetkezője $F(n) = 2^{n(\alpha-1)(\alpha+\beta)}+(\alpha-1)+(\beta-1)$ kétféleképpen lehet kettő-hatvány, vagy :

$(\alpha-1)+(\beta-1) =0$,

vagy :

$F(n)=2^{n(\alpha-1)(\alpha+\beta)}+(\alpha-1)+(\beta-1)= 2^{n(\alpha-1)(\alpha+\beta)+k}$

(ahol k pozitív egész szám).

$(\alpha-1)+(\beta-1) =0$ csak akkor teljesül, ha $n=3=11_{(2)}$, vagy $n=2=10_{(2)}$, (ahol α az egyesek, β a nullák száma), így ez a lehetőség elesik.

$F(n)= 2^{n(\alpha-1)(\alpha+\beta)}+(\alpha-1)+(\beta-1) = 2^{n(\alpha-1)(\alpha+\beta)+k}$ (ahol k pozitív egész szám) sem fordulhat elő, hiszen ha n nem kettő-hatvány, az egyesek száma, legalább kettő, $\alpha-1\geq 1$

$$(\alpha-1)+(\beta-1) < \alpha+\beta < n(\alpha-1)(\alpha+\beta) < 2^{n(\alpha-1)(\alpha+\beta)}$$

$$2^{n(\alpha-1)(\alpha+\beta)} < 2^{n(\alpha-1)(\alpha+\beta)}+(\alpha-1)+(\beta-1) < 2 \cdot 2^{n(\alpha-1)(\alpha+\beta)}$$

□

4. Segédfeladat a B1. 2. Feladat megoldásához:
Mutassuk meg hogy, $n=3$ –ból, az 1. 1 szabály szerint képzett lánc a harmadik tagtól szigorúan monoton nő.

Megoldás:
Az $n=3$-ból induló lánc második tagja, 2^6, kettő-hatvány , de a harmadik tag, 6, már nem. □

Következmény:
Nem kettő-hatványból induló lánc a harmadik tagtól kezdve szigorúan monoton nő.

5. Segédfeladat a B1. 2. Feladat megoldásához:

Mutassuk meg, hogy az B1. 1 láncban a $2^{2^{2^{\cdots 2^{L}}}}$ alakú (k db 2-es számjegyet tartalmazó), számból induló lánc, (ahol $L \neq 1$, és nem kettő-hatvány), a $(k+1)$ -edik tagjáig, szigorúan monoton csökken, s ettől kezdve a lánc szigorúan monoton nő.

Megoldás:
L-ig, szigorúan monoton csökken, hiszen a szám rákövetkezője mindig a kitevője. A sor $k+1$-edik tagja, L nem kettő-hatvány, így ettől kezdve a lánc szigorúan monoton nő.□

B1. 2. Feladat megoldása a segédfeladatok eredményeinek felhasználásával:
Mivel a számegyenes minden természetes számát megvizsgáltuk már, kijelenthetjük, hogy, az B1. 1 szabályt követő láncok közül csak a $2^{2^{2^{\cdots 2}}}$ alakú számokból induló láncok futnak le az 1-hez.

A lánc az 1-en kívül a számegyenes minden pozitív egész pontján szigorúan monoton nő, vagy csökken, így az 1-en kívül több szám nem lehet önmaga rákövetkezője; és kételemű ciklusok sem fordulhatnak elő. □

B1. 2. Példa számláncra:
Legyen $F(n) = 1$, ha n prím, vagy pedig 1, egyébként $F(n)$ legyen a legkisebb olyan szám, mely, a 10-es számrendszerben felírva legalább annyi nullát tartalmaz, mint n, de osztóinak száma kevesebb. Ha ilyen szám nincsen, akkor legyen $F(n) = n$.

Képezzük a számláncot: $20 \to 10 \to 101 \to 1$

$105 \to 10 \to 101 \to 1$

$64 \to 2 \to 1$

B1. 3. Feladat
Nehéz feladatnak tűnik azon számok megadása, melyek önmaguk rákövetkezői, s azok feltalálása melyekből induló lánc levezet az 1-hez, mégis kíséreljük meg!

<u>Megoldás:</u>
Váratlanul oldja meg a problémát a következő meglepő tétel:

B1. 1. Tétel:
Minden k természetes számhoz van olyan prímszám, mely a tízes számrendszerben felírva k-nál több 0-t tartalmaz.
(SÁRKÖZI ANDRÁS–SURÁNYI JÁNOS: Számelmélet-feladatgyűjtemény— 18/23-as feladat. [5]/

A <u>B1. 1. Tételből</u> következik, hogy bármely számból induló lánc levezet az 1-hez, hisz ahogy haladunk a sorozatban, a soron következő számnak mindig egyre kevesebb osztója van, s így előbb–utóbb prímet kapunk. Ebből az is kiderül, hogy olyan szám melynek rákövetkezője önmaga, nincsen. (Kivéve az 1-et.) □

<u>B1. 3. Példa számláncra:</u>
Legyen $F(n)=1$, ha $n=1$,vagy ha n olyan prím, hogy $(n-1)!$ az n-es számrendszerben csupa $(n-1)$-es jegyből áll, vagyis, ha $(n-1)! = n^m-1$, egyébként legyen $F(n)=n+1.$

Képezzük a számláncot:

$$5 \to 1$$
$$7 \to 8 \to 9 \to 10 \to 11\ldots$$

Számítások a lánc képzéséhez:
5 prím, kérdés $(5-1)!$, hogy néz ki az 5-ös számrendszerben. Létezik-e olyan m egész szám, hogy $(5-1)!=5^m-1$ teljesüljön. $4!=4\cdot3\cdot2\cdot1=24.$ Így az állítás $m=2$ –re teljesül.

B1. 4. Feladat:
Keressük meg azokat a pozitív egész számokat, amelyekből induló láncok lejutnak az 1-hez!

<u>Megoldás:</u>

Sejtés:
Bármely számból induló lánc leér az 1-hez, hiszen belőle kiindulva, az összes, nála nagyobb számot végig vizsgálva, előbb-utóbb csak el kell jutnunk egy olyan számhoz, mely a feltételeknek megfelel.

Várakozásunk ellenére a következő tétel igaz:

B1. 2. Tétel , (LIUVILL–tétele)

Nem létezik olyan 5-nél nagyobb p prímszám, és olyan m természetes szám, amelyre:

$$(p-1)! = p^m - 1$$

(SÁRKÖZY ANDRÁS-SURÁNYI JÁNOS: Számelmélet –feladatgyűjtemény, 13/19 - es feladat. [5])

Így az összes szóba jövő prímszám: $2, 3, 5$

Ezek megfelelőek is, mivel:

$P=2,\ m=1 \quad (2-1)! + 1 = 2^1$, vagyis $(2-1)! = 1 = 1_{(2)}$

$P=3,\ m=1 \quad (3-1)! + 1 = 3^1$, vagyis $(3-1)! = 2 = 2_{(3)}$

$P=5,\ m=2 \quad (5-1)! + 1 = 5^2$, vagyis $(5-1)! = 24 = 44_{(5)}$

($\alpha_{(k)}$ jelentése, hogy α a k -as számrendszerben van)

Tehát a következő számokból induló láncok jutnak le az egyhez.: 1, 2, 3, 4, □

B.2. Számláncok megadása a FIBONACCI–sorozat segítségével

A FIBONACCI–sorozat segítségével is könnyen megadhatunk számláncokat.

Vezessük be, a képzési szabálynak eleget tevően a 0. tagot. Legyen $f(0) = 0$
Emlékeztetőül a képzési szabály: $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$.
A 0. taggal kiegészített FIBONACCI–sorozat:
0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, …

<u>B2. 1. Példa számláncra</u>

Legyen n egy tetszőleges pozitív egész szám. Jelentse $f(n)$, az n-hez legközelebbi, tőle különböző FIBONACCI–számot, (ha kettő ilyen van, akkor a kisebbiket). Legyen: $F(n)=n-f(n)$, ha n: FIBONACCI–szám, egyébként $F(n) = n + f(n)$.

Képezzük a sorozatot: $100 \to 189 \to 422 \to 799 \to \dots$
$233 \to 89 \to 34 \to 13 \to 5 \to 2 \to 1 \to 1 \dots$

B2. 1. Feladat:

A <u>B2. 1. Példa</u> szabályát követő láncok közül kiválasztható-e olyan, amely lejut az egyhez és utána már mindig egy az értéket veszi föl?

<u>1. Segédfeladat a B2. 1. Feladat megoldásához:</u>

Csak akkor található olyan lánc, mely lejut az egyhez, s utána mindig az egyet veszi fel, ha $F(1)=1$. Számítsuk ki $F(1)$ értékét!

<u>Megoldás:</u>

Az 1-hez legközelebbi, tőle különböző FIBONACCI–számok közül a kisebbik a 0. Így:
$F(n) = n - a(n)$
$F(1) = 1 - 0 = 1$ □

<u>2. Segédfeladat a B2. 1. Feladat megoldásához:</u>

Vizsgáljuk meg, a FIBONACCI–számból induló láncok viselkedését!

Megoldás:

Legyen $n=f_k$ $(k>2)$ egy tetszőleges FIBONACCI–szám. A FIBONACCI–sorozat $k>1$ esetén szigorúan monoton nő, a sorozat tagjai, sorszámuk által meghatározott sorrendben egymás fölött helyezkednek el a számegyenesen. Így az f_k-hoz legközelebbi FIBONACCI–számok: f_{k-1} és f_{k+1}

f_{k+1} távolsága f_k-tól: $f_{k+1} - f_k = f_{k-1}$.

f_{k-2} távolsága f_k-tól: $f_k - f_{k-1} = f_{k-2}$.

$f_{k-2} < f_{k-1}$

Tehát az f_k - FIBONACCI–számhoz a legközelebbi FIBONACCI–szám: f_{k-1}

Így

$$F(f_k) = f_k - f_{k-1} = f_{k-2}$$

Ezt véges sokszor alkalmazva f_2-höz vagy f_1-hez jutunk aszerint, hogy k páros vagy páratlan. Azonban az $f_2 = f_1 = 1$, így egy FIBONACCI–számból induló lánc mindenképpen lejut az 1-hez. □

3. Segédfeladat a B2. 1. Feladat megoldásához:

Mutassuk meg, hogy ha n nem FIBONACCI–szám, akkor $F(n) = n + f(n) > n$, sem lehet FIBONACCI–szám!

Megoldás:

Legyenek az n-t közrefogó FIBONACCI–számok f_k és f_{k+1}, ekkor $f_k < n < f_{k+1}$

a.) Ha $F(n)$, f_k -hoz van közelebb $F(n) = n + f_k$

Ekkor:

$f_k < n < f_{k+1}$, $\quad f_k + f_{k-1} < f_k + f_k < n + f_k < f_k + f_{k+1}$

Így:

$$f_{k+1} < F(n) < f_{k+2}$$

b.) Ha $F(n)$, f_{k+1} -hez van közelebb, $F(n) = n + f_{k+1}$

Ekkor:

$f_k < n < f_{k+1}$, $\quad f_k + f_{k+1} < n + f_{k+1} < f_{k+1} + f_{k+1} < f_{k+1} + f_{k+2}$

Így:

$$f_{k+2} < F(n) < f_{k+3}$$

Mivel a FIBONACCI–sorozat tagjai, sorszámuk által meghatározott sorrendben egymás fölött helyezkednek el a számegyenesen, f_{k+1} és f_{k+2} ,közé nem esik FIBONACCI–szám. Ugyanígy f_{k+2} és f_{k+3} közé sem. Tehát ha n nem volt FIBONACCI–szám, akkor $F(n)$ sem lesz az. Ha nem FIBONACCI–számból indulunk ki végtelen, monoton növekedő számláncot kapunk. □

A FIBONACCI–sorozat segítségével könnyen képezhetünk olyan számláncokat, melyekben nehéz problémának „tűnik” azoknak a számoknak a megtalálása, melyekből 1-re végződő lánc indul.

B2. 1. Definíció:
Azt a számsorozatot, amelynek első tagja: $l_1 = 1$, második tagja: $l_2 = 3$, n - dik tagja: $l_n = l_{n-1} + l_{n-2}$ ($n > 2$ esetén), LUCAS–sorozatnak nevezzük.

A LUCAS–sorozat elemei: 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123…

B2. 2. Példa számláncra

Legyen $F(1)= 1$

Ha $n \neq 1$, és $n = f_k$, a k-ik FIBONACCI–szám, akkor legyen $F(n)= f_{k-1}$

Egyébként, $F(n)$ legyen az n-hez legközelebbi LUCAS–sorozatbeli elem, (ha kettő van, akkor a kisebb).

Képezzük a számláncot! Ehhez segítségként kezdjük el felírni a LUCAS–sorozatot és a FIBONACCI–sorozatot:
A LUCAS–sorozat tagjai: 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 222, 421, 643, 1064, 1707…
A FIBONACCI–sorozat tagjai: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 9874…

30→29→29…
40→47→47…
6→7→7…
9→7→7…
4→4→4…
3→2→1→1…

B2. 2. Feladat:
Adjuk meg azokat a pozitív egész számokat, melyekből induló, a B2. 2. Példa szabálya szerint képződő, lánc 1-re végződik!

Megoldás:
A LUCAS–sorozat elemei, ha csak nem egyúttal FIBONACCI–számok is, egy elemű ciklust alkotnak, hisz önmagukhoz vannak a legközelebb.

A FIBONACCI–sorozat tagjaiból induló lánc nyílván 1-re végződik.

Abból a számból induló lánc végződik még 1-re, melyhez legközelebb álló LUCAS–sorozatbeli elem egyúttal FIBONACCI–szám is.

Nehéz problémának tűnik annak kiderítése, mely számokból induló lánc ér le az 1-hez.

A kérdést megoldja a következő tétel:

B2. 1.Tétel:
A LUCAS–sorozatnak és a FIBONACCI–sorozatnak csak két közös eleme van: az 1-es és a 3-as.

(M. D. HIRSCH, ADDITIVE SEQUENCES, MATH, Mag.,50(1977),262.o.[6] Dr. Kiss Péter hivatkozik rá „Közös elemek másodrendű rekurzív sorozatokban” című cikkében, mely az Egri HO SI MINH Tanárképző Főiskola XVI. Tudományos közleményében jelent meg. Eger, 1982.)

Ha a lánc első tagja nem FIBONACCI–szám, akkor, a lánc második tagja a LUCAS–sorozat eleme.

A LUCAS–sorozat számai, pedig, a B2. 1. Tétel értelmében, önmaguk rákövetkezői, a 3-at kivéve, mely egyúttal FIBONACCI–szám is, ezért a 3-ból induló lánc lefut az egyhez.

Ezért, abból a nem FIBONACCI–számból indul ki egyhez leérő lánc melyhez a legközelebbi LUCAS–sorozatbeli elem a 3. Ilyen szám azonban nincsen. □

Általánosítsuk a FIBONACCI–sorozatot!

B2. 2. Definíció:
a_n -t FIBONACCI–típusú sorozatnak nevezzük, ha a_1, és a_2 egész szám és $a_k = a_{k-1} + a_{k-2}$, ha $k>2$.

B2. 3. Definíció:
Két FIBONACCI–típusú sorozat, a_n, b_n ekvivalens, egymás „eltoltja”, ha:
$a_{k+r} = b_{k+s}$ minden $k \geq 0$ egész esetén, valamely rögzített r és s természetes számok mellett.

Folytassuk a FIBONACCI–sorozatot visszafelé. Adjunk értelmet a negatív indexnek:

B2. 4. Definíció
Legyen a_n egy FIBONACCI–típusú sorozat. Ekkor minden $k \geq 0$-ra teljesül, hogy:
$a_k + a_{k+1} = a_{k+2}$.
Használjuk fel ezt a formulát arra, hogy visszafelé képezzük a sorozatot, $k < 0$ esetén, definiáljuk a sorozatot evvel a formulával: $a_k = a_{k+2} - a_{k+1}$

Próbaként képezzük visszafelé a 0, 1-el kezdődő FIBONACCI–típusú sorozatot, a FIBONACCI–sorozatot: …,–8, 5, –3, 2, –1, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, …

B2. 1. Megjegyzés:

Legyen a_n és b_n két negatív indexű tagokkal is kiegészített FIBONACCI–típusú „sorozat”. Ha a két sorozat ekvivalens, akkor a két sorozat elemeinek halmaza megegyezik. Tehát, ha valamely k-ra b_k nem eleme az a_n sorozat elemeit tartalmazó halmaznak, akkor a két sorozat nem lehet ekvivalens.

B2. 3. Feladat

Ismét kanyarodjunk vissza a fejezet első példájához, a B2. 1. Példához.
Emlékeztetőül a B2. 1. Példa számláncának képzési szabálya: Legyen n egy tetszőleges pozitív egész szám. Jelentse $f(n)$ az n-hez legközelebbi, tőle különböző FIBONACCI–számot, (ha két ilyen van, akkor a kisebbiket). Legyen: $F(n) = n - f(n)$, ha n FIBONACCI–szám, egyébként legyen: $F(n) = n + f(n)$. Tehát, tulajdonképpen, ha nem FIBONACCI–szám következett, hozzáadtuk a hozzá legközelebb eső FIBONACCI–számot. S így képeztünk ebből a két számból kiindulva, egy új, FIBONACCI–típusú sorozat harmadik elemét. Mi történne, ha ennek a FIBONACCI–típusú sorozatnak nem a harmadik, hanem egy magasabb sorszámú, későbbi elemét választanánk? Milyen kikötés bevezetésével tudnánk ekkor biztosítani, hogy ha n nem FIBONACCI–szám, a rákövetkezője se legyen az? Hogyan érhetnénk el, hogy továbbra is kizárólag a FIBONACCI–számokból induló láncok juthassanak le az 1-hez?

Megoldás:

A feladatot a következő tétel oldja meg:

B2. 2.Tétel:

Ha a_n és b_n két FIBONACCI–típusú sorozat, melyek nem ekvivalensek, és

$$A = MAX.\left(|a_1a_3-a_2^2| \ , \ |b_1b_3-b_2^2| \right) ,$$

akkor a két sorozatnak nincs $A\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)$- nél nagyobb abszolút értékű közös eleme.

(M. D. HIRSCH, ADDITIVE SEQUENCES, MATH, Mag.,50(1977),262.o.[6] Dr. Kiss Péter hivatkozik rá „Közös elemek másodrendű rekurzív sorozatokban” című cikkében, mely az Egri HO SI MINH Tanárképző Főiskola XVI. Tudományos közleményében jelent meg. Eger, 1982.)

Tehát a feladat egy megoldását nyerhetjük úgy, ha megadunk egy n-től függő küszöböt, melynél nagyobb közös eleme a B2. 2.Tétel értelmében nem lehet az n számból és a hozzá legközelebbi FIBONACCI–számból képzett FIBONACCI–típusú sorozatnak és a FIBONACCI–sorozatnak.

1. Segédfeladat a B2. 3. Feladat megoldásához:

Lássuk be, hogy $8n^2$-nél nagyobb közös eleme nem lehet az n számból és a hozzá legközelebbi FIBONACCI–számból képzett FIBONACCI–típusú sorozatnak és a FIBONACCI–sorozatnak.

Más szóval, mutassuk meg, hogy a most következő B2. 3. Példa szabályait követő számláncokban kizárólag a FIBONACCI–számokból induló számláncok jutnak le az egyhez!

B2. 3. Példa számláncra

Legyen n egy tetszőleges pozitív egész szám. Jelentse $f(n)$, az n-hez legközelebbi, tőle különböző FIBONACCI–számot, (ha két ilyen van, akkor a kisebbiket).
Ha $n = f_k$ a k- dik FIBONACCI–szám, akkor legyen $F(n) = f_{k-1}$.
Ha n nem FIBONACCI–szám, akkor legyen $F(n)$ az n -ből és a hozzá legközelebbi FIBONACCI–számból, $f(n)$-ből képzett FIBONACCI–típusú sorozat első olyan tagja, amelynek abszolút értéke nagyobb, mint $8n^2$.

Képezzük a sorozatot! Számítások a lánc képzéséhez:
Legyen $n=4$
A 4-hez legközelebbi FIBONACCI–számok közül a 3 a kisebbik. Képezzünk a 3-ból és a 4-ből FIBONACCI– típusú sorozatot: $3 \to 4 \to 7 \to 11 \to 18 \to 29 \to 47 \to 76 \to 123 \to 199\ldots$
A 3-ból és az $n=4$ -ből képzett FIBONACCI–típusú sorozat első $8n^2 = 8 \cdot 16 = 128$-nál nagyobb tagja:199. A 199-hez legközelebbi FIBONACCI–szám a 144. Képezzünk a 144-ből, és a 199-ből egy FIBONACCI– típusú sorozatot. $144 \to 199 \to 343 \to 542 \to \ldots$ Keressük az első $8n^2 = 8 \cdot 39601$ -nél nagyobb tagot… Így a 2. 3. példa szabályai szerint képzett sorozat: $4 \to 199\ldots$

$n=34$
$34 \to 13 \to 5 \to 2 \to 1 \to 1\ldots$
$n=4$
$4 \to 199 \to \ldots$
$n=6$
$6 \to 309 \to \ldots$

Megoldás: (1. Segédfeladat a B2. 3. Feladat megoldásához)

Jelölje a_n az $a_1=n$ és $a_2=f(n)$ -ből képzett FIBONACCI–típusú sorozatot, f_n pedig a FIBONACCI–sorozatot.

Alkalmazzuk a B2. 2. Tételt:

$A\cdot(\sqrt{5}-1)$ -nél magasabb abszolút értékű közös tagja biztos nincsen a két sorozatnak.

Fejezzük ki A-t az ismert adatokkal: $A = MAX.\,(|a_1a_3-a_2^2|\ ,\ |f_1f_3-f_2^2|)$

I. $f(n)<n$:

$a_1=f(n),$
$a_2=n,$
$a_3=n+f(n);$
$f_1=1$
$f_2=1$
$f_3=2$

$A = MAX.\,(|f(n)^2+n\cdot f(n)-n^2|,1)$

II. $f(n)>n$:

$a_1=n,$
$a_2=f(n),$
$a_3=n+f(n)$

$A = MAX.\,(|n^2+n\cdot f(n)-f(n)^2|,1)$

Innen ismét kétfelé ágazik a vizsgálat, aszerint, hogy az abszolút érték jelek között 1-nél nagyobb, vagy 1-nél kisebb érték van.

1.) Az abszolút értékek közötti rész nagyobb, mint 1.

I. Ha: $f(n)<n$, és $|f(n)^2+n\cdot f(n)-n^2|>1$, akkor $A=|f(n)^2+n\cdot f(n)-n^2|$

A B2. 2. Tétel szerint a két sorozat legnagyobb abszolút értékű közös elemére, K-ra teljesülnie kell:

$|K| < A\cdot(\sqrt{5}-1) = |f(n)^2+n\cdot f(n)-n^2|\,(\sqrt{5}-1) < |2n^2|\,(\sqrt{5}-1) < 8n^2$

II. Ha: $f(n) > n$, és $|n^2+n\cdot f(n) - f(n)^2| > 1$, akkor $A = |n^2+n\cdot f(n) - f(n)^2|$

Jelölje az n-hez legközelebbi FIBONACCI–*számot* $f(n)$-t, most: f_r

$f_r > n > f_{r-1} > f_{r-2}$, ezért: $2n > f_{r-1} + f_{r-2} = f_r > n$

A B2. 2. Tétel szerint, a két sorozat legnagyobb abszolút értékű közös elemére, K-ra teljesül

(felhasználva, az előbb megmutatott összefüggést: $n < f(n) < 2n$):

$$|K| < A(\sqrt{5}-1) = |n^2+n\cdot f(n) - f(n)^2|(\sqrt{5}-1) < |f(n)^2 + f(n)\cdot f(n) - f(n)^2|(\sqrt{5}-1) =$$

$$= f(n)^2(\sqrt{5}-1) < (2n)^2(\sqrt{5}-1) < 8n^2$$

2.) Az abszolút értékek közötti rész kisebb, mint *1* ezért *A=1*

Ekkor a két sorozat legnagyobb közös elemére teljesül:

$$|K| < A(\sqrt{5}-1) = (\sqrt{5}-1) < 8 < 8n^2$$

Mivel n pozitív egész szám, $1 \le |n|$, s így $8 \le 8n^2$ miatt ebben az esetben is teljesül a két sorozat legnagyobb abszolút-értékű közös elemére, K-ra, hogy $|K| < 8n^2$.

A B2. 2. Tételből tehát következik, hogy, ha az n egész szám nem FIBONACCI–szám, akkor az n számból és a hozzá legközelebbi FIBONACCI–számból képzett FIBONACCI–típusú sorozatnak, és a FIBONACCI–sorozatnak nem lehet $8n^2$-nél nagyobb abszolút értékű közös eleme.

Ezért a B2. 3. Példában kizárólag a FIBONACCI–számokból indulnak ki 1-hez leérő láncok. □

B3. Számláncok készítése prímszámok segítségével

Könnyen megadható olyan képzési szabály, hogy a prímszámokból, és az *1*-ből induló láncok konstans *1*-et felvevő láncban végződjenek.

<u>B3. 1. Példa számláncra:</u>
Legyen $F(1)=1$, egyébként legyen $n=1$, ha n prím, $F(n)= 2n+1$, ha n nem prím.

Például:
10→21→*43*→1
12→25→*51*→1
16→33→*67*→1
4→9→*19*→1

B3. 1. feladat
Találunk-e a prímszámokon, és az egyen kívül olyan számokat, melyekből a <u>B3. 1. Példa</u> szabálya szerint képzett lánc leér az 1-hez? Keressük meg az összest!

<u>Megoldás:</u>
Valamely számból induló lánc akkor és csak akkor vezet az *1*-hez, ha a belőle képzett lánc előbb-utóbb elérkezik egy prímszámhoz. A prímszámokból visszafelé képezve a láncot megkaphatjuk az összes olyan számot melyből induló lánc lejut az *1*-ig.

<u>1. Segédfeladat a B3. 1. Feladat megoldásához:</u>

Mutassuk meg, hogy a p prímszámból visszafelé képzett, a <u>B3. 1. Példa</u> szabályát követő lánc:

$$1 \to p \to \frac{p+1}{2} - 1 \to \frac{p+1}{2^2} - 1 \to \dots \to \frac{p+1}{2^{k\{p+1\}}} - 1$$

$k\{p+1\}$ az a legnagyobb szám, amelyre a 2-őt emelve az még osztója marad $p+1$ –nek

Például:
$1 \to 17 \to 8;$
$1 \to 19 \to 9 \to 4;$
$1 \to 29 \to 14;$
$1 \to 31 \to 15 \to 7 \to 3$

Az, hogy prímek is belekerülhetnek a visszafelé képzett láncba, nem változtat azon, hogy a módszer kiadja az összes olyan számot, melyből *1*-hez tartó lánc indulhat.

<u>Megoldás</u>
Legyen n_1 a p -t megelőző, n_2 az n_1 -t megelőző eleme a láncnak, tehát ezzel a jelöléssel a lánc az *1*-ből visszafelé képezve:

$$1 \to p \to n_1 \to n_2 \to n_3 \to n_4 \to n_5 \to \dots \to n_k \to n_{k+1} \to \dots$$

a.)
A képzési szabályból következik, hogy a visszafelé vett sor első két elemére igaz az állítás:

$p=2n_1+1$, így $n_1 = \frac{p-1}{2} = \frac{p+1}{2} - 1$

$n_1=2n_2+1$ így $n_2 = \frac{n_1-1}{2} = \frac{n_1-1}{2} - 1 = \frac{p+1}{2^2} - 1$

b.)
Tegyük fel, hogy a visszafelé vett sor k -dik elemére is igaz az állítás. Lássuk be, hogy ekkor a $k+1$-edik elemére is igaz:

Tegyük fel, tehát hogy: $n_k = \frac{p+1}{2^k} - 1$

Másrészt, n_{k+1} és n_k a képzési szabályból adódóan a következő kapcsolatban áll egymással:

$n_k = 2\, n_{k+1} +1$

Ezért: $n_{k+1} = \frac{n_k-1}{2} = \frac{n_k+1}{2} - 1$

$n_{k+1} = \frac{n_k+1}{2} - 1$ egyenletbe behelyettesítve a kiindulási feltételt: $n_k = \frac{p+1}{2^k} - 1$

kapjuk, hogy: $n_{k+1} = \frac{n_k+1}{2} - 1 = \frac{p+1}{2^{k+1}} - 1$

Tehát, ha n_k megfelelő alakú, akkor n_{k+1} is megfelelő alakú, a visszafelé képzett lánc tagjai valóban:

$$1 \to p \to \frac{p+1}{2} - 1 \to \frac{p+1}{2^2} - 1 \to \ldots \to \frac{p+1}{2^{k\{p+1\}}} - 1$$

$k\{p+1\}$ az a legnagyobb szám, amelyre a 2-őt emelve az még osztója marad $p+1$ -nek.□

B3. 2. Példa számláncra:
Legyen p az $n>1$ pozitív egész számhoz legközelebbi prím (ha kettő van, akkor a kisebbik). Ha $n\neq 1$ legyen: $F(n)= 2p-1$. Legyen $F(1)=1$

Képezzük a láncot!
(Prímek: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97…)
3→5→9→13→25→47→93→177→…
15→25→45→85→165…

B3. 2. Feladat:
Mutassuk meg, hogy az 1-en kívül nincs több szám a B3. 2. Példa szabálya szerint képzett számláncban, mely önmaga rákövetkezője!

Megoldás:
Az igazolás a CSEBISEV–tétel segítségével történik.

CSEBISEV–tétel:
Legyen $n>1$ egész szám. Az $(n, 2n)$ nyílt intervallumba mindig esik prímszám.

(GYARMATI-TURÁN: Algebra és számelmélet 144. o.)

n akkor önmaga rákövetkezője, ha $n = F(n)$, vagyis, ha $n=2p-1$, (ahol p az n-hez legközelebbi prímszám, ha kettő van, akkor a kisebbik).

a.)
n nem lehet prímszám és önmaga rákövetkezője egyszerre:

Ugyanis, ha feltesszük, hogy n prím, akkor az n-hez legközelebbi prímszám önmaga.

Mivel n önmaga rákövetkezője is, $n=2n-1$ -nek kell teljesülnie.

Amiből $n = 1$, következnék, márpedig az 1 nem prím.

b.)
n nem lehet összetett szám és önmaga rákövetkezője egyszerre:

Ugyanis, ha feltesszük, hogy n összetett szám, akkor $F(n) = n$ miatt $n= 2p-1$.

Ekkor, mivel p az n-hez legközelebbi prím a (p, n), nyílt intervallumban (p és n már nem tartozik bele) nincs prímszám.

$n=2p-1$ értéket behelyettesítve az előbbi, (p, n) kifejezésbe, kapjuk, hogy a $(p,2p-1)$ nyílt intervallum nem tartalmaz prímszámot.

Ekkor, mivel a feltétel szerint $n=2p-1$ összetett szám, a $(p,2p)$ nyílt intervallum sem tartalmaz prímszámot.

Ez ellentmond CSEBISEV–*tételének*, mely szerint, ha $n> 1$ egész, akkor az $(n, 2n)$ nyílt intervallumba mindig esik prímszám.□

B4. Számláncok készítése négyzetszámok segítségével

B4. 1. Feladat
Készítsünk olyan számláncot melyben, a négyzetszámok alkotnak egyelemű ciklust!

<u>B4. 1. Példa számláncokra:</u>

Jelölje k^2 az n pozitív egész számhoz legközelebb álló négyzetszámot.

Ha $n \le k^2$ legyen $F(n) = n + (2k-1)$;
Ha $n \ge k^2$ legyen $F(n) = n - (2k-1)$;
Ha $n = k^2$ legyen $F(n) = k^2$

Képezzük a számláncot!
12→7→12…
30→21→30…
53→40→29→20→13→20…
5→2→1…

B4. 2. Feladat
Ekkor <u>B4. 1. Példa</u> szabálya alapján képzett számláncokban a négyzetszámokon kívül találhatók-e még önmagukat adó elemek ?

Megkönnyítik a válaszadást a következő feladatok:
B4. 3. Feladat, B4. 4. Feladat, B4. 5. Feladat, B4. 6. Feladat

B4. 3. Feladat:
Mutassuk meg, hogya <u>B4. 1. Példa</u> képzési szabályát követő számláncokban az $m= k^2 - k+1$ és az $n= k^2+k$ (k≠1) alakú pozitív egész számok kételemű ciklust alkotnak.

<u>Megoldás:</u>
a.)
Ha $n = k^2+k$ alakú, akkor, $k^2 < n < (k+1)^2$, hiszen $(k+1)^2 = k^2+2k+1$.

$n= k^2+k$ távolsága k^2-től: k;
$n= k^2+k$ távolsága $(k+1)^2$-től: $k+1$.

Az $n= k^2+k$ alakú számokhoz tehát k^2 a legközelebbi négyzetszám. Ezért a k^2+k alakú számok nagyobbak a hozzájuk legközelebb eső négyzetszámnál. Így:

$$F(n) = F(k^2+k) = (k^2+k) - (2k-1) = k^2 - k+1$$

b.)
Ha $m = k^2 - k +1$ alakú (k > 1), akkor, $k^2 > m > (k-1)^2$, hiszen $(k-1)^2 = k^2 - 2k +1$

$m = k^2 - k+1$ távolsága k^2-től: $k-1$,
$m= k^2 - k+1$ távolsága $(k-1)^2 = k^2 - 2k +1$ -től: k.

Az $m= k - k +1$ alakú számokhoz tehát k^2 a legközelebbi négyzetszám. Ezért a $k - k +1$ alakú számok kisebbek a hozzájuk legközelebb eső négyzetszámnál. Így:

$$F(m) = F(k^2 - k+1) = (k^2 - k+1) + (2k-1) = k^2+k. \quad \square$$

B4. 4. Feladat:
Mutassuk meg, hogy a számegyenesen azok az egész számok, amelyekhez a k^2 négyzetszám esik a legközelebb, a
$[k^2 - k+1, k^2+k]$
zárt intervallumban találhatók. (A zárt intervallumba az intervallumot határoló számok is beletartoznak.) Nevezzük ezt az intervallumot a k^2 négyzetszám „hatáskörének”.

Megoldás:
Mint B4. 3. Feladatnál előbb láttuk a $(k^2 - k +1)$ alakú számokhoz, és a $(k^2 + k)$ alakú számokhoz is, a közéjük eső k^2 négyzetszám van a legközelebb.

Egy rögzített k esetén, pedig a $(k^2 - k +1)$, és a $(k^2 + k)$ kételemű ciklus tagjai közé eső számok még közelebb vannak a k^2-négyzetszámhoz, mint a kételemű ciklus tagjai, és még távolabb a szomszédos négyzetszámoktól.

Viszont $(k^2 - k +1) - 1$ szám már közelebb van a $(k-1)^2$ négyzetszámhoz, mint a k^2

négyzetszámhoz, mivel:

$$(k^2 - k +1) - 1 = (k-1)^2 + (k-1)$$

$$(k^2 - k + 1) - 1 = k^2 - k$$

$(k^2 + k) +1$ pedig már a $(k + 1)^2$ négyzetszámhoz van közelebb, mint a k^2

négyzetszámhoz, mivel:

$$(k^2+k)+1 = (k+1)^2 - k$$

$$(k^2 +k)+ 1 = k^2 + (k+1) \quad \square$$

Következmény:

a.)
Ha n nagyobb, mint a hozzá legközelebb eső k^2 négyzetszám, és nem egyenlő a k^2+k –val a $(k^2+k$, és $k^2- k +1)$ két elemű ciklus tagjával, akkor n a (k^2 ,k^2+k) nyílt intervallum tagja: $k^2 < n < k^2+k$, így n-t felírhatjuk a következő alakban:

$$n = k^2 + r, (0 < r < k)$$

b.)
Ha n kisebb, mint a hozzá legközelebb eső k^2 négyzetszám, és nem egyenlő a k^2-k+1 –el, a $(k^2+k$, és $k^2- k +1)$ két elemű ciklus tagjával, akkor n a $(k^2 ,k^2- k+1)$ nyílt intervallum tagja: $k^2-k+1 < n < k^2$, így n-t felírhatjuk a következő alakban:

$$n = k^2 - r, (0 < r < k-1)$$

B4. 5. Feladat
Bizonyítsuk be, hogy ha a B4. 1. Példa szabályai szerint képzett lánc nem négyzetszámból, vagy a kételemű ciklust alkotó $(k^2- k+1)$ és $(k^2 + k)$ alakú szám-párok egyik tagjából indul ki, és a kezdőpontul választott n pozitív egész szám nagyobb a hozzá legközelebb eső négyzetszámnál, akkor n-ből szigorúan monoton csökkenő lánc keletkezik. Ha a kiindulásul vett n szám és a hozzá legközelebbi négyzetszám távolsága nagyobb, mint 1, a lánc kételemű ciklusba fut bele. Ha n és a hozzá legközelebbi négyzetszám távolsága 1, akkor leérünk az 1-ig.

Megoldás:

A vizsgált helyzetben n nem tagja kételemű ciklusnak, és nagyobb, mint a hozzá legközelebb elő négyzetszám, ezért:

$$n = k^2 + r, (0 < r < k)$$

alakba írható.

Mivel n nagyobb, mint a hozzá legközelebb eső k^2 négyzetszám, n-ben a számlánc csökken:

$$n= k^2 + r > F(n)= F (k^2+r) = k^2 + r-(2k - 1) = (k -1)^2+ r .$$

Vajon hány tagon át csökken az n számból induló lánc?

Ha $r = k–1$, akkor $F(n) = (k–1)^2 + (k–1)$, egy kételemű ciklus tagja.

Ha $r < k–1$, akkor

$$(k–1)^2 < (k–1)^2+r < (k–1)^2+(k–1)$$

$F(n)= (k–1)^2+ r$ is nagyobb a hozzá legközelebb eső négyzetszámnál, a lánc továbbra is csökken.

A második lépés után kapott szám: $(k–2)^2+r$. Ha $r = k–2$ két elemű ciklusba léptünk.
Ha $r < k-2$, a lánc tovább csökken.

A $k-r$ -ik, lépés után kapott szám: $(k-(k–r))^2 + r = r^2+r$

Tehát, ha $r > 1$, akkor a $k-r$-ik lépésben egy kételemű ciklus nagyobbik tagjára lépünk, kételemű ciklusba keveredünk.

Ha $r =1$, $r^2+r =2$.
Mivel $F(2) = 2-(2–1)= 1$ (hiszen a 2-höz legközelebbi négyzetszám az 1), a lánc leér az 1-hez. □

B4. 6. Feladat
Bizonyítsuk be, hogy ha a B4. 1. Példa szabályai szerint képzett lánc, nem négyzetszámból, vagy kételemű ciklust alkotó, $(k^2- k+1)$ és $(k^2+ k)$ alakú szám-pár egyik tagjából indulunk ki, és a kezdőpontul választott pozitív egész szám, n, kisebb a hozzá legközelebb eső négyzetszámnál, akkor n-ből szigorúan monoton növő lánc fejlődik ki, mely kételemű ciklusban végződik.

Megoldás:
A vizsgált helyzetben n nem tagja kételemű ciklusnak, és kisebb, mint a hozzá legközelebb elő k^2négyzetszám, ezért n a (k^2-k+1, k^2) nyílt intervallum tagja, $k^2-k+1 < n < k^2$, így n-t felírhatjuk a következő alakban:

$$n = k^2-r \ (0 < r < k-1).$$

Mivel n kisebb a hozzá legközelebb eső négyzetszámnál, a lánc n-ben szigorúan monoton nő:

$$n= k^2-r < F(n)= n+(2k –1)= k^2-r + 2k –1= (k+1)^2 - (r+2) .$$

Vajon hány tagon keresztül növekszik még a lánc?

Megfigyelhetjük, hogy ha olyan számból indul a lánc, mely kisebb, a hozzá legközelebb álló négyzetszámnál, $n = k^2 - r\ (0 < r < k - 1)$, akkor ez a tulajdonság öröklődik a számlánc későbbi tagjaira is, (amennyiben $(r+2) < k$), a számlánc monoton nő.

Tekintsük a lánc tagjaihoz legközelebb eső négyzetszámokat. Ahogy egyesével haladunk előre a számláncban, úgy haladunk lépésről lépésre, felfelé, egyesével a négyzetszámok sorában.

Minden lépésnél eggyel hosszabb a lánc tagját tartalmazó $[\ k^2 - k + 1, k^2\ )$ intervallum, és minden lépésnél kettővel több a lánc tagjának és a hozzá tartozó négyzetszámnak a távolsága: $F(k^2 - r) = (k+1)^2 - (r+2)$. Ezért minden lépésnél 1-el közelebb kerülünk az intervallumot alulról határoló $k^2 - k + 1$ alakú számhoz.

A számítások is ezt mutatják:

$n = k^2 - r\ \ (0 < r < k - 1)$ távolsága a k^2 hatáskörét alulról határoló $k^2 - k + 1$ számtól:

$(k^2 - r) - (k^2 - k + 1) = k - r - 1.$

$F(n) = F(k^2 - r) = (k + 1)^2 - (r + 2)$ távolsága a $(k + 1)^2$ „hatáskörét" alulról

határoló $(k + 1)^2 - (k + 1) + 1$ számtól:

$(k+1)^2 - (r+2) - ((k+1)^2 - (k+1) + 1) = k - (r + 2) = k - r - 2$.

Ezt tovább folytatva, a lánc j-ik tagjának távolsága a hozzá tartozó, hozzá legközelebb eső négyzetszám hatáskörét alulról határoló számtól: $k - r - j$.

Ha $j = k - r$ ez a távolság elfogy, és a $(k-r)$ -ik lépésben rálépünk az éppen aktuális alsó határra, s ezzel kételemű ciklusba keveredtünk. □

Következmény

A k^2 és a k^2+1 alakú számokon kívül minden pozitív egész számból induló lánc kételemű ciklusban végződik.

<u>B4. 2. Feladat megoldása</u>

Miután a számegyenes minden pozitív egész számát megvizsgáltuk, megállapíthatjuk, hogy a <u>B4. 1. Példa</u> szabálya szerint képzett láncokban, a négyzetszámokon kívül nincs több olyan szám, mely önmaga rákövetkezője.

B. 5. Előre adott tulajdonságú számlánc képzése

Próbáljuk meghatározni, hogy milyen tulajdonságú halmazokhoz adhatók meg számláncok úgy, hogy az előre megadott halmazok jelentisék az egy-, és a kételemű ciklusok tagjait, az 1-hez leérő, s azután már mindig 1-et felvevő láncok elemeit?

B5. 1. Feladat

Legyen A, B, C tetszőleges természetes számokból álló halmaz, P pedig a C halmaz elemeiből úgy képzett elem-párok halmaza, hogy C minden eleme csak egy elem-párban szerepeljen.

Mutassuk meg, hogy akkor és csak akkor képezhető olyan lánc, hogy

> az egyelemű ciklusok elemeinek halmaza éppen A,
> az egyhez lefutó, s aztán már mindig egyet felvevő láncok elemeinek halmaza éppen: B,
> a kételemű ciklusok szám-párainak halmaza éppen: P,

ha a következő feltételek teljesülnek:

1.)
A és C ; az egyelemű ciklusok elemeinek halmaza és, a kételemű ciklusok elemeinek halmaza DISZJUNKT: nincs közös elemük.

2.)
Ha B, az egyhez lefutó láncok elemeinek halmaza nem üres, akkor: $f(1) = 1$, (különben nem lenne olyan szám, melyből induló lánc levezet az 1-hez, s ezután már mindig csak az 1-t venné föl).

3.)
A-nak és B-nek, az egyelemű ciklusok halmazának, és az egyhez lefutó, aztán már mindig 1-et felvevő láncok elemeinek (ha a B halmaz nem üres), mindenképpen van egy közös eleme: az 1.

4.)
B-nek és C-nek , az egyhez lefutó, aztán már mindig 1-et felvevő láncok elemeinek, és a kételemű ciklusok tagjainak nincs közös eleme.

5.)
Ha az A és C halmazok, az egyelemű ciklusok elemeinek és a kételemű ciklusok tagjainak egyesítése üres vagy az 1-es akkor, a természetes számok halmazából a B halmazt, az egyhez lefutó, aztán már mindig 1-et felvevő láncok elemeinek halmazát elhagyva nem kaphatunk egy vagy kételemű halmazt.

<u>Megoldás</u>

Legyen
$B=\{b_1, b_2, b_3\dots\}$
$P=\{ (p_1, q_1), (p_2, q_2),\dots(p_k, q_k),\dots\}$ ahol $p_k, q_k \in C$ és $p_1, q_1, p_2, q_2,\dots$ mind különböző elem

I.

A feltétel elégséges, hiszen $F(n)$ legyen így definiálva:

$F(n) = 1,$ ha $n = b_1=1$
$F(n) = b_k,$ ha $n = b_{k+1}$
$F(n) = q_k,$ ha $n = p_k$
$F(n) = p_k,$ ha $n = q_k$
$F(n) = n,$ ha $n \in A$

Ha n nem eleme az $(A \cup B \cup C)$ halmaznak; és az A és a C számok halmazának, az egyelemű , és a kételemű ciklusok halmazának egyesítése nem üres, vagy az 1-es, akkor legyen: $F(n) = c$, ahol $c\in(A \cup C)$ és $c\neq 1$.

Ha $(A\cup C)=0$, vagy az 1-es, az egyelemű , és a kételemű ciklusok halmazának egyesítése üres, vagy az 1-es, és a természetes számok N halmazából a B számok halmazát, az egyhez lefutó, aztán már mindig 1-et felvevő láncok elemeinek halmazát elhagyva nem üres halmazt kapunk: $(N\setminus B)=\{n_1,n_2,\dots \}$,akkor legyen:
$F(n_1)=n_2, F(n_2)=n_3,\dots$
Ha az $\{n_1,n_2,\dots\}$ halmaz véges, k elemű, akkor legyen: $F(n_k) = n_1$

II.

Az első négy feltétel nyilvánvalóan szükséges. Az ötödik feltétel szükségességének bizonyítása:

5.)
Ha az A és C halmazok, az egyelemű ciklusok elemeinek és a kételemű ciklusok tagjainak egyesítése üres vagy az 1-es akkor, a természetes számok halmazából a B halmazt, az egyhez lefutó, aztán már mindig 1-et felvevő láncok elemeinek halmazát elhagyva nem kaphatunk egy vagy kételemű halmazt.

Tegyük fel, hogy a számsorra vonatkozó A, és C, halmazok, az egy és a kételemű ciklusok halmazának egyesítése üres vagy az egyes. $(A \cup C) = 0$, vagy az 1.

a.)
Ha ekkor a természetes számok N halmazából a számsorra vonatkozó B halmazt az egyhez lefutó, aztán már mindig 1-et felvevő láncok elemeinek halmazát elhagyva, egyelemű halmazt kapunk— jelölje ezt az egy elemet n —, akkor csak két eset lehetséges:

$F(n) = n$, vagy $F(n)=b$ ahol $b\in B$,

Ezek szerint azonban n vagy az A halmaz eleme, az egyelemű ciklusok halmazának tagja ami most üres, vagy az 1-es; vagy a B halmaz eleme, az egyhez lefutó, aztán már mindig 1-et felvevő láncok eleme, már pedig abból indultunk ki, hogy n nem eleme B -nek, ez ellentmondás.

b.)
Tegyük fel, hogy a természetes számok halmazából a B számok halmazát, az egyhez lefutó, aztán már mindig 1-et felvevő láncok elemeinek halmazát elhagyva kételemű halmazt kaptunk. Jelölje ezt a két elemet n és k. $(N\backslash B)=\{n, k\}$.

Ekkor $F(n)$ és $F(k)$ nem lehet eleme B-nek, mert akkor n és k is eleme lenne B-nek.

$F(n)$ nem lehet egyenlő n -el, $F(k)$ k-val, mert akkor n és k az A halmaz, az egyelemű ciklusok halmazának tagja lenne, már pedig ez a feltétel szerint üres.

$F(n) = k$ és $F(k) = n$ esetén viszont n és k a C halmaz, a kételemű ciklusok szám-párai halmazának tagja lenne, márpedig a feltétel szerint ez is üres .

Tehát $F(n)$ és $F(k)$ nem értelmezhető. □

B5. 2. Feladat
Alkalmazzuk az B5. 1. Feladat eredményét! Adjunk meg három halmazt, melyek megfelelnek a B5. 1. Feladatban megadott feltételeknek, s mutassuk meg, hogy létezik olyan számlánc, hogy az A halmaz az egyelemű ciklusok elemeinek halmaza, a B halmaz az egyhez lefutó, aztán már mindig 1-et felvevő láncok elemeinek halmaza, és végül a C halmaz a kételemű ciklusok elemeinek halmaza.

B5. 3. Feladat
Legyen

A: a $(4k)$ alakú számok és az 1-es halmaza
B: a $(4k-2)$ alakú számok és az 1-es halmaza
P: a $(4k-1, 4k+1)$ alakú szám-párok halmaza
$(k=1,2,3\ldots)$

Ekkor az B5. 1. Feladatban megadott feltételek teljesülnek. Mutassuk meg, hogy létezik olyan számlánc, melyben az (A) halmaz elemei önmaguk rákövetkezői, a (B) halmaz elemeiből induló lánc vezet le az 1-ig, és utána már midig 1-et vesz föl, a (P) halmaz szám-párjai alkotnak kételemű ciklust.

Megoldás

Legyen ugyanis F így definiálva:

$F(n)=n$, ha $n=4k$
$F(n)=1$, ha $n=2,1$
$F(n)=4k-2$, ha $n=4(k+1)-2$
$F(n)=4k-1$, ha $n=4k+1$
$F(n)=4k+1$, ha $n=4k-1$
$(k=1, 2, 3\ldots)$ □

B5. 4. Feladat

Felmerülhet a kérdés, hogy meg tudnánk-e adni F-t zárt, REKÚRZIÓT nem tartalmazó alakban is.
Próbáljuk meg!

B5. 7. Feladat

Legyen

$F(n) = 1$, ha $n < 3$
$F(n) = 5$, ha $n = 3$

$F(n) = 8 \cdot \left[\frac{n+1}{4}\right] - n$, ha $n \geq 4$

(ahol $\left[\frac{n+1}{4}\right]$ jelenti $\frac{n+1}{4}$ egész részét)

Mutassuk meg, hogy a fenti szabályt követő számláncokban, a $4k$ alakú számok és az 1-es alkotnak egyelemű ciklust, a $4k-2$ alakú számokból és az 1–ből induló lánc vezet az 1-hez, és aztán már mindig csak 1-et vesz fel. Kételemű ciklust pedig a $4k+1$, $4k-1$ alakú szám-párok alkotnak.

Megoldás:

$F(n) = 1$, ha $n < 3$
$F(n) = 5$, ha $n = 3$

$F(n) = 8 \cdot \left[\frac{n+1}{4}\right] - n$, ha $n \geq 4$

(ahol $\left[\frac{n+1}{4}\right]$ jelenti $\frac{n+1}{4}$ egész részét)

A $4k$ alakúak, önmaguk rákövetkezői, mert:

$$F(4k) = 8 \cdot \left[\frac{4k+1}{4}\right] - 4k = 4k$$

A $4k–2$ alakú számokból induló láncok levezetnek az 1-hez, mert:

$$F(4k-2) = 8 \cdot \left[\frac{4k-2+1}{4}\right] - (4k-2) = 8 \cdot (k-1) - (4k-2) = 4 \cdot (k-1) - 2$$

8

A $4k–1$ és $4k+1$ alakú számok, kételemű ciklust alkotnak, mert:

$$F(4k-1) = 8 \cdot \left[\frac{4k-1+1}{4}\right] - (4k-1) = 8k - (4k-1) = 4k + 1$$

$$F(4k+1) = 8 \cdot \left[\frac{4k+1+1}{4}\right] - (4k+1) = 8k - (4k+1) = 4k-1$$

S mivel a pozitív egész számsor minden tagját felsoroltuk, rajtuk kívül, több adott tulajdonságú szám a láncban nyilvánvalóan nincsen. □

A számláncok vizsgálatának ez a fordított módja, adott tulajdonsághoz keresni számláncot, példa arra, hogy a könnyed, játékos kérdésfeltevés közelebb hozza, érthetőbbé, megfoghatóbbá teszi a problémákat, megkönnyíti a matematikai levezetések megértését, tanulását, megjegyzését.

Ahogy HOLLÓ-SZABÓ FERENC is írja:

„A lényeg, hogy a matematikát úgy kellene felfogni, mint egy természettudományt. Odamenni, megtapasztalni, kézbe venni, játszani vele.”

(UJVÁRY MENYHÁRT MÓNIKA „Játékok, és játékos feladatok matematika órán” című szakdolgozatában idézi / Témavezető: VANCSÓ ÖDÖN ELTE TTK, 2008/)

Utószó

Mint már szó volt róla, a játékra, próbálkozásokra fordított idő a tanítási órán sem veszik el. A játszó emberben óriási fizikai és szellemi energiák lépnek működésbe, és az ilyenkor megjelenő új ismeretek könnyen készséggé válnak, tartósan megmaradnak az emlékezetben.

Játék közben a gyermek hosszabb ideig képes koncentrálni, hisz a játék a gyermek életének szerves része. Egy olyan örömforrás, mely csökkenti, sőt akár teljesen meg is szüntetheti a gyermek belső feszültségét.

Platón így szólt erről: „Kerüljük a kényszert, s hagyjuk, hogy a kisgyerek örömmel tanuljon. A gyerekek játékok révén okosodnak, a kényszeres okítás nem jut el a lelkükig."

A játékokon keresztül fejlődnek ki a sikeres iskolai teljesítményhez szükséges részképességek is. Például, a fejtörők segíthetnek a gondolkodást gátló jelenségek kiküszöbölésében, e gátak: a kapkodás, a szűklátókörűség és a szétszórtság. A különféle logikai feladványokban sok lehetséges változatot kell végiggondolni, mire eljutunk a megoldásig. Ennek hatására a személyiség nyitottabb lesz, a szűklátókörűség csökken.

Ha nincs tervünk, nem látjuk tisztán a célt és az irányt, akkor gondolkodásunk esetlegessé válik. A különféle logikai játékok és fejtőrök segítik a stratégiai gondolkodás kialakítását, a szétszórtság mérséklését, a kapkodás megszüntetését.

Emellett a logikai fejtőrök – még ha észrevétlenül is – a matematika eszköztárára támaszkodnak, így a matematikai gondolkodást is fejlesztik. Különösen a „Tegyük fel, hogy..." jellegű bizonyításokkal való megismerkedés és azok elsajátítása hasznos a matematikában gyakran használt indirekt bizonyítási módszerek (illetve a teljes indukció) megértése szempontjából.

Ezen felül, a játék felszabadítja a gondolkodást. A játék során megszokott kötetlen, vad meglepő ötletekkel való dobálózás nélkül nem lehet eredményesen feladatokat oldani. A matematika hatékony tanulásának folyamán ugyanúgy, mint játék közben, önállóságra, kezdeményezőkészségre, a megszokott sablonok felrúgására, új utak keresésére van szükség. Hisz a matematika feladatok egymásutánja. A feladatmegoldás pedig játék, próbálkozások sora. Hiszen a megoldás keresése azt jelenti, hogy sok oldalról közelítünk a rejtélyhez. Az ismeretlent a valóság több pontja felől vizsgálva, millióféleképpen illesztjük tapasztalataink közé. Kulcsként illesztjük hozzá bevált eszközeinket, módszereinket.

Új utakat keresünk …

Irodalom jegyzék:

[1]
PÉTER RÓZSA: Játék a végtelennel
Tankönyvkiadó 1977

[2]
DR. MOSONYI KÁLMÁN: Gondolkodási hibák
Tankönyvkiadó 1971

[3]
BÉNDEK KATALIN: Játék a hittanórán?
http://www.lutheran.hu/ujsagok/lelkipasztor/l961213.htm

[4]
ROBERT FISHER: Tanítsuk gyermekeinket gondolkodni játékokkal!
Műszaki Kiadó, Budapest,2007.

[5]
PÁLFALVI JÓZSEFNÉ: Barátkozzunk a számokkal
Tankönyvkiadó 1990

[6]
SÁRKÖZI ANDRÁS — SURÁNYI JÁNOS: Számelmélet-feladatgyűjtemény
Tankönyvkiadó 1986

[7]
TÖRÖK JUDIT: A Fibonacci-sorozat
Tankönyvkiadó 1984

[8]
DR. LÉVÁRDI LÁSZLÓ — SAIN MÁRTON: Matematika történeti feladatok
Tankönyvkiadó 1982

[9]
M. D. HIRSCH, ADDITIVE SEQUENCES, MATH, Mag.,50(1977),262.o
DR. KISS PÉTER hivatkozik rá „Közös elemek másodrendű rekurzív sorozatokban” című cikkében, mely az Egri HO SI MINH Tanárképző Főiskola XVI. Tudományos közleményében jelent meg. Eger, 1982.

[10]
UJVÁRY-MENYHÁRT MÓNIK: Játékok és játékos feladatok a matematika órán
(diplomamunka, Témavezető: DR. VANCSÓ ÖDÖN ELTE TTK, 2008)

[11]
GYARMATI EDIT — TURÁN PÁL: Algebra és számelmélet
Tankönyvkiadó 1988

[12]
ORTHMAYR FLÓRA: A tökéletes számok és társaik
(BSC szakdolgozat, Témavezető: DR. FREUD RÓBERT 2012)

[13]
D. O. SKLAJRSZKIJ — N. N. CSENCOV — I. M. JAGLOM: Válogatott feladatok és tételek, az elemi matematika köréből 1.
Tankönyvkiadó 1979

[14]
DR TÓTH LÁSZLÓ: Fejezetek az elemi számelméletből és az algebrából
(PTE TTK, 2010)

[15]
LUKÁCS ERNŐNÉ — TARJÁN REZSŐNÉ: Játékos matematika
Gondolat, 1975

FÜGGELÉK

1. LIUVILLE –*tétele:*

Bizonyítsuk be, hogy nem létezik olyan 5-nél nagyobb p prímszám, és olyan m természetes szám, melyre $(p-1)!+1=p^m$

1\. 1. SEGÉDTÉTEL :

Bizonyítsuk be, hogy ha az m természetes szám, 4-től különböző összetett szám, akkor $(m-1)!=(m-1)(m-2)\ldots 1$ osztható m -mel

(és ha $m=4$, akkor $(m-1)!=3\cdot 2\cdot 1$ osztható 2 –vel)

BIZONYÍTÁS:

Legyen m legkisebb prímosztója p.

A.)

Tegyük fel először, hogy $m\neq p^2$. Ekkor innen következik, hogy az m összetett számnak létezik p-nél nagyobb prímosztója, ezért $p<\frac{m}{p}$ továbbá, nyílván $\frac{m}{p}\leq(m-1)$, így p és $\frac{m}{p}$ tényezőnként szerepel az $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(m-1)$ szorzatban (és a két szám egymástól különbözik), tehát a szorzat osztható $p\bullet\frac{m}{p}=m$ -mel.

B.)

Legyen most $m=p^2$ ahol $p>2$

Ha $p>2$ akkor $p<2p<p^2=m$, és ez más jelöléssel: $p<2p\leq p^2-1$

Tehát az $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(m-1)$ szorzatban tényezőként szerepel p és $2p$ is, és így a szorzat osztható $p\cdot p=p^2=m$ –mel.

Végül könnyen ellenőrizhető, hogy az $m=2^2=4$ esetén, ha $(m-1)!$ -t elosztjuk m –el , maradékul kettőt kapunk. □

<u>LIUVILLE –tételének BIZONYÍTÁSA:</u>

Tegyük fel indirekten, hogy valamely p, 5 -nél nagyobb prímszámra és m természetes számra $(p-1)!+1=p^m$ teljesül.

Mivel $p>5$, és p páratlan, $(p-1)$ nyílván 4 -nél nagyobb páros összetett szám: $(p-1)\geq 6$.

Tehát alkalmazhatjuk 1. 1. segédtételünket.
Az 1. 1. segédtétel szerint $(p-1)$ osztója $(p-2)!$ -nak, és így $(p-1)^2$ osztója $(p-1)!$ –nak.

A feltételezés szerint $(p-1)! = P^m - 1$

Ebből:
$(p-1)! = P^m - 1 = (p-1)(p^{m-1} + p^{m-2} + \ldots + p + 1)$
osztható $(p-1)^2$ –el.

Innen következik, hogy $p^{m-1} + p^{m-2} + \ldots + p + 1$ osztható $(p-1)$ -el.

p^2 osztva $(p-1)$ -el 1 maradékot ad, hiszen: $p^2 = ((p-1)+1)^2 = (p-1)^2 + 2(p-1) + 1$

Hasonlóan látható, hogy az $(p^{m-1} + p^{m-2} + \ldots + p + 1)$ összeg tagjai mind külön-külön 1 maradékot adnak $(p-1)$ –el osztva.

Mivel az összeg osztható $(p-1)$ -el, és mind az m darab tagja , külön-külön 1 maradékot ad $(p-1)$ -el osztva, kell, hogy m is osztható legyen $(p-1)$ -el. Tehát kell, hogy $m \geq (p-1)$ teljesüljön.

Így $(p-1)!+1 = p^m \geq p^{p-1} \geq (p-1)^{p-1} > (p-1)!+1$ következik, tehát ellentmondásra jutottunk.

(Részletesen:

$p^{p-1} = ((p-1)+1)^{P-1} = (p-1)^{p-1} + \binom{p-1}{1}(p-1)^{p-2} + \ldots + (p-1) + 1 > (p-1)^{p-1} + 1$

$(p-1)^{p-1} + 1 > (p-1)! + 1 = (p-1)(p-2)\ldots \cdot 1 + 1$) □

2. A DIRICHLET – tétel speciális esete:

2. 1. Tétel: Az $u^{L}\cdot k+1$ $(k=1,\ 2\ldots\ j),\ u$ prím, számtani sorozatban végtelen sok prímszám van.

Definíció:
Az $f(x)$ egész együtthatós polinom prímosztójának nevezzük a p prímszámot akkor, ha van olyan k egész szám, hogy $f(k)$ osztható p -vel.

2. 1. Segédtétel:

Tekintsük a következő polinomot:

$$f(x)=\frac{x^{u^{L}}-1}{x^{u^{L-1}}-1}=\frac{\left(x^{u^{L-1}}\right)^{u}-1}{x^{u^{L-1}}-1}=(x\,u^{L-1})^{u-1}+(x\,u^{L-1})^{u-2}+\ldots+x\,u^{L-1}+1$$

/ Az $(a^{n}-1)=(a-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+\ldots+a+1)$ összefüggés segítségével kiküszöböltük a törtvonalat./

Ha p az $f(x)$ polinom egy prímosztója, vagyis létezik olyan n, pozitív egész szám, hogy az $f(n)$ szám osztható p-vel, akkor vagy $p=u$, vagy $(p-1)$ osztható u^{L} -el.

Bizonyítás

Tegyük fel, hogy az $x=n$,(n pozitív egész szám), helyettesítéssel kapott $f(n)=\frac{n^{u^{L}}-1}{n^{u^{L-1}}-1}$ szám osztható p –vel.

I,
Tegyük fel, hogy $\left(n^{u^{L-1}}-1\right)$ nem osztható p-vel

Ekkor, mivel $f(n)=\frac{n^{u^{L}}-1}{n^{u^{L-1}}-1}$ osztható p-vel, és $\left(n^{u^{L-1}}-1\right)$ nem osztható p-vel, kell hogy $\left(n^{u^{L}}-1\right)$ osztható legyen p-vel.

Más szóval $n^{u^{L}}$ kell, hogy 1-et adjon maradékul p-vel osztva. Így n és p relatív prímek, jelöléssel: $(n,\ p)=1$.

Mint már szó volt róla, a kis FERMAT–tétel alapján, ha $(n,\ p)=1$ akkor $(n^{p-1}-1)$ osztható p-vel.

Tehát $\left(n^{u^L}-1\right)$ és $(n^{p-1}-1)$ is osztható p-vel.

Vajon van-e valamilyen kapcsolat a két kitevő, u^L és $p-1$ között?

Definíció:
Ha (b^k-1) osztható p -vel, de minden $\beta < k$ esetén β –ra: $(b^\beta-1)$ nem osztható p –vel, akkor a k számot a b szám rendjének nevezzük, p -re vonatkoztatva.

2. 2. Segédtétel:
Ha b^k-1 osztható p –vel, akkor
$(b^k)^J-1$ is osztható p –vel. (j pozitív egész szám)

Bizonyítás:
Ez nyilvánvaló, hiszen $(b^k)^J-1=(b^k-1)\,((b^k)^{J-1}+(b^k)^{J-2}+\ldots+b^k+1)$ □

2. 3. Segédtétel:
Ha a b szám rendje k, és (b^m-1) osztható p -vel, akkor k osztója m -nek.

Bizonyítás:
Tegyük fel az állítással ellentétben, hogy k nem osztója m -nek.

Ekkor m a következő alakba írható: $m = k\cdot q + r$, ahol $r < k$

$b^m-1=(b^k)^q\cdot b^r-1$

b^k-on 1 -et ad maradékul p -vel osztva.

Így $(b^k)^q$ is 1 -et ad maradékul p -vel osztva.

Ezért $b^m=(b^k)^q\cdot b^r$ ugyanakkora maradékot ad p -vel osztva, mint b^r.

Így abból, hogy p osztója $b^m-1=(b^k)^q\cdot b^r-1$ -nek következik, hogy p osztója (b^r-1) -nek. Ez azonban $0 < r < k$ miatt ellentmond annak, hogy b rendje k. □

Most térjünk vissza az 2. 1. Segédtétel bizonyításához:

Jelöljük a-val az n szám p-re vonatkozó rendjét.

$\left(n^{u^L}-1\right)$ osztható p-vel. Ezért a osztója (u^L)-nek.

Azonban a nem lehet valódi osztója u^L-nek, ugyanis, ha az lenne, akkor u prím volta miatt $a = u^j$ osztója lenne u^{L-1}-nek is. Ez pedig, azt jelentené, hogy $\left(n^{u^{L-1}}-1\right)$ is osztható lenne p -vel, ami ellentmond kiindulási feltételünknek.

Ezért az I. kiindulási feltételek esetén csak $a = u^L$ lehetséges, u^L az n szám rendje p-re vonatkozólag.

Az I. kiindulási feltételek mellett n és p relatív prímek, ezért a kis FERMAT–tétel alapján, $(n^{p-1} - 1)$ osztható p-vel.

Ezért u^L -ra az n szám p-re vonatkozó rendjére fennáll, hogy u^L osztója $(p-1)$-nek.

II

Tegyük fel, hogy $\left(n^{u^{L-1}}-1\right)$ osztható p -vel.

Ekkor :

$$\left(n^{u^{L-1}}-1\right) = p^{\beta}\cdot t \quad (t, p) =1, \quad \beta \geq 1$$

$$n^{u^{L-1}} = 1 + p^{\beta}\cdot t \quad (t, p) =1, \quad \beta \geq 1$$

/ Felhasználva a binomiális tételt:
$(1+ p^{\beta} \cdot t)^{u} = 1^{u} + \binom{u}{1} p^{\beta} \cdot t + \binom{u}{2} (p^{\beta} \cdot t)^{2} + \ldots + (p^{\beta} \cdot t)^{u}$ /

$$f(n) = \frac{n^{u^L}-1}{n^{u^{L-1}}-1} = \frac{\left(n^{u^{L-1}}\right)^{u}-1}{n^{u^{L-1}}-1} = \frac{(1+p^{\beta}\cdot t)^{u}-1}{p^{\beta}\cdot t} = u + p^{\beta}\cdot S$$

alakba írható, ahol S egész szám.

$f(n) = \frac{n^{u^L}-1}{n^{u^{L-1}}-1}$ osztható p-vel, tehát $f(n)=(u + p^{\beta}\cdot S)$ is osztható p -vel.

Mivel $p^{\beta}\cdot S$ osztható p -vel ,($\beta \geq 1$) miatt , kell, hogy u is osztható legyen p-vel.

u és p felbonthatatlan voltából következik, hogy ez csak úgy lehetséges, ha $p=u$. □

A 2.1 tétel bizonyítása:

2.1. Tétel:
Az $u^L \cdot k+1$ $(k=1, 2\ldots j)$, u prím, számtani sorozatban végtelen sok prímszám van.

Bizonyítás:
Tegyük fel az állítással ellentétben, hogy csak véges sok $(u^L \cdot k+1)$ alakú prímszám létezne, és ezek lennének: $p_1, p_2\ldots p_r$

Tekintsük az $f(x)=\frac{x^{u^L}-1}{x^{u^{L-1}}-1}$ polinomot az $x = u \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot\ldots\cdot p_r$ helyen:

$$f(x)=\frac{x^{u^L}-1}{x^{u^{L-1}}-1}=\frac{\left(x^{u^{L-1}}\right)^u-1}{x^{u^{L-1}}-1}=\frac{\left(x^{u^{L-1}}-1\right)\cdot\left(\left(x^{u^{L-1}}\right)^{u-1}+\left(x^{u^{L-1}}\right)^{u-2}+\cdots+\left(x^{u^{L-1}}\right)+1\right)}{x^{u^{L-1}}-1}=$$

$$=\left((u\cdot p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_r)^{u^{L-1}}\right)^{u-1}+\cdots+(u\cdot p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_r)^{u^{L-1}}+1$$

Látható, hogy az $f(u \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot\ldots\cdot p_r)$ szám nem osztható u-val, és nem osztható p_i –vel $i=1, 2,\ldots r$ sem.

Tehát az $f(u \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot\ldots\cdot p_r)$ szám prímosztói között az $u, p_1, p_2, \ldots p_r$ prímek egyike sem szerepel.

Minden számnak van prímosztója, legyen p az $f(u \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot\ldots\cdot p_r)$ szám egy prímosztója.

Ismertes, hogy az $f(x)$ egész együtthatós polinom prímosztójának nevezzük a p prímszámot akkor, ha van olyan k egész szám, hogy az $f(k)$ szám osztható p -vel.

Tehát ekkor az $f(u \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot\ldots\cdot p_r)$ szám minden p prímosztója, egyben az

$f(x)=\frac{x^{u^L}-1}{x^{u^{L-1}}-1}$ polinomnak is prímosztója.

Ezért alkalmazhatjuk segédtételünket:

Alkalmazhatjuk segédtételünket:

2. 1. Segédtétel:
Tekintsük az $f(x) = \frac{x^{u^L}-1}{x^{u^{L-1}}-1}$ polinomot. Ha p az $f(x)$ polinom egy prímosztója, , akkor vagy $p=u$, vagy u^L osztója $p-1$-nek.

$f(u \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r)$ nem osztható u-val, ezért $f(u \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r)$ p-vel jelölt osztója nem lehet egyenlő u-val, $p \neq u$, ezért u^L osztója $p-1$-nek.

Ezért:

$$k \cdot u^L = (p-1)$$

Tehát:

$$p = k \cdot u^L + 1$$

alakú prím.

Mivel $p \neq p_i$ $(i=1, 2\ldots r)$, ez ellentmond azon feltevésünknek, hogy p_i $(i=1, 2\ldots r)$ az összes $k \cdot u^L + 1$ alakú prím. Tehát a $p = k \cdot u^L + 1$ alakú prímszámok száma végtelen.

□

3. TÉTEL: CSEBISEV tétel:
Legyen $n>1$ egész. Az $(n, 2n)$ nyílt intervallumba mindig esik prímszám.

3.1. Segédtétel
Az $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1$ pozitív egész szám prímtényezős felbontásában minden n-nél nem nagyobb prímszám szerepel. A felbontásban szereplő p prímszám kitevőjét megkapjuk, ha összeadjuk a következő egész számokat $\alpha_p = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \ldots$, ahol $\left[\frac{n}{p}\right]$ jelenti $\frac{n}{p}$ egészrészét. Ez csak akkor nagyobb 0-nál, ha n nagyobb, mint p.

Ugyanez matematikai jelekkel leírva:

$$n! = \prod_{p \leq n} p^{\propto_p}$$

ahol,

$$\propto_p = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^k}\right]$$

Ez a LEGENDRE–formula.

Bizonyítás:
Megjegyezzük, hogy az α_p-t előállító összeg véges sok tagot tartalmaz. Ugyanis azon tagok értéke 0, melyekben $p^k > n$.

Most rátérünk a bizonyításra:

Legyen p egy tetszőleges n-nél nem nagyobb rögzített prím. Ahhoz, hogy p kitevőjét az n! szám prímtényezős felbontásában meghatározzuk, először is meg kell vizsgálni, hogy az $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ szorzat tényezői között melyek azok, amelyek p-vel oszthatók.

Ezek nyílván a következők:
$p, 2p, \ldots, \left[\frac{n}{p}\right] \cdot p$

Mivel az n! szorzat olyan tényezői, amelyek p-vel nem oszthatók, a későbbiekben sem játszanak szerepet, ezek szorzatát röviden A_1-el jelöljük.

Így az n! szám a következő alakba írható:
$n! = p \cdot 2p \cdot \ldots \cdot \left[\frac{n}{p}\right] \cdot p \cdot A_1$

Kiemelve a p-vel osztható tényezők mindegyikéből p-t:
$n! = p^{\left[\frac{n}{p}\right]} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot \left[\frac{n}{p}\right] \cdot A1$
alakra jutunk.

Természetesen az $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot \left[\frac{n}{p}\right]$ számok között, $\left[\frac{n}{p}\right] \geq p$ esetén ismét lesznek olyanok, amelyek p-vel oszthatók, éspedig ezek:

$$p, 2p, \ldots, \left[\frac{\left[\frac{n}{p}\right]}{p}\right] \cdot p$$

Mivel az $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot \left[\frac{n}{p}\right]$ szorzat p-vel nem osztható, tényezői a továbbiakban nem játszanak szerepet, ezek szorzatát A_2-vel jelöljük.

Így az n! szám következő előállításához jutunk:

n!= $p^{\left[\frac{n}{p}\right]} \cdot p \cdot 2p \cdot \ldots \cdot \left[\frac{\left[\frac{n}{p}\right]}{p}\right] p \cdot A_1 \cdot A_2$

Most kiemeljük a p-vel osztható tényezők mindegyikéből a p számot. Ekkor azt nyerjük, hogy

n! = $p^{\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{\left[\frac{n}{p}\right]}{p}\right]} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot \left[\frac{\left[\frac{n}{p}\right]}{p}\right] \cdot A_1 \cdot A_2$

<u>3. 1 segédtétel, segédtétele:</u>

$$\left[\frac{[\mathrm{a}]}{\mathrm{b}}\right] = \left[\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}\right]$$

ahol, a, b ≥ 0 , és b egész szám.

<u>Bizonyítás:</u>

$$\left[\frac{a}{b}\right] = \left[\frac{[a]+\{a\}}{b}\right] = \left[\left[\frac{[a]}{b}\right] + \left\{\frac{[a]}{b}\right\} + \frac{\{a\}}{b}\right] = \left[\frac{[a]}{b}\right] + \left[\left\{\frac{[a]}{b}\right\} + \frac{\{a\}}{b}\right]$$

$[a] = k \cdot b + r$, ahol k, b, r egész számok, és $b > r \geq 0$

$$\left\{\frac{[a]}{b}\right\} = \left\{\frac{k \cdot b + r}{b}\right\} = \frac{r}{b}$$

$$\left[\left\{\frac{[a]}{b}\right\} + \frac{\{a\}}{b}\right] = \left[\frac{r}{b} + \frac{\{a\}}{b}\right]$$

Mivel r < b és r is, b is egész számok, és $\{a\} < 1$: r + $\{a\}$ < b □

$\left[\frac{[a]}{b}\right] = \left[\frac{a}{b}\right]$ összefüggés felhasználásával n! a következő alakba írható:

$$n! = p^{\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{\left[\frac{n}{p}\right]}{p}\right]} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot \left[\frac{\left[\frac{n}{p}\right]}{p}\right] \cdot A_1 \cdot A_2 = p^{\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot \left[\frac{n}{p^2}\right] \cdot A_1 \cdot A_2$$

Az eljárást addig folytatjuk, amíg az n! szám a következő alakban áll elő,

$$n! = p^{\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\cdots+\left[\frac{n}{p^k}\right]+\cdots} \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_k \cdot \ldots$$

ahol már az Ai tényezők egyike sem osztható p-vel.

Nyilvánvaló, hogy véges sok lépés után ez bekövetkezik, ugyanis az $n!=n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 1$ szorzat azon tényezői, amelyekből p-t kiemeltük, a kiemelés után szigorúan csökkentek, tehát véges sok lépés után a legnagyobb ilyen tényező is p-nél kisebb pozitív egész szám, tehát már nem lehet p-vel osztható.

Így rögzített p-re, a p kitevője, αp, az n! szám prímtényezős felbontásában:

$$\alpha_p = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^k}\right]$$

□

<u>3.2.segédtétel</u>:
Tetszőleges x > 0 számra, az x-nél kisebb pozitív prímek szorzata kisebb, mint 4^x. Jelöléssel :

$$\prod_{p\leq x} p < 4^x$$

<u>Bizonyítás:</u>

1, Legyen n pozitív egész szám. Bizonyítjuk, hogy

$$\prod_{p\leq x} p < 4^x$$

(p > 0)

Teljes indukciót alkalmazunk.

a.) n=1, 2, 3-ra a Tétel nyilván igaz.

b.) Tegyük fel, hogy igaz a tétel az 1, 2, 3, …, m számok mindegyikére, (ahol m tetszőleges, pozitív, egész szám). Bizonyítani akarjuk, hogy a tétel igaz m+1-re is.

Különválasztjuk, az m páros, és az m páratlan eseteket.

α.) Legyen m páratlan. m= 2k–1 ≥ 3

Az indukciós felevés szerint:

$$\prod_{p\leq m} p = \prod_{p\leq 2k-1} p < 4^{2k-1}$$

Mivel

m+1 = 2k ≥ 4

, tehát az m+1 páros szám 2-nél nagyobb, vagyis nem lehet prímszám, ezért:

$$\prod_{p\leq m+1} p = \prod_{p\leq 2k} p = \prod_{p\leq 2k-1} p$$

Az indukciós feltétel szerint:

$$\prod_{p\leq 2k-1} p < 4^{2k-1}$$

Így ezt felhasználva:

$$\prod_{p\leq m+1} p = \prod_{p\leq 2k} p = \prod_{p\leq 2k-1} p < 4^{2k-1}$$

Tehát, ha m páratlan, akkor a tétel m+1-re igaz.

β.) Legyen m páros, m =2k

Az indukciós feltevés szerint:

$$\prod_{p\le m} p = \prod_{p\le 2k} p \le 4^{2k}$$

Különválasztjuk, a k+1-nél kisebb, és a k+1 és k+2 közé eső prímeket:

$$\prod_{p\le m+1} p = \prod_{p\le 2k+1} p = \prod_{p\le k+1} p \cdot \prod_{k+2\le\, p\le 2k+1} p$$

Mivel k+1 ≤ 2k, az indukciós feltevés szerint:

$$\prod_{p\le k+1} p < 4^{k+1}$$

Vizsgáljuk most meg a k+2 és a 2k+1 közé eső prímek szorzatát. A $\binom{2k+1}{k}$ binomiális együttható egész szám. $\binom{2k+1}{k} = \frac{(2k+1)\cdot(2k)\cdot\,\ldots\,\cdot(k+2)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}$ számlálójában a 2k+1 ≤ p ≤ k+2 prímek mindegyike szerepel, de nevezőjében ezen prímek egyike sem szerepel. Tehát ezen prímek egyikével sem lehet egyszerűsíteni, és így a $\binom{2k+1}{k}$ egész szám osztható ezen prímek mindegyikével, azaz szorzatával is.

Ebből

$$\prod_{k+2\le\, p\le 2k+1} p \le \binom{2k+1}{k} \qquad \text{következik.}$$

Másrészt: $\binom{2k+1}{k} = \binom{2k+1}{k+1}$ hiszen 2k+1-ből k számot ugyanannyiféleképpen tudunk kiválasztani, mint k+1 számot.

Ezenkívül, mint ismeretes, a binomiális tételből adódik:

$$\binom{2k+1}{k} + \binom{2k+1}{k+1} < \sum_{\gamma=0}^{2k+1} \binom{2k+1}{\gamma} = (1+1)^{2k+1}$$

Tehát:

$$\prod_{\mathbf{k+2\,\le\, p\le\, 2\,k+1}} \mathbf{p} \le \binom{\mathbf{2k+1}}{\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\cdot\left\{\binom{\mathbf{2k+1}}{\mathbf{k}} + \binom{\mathbf{2k+1}}{\mathbf{k+1}}\right\} < \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\cdot\sum_{\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{0}}^{\mathbf{2k+1}} \binom{\mathbf{2k+1}}{\boldsymbol{\gamma}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\cdot(\mathbf{1}+\mathbf{1})^{\mathbf{2k+1}} = \mathbf{2}^{\mathbf{2k}} = \mathbf{4}^{\mathbf{k}}$$

Röviden:

$$\prod_{k+2\leq p\leq 2k+1} p \leq \binom{2k+1}{k} < 4^k$$

Az indukciós feltevés szerint, mint már szó volt róla:

$$\prod_{p\leq k+1} p < 4^{k+1}$$

Így végül:

$$\prod_{p\leq m+1} p = \prod_{p\leq 2k+1} p < 4^{k+1}\cdot 4^k = 4^{2k+1}$$

Tehát a tétel igaz m+1-re is.

Ezzel indukciós bizonyításunk befejeztük, tehát a segédtételt egész n-re bizonyítottuk.

2,)

Legyen most x tetszőleges pozitív valós szám. x egészrészére, [x], adódik:

$$\prod_{p\leq x} p = \prod_{p\leq [x]} p < 4^{[x]} \leq 4^x$$

Így segédtételünket teljes egészében bebizonyítottuk. □

3.1 TÉTEL: CSEBISEV tétel:

Legyen $n>1$ egész. Az $(n, 2n)$ nyílt intervallumba mindig esik prímszám.

Bizonyítás:

a.)

Tekintsük, az $n+1$ és $2n$ közé eső prímek szorzatát:

$$\mathbf{A} = \prod_{\mathbf{n+1 \le p \le 2n}} \mathbf{p}$$

Erről azt fogjuk bebizonyítani, hogy nem üres, azaz $A > 1$

Először is bebizonyítjuk, hogy A osztója $\binom{\mathbf{2n}}{\mathbf{n}} = \frac{(\mathbf{2n})\cdot(\mathbf{2n-1})\cdot\ldots\cdot(\mathbf{n+1})}{\mathbf{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}}$ egész számnak.

A számlálóban A minden tényezője szerepel, de a nevezőjében egyik sem.

b.)

Adjuk meg $\binom{\mathbf{2n}}{\mathbf{n}}$ prímtényezős előállítását! Mivel $\binom{\mathbf{2n}}{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{2n!}}{(\mathbf{n!})^2}$, alkalmazzuk a LEGENDRE féle formulát a faktoriálisak prímtényezős előállítására. (első segédtétel). Eszerint:

$$\binom{\mathbf{2n}}{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{2n!}}{(\mathbf{n!})^2} = \prod_{\mathbf{p \le 2n}} \mathbf{p}^{\boldsymbol{\alpha}_\mathbf{p}} \qquad \text{ahol} \qquad \boldsymbol{\alpha}_\mathbf{p} = \sum_{\mathbf{k=1}}^{\infty}\left(\left[\frac{\mathbf{2n}}{\mathbf{p^k}}\right] - \mathbf{2}\cdot\left[\frac{\mathbf{n}}{\mathbf{p^k}}\right]\right)$$

Az α_p összeg tulajdonképpen csak véges sok tagból áll, ugyanis, ha $p^k > 2n$, akkor $\left[\frac{2n}{p^k}\right] = 0$

Tetszőleges valós x-re: $0 \le [2x] - 2[x] \le 1$, ahol, $[x]$, x egészrésze , $\{x\}$, x törtrésze, hiszen:

$$[2x] = [\,2[x] + 2\{x\}\,] = 2[x] + [2\{x\}]$$

$$\text{és } \{x\} < 1$$

$$\text{ezért } 2\{x\} < 2,$$

$$\text{így } [2\{x\}] \le 1$$

Az $0 \le [2x] - 2[x] \le 1$ összefüggést $\frac{\mathbf{n}}{\mathbf{p^k}}$-ra alkalmazva: $\mathbf{0} \le \left[\frac{\mathbf{2n}}{\mathbf{p^k}}\right] - \left[\frac{\mathbf{n}}{\mathbf{p^k}}\right] \le \mathbf{1}$

Tehát, ha az $\boldsymbol{\alpha}_\mathbf{p} = \sum_{\mathbf{k=1}}^{\infty}\left(\left[\frac{\mathbf{2n}}{\mathbf{p^k}}\right] - \mathbf{2}\left[\frac{\mathbf{n}}{\mathbf{p^k}}\right]\right)$ összegben a tagok száma θ_p , akkor $\alpha_p \le \theta_p$

$\mathbf{p^{\theta_p} \leq 2n \leq p^{\theta_p+1}}$ miatt: $\mathbf{p^{\alpha_p} \leq p^{\theta_p} \leq 2n < p^{\theta_p+1}}$, vagyis: $\mathbf{p^{\alpha_p} \leq 2n}$

$\binom{\mathbf{2n}}{\mathbf{n}}$ prímtényezős felbontását három olyan tényezőre bontjuk fel, melyek közül az egyikben az A-beli prímek szerepelnek.

$$\binom{\mathbf{2n}}{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{2n!}}{(\mathbf{n!})^2} = \prod_{\mathbf{p \leq 2n}} \mathbf{p^{\alpha_p}} \qquad \textbf{ahol} \qquad \boldsymbol{\alpha}_\mathbf{p} = \sum_{\mathbf{k=1}}^{\infty} \left(\left[\frac{\mathbf{2n}}{\mathbf{p^k}} \right] - \mathbf{2} \cdot \left[\frac{\mathbf{n}}{\mathbf{p^k}} \right] \right)$$

$$\mathbf{B} = \prod_{\mathbf{p \leq \sqrt{2n}}} \mathbf{p^{\alpha_p}}$$

$$\mathbf{C} = \prod_{\mathbf{\sqrt{2n}+1 \leq p \leq n}} \mathbf{p^{\alpha_p}}$$

$$\mathbf{D} = \prod_{\mathbf{n+1 \leq p \leq 2n}} \mathbf{p^{\alpha_p}}$$

D-ben α_p értéke legfeljebb 1,
mivel $\mathbf{p^{\alpha_p} \leq 2n}$, és a D-bel prímekre: $p \geq n+1$, és így $\boldsymbol{p^2 \geq (n+1)^2 > 2n}$

A keresett A értéke az n és 2n közötti prímek szorzata, ezért $D \leq A$.

A-ra alsóbecslést keresünk. Ehhez $D \leq A$ miatt elég D-re alsó becslést találnunk.

Ha $\binom{\mathbf{2n}}{\mathbf{n}}$-re találunk alsó becslést, és B-e, C-re felső becslést, akkor D-re kapunk alsó becslést.

c.)
Alsó becslés $\binom{2n}{n}$-re
A binomiális tételből, vagy a PASCAL háromszögből következik: $\sum_{\boldsymbol{s=0}}^{\boldsymbol{2n}} \binom{\boldsymbol{2n}}{\boldsymbol{s}} = \mathbf{2^{2n}}$ és $\binom{\mathbf{2n}}{\mathbf{n}} > \binom{\mathbf{2n}}{\mathbf{s}}$, ha $s = 0, 1, 2, \ldots, n-1, n+1, \ldots, 2n$. Ezért: $(\boldsymbol{2n+1}) \cdot \binom{\boldsymbol{2n}}{\boldsymbol{n}} > \sum_{\boldsymbol{s=0}}^{\boldsymbol{2n}} \binom{\boldsymbol{2n}}{\boldsymbol{s}} = \mathbf{2^{2n}}$
Tehát $\binom{\mathbf{2n}}{\mathbf{n}} > \frac{\mathbf{2^{2n}}}{\mathbf{2n+1}} = \frac{\mathbf{4^n}}{\mathbf{2n+1}}$

d.)
Felső becslés B-re.

$$\mathbf{B} = \prod_{\mathbf{p \leq \sqrt{2n}}} \mathbf{p^{\alpha_p}}$$

Mivel $\mathbf{p}^{\alpha_\mathbf{p}} \leq \mathbf{2n}$, ezért B minden tényezőjének helyébe 2n-et írva és felhasználva, a tényezők száma $\sqrt{2n}$-ig a prímek száma,$\pi_{\sqrt{\mathbf{2n}}} > \sqrt{\mathbf{2n}}\,\mathbf{-1},$ nyerjük hogy: $\mathbf{B} \leq (\mathbf{2n})^{\pi_{\sqrt{2n}}} < (\mathbf{2n})^{\sqrt{\mathbf{2n}}-\mathbf{1}}$

e.)
Felső becslés C-re.

$$\mathbf{C} = \prod_{\sqrt{\mathbf{2n}}+\mathbf{1} \leq \mathbf{p} \leq \mathbf{n}} \mathbf{p}^{\alpha_\mathbf{p}}$$

Mivel $\mathbf{p}^{\alpha_\mathbf{p}} \leq 2n$, C-ben αp értéke legfeljebb 1.Ugyanis $\mathbf{p}^2 \geq \left(\sqrt{\boldsymbol{2n}} + \mathbf{1}\ \right)^{\mathbf{2}} > \mathbf{2n}$

Megmutatjuk, hogy $\frac{\mathbf{2n}}{\mathbf{3}} < p \leq n$ esetén $\alpha_p = 0$:

$$\binom{\mathbf{2n}}{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{2n} \cdot (\mathbf{2n} - \mathbf{1}) \cdot \ldots \cdot (\mathbf{n} + \mathbf{1})}{\mathbf{1} \cdot \mathbf{2} \cdot \ldots \cdot \mathbf{n}}$$

$\frac{\mathbf{2n}}{\mathbf{3}} < p \leq n$ esetén a számlálóban p nem szerepelhet, de 2p igen , 3p azonban ismét nem.

$\frac{\mathbf{2n}}{\mathbf{3}} < p \leq n$ esetén a nevezőben p-nek csak az egyszerese szerepel.

Tehát a számláló és a nevező egyaránt p-nek pontosan első hatványával osztható, és így az egyszerűsítésnél p kiesik, $\alpha_p = 0$. A $\frac{2n}{3} < p \leq n$ közé eső prímekkel nem kell foglalkoznunk.

$\mathbf{p}^{\alpha_\mathbf{p}} \leq \mathbf{2n}$ miatt a $\sqrt{\mathbf{2n}} + \mathbf{1} < p \leq \frac{\mathbf{2n}}{\mathbf{3}}$ **k**özé eső prímekre is igaz, hogy $\alpha_p \leq 1$ hiszen, mint már szó volt róla: $\mathbf{p}^2 \geq \left(\sqrt{\mathbf{2n}} + \mathbf{1}\ \right)^{\mathbf{2}} > \mathbf{2n}$

A második segédtétel alapján**,** $\frac{\mathbf{2n}}{\mathbf{3}}$ -nál kisebb prímek szorzatára teljesül:

$$\prod_{\mathbf{p} < \frac{\mathbf{2n}}{\mathbf{3}}} \mathbf{p} < \mathbf{4}^{\frac{\mathbf{2n}}{\mathbf{3}}}$$

Ezért $\mathbf{C} \leq \mathbf{4}^{\frac{\mathbf{2n}}{\mathbf{3}}}$

Az eddigiek alapján: $\mathbf{D} > \dfrac{\mathbf{4}^{\mathbf{n}}}{\mathbf{4}^{\frac{\mathbf{2n}}{\mathbf{3}}} \cdot (\mathbf{2n}+\mathbf{1}) \cdot (\mathbf{2n})^{\sqrt{\mathbf{2n}}\,-\,\mathbf{1}}} = \dfrac{\mathbf{4}^{\frac{\mathbf{n}}{\mathbf{3}}}}{(\mathbf{2n}+\mathbf{1}) \cdot (\mathbf{2n})^{\sqrt{\mathbf{2n}}-\mathbf{1}}}$ adódik.

$$\mathbf{D} > \frac{\mathbf{4}^{\frac{\boldsymbol{n}}{\mathbf{3}}}}{(\mathbf{2}\boldsymbol{n}+\mathbf{1}) \cdot (\mathbf{2}\boldsymbol{n})^{-\mathbf{1}}} > \frac{\mathbf{4}^{\frac{\boldsymbol{n}}{\mathbf{3}}}}{(\mathbf{2}\boldsymbol{n}+\mathbf{1})^{\sqrt{\mathbf{2}\boldsymbol{n}}}}$$

Azt kell bizonyítanunk, hogy D > 1

f.)
Bizonyítjuk, hogy elég nagy n-re D > 1

$$D > \frac{\mathbf{4}^{\frac{n}{3}}}{(\mathbf{2}n+\mathbf{1})^{\sqrt{2n}}} = \frac{\mathbf{4}^{\frac{n}{3}}}{\mathbf{4}^{\log_4(2n+1)^{\sqrt{2n}}}} = \mathbf{4}^{\frac{n}{3} - \sqrt{2n}\cdot\log_4(2n+1)}$$

Mivel

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{3} - \sqrt{2n}\cdot\log_4(2n+1) = \infty$$

ezért elég nagy n-től kezdve, például n =511-től, $\frac{n}{3} - \sqrt{2n}\cdot\log_4(2n+1) > 0$

Tehát n > 511 esetén D > 1 és így D ≤ A alapján A >1 .

g.)
Bizonyítjuk, hogy n < 511 esetén is A >1
Készítsünk sorozatot az 511-nél kisebb prímszámokból.

Vegyük a legkisebb prímszámot. Legyen ez a sorozatunk első tagja. Aztán vegyük ennek a kétszeresét, és keressük meg az első tag kétszeresénél kisebb prímszámok közül a legnagyobbat. Legyen ez a sorozat második tagja. Tapasztalat szerint ez a sor folytatható 509-ig, úgy, hogy minden lépésnél egy új prímszámot kapjunk.
2, 3, 5, 7, 13, 23, 43, 83, 163, 317, 631,…

Ellenőrzésként:

Prímek 1000-ig

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29
31	37	41	43	47	53	59	61	67	71
73	79	83	89	97	101	103	107	109	113
127	131	137	139	149	151	157	163	167	173
179	181	191	193	197	199	211	223	227	229
233	239	241	251	257	263	269	271	277	281
283	293	307	311	313	317	331	337	347	349
353	359	367	373	379	383	389	397	401	409
419	421	431	433	439	443	449	457	461	463
467	479	487	491	499	503	509	521	523	541
547	557	563	569	571	577	587	593	599	601
607	613	617	619	631	641	643	647	653	659
661	673	677	683	691	701	709	719	727	733

739	743	751	757	761	769	773	787	797	809
811	821	823	827	829	839	853	857	859	863
877	881	883	887	907	911	919	929	937	941
947	953	967	971	977	983	991	997		

Ekkor a sorozat tetszőleges $\mathbf{i}$-edik tagjára:

$$P_{\mathbf{i-1}} < P_{\mathbf{i}} < P_{\mathbf{i+1}}$$

Megmutatjuk, hogy tetszőleges $n \leq 511$-re az $[n+1\ ,\ 2n]$ zárt intervallumban található prím.

Valóban, ha n+1 a sorozat egy eleme, akkor készen vagyunk. Ha nem, akkor legyen P' és P'' a sorozat két olyan eleme, mely közrefogja (legközelebbről) n+1-et. Azaz:

$$P' < n+1 < P''$$

De, a sorozat képzési szabálya szerint:

$$n+1 < P'' < 2\,P'$$

Mivel:

$$P' < n+1$$
$$2P' < 2n+2$$
$$2p' \leq 2n$$

Ezért:

$$n+1 < P'' < 2P' \leq 2n$$

Tehát P'' az $[n+1,\ 2n]$ zárt intervallumba, és egyúttal az $(n,\ 2n)$ nyílt intervallumba is esik.

Ezzel a CSEBISEV–tételt teljes egészében bebizonyítottuk. □

Mutassuk meg, hogy $\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} \frac{n}{3} - \sqrt{2n}\cdot \log_4(2n+1) = \infty,}$ vezessük vissza más feladatokra.

1.Állítás:

$$\boldsymbol{\frac{n}{3} - \sqrt{2n}\cdot \log_4(2n+1) = \sqrt{n}\ \cdot\ \left(\frac{\sqrt{n}}{3} - \sqrt{2}\cdot\ \log_4(2n+1)\right) > \sqrt{n}\ \cdot\left(\frac{\sqrt{n}}{3} - \ \log_2(n)\right)}$$

<u>Igazolás:</u>

Hiszen:

$$\boldsymbol{\log_2 n > \sqrt{2}\cdot\ \log_4(2n+1)}$$

$$\boldsymbol{2\ \cdot \log_4 n > \sqrt{2}\cdot\ \log_4(2n+1)}$$

Mivel $\boldsymbol{\log_4(2n+1) < \ \log_4 4n = 1 + \log_4 n}$ ha az alább következő egyenlőtlenségek igazak, akkor a fentiek is teljesülnek.

$$\mathbf{2} \cdot \mathbf{log_4}\, \boldsymbol{n} > \sqrt{\mathbf{2}} \cdot (\mathbf{1} + \boldsymbol{log_4}\, \boldsymbol{n})$$

Jelöljük $\log_4$ n -et a-val.

$$\mathbf{2}\boldsymbol{a} > \sqrt{\mathbf{2}} \cdot (\mathbf{1} + \boldsymbol{a})$$

2. Állítás

Mutassuk meg, hogy $\sqrt{\boldsymbol{n}} \cdot \left(\frac{\sqrt{\boldsymbol{n}}}{\mathbf{3}} - \mathbf{log_2}\, \boldsymbol{n}\right)$ tart a végtelenbe, ha $\boldsymbol{n}$ tart a végtelenbe.

<u>Igazolás:</u>

Jelöljük $\mathbf{log_2} \sqrt{\boldsymbol{n}}$ -et **y**-nal.

Ekkor:

$$\sqrt{\boldsymbol{n}} \cdot \left(\frac{\sqrt{\boldsymbol{n}}}{\mathbf{3}} - \mathbf{log_2}\, \boldsymbol{n}\right) = \mathbf{2}^{\boldsymbol{y}} \cdot \left(\frac{\mathbf{2}^{\boldsymbol{y}}}{\mathbf{3}} - \mathbf{2}\boldsymbol{y}\right)$$

Mivel $2^y > y^2$, (feltéve, hogy y > 0), ha az alább következő kifejezések $y \to \infty$ esetén tartanak a végtelenbe, akkor a fenti kifejezés is tart a végtelenbe.

$$y^2 \cdot \left(\frac{y^2}{3} - 2y\right) = y^3 \cdot \left(\frac{y}{3} - 2\right)$$