Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Izoperimetrikus problémák

Szakdolgozat

Készítette:
Kiss Éva Magdolna
Matematika BSc. Tanári szakirány

Témavezető:
Dr. habil. Csikós Balázs
Tszv. egyetemi docens

Budapest, 2014.

Tartalomjegyzék

1. Fejezet
Bevezetés

Dolgozatom témájaként az izoperimetrikus problémakört választottam. Ennek a témának a síkbeli részét fogom bemutatni feladatok segítségével.

Azért választottam az izoperimetrikus problémákat témaként, mert mindig is érdekelt, hogy különböző alakzatok esetén adott kerület mellett hogy tudjuk a területet maximalizálni. Úgy gondolom, hogy az ilyen típusú szélsőérték feladatok megoldásához mindig szükséges az ötletesség, a jó logika, hogy megtaláljuk a legnagyobb területű alakzatot. Mivel tanári szakirányos vagyok, törekedtem arra is, hogy egy-egy feladatot többféleképpen is megoldjak, esetleg más szinteken. A különböző meggondolásokhoz legtöbbször megjegyzést is fűztem, hogy melyiket milyen szinten tanítanám.

A második fejezet első részében kimondok egy tételt, ami ahhoz szükséges, hogy lássuk, hogy tényleg van maximális terület. Ezután a háromszögek esetére végzek vizsgálatokat. Kitérek arra, hogy adott kerület mellett mikor lesz a terület a legnagyobb, illetve ennek fordítottjára is, hogy adott terület mellett a kerületet hogy tudjuk minimalizálni.

A harmadik fejezetben a négyszögekre oldok meg szélsőérték feladatokat. Ezek között is szerepelni fog, hogy adott kerületűek közül melyeknek legnagyobb a területe. Vizsgálódom téglalapra, rombuszra, illetve általános négyszögekre is.

A negyedik fejezet feladatai között az a közös, hogy adva van egy szögtartomány és különböző geometriai objektumok (szakasz, szakaszpár, kötél, mint hajlítható szakasz). Ezekkel kell levágnunk a szögtartományból a csúcsot tartalmazó legnagyobb területű részt.

Az ötödik fejezet ezeknek a kombinálása. Ez egy feladatot tartalmaz, amiben négyszög szerepel, de nem akármilyen négyszög, hanem egy csuklós négyszög. Be fogom látni, hogy akkor lesz a területe maximális, ha ez a csuklós négyszög éppen egy húrnégyszög.

Ezúton szeretném megköszönni Dr. Csikós Balázs tanár úrnak a kitartó munkáját, a sok konzultációt és a feladatokat.

2. Fejezet
Háromszögek esete

2.1. Weierstrass tétele

A dolgozatom során szinte mindig adott kerületekhez keresek maximális területet. De honnan tudjuk, hogy adott kerülethez létezik maximális kerület? A maximum létezése általában a Weierstrass-tétel általánosításai segítségével vezethető le. Analízisből tanultuk a Weierstrass-tétel legegyszerűbb esetét, mely így szól.

Tétel: Korlátos és zárt intervallumon értelmezett folytonos függvény felveszi minimumát és maximumát. Tehát, ha $[a; b]$ korlátos és zárt és $f: [a; b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor létezik olyan $p, q \in [a; b]$, hogy minden $x \in [a; b]$-re $f(p) \leq f(x) \leq f(q)$. [1]

Általánosabb alakban Weierstrass tétele azt mondja ki, hogy R^n egy korlátos és zárt halmazán, vagy még általánosabban egy kompakt metrikus téren értelmezett folytonos függvény valahol felveszi a maximumát és a minimumát. Szinte mindegyik későbbi feladatunknál bevezethető a megengedett alakzatoknak egy kompakt metrikus tere, melyen a területfüggvény folytonos, a maximális területű alakzat létezése pedig a Weierstrass-tétel következménye.

Ezen módszerek kidolgozása túlmutat ennek a dolgozatnak a keretein, ezért ezt most nem teszem meg.

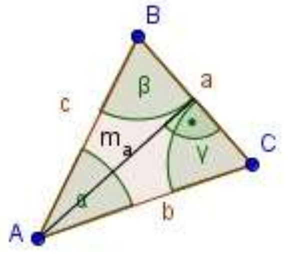
2.2. Területképletek áttekintése

A feladatok megoldása előtt szeretném azokat a képleteket ismertetni, melyeket a dolgozatom során sokszor használni fogok. Háromszög területének kiszámítására többféle képletet ismerünk. Ilyen kiszámítási módok például adott oldal és a hozzá tartozó magasság szorzatának a fele, ha összeszorozzuk a háromszög két oldalának hosszát és a két oldal által bezárt szög szinuszát, és az így kapott szorzatot elosztjuk kettővel, illetve a kevésbé használatos Hérón-képlet.

De miből is adódnak ezek a képletek?

2.2.1. A terület egyenlő az alap és a hozzá tartozó magasság szorzatának felével

Ismeretes, hogy a paralelogramma területe az alapjának és a magasságának a szorzata. Ha a kívánt háromszöggel egybevágó háromszöget az alapháromszöghöz képest 180°-kal elforgatjuk és a megfelelő oldalaikat összetesszük, egy paralelogrammát kapunk. Tehát az így kapott paralelogramma területe kétszerese az általunk választott háromszög területének. A használt jelöléseket szeretném ábrán is bemutatni. Ezt az 1. ábra mutatja.



1. ábra: Általános háromszög

2.2.2. A kétszeres terület megegyezik két oldal hosszának és a közbezárt szög szinuszának szorzatával

A második területképlet, amit be szeretnék látni, az a

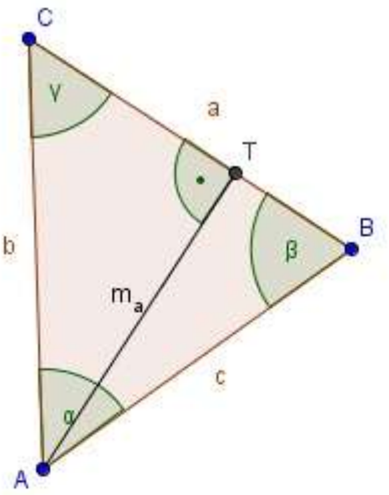
$$T = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{2}.$$

Az összefüggés derékszögű háromszög esetén triviális, hiszen ha $\gamma = \frac{\pi}{2}$, akkor

$$\frac{a \cdot b \cdot \sin \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{a \cdot b}{2}$$

és mivel γ volt a derékszög, így a és b oldal zárta közre, tehát az a oldalra merőleges a b oldal, ami egybeesik a magassággal.

Amennyiben a háromszög nem derékszögű és nem elfajuló, akkor két eset valósulhat meg:



2. ábra: Hegyesszögű háromszög

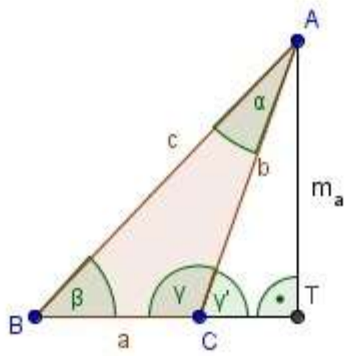
- Ha γ hegyesszög, akkor a magasság behúzásával derékszögű háromszöget kaptunk, az ATC háromszöget. Kihasználva a trigonometriát felírhatjuk, hogy

$$\sin \gamma = \frac{m_a}{b}.$$

Ebből kifejezhetjük, m_a-t:

$$m_a = b \cdot \sin \gamma.$$

Ezt beírhatjuk az előbb már belátott $T = \frac{a \cdot m_a}{2}$ képletbe, ekkor megkapjuk a bizonyítandó összefüggést.



3. ábra: Tompaszögű háromszög

- Ha γ tompaszög, akkor az ábrán látszik, hogy γ és γ' kiegészítő szögek. Mint tudjuk, $\sin\gamma = \sin(\pi-\gamma) = \sin\gamma'$. Ezt és az eddigieket kihasználva $\sin\gamma' = \frac{m_a}{b} = \sin\gamma$. Az előzőekhez teljesen hasonlóan levezethető a területképlet.

2.2.3. Hérón-képlet

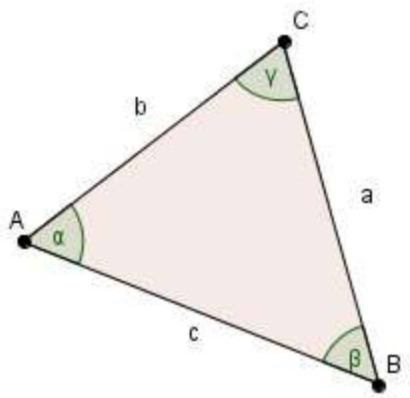
A Hérón-képlet azt mondja ki, hogy amennyiben egy háromszög oldalai a, b és c, továbbá a kerület felére bevezetve az $s = \frac{K}{2}$ jelölést, a terület a következő:

$$T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Ennek bizonyításaként induljunk ki egy általános háromszögből!

Írjuk fel erre a háromszögre a koszinusz-tételt! Ebben az esetben ez a következő:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$



4. ábra: Egy általános háromszög

Ebből kapjuk $\cos\gamma$-ra, hogy:

$$\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

Fent beláttuk, hogy a háromszög területére fennáll a következő képlet: $T = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2}$.

Használjuk ezt a területre vonatkozó összefüggést, továbbá a trigonometriában megismert $\sin^2\gamma + \cos^2\gamma = 1$ egyenletet. Ekkor:

$$T = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2} = \frac{1}{2}ab\sqrt{1-\cos^2\gamma} = \frac{1}{2}ab\sqrt{(1-\cos\gamma)(1+\cos\gamma)}.$$

A következő lépésben kihasználhatjuk a koszinusz tételből meghatározott kapcsolatot az oldalak és a γ szög koszinusza között:

$$\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

Ezt beírva az iménti egyenletbe azt kapjuk, hogy:

$$T = \frac{ab}{2}\sqrt{\left(1 - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)\left(1 + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)}$$

$$= \frac{ab}{2}\sqrt{\left(\frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{2ab}\right)\left(\frac{2ab + a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)}$$

$$= \frac{1}{2}ab\sqrt{\left(\frac{-(a-b)^2 + c^2}{2ab}\right)\left(\frac{(a+b)^2 - c^2}{2ab}\right)}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{(c^2 - (a-b)^2)((a+b)^2 - c^2)}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{(a-b+c)(-a+b+c)(a+b+c)(a+b-c)}.$$

Ezután már csak egy formai átírásra van szükségünk, melyben felhasználjuk a $\frac{K}{2} = s$ egyenletet. Háromszög esetén a kerület: $K = a + b + c$. Ebből szimmetrikus módon kifejezhetjük bármelyik oldal hosszát. Én az a oldalt választottam: $a = 2s - b - c$. Helyettesítsük be ezt a kifejezést a fenti gyökös képletbe! Ekkor:

$$T = \frac{1}{4}\sqrt{(a-b+c)(-a+b+c)(a+b+c)(a+b-c)}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{(2s-b-c-b+c)(-(2s-b-c)+b+c)(2s-b-c+b+c)(2s-b-c+b-c)}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{(2s-2b)(-2s+2b+2c)(2s)(2s-2c)}$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\sqrt{16}\sqrt{(s-b)(-s+b+c)(s)(s-c)}$$

$$= \sqrt{(s-b)(-(2s-b-c)+s)(s)(s-c)}$$

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Most, hogy beláttuk a használni kívánt tételeket, nekiállhatunk a kitűzött feladat megoldásának.

2.3. Adott kerület esetén mikor maximális egy háromszög területe?

Adott egy ABC háromszög A és B csúcsa ($A \neq B$) és a háromszög kerülete. Hol helyezkedjen el a C csúcs, ha azt szeretnénk, hogy az ABC háromszög területe maximális legyen?

Első lépésben értelmezzük a feladatot. Adva van a kerület, és egy oldal hossza. A feladatnak csak akkor lesz megoldása, ha a szakasz hossza kisebb, mint a megadott kerület fele. Ez a háromszög-egyenlőtlenségből adódik a következőképp. Tegyük fel, hogy az a oldal hossza adott. A háromszög-egyenlőtlenség miatt $a < b + c$. Az $a + b + c = K$ összefüggésből azt kapjuk, hogy $b + c = K - a$. Ezt beírva az egyenlőtlenségbe, arra jutunk, hogy $a < K - a \rightarrow a < \frac{K}{2}$. Az adott területképletek bőségéből válogathatunk. Középiskolásként mindig próbáltuk kerülni a Hérón-képletet. Most viszont hívjuk segítségül ezt a formulát! A gyökvonás azonosságait felhasználva a terület

$$T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{s}\sqrt{s-a}\sqrt{(s-b)(s-c)}.$$

A feladat szövegéből kiderül, hogy ebben a képletben szereplő adatok közül s és a adottak. A fenti egyenlet jobb oldalának első két tényezője ezekből meghatározható. Tehát $\sqrt{s}\sqrt{s-a}$ szorzatot konstansnak tekintem. A maximum keresésénél ebből adódóan csak a $\sqrt{(s-b)(s-c)}$ szorzatra kell vizsgálatot végezni. Ezt többféleképp is elvégzem. Négyzetgyök alatt nem állhat a valós számok körében negatív szám, ezért kell, hogy teljesüljön $s > c$ feltétel. (Ez adódik a háromszög-egyenlőtlenségből is.) Ennek felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\frac{a+b+c}{2} > c \rightarrow a + b > c.$$

Ez a feltétel pedig mindig teljesülni fog a háromszög-egyenlőtlenség miatt, így nem kell külön eseteket vizsgálnunk. (Ez belátható $s > b$ esetre is.) A négyzetgyök függvény szigorú monoton növő tulajdonsága miatt elég az $(s-b)(s-c)$ szorzat szélsőértékét vizsgálni. Ezt a szorzatot felbontva kapjuk, hogy

$$(s-c)(s-b) = s^2 - sb - sc + cb.$$

Tudjuk, hogy

$$2s = a + b + c \rightarrow b = 2s - a - c.$$

Ezt beírva a fenti egyenletbe kapjuk, hogy

$$s^2 - sb - sc + cb = s^2 - s(2s - a - c) - sc + c(2s - a - c) = -s^2 + sa + 2sc - ca - c^2$$

Ezek közül a tagok közül szintén vannak olyanok, melyek adottak. Ebből adódóan csak a

$$2sc - ca - c^2$$

kifejezés szélsőértékét kell vizsgálnunk. A maximum meghatározását deriválással fogom elvégezni. Ezt a következő képlet mutatja:

$$\frac{\partial}{\partial c}(2sc - ca - c^2) = 2s - a - 2c.$$

Ott lehet szélsőérték, ahol ez a kifejezés 0-val egyenlő:

$$2s - a - 2c = 0.$$

Ezt megoldva kapjuk, hogy

$$c = \frac{2s - a}{2},$$

amiből adódik b értékére

$$b = 2s - a - c = 2s - a - \frac{2s - a}{2} = \frac{2s - a}{2}.$$

Ahhoz, hogy megbizonyosodjunk arról, hogy tényleg van-e ezen a helyen szélsőérték, vizsgálatot kell végeznünk a $2s - a - 2c$ kifejezés előjelére, amennyiben c értéke változik. Milyen c értékre lesz ez a kifejezés negatív?

A következő számolás ezt fogja megmutatni:

$$2s - a - 2c < 0$$

$$\frac{2s - a}{2} < c.$$

Ebből adódóan, amennyiben $\frac{2s-a}{2} < c$ teljesül, a kifejezés értéke negatív lesz.

Vizsgáljuk meg azt is, hogy milyen c értékre lesz pozitív:

$$2s - a - 2c > 0$$

$$\frac{2s - a}{2} > c.$$

$c < \frac{2s - a}{2}$	$c = \frac{2s - a}{2}$	$c > \frac{2s - a}{2}$
$+$	0	$-$

A derivált függvény előjelet vált a $c = \frac{2s-a}{2}$ pontban, ráadásul monoton növőből monoton csökkenő lesz, tehát a kifejezésnek itt tényleg maximuma van.

Azt kaptuk, hogy c és b (tehát a két szár) egyenlő hosszúságú. A terület egyenlő szárú háromszögek esetén lesz maximális. A kérdésre, hogy hol helyezkedjen el a háromszög harmadik, C csúcsa, a válasz: a megadott alap szakaszfelező merőlegesén, a szakasz mindkét végpontjától $\frac{2s-a}{2}$ távolságra. Ehhez a megoldáshoz tudnunk kellett deriválni. Azt pedig általában csak a 12. évfolyamosok tudnak. Ebből adódóan kell olyan megoldást találnunk, melyet kisebb évfolyamosoknak is meg tudunk tanítani.

Muszáj deriválnunk, ha a Hérón-képletet használjuk? Természetesen nem. A feladatot onnantól lehetne másképp csinálni, mikor szélsőértéket keresünk. Hogy lehetne még szélsőértéket keresni? Eszünkbe jut, hogy egy szorzat maximalizálásához felülről kell becsülni. Egy szorzat felülről való becsléséhez használhatjuk a számtani és mértani közepek közötti összefüggést.

Állítás: $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$, ahol a és b nem negatív számok

Bizonyítás: Emeljük négyzetre a bizonyítandó egyenlőtlenséget! Ezt a következő egyenlőtlenség mutatja:

$$ab \leq \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4}.$$

Ezt nullára rendezve az adódik, hogy

$$0 \leq a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2.$$

Látjuk, hogy a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenségben pontosan akkor áll fenn egyenlőség, ha a tagok egyenlők.

Esetünkben az

$$(s-b)(s-c)$$

szorzat maximalizálása a feladat. Ezt beírva az egyenlőtlenségbe azt kapjuk, hogy

$$\sqrt{(s-b)(s-c)} \leq \frac{(s-b)+(s-c)}{2} = \frac{2s-b-c}{2} = \frac{a}{2}.$$

Ebből adódik, hogy

$$(s-c)(s-b) \leq \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

Nekünk az az eset kell, mikor a szorzat a legnagyobb, így ebből az egyenlőtlenségből az egyenlő relációt kell vizsgálnunk. Ha ez teljesül, kész vagyunk, hiszen az összefüggés kizárja, hogy lenne ennél nagyobb terület. De mit jelent az egyenlőség a mi feladatunkban?

A tétel bizonyítása után utaltam arra, hogy a számtani és mértani közepek közti egyenlőségben az egyenlőség esete csak akkor valósulhat meg, ha a tagok egyenlők. Ebből adódik, hogy

$$s-b = s-c$$

$$b = c.$$

Ez a módszer is azt a megoldást adta, hogy egyenlő szárú háromszög esetén lesz az adott kerületű háromszöget területe a legnagyobb.

Ez a területmaximalizálás nem tartalmaz deriválást, így alsóbb évfolyamok számára is elmondható. Meg lehetne keresni 9-edikesként is a szélsőértékeket? Vizsgáljuk meg onnan a feladatot, hogy maximumát keressük a $(s-b)(s-c)$ szorzatnak! Itt is fel tudjuk bontani, és az egyik oldalt ki tudjuk fejezni a $2s = a + b + c$ képletből. Ezek után azt kapjuk, hogy:

$$(s-b)(s-c) = s^2 - s(2s-a) + bc.$$

Ebből az egyenlőségből csak bc értéke nem ismert, ezért elég ezt maximalizálni. A $2s = a + b + c$ összefüggésből kifejezve b-t és beírva a bc szorzatba az adódik, hogy

$$bc = -c^2 + c(2s-a).$$

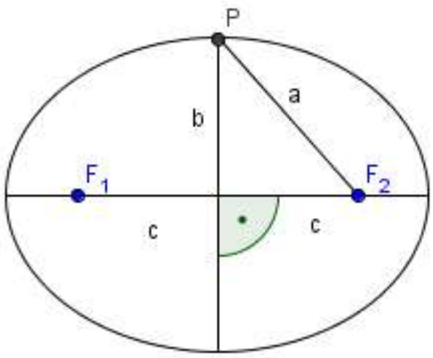
Ez egy hiányos másodfokú kifejezés. Látjuk, hogy a négyzetes tag együtthatója negatív, ezért a parabola lefelé nyílik. Ebből adódóan maximuma lesz. Ennek helye pedig a két gyök számtani közepénél lesz. Ezt megoldva az adódik, hogy $c_1 = 0$ és $c_2 = 2s - a$. A kettő számtani közepe $c = \frac{2s-a}{2}$ esetén lesz bc értéke maximális. Ekkor az előzőekhez hasonlóan adódik $c = \frac{2s-a}{2} = b$. Másodfokú függvényt már 9. osztályban tudnak ábrázolni, ezért ezt a megoldási módot már ott ismertetni lehet.

Látjuk, hogy egyik megoldás sem rövid és egyszerű. Vizsgáljuk meg a problémát a geometria felől!

A feladat: hol helyezkednek el azok a pontok a síkon, amelyekre igaz, hogy a pont egy adott szakasz két végpontjától mért távolságösszege állandó? Eszünkbe jut az ellipszis definíciója.

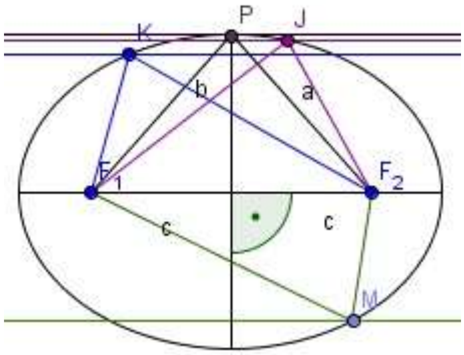
Definíció: Az F_1F_2 fókuszpontokkal és a $2a$ nagytengelyhosszal meghatározott σ síkbeli ellipszisen a következő alakzatot értjük:

$$\mathcal{E} = \{P \in \sigma | F_1P + F_2P = 2a\}. \text{ [2]}$$



5. ábra: Ellipszis

Az ellipszis segítségével megtaláltuk azoknak a pontoknak a halmazát, melyek kielégítik azt a feltételt, hogy adott a kerület. Ezek közül a pontok közül arra van szükségünk, amelyik a két fókuszponttal maximális területű háromszöget alkot. Ehhez most a $T = \frac{cm_c}{2}$ képletet fogom használni. Ebből azzal, hogy az AB szakasz adott, azzal c oldal is adott. Ezekből adódóan nekünk m_c-t kell maximalizálni.



6. ábra: Néhány lehetséges megoldás

Az ábrán szépen látszik, hogy az ellipszis pontjaiból a nagytengelyre bocsátott merőlegesek közül a leghosszabb a fél kistengely. Ennek az állításnak egy bizonyítása az ellipszist leíró egyenletből adódik. Az origó középpontú, x nagytengelyű, y kistengelyű ellipszis egyenlete a Descartes-féle koordináta-rendszerben a következő:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ebből ki tudjuk fejezni y^2 értékét:

$$y^2 = \frac{a^2b^2 - b^2x^2}{a^2} = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

Célunk, hogy az y értékét maximalizáljuk úgy, hogy az a és a b értékét konstansnak tekintjük. Ez akkor lesz maximális, ha

$$0 = \frac{x^2}{a^2}.$$

Ez az összefüggés csak $x = 0$ esetén teljesül.

Ebből az következik, hogy y értéke az $x = 0$ helyen maximális. Ez két pontot jelent, az

$$M_1 = (0; b) \text{ illetve } M_2 = (0; -b)$$

pontokat.

Ebből adódóan a legnagyobb magassághoz a kistengely által kimetszett pontok tartoznak. A legnagyobb terület érdekében válasszuk magasságnak az ellipszis kistengelyét. Ekkor azonban egyenlő szárú háromszöget kapunk.

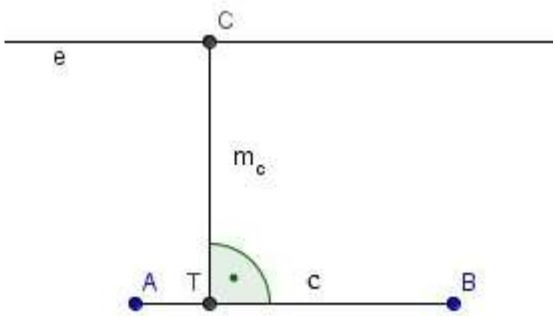
Látjuk, hogy az eredményhez sokkal rövidebb úton juthattunk el a geometria segítségével.

Miben lesz más a feladat megoldása, ha nincs lerögzítve az A és a B csúcs, hanem csak a kerület van megadva és így szeretnénk maximalizálni a területet?

Az, hogy létezik legnagyobb terület, az következik Weierstrass tételéből. Ha feltesszük, hogy van legnagyobb területű háromszög, akkor az csak egy szabályos háromszög lehet, mert ha lenne kér különböző oldala, akkor a harmadik oldalt változatlanul tartva a területét növelni tudnánk, ami ellent mondana a terület maximalitásának.

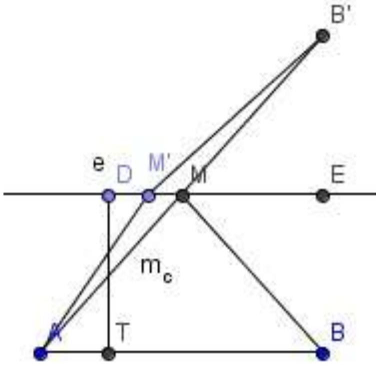
2.4. Adott terület esetén mikor minimális a kerület?

Ebben a feladatban adott egy ABC háromszög A és B csúcsa és a területe. A kérdés az, hogy milyen C-re lesz az ABC háromszög kerülete minimális?
Az első kérdés, ami felmerülhet bennünk, hogy hol helyezkednek el azok a pontok a síkon az AB szakaszhoz képest, melyek egyenlő területű háromszöggé egészítik ki az AB szakaszt? Használjuk itt is a $T = \frac{cm_c}{2}$ területképletet. A c oldal hossza adott, továbbá a terület is, így m_c hossza is. Tudjuk, hogy az adott oldalhoz tartozó magasság merőleges az oldalra. Így ezeknek az egyenlő területű háromszögeknek a harmadik csúcsa egy olyan egyenesen van, mely párhuzamos az A, B pontra illesztett egyenessel és attól m_c távolságra van attól. A síkon két ilyen egyenes van. Az egyik egyenest a 7. ábra mutatja. Legyen ez az e egyenes. A másik egyenes e tükörképe az A és a B pontokon átmenő egyenesre. Szimmetriai okokból elég csak e egyenesre vizsgálódnunk.



7. ábra: Adott szakasztól m_c távolságra lévő pontok halmaza

Most már csak az a P pontja kell az egyenesnek, melyre $AP + PB$ minimális lesz. A feladat innentől már ismerős, hiszen el kell jutnunk A pontból B pontba úgy, hogy érintenünk kell az e egyenest. Ez teljesen megegyezik azzal a problémával, amikor Piroskának kell eljutnia a nagymamához úgy, hogy közben a folyóból vizet kell vinnie a nagyihoz. Azt a feladatot úgy oldottuk meg, hogy a célt, azaz a (szegény) nagymamát „tükröztük a folyóra". Tegyük ezt most is! (A szerkesztés menetét a 8. ábra mutatja.)



8. ábra: Tükrözés

Tükrözzük a B pontot az e egyenesre! Ezt a B' tükrözött pontot kössük össze az A ponttal. Ennek az összekötő egyenesnek és az e egyenesnek a metszéspontja legyen M. Az állítás az, ha M' végigfut az e egyenesen, akkor $|AM'| + |M'B| = |AM'| + |M'B'|$ akkor a legrövidebb, amikor $M' = M$. Ez abból látszik, hogy ha M' egy M-től különböző pont, akkor fennáll:

$$|AM'| + |M'B| = |AM'| + |M'B'| > |AB'| = |AM| + |MB'| = |AM| + |MB|.$$

Az egyenlőségeket azért írhattuk ki, mert a tükrözés távolságtartó művelet, határozottan nagyobb relációt pedig azért tehettük ki, mert a háromszög-egyenlőtlenség teljesül.

Ebből az adódik, hogy ABM háromszög kerülete minimális, ezért a C pontnak meg kell egyeznie M ponttal.

3. fejezet

Négyszögek tanulmányozása

3.1. Adott kerületű téglalapok esetén keressük meg a maximális területűt!

Téglalapok területét a $T = ab$ összefüggés alapján számíthatjuk ki. A feladat szövege alapján a kerület ($K = 2(a + b)$) adott. Területet kell maximálnunk. Elsőként eszünkbe jut, hogy ezzel a feladattal vezették be a szélsőérték vizsgálatot a középiskolában. Akkor úgy oldottuk meg, hogy kifejeztük a kerület képletből az egyik oldalt (szimmetria miatt mindegy, hogy melyiket). Én ezt most az a oldara alkalmazom. Ebből az adódik, hogy

$$a = \frac{K - 2b}{2}.$$

Ezután vettük a terület képletét és behelyettesítettük a kifejezett oldalt:

$$T = ab = \frac{K - 2b}{2} b = \frac{Kb - 2b^2}{2}.$$

Miután ezt megtettük, azután deriváltuk, hiszen ahol a derivált 0, ott lehet szélsőértéke a területnek.

$$\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{Kb - 2b^2}{2}\right) = \frac{K - 4b}{2} = 0 \rightarrow \frac{K}{4} = b \rightarrow a = \frac{K}{4} = b$$

Vizsgáljuk meg, hogy tényleg maximuma van-e $b = \frac{K}{4}$-ben a kifejezésnek!

Ha $b^* < \frac{K}{4}$, akkor

$$\frac{K - 4b^*}{2}$$

mivel egy $\frac{K}{4}$-nél kisebb szám négyszeresét vesszük el K-ból, (ahol K pozitív, hiszen kerület) ezért a számláló pozitív lesz, a nevező is pozitív, így a kettő hányadosa is pozitív.

Ha $b^{**} > \frac{K}{4}$

$$\frac{K - 4b^{**}}{2},$$

akkor mivel egy K-nál nagyobb számot vonunk ki K-ból, ezért ez a hányados negatív lesz.

Azt kaptuk, hogy a derivált monoton növekvőből monoton csökkenőbe vált, ebből adódóan a $b = \frac{K}{4}$-ben maximuma van a kifejezésnek.

Ebből látjuk, hogy eszerint az adott kerületű téglalapok közül a négyzet területe a legnagyobb.

Egy másik módszer ugyanennek a feladatnak a megoldására egy becslésből adódik. Ez a számtani és mértani közepek közötti összefüggés, amit fentebb már beláttunk. Az összefüggés a feladat megoldása kapcsán a következő alakot ölti:

$$0 \leq a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2.$$

A feladat vizsgálatánál nekünk az egyenlőségjel a fontos, hiszen a maximális területre vagyunk kíváncsiak. Ebből az adódik, hogy $0 = a - b \rightarrow a = b$. Ez a módszer is azt mutatja, hogy adott kerületű téglalapok közül a négyzet területe a legnagyobb.

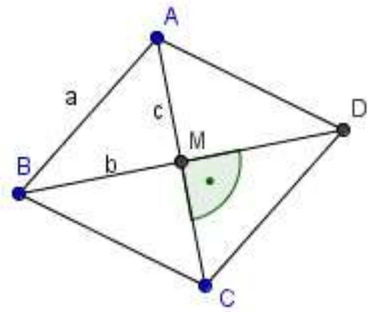
3.2. Adott kerületű rombuszok közül melyiknek maximális a területe?

A rombusz olyan négyszög, amelynek minden oldala egyenlő hosszúságú. Ha adott a rombusz kerülete, akkor adva van az oldalhossza is $\left(a = \frac{K}{4}\right)$. A rombusz egy átlójának behúzásával 2 egybevágó háromszöget kapunk, ezért elég az így kapott háromszög területét maximálni. Ennél a feladatnál szintén a $T = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2}$ összefüggést használom, ami annyiban módosul, hogy $a = b$. Így a feladatunk a $T = \frac{a^2 \cdot \sin\gamma}{2}$ maximalizálása amellett, hogy az a oldal adott. Csak a $\sin\gamma$ értéktől függ a terület, ezért a cél ennek a legnagyobb értékét megkeresni. A szinusz függvény $[-1; 1]$ közötti értéket vehet fel, ebből nekünk az felel meg, amikor 1 lesz.

$$\sin\gamma = 1 \rightarrow \gamma = \frac{\pi}{2} + k2\pi,$$

ahol $k \in \mathbb{Z}$. Mivel négyszögről van szó, a megoldás a derékszögű rombusz, ami egy négyzet. Ez egy olyan megoldás, melyet olyan osztályban tudunk elmondani, ahol már megtanítottuk a szinusz függvény tulajdonságait. Ezért kerestem egy olyan megoldást is, melyhez nem kell ilyesfajta tudás.

A feladat megoldását az előbb úgy kezdtük, hogy behúztuk az egyik átlót. Most is így indulunk, de behúzzuk a másik átlót is. Így négy darab egybevágó, derékszögű háromszög keletkezett. Pitagorasz tétele szerint erre felírható, hogy $a^2 = b^2 + c^2$. Egy ilyen kis háromszög területére fel tudjuk írni, hogy $T_\Delta = \frac{bc}{2}$. Ebből adódóan a bc szoratot kell maximalizálnunk amellett a feltétel mellett, hogy $a^2 = b^2 + c^2$. Itt pedig mértani közép és a négyzetes közép közti összefüggést fogom felhasználni.



9. ábra: A rombusz által meghatározott háromszögek

Tétel: $\sqrt{bc} \leq \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}$ minden b, c nemnegatív valós számra.

Bizonyítás: Emeljük mind a két oldalt négyzetre, majd rendezzünk nullára. Az adódik, hogy:

$$0 \leq b^2 + c^2 - 2bc = (b-c)^2.$$

Ez az egyenlőtlenség pedig mindig fennáll a négyzetre emelés tulajdonsága miatt. Látjuk, hogy a mértani és négyzetes közepek közti egyenlőtlenségből az egyenlőség akkor áll fenn, ha a két tag egyenlő.

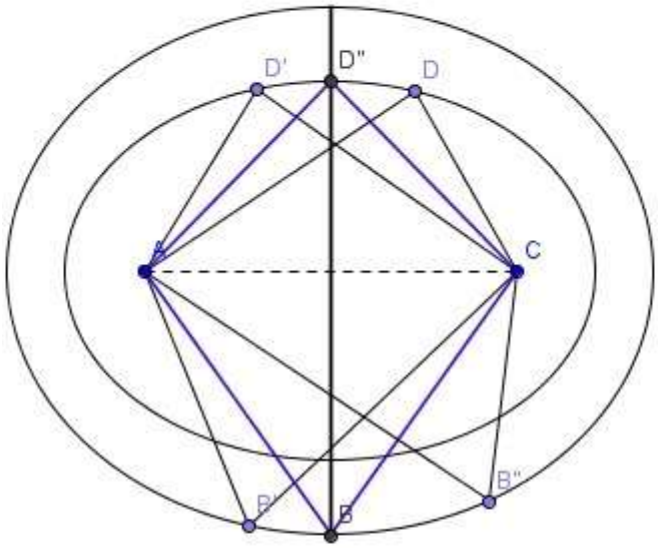
A feladat megoldását folytatva észrevehetjük, hogy a négyzetes közép számlálójában a $b^2 + c^2$ éppen a^2. Maximalizálni szeretnénk, ezért az egyenlőség jelet kell figyelembe vennünk. Ebből adódóan:

$$\sqrt{bc} = \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}} = \sqrt{\frac{a^2}{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

A bizonyítás után megjegyeztem, hogy a maximalizálás érdekében a b-nek és a c-nek egyenlőnek kell lenniük. Ezekből adódik, hogy a $b = c = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Azt kaptuk, hogy mivel a két átló felezi egymást és a fél átlók hosszai megegyeznek, az átlók is megegyeznek. Az a rombusz, melynek átlói egyenlő hosszúak, egy négyzet. Ebben a megoldásban nem használtuk ki a szinusz függvény korlátosságát. Ezt akár már 9. osztályban feladhatjuk.

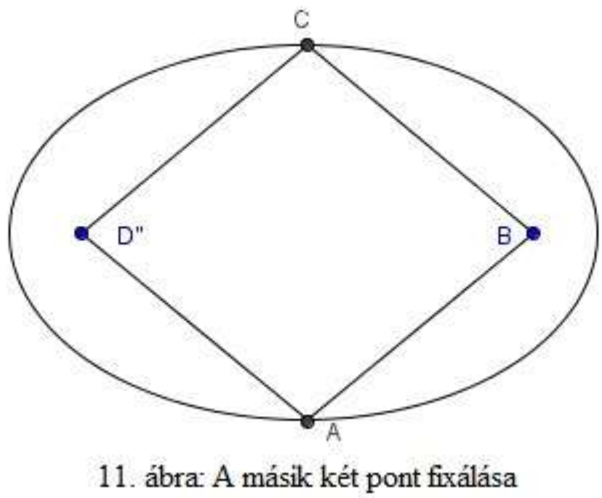
3.3. Adott kerületű négyszögek esetén a maximális terület?

Induljunk ki egy általános négyszögből, melynek oldalhosszait jelölje a, b, c illetve d. A feladat szövege szerint adva van a négyszög kerülete, azaz ezzel a jelöléssel adott: $K = a + b + c + d$. Első lépésként húzzuk be a négyszög két átlóját. A feladatunk, hogy a keletkezett háromszögek területeit maximalizáljuk, hiszen ha ezek a legnagyobbak, akkor a belőlük alkotott négyszög területe sem lehet a területösszegüknél nagyobb. Gondolatban fixáljuk a négyszög két szemközti csúcsát. Tudjuk, hogy egy háromszög területe (adott kerület és alaphossz mellett) akkor lesz maximális, ha egyenlő szárú a háromszög. Ha fixálunk két csúcsot, akkor a harmadik és a negyedik csúcs egy-egy ellipszis mentén fog mozogni, melynek fókuszpontjai az általunk lefixált pontok. Az első ellipszis esetén a két vezérsugár összegét véletlenszerűen választhatjuk (vigyázni kell azonban, hogy kisebb legyen, mint K), viszont a második ellipszis esetén az összegeknek ki kell adniuk a kerületet. Az első feladat során beláttuk, hogy az ellipszisbe oly módon írt háromszögek közül, melyeket a fókuszpontok és az ellipszis egy tetszőleges pontja feszít ki, azoknak maximális a területe, melyek egyenlő szárú háromszögeket alkotnak. Látjuk, hogy mivel az ellipszisek konfokálisak, ezért az egyenlő szárú háromszögek csúcsai az AC szakasz felezőmerőlegesén lesznek rajt.



10. ábra: Két pont fixálása

Ha második lépésként azt a két pontot tekintjük fixnek, amit ez az egyenes kimetszett nekünk (D'' és B), akkor mivel a kerület adott volt, a kimetszett háromszögek pedig egyenlő szárúak, ezért eköré a két pont köré a fél kerülettel csak



11. ábra: A másik két pont fixálása

egy meghatározott ellipszis rajzolható. Erre is megpróbáljuk a két háromszög területét az ismert módon maximalizálni, akkor egy rombuszt kapunk. Innentől visszaköszön az előbbi, rombuszos feladat, melynek megoldását a derékszögű rombusz, azaz a négyzet adta.

4. fejezet

Szögtartományból levágott területek vizsgálata

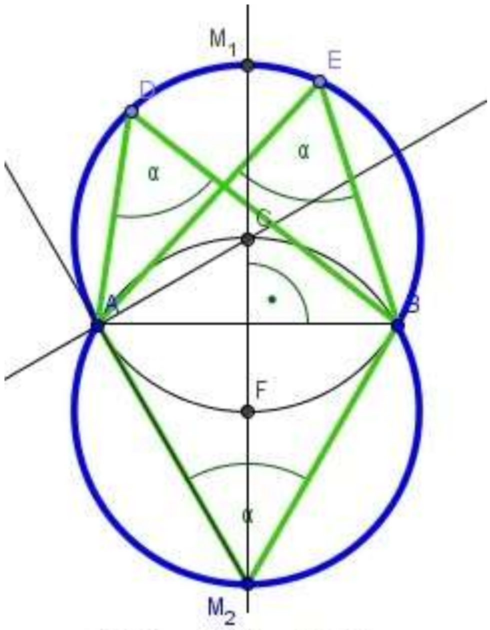
4.1. Vágjuk le szakasszal a legnagyobb területet!

Egy a hosszúságú szakasszal a lehető legnagyobb területű háromszöget szeretnénk levágni egy α szögű szögtartományból. Hogyan tegyük?

A feladat megoldására során „elfordítottam a fejem 90°-kal” és úgy gondolkodtam, hogy van egy a hosszúságú szakaszom, ami felé kell rajzolnom egy α szögű háromszöget. Mikor lesz ennek a háromszögnek a területe maximális?

Hogy találjuk meg azokat a szögtartomány-csúcsokat, melyekből az adott a szakasz α szögben látszik? A válasz egyszerű: látószögkörívvel.

Az α szögű látószögkörív szerkesztését a 12. ábra mutatja.



12. ábra: Látószögkörív

Ezek közül a háromszögek közül kell megkeresnünk a maximális területűt. Innentől ez a feladat nagyon hasonlít az első feladatra. Meg van adva egy háromszög alapja és kell a maximális terület, ami megegyezik azzal, hogy keressük a legnagyobb magasságot. Az ábra alapján az AB szakasz felezőmerőlegese a körnek szimmetriatengelye, ebből az látszik, hogy az a háromszög lesz a legnagyobb területű, aminek pont a felezőmerőleges egyenesén van a magassága. Hogy tudjuk ezt belátni? Hasonló módon, mint ahogy beláttuk, hogy egy ellipszis esetén a nagytengelyre merőleges egyenesek közül a kistengelyből metsz ki a leghosszabb szakaszt az ellipszis. Az origó középpontú, r sugarú kör egyenlete a Descartes-féle koordináta-rendszerben a következő alakú:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Ebből y-ra való rendezés után az adódik, hogy

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

A célunk, hogy y-t maximalizáljuk amellett, hogy r adott. A négyzetgyök függvény szigorúan monoton növekedéséből adódik, hogy akkor lesz ennek maximuma, ha $x = 0$. Amennyiben ez teljesül, az adódik y-ra, hogy $y = \pm r$. Ez tehát a kör esetében is két metszéspontot ad, az

$$M_1 = (0; r) \text{ illetve } M_2 = (0; -r).$$

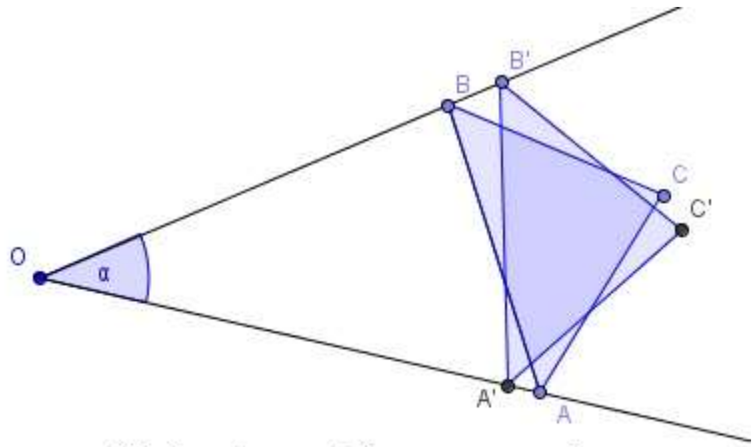
Látható, hogy az ábra nem csalt, tényleg az a magasság lesz a leghosszabb, amelyet az AB szakasz felezőmerőlegeséből a kör vág ki.

Ez megint csak egyenlő szárú háromszöget ad. A feladat megoldása tehát az, hogy a szögtartományból úgy kell levágnunk, hogy az egyenlő szárú háromszöget adjon.

4.2. Szakaszpárral levágva mikor maximális a terület?

Egy két szakaszból álló, adott hosszúságú töröttvonallal a legnagyobb területű négyszöget szeretnénk levágni egy szögtartományból. Hogyan tegyük?

Jelölje a és b a töröttvonalat alkotó szakaszok hosszát. Ez a probléma egy kicsit összetettebb. Az eddig leírtak alapján, ha csak $a + b$ ismert, el tudjuk képzelni, hogy ha ezt a középső csúcsot megfogjuk és elkezdjük a két végpontot fixen tartva mozgatni, akkor egy ellipszist írna le. Itt fontos megjegyezni, hogy a C mozgatásával (a 2.3. pontban tárgyaltak szerint) az ABC háromszög és ezzel együtt a levágott négyszög területe akkor lesz maximális, ha az ABC háromszög egyenlő szárú. Így a továbbiakban csak ezzel az esettel foglalkozunk. A második lépés az, hogy az ABC egyenlő szárú háromszög alakját változatlanul tartva próbáljuk az $OACB$ négyszög területét maximalizálni az AB szakasz végpontjait a szögszárakon csúsztatgatva. Ezt a 13. ábra mutatja.



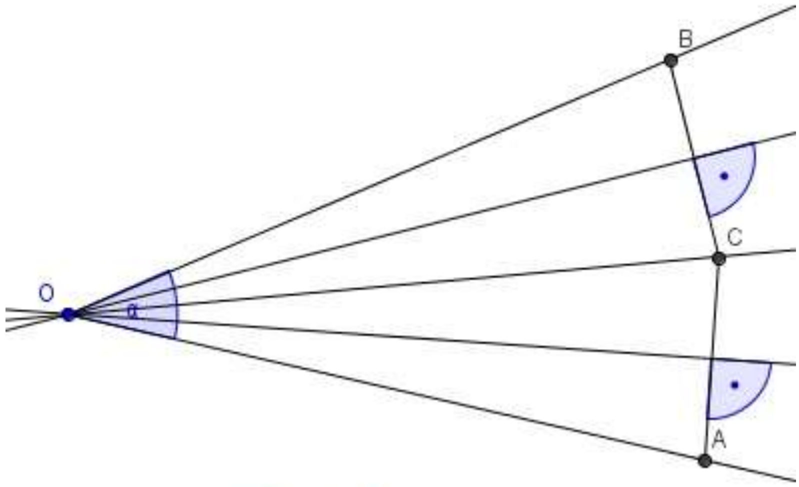
13. ábra: A merev háromszög mozgatása

A 4.1. feladat szerint a négyszög területe akkor lesz maximális, ha $OA = OB$.

Az $OA = OB$ és $CA = CB$ esetben a C csúcs rajtavan az α szög szögfelezőjén, és az $OACB$ négyszög egy deltoid. Mivel a deltoid területe az OAC háromszög területének a kétszerese, a deltoid területe akkor lesz maximális, ha az OAC háromszög területe maximális.

Ebben a háromszögben adott az O-nál fekvő szög és az AC oldal hossza, tehát ismét alkalmazva a 4.1. feladat eredményét, a terület akkor lesz maximális, ha $OC = OA$.

Beláttuk, hogy nincs ennél nagyobb terület. Tehát ha a megadott $a + b$ hosszúságú töröttvonalat megfelezzük, akkor úgy lesz a levágott terület maximális, ha mind a két $\frac{a+b}{2}$ hosszúságú szakasz és a szögfelező segítségével egyenlő szárú háromszögeket alakítunk ki.



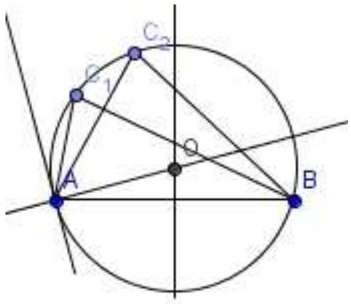
14. ábra: A megoldás

Mindent összevetve a megoldást úgy tudjuk megszerkeszteni, hogy az α szögnek megszerkesztjük a szögnegyedelőit és az O pontból $r = \frac{\frac{a+b}{4}}{\tan\left(\frac{\alpha}{4}\right)}$ sugarú kört rajzolunk. Ennek a metszetét vesszük az első és a harmadik szögnegyedelővel. Erre a két metszéspontra merőlegest állítunk. Így megkaptuk a legnagyobb területű négyszöget.

4.3. Egy csuklós szakaszpárral vágjuk le a legnagyobb területet!

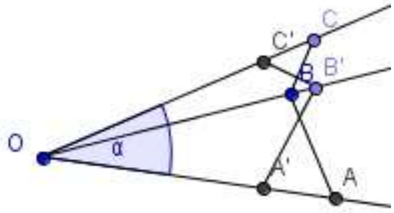
Egy ab csuklós szakaszpárral (aminek az a és a b szakaszai is külön-külön adottak) a legnagyobb négyszöget szeretnénk levágni egy szögtartományból. A megoldás során észrevehetjük, hogy az előző feladatot a megoldás első lépésében ennek a feladatnak arra a speciális esetére vezettük vissza, mikor $a = b = \frac{a+b}{2}$. Most is teljesen hasonlóan állunk neki a feladatnak. Feltételezve, hogy a feladatnak van megoldása, belátjuk, hogy az csak olyan lehet, melyre fennáll, hogy $OA = OB = OC$.

Először is, ha az $OABC$ négyszög területe maximális, akkor azt nem tudjuk azzal növelni, hogy az ABC háromszög alakját változatlanul tartva az A és a C csúcsokat a szögszárakon csúsztatgatjuk. A 4.1. feladat miatt a területet maximalizáló elrendezésre $OA = AC$.



15. ábra: Terület növelése

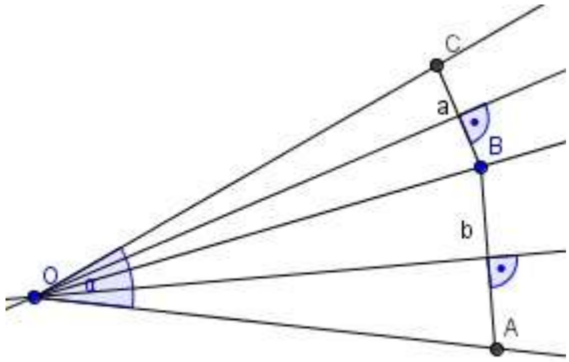
A 4.1. feladat látókörös okoskodásából az is látszik, hogy ha egy háromszögben adott egy oldal és a vele szemközti szög, akkor a két változó oldal közül a kisebbiket növelve a nagyobbik csökken, és közben a háromszög területe nő.



16. ábra: B pont csúsztatása

Emiatt, ha az OB szakasz hossza az $OA = OC$ szakasznál kisebb lenne, akkor a B pontot az OB félegyenesen kifelé mozgatva, közben az A és a C pontokat az OA, illetve OC egyenesen befelé mozgatva, úgy, hogy az AB és BC szakaszok hossza ne változzon, $OABC$ négyszög területét növelni tudnánk.

Hasonlóan, ha OB nagyobb lenne az $OA = OC$ szakasznál, akkor B-t O-hoz közelítve, A-t és C-t O-tól távolítva tudnánk növelni az $OABC$ négyszög területét. Ezzel beláttuk, hogy úgy lesz a legnagyobb a terület, ha $OA = OB = OC$. Ezt a megoldást a 17. ábra mutatja.



17. ábra: A megoldás

4.4 Egy kötéllel hogy vághatjuk le a legnagyobb területet?

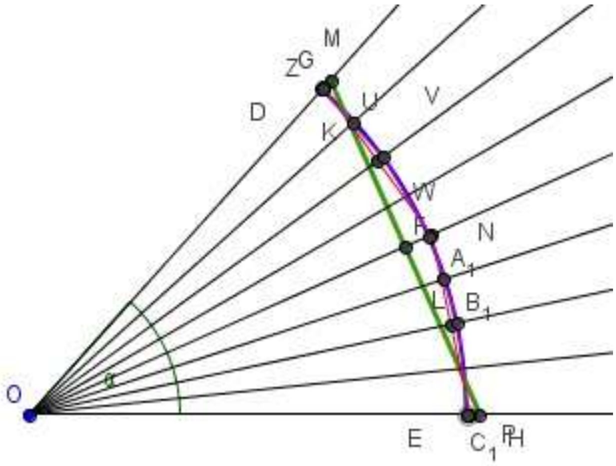
Egy α szögű szögtartományból hogy tudjuk a legnagyobb területet elkeríteni, ha ehhez egy l hosszúságú kötél áll a rendelkezésünkre?

Itt már nem sokszögekről van szó, hanem görbéről/görbeívről.

A Weierstrass-tétel egy általánosításával most is belátható, hogy létezik a területet maximalizáló görbeív, de ennek a bizonyítása túlnyúlik e szakdolgozat keretein.

A kötél abban tér el a csuklós négyszögtől, hogy hajlítható. Ezért most nem csak egy csuklópontunk van, hanem végtelen sok. Az eddigiek alapján megpróbáltam azt, hogy behúztam a szögfelezőt, majd erre állítottam merőlegest (hogy a levágott rész egyenlő szárú háromszöget alkosson).

Aztán behúztam a szögnegyedelőket, szögnyolcadolókat és így tovább. Látható, hogy mindig nagyobb területet tudtam elérni. Meddig kell ezt a felezgetést végeznünk? A sejtésünk, hogy akkor lesz a maximális a terület, amikor éppen egy olyan körív lesz a kötélből, ami l hosszúságú. Annak a körnek, ami ezt a körívet tartalmazza 0 a középpontja és



18. ábra: A sűrűsödő pontok szemléltetése

$$r = \frac{l}{\alpha}$$

a sugara. Észrevettem a szerkesztés közben, hogy amikor ki akartam jelölni a „szög-$2n$-edelőt” akkor mindig úgy kellett az O pontból köríveznem, hogy a sugár hossza

$$r' = \frac{\frac{l}{2n}}{\tan\left(\frac{\alpha}{2n}\right)}$$

minden $2n \geq 2$ esetére. Ekkor a kör és a „szög-$2n$-edelő” kimetszette azt a pontot, amin keresztül a „szög-$2n$-edelő”-re merőlegest tudtam állítani. A $2n$ darab kis háromszög egybevágó, hiszen az O csúcsnál egyforma szögeik vannak, mindegyik derékszögű, így a harmadik szögük mérete is megegyezik, ezek alapján hasonlók. Mivel az a derékszögnél lévő két befogó hossza megegyezik, ezért az is igaz, hogy egybevágóak.

Egy ilyen háromszög területe:

$$T_h = \frac{1}{2} r' \frac{l}{n} = \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{l}{2n}\right)^2}{\tan\left(\frac{\alpha}{n}\right)},$$

mivel a háromszögek egybevágóak, ezért $2n$ darab ilyen háromszög területe $2n$-szer ekkora:

$$2n \cdot T_h = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{l^2}{\tan\left(\frac{\alpha}{n}\right) \cdot n}.$$

Azt szeretnénk belátni, hogy $n \to +\infty$ esetén ennek a $2n$ háromszögnek a területe tart a körcikk területéhez, amit a következő összefüggés mutat:

$$T_k = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right) \cdot r^2 \cdot \pi = \frac{\alpha r^2}{2} = \frac{\alpha \cdot \frac{l^2}{\alpha^2}}{2} = \frac{l^2}{2\alpha}.$$

Hasonlítsuk össze a két összefüggést:

$$\frac{1}{4}\frac{l^2}{\tan\left(\frac{\alpha}{n}\right)\cdot n}\ ?\ \frac{l^2}{2\alpha}.$$

Az összefüggés kiderítése érdekében vizsgáljuk a bal oldalt! Ennek a kifejezésnek, hogy

$$\frac{1}{4}\frac{l^2}{\tan\left(\frac{\alpha}{n}\right)\cdot n}=\frac{1}{4}\frac{l^2\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{n}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{n}\right)\cdot n}.$$

$n\rightarrow+\infty$ esetét vizsgálva az adódik, hogy a számlálóban található $\cos\left(\frac{\alpha}{n}\right)$ határértéke $\lim_{n\rightarrow+\infty}\cos\left(\frac{\alpha}{n}\right)=1$, hiszen $\frac{\alpha}{n}$ értéke tart a 0-hoz. Az a kifejezés maradt, hogy

$$\frac{1}{4}\frac{l^2}{\sin\left(\frac{\alpha}{n}\right)\cdot n}.$$

Eszünkbe jut analízis óráról, hogy $\lim_{x\rightarrow 0}\frac{\sin x}{x}=1$ ebből adódóan a $\lim_{n\rightarrow+\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=1.$

Azért, hogy ezt az összefüggést fel tudjam használni, a törtet ki kell bővíteni $\frac{\left(\frac{\alpha}{2n}\right)}{\left(\frac{\alpha}{2n}\right)}$-nel. Ebből azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{4}\frac{l^2}{\sin\left(\frac{\alpha}{n}\right)\cdot n}\cdot\frac{\left(\frac{\alpha}{2n}\right)}{\left(\frac{\alpha}{2n}\right)}.$$

Ezt egy kicsit más csoportosításban leírva és határértéket számolva azt kapjuk, hogy

$$\lim_{n\rightarrow+\infty}\frac{1}{4}\frac{l^2}{\sin\left(\frac{\alpha}{n}\right)\cdot n}\cdot\frac{\left(\frac{\alpha}{2n}\right)}{\left(\frac{\alpha}{2n}\right)}=\lim_{n\rightarrow+\infty}\frac{\left(\frac{\alpha}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{n}\right)}\cdot\frac{l^2}{\left(\frac{\alpha}{2n}\right)\cdot n\cdot 4}=\frac{l^2}{2\alpha}.$$

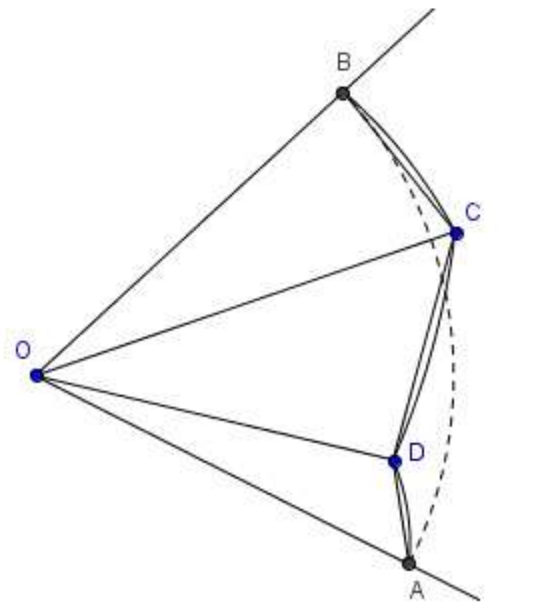
Kikaptuk tehát, hogy a sok kis háromszög területe tart a körcikk területéhez. Lehet-e a háromszögek területe ennél nagyobb?

Nem, hiszen minden kis háromszög területe maximális volt. Ezt onnan tudjuk, hogy minden háromszög esetén arra törekedtünk, hogy egyenlő szárú háromszögeket vágjunk le. Annál pedig nem lehet nagyobb területű.

Ez az elemzés elég sok mindent igénybe vesz, ami nem középiskolás tananyag. Ezért most bemutatok egy olyan bizonyítást, ami nem használ határátmenetet.

Azt szeretnénk belátni, hogy egy adott szögtartományból egy l hosszúságú kötéllel akkor tudunk a legnagyobb területet levágni, ha a görbe egy olyan körív, melynek középpontja éppen a szögtartomány csúcsa. Ez esetben is feltételezzük, hogy van legjobb görbe. Tegyük fel továbbá azt is, hogy ez a legjobb görbe nem a fent leírt körív. Ebben az esetben van C és D

pontja, melyek a szögtartomány O csúcsától különböző távolságra esnek. A görbe két végpontját jelöljük el A-val, illetve B-vel. Az $OA = OB = OC$ és az $OA = OB = OD$ egyenlőségek közül a feltevés miatt az egyik nem fog megvalósulni. Tegyük fel, hogy OA, OB és OC nem mind egyforma hosszúságúak. Ekkor az AC-ből és CB-ből álló csuklós töröttvonal nem maximális területű négyszöget vág le a szögtartományból, ezért a töröttvonal elmozgatásával a levágott terület növelhető. Amennyiben az AC és CB szakaszokkal együtt mereven elmozgatjuk a hozzájuk illeszkedő görbeíveket, akkor a kapott görbeívek egy olyan l hosszúságú görbét adnak, melyek nagyobb területű részt vágnak le a szögtartományból. Amennyiben az $OA = OB = OD$ egyenlőséglánc nem valósul meg, a bizonyítás teljesen hasonló módon végbemehet. A töröttvonalat úgy tudjuk a legjobb helyzetbe állítani, ha mindig egyenlő szárú háromszöget vágnak le. Az egyenlő szárak lesznek annak a körnek a sugarai, melynek része az a körív, ami a megoldást adja.



19. ábra: Az indirekt bizonyítás szemléltetése

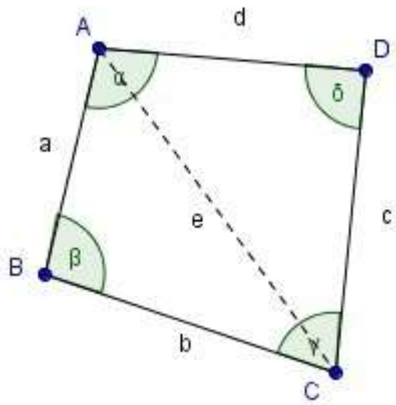
5. Fejezet

Csuklós négyszög területe mikor maximális?

Ebben a fejezetben egy állítást szeretnék belátni.

<u>Állítás</u>: Egy csuklós négyszög területe akkor maximális, ha húrnégyszög.

<u>Bizonyítás:</u> Az állítás egy négyszögről szól, így kiindulásképp felvázolok egy általános négyszöget, amin bemutatom a jelöléseket.



20. ábra: A jelölések

A feladat szövege szerint adottak külön-külön az a, b, c illetve d oldalak. A dolgozat során sokszor alkalmazott módszert fogom használni, nevezetesen azt, hogy a négyszöget felbontom két háromszögre és külön-külön maximalizálom ezek területét. A kettéosztást az egyik átló segítségével végzem el. Az e átló az ABC és a ACD háromszögben egyaránt közös, ezért a koszinusz-tétel segítségével mind a két háromszögből kifejezhető az e átló. Az ABC háromszögből azt kapjuk, hogy

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta,$$

az ACD háromszögből pedig azt az összefüggést, hogy:

$$e^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos\delta.$$

Látjuk, hogy a két kifejezés bal oldala egyenlő, ebből adódóan a jobb oldalak is egyenlők. Ezek alapján azt kapjuk, hogy

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta = c^2 + d^2 - 2cd\cos\delta.$$

A keletkezett háromszögek területére fel tudjuk írni azt, hogy

$$T_{ABC\Delta} = \frac{1}{2}ab\sin\beta$$

illetve:

$$T_{ACD\Delta} = \frac{1}{2}cd\sin\delta.$$

A feladatunk, hogy maximalizáljuk az $\frac{1}{2}(ab\sin\beta + cd\sin\delta)$ összefüggést a $a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta = c^2 + d^2 - 2cd\cos\delta$ feltétel mellett. A megoldás első gondolata, hogy a négyzetösszeges összefüggésből fejezzük ki vagy $\cos\beta$ vagy $\cos\delta$ értékét és azt helyettesítsük vissza a területösszegbe. Ez az összeg ekkor már csak egy ismeretlenes lesz (vagy β vagy δ lesz az ismeretlen attól függően, hogy $\cos\beta$ vagy $\cos\delta$ értékét fejeztük ki), aminek deriválással (esetleg felülről becsléssel) meghatározhatnánk a maximális értéket. Ez hosszadalmas, emiatt egy másik megoldást választottam.

Mivel ez egy csuklós négyszög, melynek az oldalhosszai adottak, ezért ha a β szöget változtatjuk, akkor változni fog a δ szög is. Ennek tudatában felírhatjuk a δ szöget úgy, mint a β szögnek a függvénye ($\delta(\beta)$). Mindezek alapján felírhatjuk a következőket:

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta = c^2 + d^2 - 2cd\cos\delta\,(\beta)$$

$$T = \frac{1}{2}(ab\sin\beta + cd\sin\delta(\beta)).$$

A terület maximalizálását deriválással szeretném végezni. Ezt a követekző számolás mutatja:

$$T' = \frac{1}{2}(ab\sin\beta + cd\sin\delta(\beta))'$$

a deriválást elvégezve azt kapjuk, hogy:

$$T' = \frac{1}{2}(ab\cos\beta + cd\cos(\delta(\beta))\cdot\delta'(\beta)).$$

A összefüggésben szerepel a $\delta'(\beta)$ kifejezés, amit pedig megkaphatunk az

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta = c^2 + d^2 - 2cd\cos\delta\,(\beta)$$

deriváltjából. Ennek érdekében elvégezzük ezt a deriválást is:

$$\left(a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta = c^2 + d^2 - 2cd\cos\delta\,(\beta)\right)'$$

$$2ab\sin\beta = 2cd\sin(\delta(\beta))\cdot\delta'(\beta).$$

Ebből kifejezhető a $\delta'(\beta)$ a β szög és az oldalhosszak arányában:

$$\delta'(\beta) = \frac{ab\sin\beta}{cd\sin\delta(\beta)}.$$

Ezt vissza tudjuk írni a $T' = \frac{1}{2}(ab\cos\beta + cd\cos(\delta(\beta))\cdot\delta'(\beta))$ összefüggésbe. Ekkor azt kapjuk, hogy:

$$T' = \frac{1}{2}\left(ab\cos\beta + cd\cos(\delta(\beta))\cdot\frac{ab\sin\beta}{cd\sin\delta(\beta)}\right).$$

Az összefüggést átrendezve az adódik, hogy:

$$T' = \frac{1}{2}(ab\cos\beta + \cot\delta(\beta)\cdot ab\sin\beta).$$

Ott lehet egy kifejezésnek szélsőértéke, ahol a derivált 0. Ennek alapján:

$$0 = \frac{1}{2}(ab\cos\beta + \cot\delta(\beta)\cdot ab\sin\beta).$$

Ezt átrendezve az adódik, hogy:

$$\cot\delta(\beta) = -\cot\beta$$

ez ekvivalens azzal, hogy :

$$\tan\delta(\beta) = -\tan\beta = \tan(-\beta)\,.$$

Ismeretes, hogy a tangens függvény periodicitása π, ezért a fenti egyenlet megoldás a következő alakot ölti:

$$\beta = -\delta + k\pi,$$

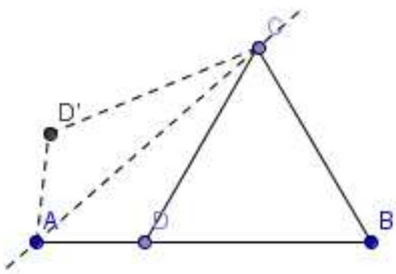
ahol $k \in \mathbb{Z}$. Ha $k = 0$ esetet vizsgáljuk, akkor vagy mind a két szög értéke 0 lenne, amiből nem kapnánk négyszöget, vagy az egyik szög mérete negatív lenne. Ezért a $k = 0$ esetet kizárjuk. Amennyiben a $k = 2$ esetet nézzük, akkor a két szög összege 2π lenne, így a másik két szög összege 0-t adna, ami szintén nem rajzol ki négyszöget. Ezek alapján k értéke 1. Ebből azt kapjuk, hogy a β és a δ kiegészítő szögek. Mivel a négyszög belső szögeinek összege 2π, ezért a másik két szög összege is π-vel egyenlő. Azt kaptuk, hogy a négyszög területe akkor lesz maximális, ha a szemközti szögeinek összege π. Ez pedig szükséges és elégséges feltétele annak, hogy a négyszög húrnégyszög.

A feladat megoldása során egy pici csalást engedtünk meg magunknak.

Azt írtam, hogy ott lehet szélsőérték ahol a derivált értéke 0-val egyenlő. Ez egy kis kiegészítést igényel. Ahol szélsőérték van, ott a

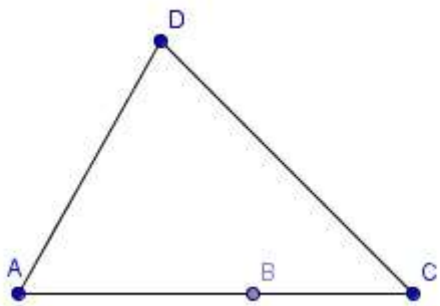
$T'(\beta) = 0$, vagy β az értelmezési tartomány határpontja. Ez utóbbi esetre még vizsgálatot kell végeznünk, hogy mi történik akkor, amikor β határpont. A mi értelmezési tartományunk (mivel négyszögre vizsgálódtunk) $\beta \in [0;\pi]$. Az azonban egyáltalán nem biztos, hogy a $\beta = 0$ vagy a $\beta = \pi$ eset meg is fog valósulni, mert lehet, hogy β-t növelve a négyszög valamelyik két oldala még azelőtt kiegyenesedik, hogy β elérné a 0 vagy a π értéket. Az adódik ebből, hogy a $\beta = \beta_{min}$ és a $\beta = \beta_{max}$ szélső szögértékekhez olyan négyszög tartozik, melyben két szomszédos oldal egy egyenesre esik. Ez kétféleképpen történhet meg.

Vizsgáljuk elsőként azt az esetet, mikor a négyszög egyik szöge éppen 0 fokkal egyenlő. Ebben esetben a négyszög tulajdonképp egy háromszög. Mindig meg tudjuk formálni ezt a háromszöget? Nem, hiszen csak akkor tudunk háromszöget előállítani három szakaszból. ha teljesül a háromszög-egyenlőtlenség. Erre a háromszögre ez a következő alakokat ölti: $|b - a| < c + d$, $|b - a| + c > d$ illetve $|b - a| + d > c$. Az utolsó két egyenlőtlenséget összefoglalva így is írjatjuk: $|b - a| > |c - d|$. Ez nem fog mindig teljesülni, hiszen ha például $b = a$, akkor az kellene, hogy $0 > |c - d|$ teljesüljön, ami nem lehetséges. Ha a háromszög teljesíti a háromszög-egyenlőtlenség feltételeit, akkor sem lehet maximális területű, hiszen tükrözni lehetne a D csúcsot az AC-n átmenő egyenesre, így területet nyernénk. Látjuk, hogy ezzel a megoldással elveszetettünk egy oldalt, amit ha „kinyitnánk", akkor a területet tudnánk növelni, ezért azzal, hogy ezt az esetet az előbb nem vettük figyelembe, nem vesztettünk megoldást.



21. ábra: Az egyik elfajuló eset

Nézzük a másik határpontot, amikor az egyik szög nagysága π. Ez sem mindig valósulhat meg, csak ha fennállnak a következők: $a + b < c + d$, $d < c + a + b$, $c < b + a + d$. (Ha éppen $\beta = \pi$.) Ha ezek teljesülnek, akkor háromszög alakítható ki. Mivel az oldalhosszak adottak, ezért ez egyértelműen meghatározott háromszög. Be kellene látnunk, hogy az így kapott háromszög területe



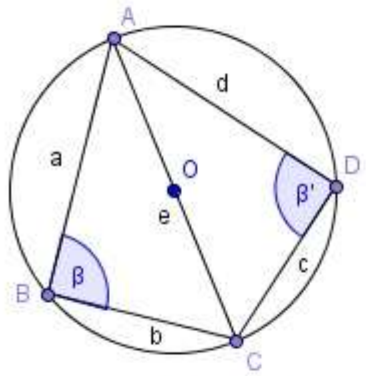
22. ábra: A másik elfajuló eset

kisebb, mint a húrnégyszög területe. Ezt úgy fogom bebizonyítani, hogy a húrnégyszögre és a háromszögre is felírom a Hérón-területképletet!

A húrnégyszögre vonatkozó Hérón-képlet szerint ha egy húrnégyszög oldalai a, b, c, d hosszúak, akkor a húrnégyszög területe

$$T = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

Hogy bizonyíthatjuk be ezt a képletet?



23. ábra: A jelölések

A 23. ábrán látható módon az e átló két háromszögre bontja a húrnégyszöget. A húrnégyszög területe egyenlő a két részháromszög területének összegével. A bizonyítás során kihasználjuk, hogy $\beta' = \pi - \beta$. Ebből adódóan:

$$T = \frac{1}{2}ab\sin\beta + \frac{1}{2}\mathrm{cd}\sin(\pi-\beta) = \frac{1}{2}(ab+cd)\sin\beta.$$

Ezt négyzetreemelve azt kapjuk, hogy

$$T^2 = \frac{1}{4}(ab+cd)^2\sin^2\beta.$$

A koszinusztétellel mind a két háromszögből kifejezhető az e átló négyzetének a hossza:

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta = c^2 + d^2 - 2cd\cos\beta' = c^2 + d^2 + 2cd\cos\beta.$$

Ezt alakítva az adódik, hogy :

$$2(ab+cd)\cos\beta = a^2 + b^2 - c^2 - d^2$$

$$(ab+cd)^2 \cdot \cos^2\beta = \frac{1}{4}(a^2+b^2-c^2-d^2)^2.$$

A fenti területképlet alapján:

$$T^2 = \frac{1}{4}(ab+cd)^2(1-\cos^2\beta).$$

Ezekből adódóan:

$$4 \cdot T^2 = (ab+cd)^2 - \frac{1}{4}(a^2+b^2-c^2-d^2)^2.$$

Ezt 4-gyel beszorozva, és átrendezve azt kapjuk, hogy:

$$16T^2 = [2(ab+cd)^2 + a^2 + b^2 - c^2 - d^2][2(ab+cd)^2 - (a^2+b^2-c^2-d^2)].$$

Kihasználva a hatványozás azonosságait, arra jutottunk, hogy:

$$16T^2 = [(a+b)^2 - (c-d)^2][(c+d)^2 - (a-b)^2].$$

Tovább alakítva azt kapjuk, hogy:

$$16T^2 = (a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d).$$

Ezután az $s = \frac{a+b+c+d}{2}$ félkerület jelölést bevezetve, gyököt vonva az adódik, hogy:

$$T = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}. \qquad [3]$$

Ezt visszaírva a fenti képletbe az adódik, hogy:

$$T = \sqrt{\left(\frac{-a+b+c+d}{2}\right)\left(\frac{a-b+c+d}{2}\right)\left(\frac{a+b-c+d}{2}\right)\left(\frac{a+b+c-d}{2}\right)}.$$

Háromszög esetén, melyet a 22. ábra mutat a terület nem más, mint:

$$T = \sqrt{s(s-(a+b))(s-c)(s-d)}.$$

Ebben a kifejezésben s szintén a félkerülettel egyenlő. Így az adódik, hogy:

$$T = \sqrt{\left(\frac{a+b+c+d}{2}\right)\left(\frac{-a-b+c+d}{2}\right)\left(\frac{a+b-c+d}{2}\right)\left(\frac{a+b+c-d}{2}\right)}.$$

Innentől a feladatunk ezt a két területet összehasonlítani.

Látjuk, hogy három tényező megegyezik a négyzetgyök alatti szorzatokban, ezért csak a megmaradtakat kell összehasonlítanunk. Ezek pedig a következők:

$$\sqrt{\left(\frac{-a+b+c+d}{2}\right)\left(\frac{a-b+c+d}{2}\right)} \text{ illetve: } \sqrt{\left(\frac{-a-b+c+d}{2}\right)\left(\frac{a+b+c+d}{2}\right)}$$

Tudjuk, hogy a, b, c, d oldalhosszakat jelöl, ebből adódóan ezek pozitív számok. A négyzetgyök függvény szigorúan monoton növő tulajdonsága miatt elég a kifejezések négyzetét vizsgálni.

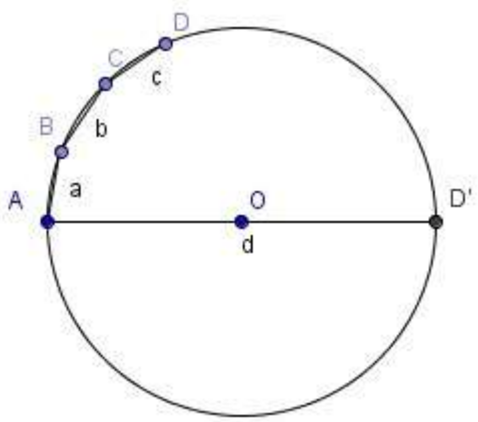
Használva az $s = \frac{a+b+c+d}{2}$ kifejezést, az $(s-a)(s-b)$, illetve a $s[s-(a+b)]$ szorzatokatt kell összehasonlítani. Ezeket kibontva:

$$s^2 - s(a+b) + ab \text{ illetve } s^2 - s(a+b)$$

adódik. Látjuk, hogy a bal oldal a nagyobb, hiszen ab pozitív a többi tag pedig megegyezik a két kifejezésben. Beláttuk, hogy ennek az esetnek az elhanyagolásával sem vesztettünk megoldást.

A kitérők és a levezetések bemutatták, hogy a húrnégyszög esetén lesz a csuklós négyszög területe maximális.

Vizsgáljuk most meg azt, hogy milyen oldalhosszak esetén nem lesz megoldása a feladatnak! Akkor nem lesz megoldás, ha a négy oldalból nem tudunk összetenni egy négyszöget. Ez pedig csak úgy valósulhat meg, ha az egyik oldal a négy közül hosszabb, mint a mások három oldal hosszának



24. ábra: A szerkeszthetetlen adatok

összege. Ezt az esetet a 24. ábra mutatja. Látjuk, hogy az átmérőbe tettem a leghosszabb oldalt, hiszen az átmérő a leghosszabb húrja a körnek. Ha nem ide tennénk a leghosszabb oldalt, akkor még nagyobb kör lenne, még úgy sem érnék el a szakaszok a D' pontot. A D pont közelebb tud kerülni a D'-höz, ha az O középpontot az AD felezőmerőlegesén modítjuk el. Viszont ha $AB + BC + CD < AD$, akkor így sem fog D soha D'-be érni.

6. fejezet
Befejezés

Szakdolgozatom végére érve szeretném összefoglalni, hogy miről is szóltak az iménti oldalak. Elsőként kimondtam egy tételt, amivel azt támasztottam alá, hogy léteznek az általam megkeresett maximális területek. Áttekintettük a területképleteket. Láthattuk, hogy háromszögek esetén, ha meg van adva két csúcs, hová kell letenni a harmadikat, hogy maximális területet érjünk el. Tudunk már kerületet minimalizálni is, amennyiben adott a terület.

Tudjuk, hogy téglalap, rombusz, illetve általánosságban a négyszögek esetén hogy kell eljárni, ha adott a kerület és maximális területet szeretnénk elérni.

A szögtartomány esetére is vizsgálatokat végeztem, hogy különböző esetekben mikor lesz a maximális a terület. A dolgozat írása során ez a fejezet tetszett a legjobban. A sok-sok gondolkodás, a rengeteg szerkesztés, amelyek nem vezettek célra megmutatták, hogy egy egyszerűnek tűnő feladat nem feltétlenül egyszerű.

Utolsó témakörként pedig azzal foglalkoztam, hogy a csuklós négyszög területe mikor maximális.

A dolgozat során világossá vált, hogy ez a tudás nagyon hasznos lehet különböző tervezéseknél, például szoba berendezésének elgondolásánál, vagy akár egy kert beültetésekor. Úgy gondolom, hogy nagyon hasznos, ha az ember jobban belemélyed egy ilyen témába, hiszen ezt a tudást az életben is tudja kamatoztatni.

Irodalomjegyzék:

[1]: Sikolya Eszter: BSc Analízis I. előadásjegyzet

http://bolyai.cs.elte.hu/~seszter/oktatas/2009_10_1/BSc_ea/BSc_analizis_I_eloadas.pdf

[2]: Verhóczki László: Geometria előadás matematikatanároknak

http://phil.elte.hu/~attila/math/geometriajegyzet/geometria_.pdf

[3]: http://gorbem.uw.hu/Matek/Heron.htm