EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Matematikatanítási és Módszertani Központ

Matematika tanári alapszak

Budapest

Hollywoodi matematika

SZAKDOLGOZAT

Készítette: Kőhalmi Krisztina

Konzulens: Wintsche Gergely

2014

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

„A matematika annyira komoly szakterület, hogy egyetlen alkalmat sem szabad elmulasztanunk arra, hogy szórakoztatóbbá tegyük.”

(Blaise Pascal)

A matematika, mint egyfajta misztikus, kézzel foghatatlan tudományág, egyre gyakrabban jelenik meg a fiatalságot leginkább megmozgató médiumokban, a televízióban és a mozivásznon. Az elmúlt évtizedek során számos film és sorozat használta fel meghatározó szereppel, vagy érintőlegesen a témát, hol hiteles, hol kevésbé megbízható formában. A tudományok, és köztük a matematika térhódítása a filmes témák körében többféle okból is bekövetkezhetett. Úgy, mint a misztikum és az ismeretlenség csalogató mivolta, vagy arra való törekvés, hogy az embereket, s köztük főleg az ifjabb generációkat közelebb hozzák e tudományágakhoz. A legtöbb ember számára a matek a gyűlölt tárgy, ami a legkevésbé érthető és feldolgozható, megszerethető és egyáltalán érdeklődést kiváltó. A tévéképernyőn való megjelenése a gyártók és forgatókönyvírók reménységei szerint a nézettség növekedését hozza, éppen e miatt a titokzatos és elérhetetlen tulajdonsága miatt, míg a szakterület művelőinek reménységében az ifjúság és a matematika egymáshoz közelítése szerepel.

A matematikát szerethetővé és játékossá tenni nagy feladat, de remek módja a fiatalokkal való megszerettetésének. Ezek a filmek és sorozatok talán erre az útra léphetnek, de megvan bennük a veszélye annak is, hogy távolabb sodorják a célközönséget e területtől. Bizonyos alkotások túlmutathatnak azon a szinten, ami érdeklődést vált ki és ezzel megerősíthetik az idegenség érzését, esetleg hiteltelenségükkel a befogadók bizalmát veszthetik el. Ha azonban megtalálják a megfelelő utat, nagyobb élményt nyújthatnak a nézőknek, mint amit az addigi tapasztalataik adtak. Manapság ki ne ismerné a *Csodálatos elme (A Beautiful Mind)*, vagy a *Good Will Hunting* című filmet, esetleg a *Gyilkos számok (Numb3rs)* című sorozatot, hogy csak néhány példát soroljak fel azon filmek közül, amelyek mind matematikai tartalmak felhasználásával születtek és váltak sikeressé és ismertté.

Az elmúlt 70 évben számos olyan filmsiker született, amiken keresztül megismerhetjük a kaszinók világát és játékaikat. Dolgozatomat a fiatalok körében az egyik legismertebb film, a *21 – Las Vegas ostroma* című film ihlette, de ilyen a teljesség igénye nélkül az 1995-ös *Casino* Robert De Niro főszereplésével, vagy a Las Vegas című sorozat, ahol egy-egy részben szintén megjelennek maguk a játékok is és a matematikát segítségül hívó játékosok. A szerencsejátékok és kaszinók világában sokkal nagyobb szerepe van a matematikának, mint azt a legtöbb ember gondolná. A játékosok szerencséje csak az egyik összetevője ezeknek a játékoknak, míg a kiszámítható valószínűségek inkább a háznak kedveznek. Ezek ismerete nem illegális, de vannak betartandó szabályok, és ezek megszegését a játéktermekben nem nézik jó szemmel. Szó lesz a későbbiekben a Craps nevű kockajátékról, amit talán a legtöbbször jelenítenek meg a mozivásznon. Így például *A Szerencseforgató*, a *Tisztességtelen ajánlat*, vagy a *Míg a Jackpot el nem választ* című filmekben. A pókert és a BlackJacket szintén sokszor feldolgozták, például a *Pókerarcok* vagy az *Esőember* című filmben. Többrészes filmsorozatok is épülnek e köré a világ köré. Az Ocean's 11-től az Ocean's 13-ig, de még a neves James Bond sorozat több részében is megjelennek kaszinók és velük együtt a szerencse mögé bújtatott matematika.

1.1.Célkitűzések

Mint korábban már említettem, van, hogy ezek a filmek kissé homályosan, elmosva tárgyalnak egy-egy részt, nem mindig hiteles információkat közölnek, vagy olyan tételeket mutatnak be, melyeknek nem feltétlenül van köze az elmondottakhoz. Természetesen az az opció is fennáll, hogy az adott film, vagy sorozatepizód megfelelően boncolgat egy témát, tényleges és bizonyítható adatokat közöl. Egy szóval ezeket az alkotásokat több szempont alapján is elemezhetjük. Dolgozatomban ismert mozifilmekben megjelenő, kedvelt kaszinójátékokat és matematikai modelljüket fogom bemutatni. Foglalkozom a Craps nevű kockajáték feldolgozásával, majd beszélek a BlackJack, vagyis a 21 nevű kártyajátékról, amit többek között a 21 – Las Vegas ostroma című film is feldolgozott. Itt a történet elején a Monty Hall paradoxonként is ismert játékmester probléma is megjelenik, amit én is beleépítek a szakdolgozatomba.

A BlackJack a kaszinók közkedvelt játéka világszerte, melyet egyszerű szabályai és látszólagosan jó esélyt kínáló lehetőségei a játékosok körében is népszerűvé tették. Látszólagos lehetőség alatt arra gondolok, hogy a kezdő játékosok, akik nem mélyednek bele a BlackJack lényegébe és valószínűségeibe, úgy gondolják, hogy a játék nagyobb mértékben a szerencséről, és csak kisebb részben a tudásról szól. Az alábbiakban bemutatjuk, hogy a ház (a kaszinó), a paklik számából és a játékosok érzelmeikre való hagyatkozásából adódó előnye teljes mértékben ledolgozhatatlan, de ahhoz, hogy minimálisra redukáljuk azt, komolyabb matematikára, nagy koncentrációra, alapos és hosszas gyakorlásra, a tetteinket befolyásoló érzelmeink és intuícióink félretevésére van szükség. Emellett bizonyos trükkök is segítségünkre lehetnek abban, hogy veszteség helyett kisebb-nagyobb nyereménnyel távozhassunk az asztaltól, így például a lapszámolás.

Ezzel szemben a Crapsben a nyerés valószínűsége viszonylag nagy, a kaszinójátékok közül legalábbis a legjobb lehetőségekkel ez jár. Ezen kívül egy elég egyszerű játék, inkább a tétrakás és a tétarány az, ami meggondolást igényel. A két játék matematikai hátterüket tekintve is különbözik. Míg a Crapsben a győzelem két kocka dobásának eredményéből áll, a BlackJack 1-8 pakli kártyával is játszható, így sokkal nagyobb eseményteret használ. Ebből kifolyólag az említett kockajáték valószínűsége néhány egyszerű lépésben bemutatható, a BlackJack eseményeinek meghatározása mélyebb meggondolást, hosszadalmas és fáradságos számolásokat kíván.

A következőkben bemutatom a Craps játékot, annak szabályait és kiszámolom a nyerés valószínűségeit. Ezek után a Las Vegas ostroma című filmben megjelenő matematikai tartalom logikai rendjét követve kifejtem a 21 játékkal kapcsolatosan megjelenő matematikai tartalmakat, és röviden ismertetem a BlackJack szabályait és a játék körülményeit.

1.2. A dolgozat felépítése

Elsőként az említett film kezdetén (14. perc) megjelenő játékmester problémát fogom bemutatni, amely az érzelmeket félre tevő, pusztán matematikai gondolkodás fontosságát hívatott hangsúlyozni. Majd ezután a Craps szabályait és matematikai hátterét ismertetem. A dolgozat nagyobb részében pedig a BlackJack stratégiák és taktikák nyomon követésével foglalkozom, amik pusztán matematikai számítások útján, az intuíciókat félretéve vezetnek minket a sikeres játék ösvényén.

A dolgozat további részeihez elengedhetetlen a 21 szabályainak ismerete, így röviden részletezni fogom ezeket és a nyereséges játékhoz szükséges trükköket és taktikákat.

Gondolhatunk itt a lapszámolási technikákra és azok közül is a legnépszerűbbre, a Hi-Lo rendszere, valamint a különböző stratégiákra, amelyek az adott leosztásokhoz tartozó optimális lépéseket részletezik. Bemutatom az interneten és egyéb forrásokban fellelhető, stratégiai lépéseket tartalmazó táblázatokat. Felvázolom, milyen matematikai számítások révén juthatunk el az alkalmazandó eredményekig, hogyan állapíthatjuk meg bizonyos lapállások esetén, mi a legmegfelelőbb döntés.

2. Játékmester probléma

A film első negyedében megjelenő játékmester probléma, amit más néven Monty Hall - paradoxonnak[1] is szokás nevezni, egy amerikai televíziós vetélkedőben jelent meg először. Az utolsó feladatban a játékosnak három ajtó közül kellett választania, amelyek mögött egy új autó, illetve két kecske (vagy, ahogy a 21 című filmben szerepelt, két roncs) állt. Miután a versenyző kiválasztott egy ajtót, a játékmester, aki tudta, hol van az autó, kinyitott egy másikat, amely mögött egy kecske volt. Ez után felajánlotta az újraválasztás lehetőségét a játékosnak, aki megváltoztathatta a döntését, vagy maradhatott az eredetileg megjelölt ajtónál. A felmerülő és megválaszolandó kérdés tehát az, hogy átpártolni, vagy az elsőnek választott ajtónál maradni érdemesebb? A valószínűség eszközeivel beláthatjuk, hogy minden esetben váltanunk kell, ez azonban némileg ellentmond a józan észnek, az emberek megérzéseinek. Izgatottan, a nagy nyeremény kapujában közbe szólhat a félelem, a feszültség. Ezek miatt a jellemző szituációk miatt érdekes számunkra a probléma felbukkanása a filmben, hiszen a puszta matematikai eredményekre való hallgatásunk az, ami a nagyobb nyeremény valószínűségéhez vezet minket, akár csak a BlackJack stratégiáknál.

A következőkben a játékmester probléma elméleti hátterét és az újraválasztás fontosságának matematikai bizonyítását részletezem majd. Ennek során a felhasznált elméleti és gyakorlati ismeretek a 21 kártyajáték matematikai boncolgatásához is alapul fog szolgálni. Az elméleti rész olyan ismereteket tartalmaz, amelyekre részben már szert tehettünk az egyetemi előadások során, így csak szemléletes példákat említek majd.

[1] Wikipédia: Monty Hall – paradoxon, utolsó módosítási dátum: 2013.07.24. utolsó letöltés: 2013.10.30., link: http://hu.wikipedia.org/wiki/Monty_Hall-paradoxon

2.1. Elméleti háttér

A valószínűségszámítás véletlen jelenségek matematikai modelljeivel foglalkozik, amelyek lefolyását nem határozzák meg rögzített feltételek és körülmények, vagyis több lehetőség van a kimenetelükre nézve. E sztochasztikus folyamatoknak (kísérletnek) meg tudjuk mondani, hogy mik a lehetséges eredményeik. Meg tudunk adni egy Ω halmazt, ezeknek a kimeneteleknek a halmazát, amit eseménytérnek nevezünk.

1. *Definíció*: Az összes lehetséges kimenetelből álló Ω halmaz a kísérlet eseménytere.

Fontos, hogy ezek a sztochasztikus folyamatok azonos körülmények között akárhányszor megismételhetők, így a valószínűségszámítás tulajdonképpen olyan törvényszerűségekkel foglalkozik, amelyek a jelenségek többszöri megismétlése során érvényesülnek. A véletlen kísérletekkel kapcsolatban eseményekről beszélhetünk, állításokról, amelyek helyességét a kísérlet kimenetele dönti el. Egy kísérlet során egy esemény vagy bekövetkezik, vagy nem. Ezek az Ω eseménytér részhalmazai, mivel minden eseményhez hozzárendelhető az Ω-nak egy olyan részhalmaza, amely az eseményt megvalósító kimenetelekből áll. Ha két eseményt ugyan az a részhalmaz képvisel, nem teszünk különbséget köztük. Az eseményeket általában a latin ábécé nagy betűivel jelöljük.

2. *Definíció*: Az A esemény az Ω eseménytér részhalmaza.
3. *Definíció*: Egy kísérlet eseményeinek összességét (Ω részhalmazainak összessége) írott $\mathcal{A}$ betűvel jelöljük.

A kísérletek kimeneteleivel kapcsolatban arra vagyunk kíváncsiak, mekkora a valószínűsége annak, hogy bekövetkezik-e egy bizonyos esemény. A valószínűség szemléletes definícióját a relatív gyakoriság fogalmával adjuk meg. Ha a kísérletet n-szer, azonos körülmények között elvégezzük (n hosszú kísérletsorozat), az esemény gyakorisága, ν_A azoknak a kimeneteleknek a száma, amikor az esemény bekövetkezett. Az esemény relatív gyakorisága így az esemény gyakoriságának és a kísérlet hosszának hányadosa, ami minden kísérlet során más értékű lehet, de a véletlen jelenségek körében bizonyos stabilitást mutat.

4. *Definíció*: Az A esemény relatív gyakorisága egy n hosszú kísérletsorozatban $g_A = \frac{\nu_A}{n}$.

Az A esemény bekövetkezik, ha a kísérlet kimenetele (Ω egy eleme) eleme az A halmaznak (Ω egy részhalmaza). A teljes Ω halmaz, mint esemény a biztos esemény, hiszen bármi is a kísérlet kimenetele, bekövetkezik. A biztos eseményt így szintén Ω-val jelöljük. Az üres halmaz, mivel nincs eleme (Ω egyetlen eleme sem tartozik bele), nem következhet be. Lehetetlen eseménynek nevezzük, jele: $\emptyset$. Az A esemény maga után vonja a B-t, vagyis A részhalmaza B-nek, ha A bekövetkezése esetén B is bekövetkezik, $A \subseteq B$. Természetesen, ha $A \subseteq B$ és $B \subseteq A$, akkor A és B egyenlők. Bármely A és B eseményhez hozzárendelhető egy C esemény, az A és B összege, $A + B$, amely Ω azon elemeiből áll, melyek A és B közül legalább az egyikhez hozzátartoznak, vagyis A és B esemény közül legalább az egyik bekövetkezik. Ugyanígy meg lehet adni véges sok esemény összegét: $A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_n$, vagy $\sum_i A_i$ $(\mathrm{i} = 1, 2, \ldots \mathrm{n})$. Az összeghez hasonlóan bármely A és B eseményhez létezik egy C esemény, amit a két esemény szorzatának hívunk. Ω azon elemeiből áll, amelyek A-hoz is és B-hez is tartoznak, vagyis A és B is bekövetkezik. Véges sok esemény szorzata: $A_1 A_2 A_3 \ldots A_n$ vagy $\prod_i A_i$ $(\mathrm{i} = 1, 2, \ldots \mathrm{n})$. Az A és B esemény egymást kizáró események, ha szorzatuk a lehetetlen esemény, vagyis együtt nem következhetnek be. Minden A eseményhez hozzárendelhető egy $\overline{A}$ esemény, az A komplementer eseménye, vagy az ellentettje, ami Ω azon pontjaiból áll, amelyek nem tartoznak bele A-ba, vagyis $\overline{A}$ akkor, és csak akkor következik be, ha A nem következik be.

5. *Definíció*: Az Ω eseménytér bizonyos részhalmazainak összességét, $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-t, halmazalgebrának nevezzük, ha teljesülnek rá:

i. $\Omega \in \mathcal{A}$
ii. ha $A \in \mathcal{A}$, akkor $\overline{A} \in \mathcal{A}$
iii. ha $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{A}$, akkor $A + B \in \mathcal{A}$

Egy halmaz összes részhalmazai mindig halmazalgebrát alkotnak.

6. *Definíció*: Az eseménytér részhalmazainak halmazalgebráját eseményalgebrának nevezzük, egyelemű részhalmazait pedig elemi eseményeknek.

Az elemi események egymást páronként kizáró események, összegük a biztos esemény. Ha az Ω elemszáma, $|\Omega| = n$, az Ω összes részhalmazaiból álló $\mathcal{A}$ eseményalgebrában lévő események száma 2^n.

Egy tetszőleges véletlen jelenséget matematikailag a kísérlet lehetséges kimeneteleinek Ω halmazával és az $\mathcal{A}$ eseményalgebrával adhatunk meg, *(Ω,𝒜)*, ahol az $\mathcal{A}$ elemeit eseményeknek nevezzük. Ha egy kísérlettel kapcsolatban csak véges, vagy megszámlálható sok kimenetelt tudunk megfigyelni, akkor megválaszthatjuk úgy az eseményteret, hogy az események összessége az eseménytér összes részhalmazaiból álljon.

7. *Definíció*: Azt mondjuk, hogy az $A_1, A_2, \ldots A_n$ események teljes eseményrendszert alkotnak, ha teljesül:

i. $A_i \neq \emptyset$ $(\mathrm{i} = 1, 2, \mathrm{ek})$,
ii. $A_i A_j = \emptyset, \mathrm{i} \neq \mathrm{j}$, (egymást páronként kizáró események, $\mathrm{j} = 1, 2, \ldots \mathrm{n}$),
iii. $\sum_{\mathrm{i}} A_i = \Omega$.

Egy esemény valószínűségét a relatív gyakorisággal tudjuk közelíteni, ekkor egy n hosszú kísérletben $g_n(A)$ az A esemény relatív gyakorisága. Az előzőek alapján $g_n(A) \leq 1$, $g_n(\Omega) = 1$, ha $AB = \emptyset$, akkor $g_n(A + B) = g_n(A) + g_n(B)$.

8. *Definíció*: Egy kísérlettel kapcsolatos $\mathcal{A}$ eseményalgebra elemein értelmezett *P(A) (A∈𝒜)* függvényt valószínűségnek nevezünk, ha a következő feltételek teljesülnek:

i. $P(A) \geq 0$
ii. $P(\Omega) = 1$
iii. $A_1, A_2, \ldots A_n \in \mathcal{A}$ és $A_i A_j = \emptyset$ $(i \neq j)$ $(\mathrm{i}, \mathrm{j} = 1, 2, \ldots \mathrm{n})$ esetén $P(\sum_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

Az *(Ω, 𝒜, P)* hármast a *P* fenti tulajdonságaival véges valószínűségi mezőnek nevezzük.

9. *Definíció*: Adott egy *(Ω, 𝒜, P)* valószínűségi mező, egy $B \in \mathcal{A}$ esemény, ahol $P(B) > 0$. Egy tetszőleges $A \in \mathcal{A}$ eseménynek a B feltétel melletti feltételes valószínűsége

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Ha $A_1, A_2, \dots A_n \in \mathcal{A}$ tetszőleges események és $P(A_1 A_2 \dots A_n) > 0$, akkor

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2) \dots P(A_n|A_1A_2 \dots A_{n-1}).$$

Ha $A_1, A_2, \dots A_n$ páronként kizáró és pozitív valószínűségű események sorozata, és $\sum_i P(A_i) = 1$, B pedig tetszőleges esemény, akkor

$$P(B) = \sum_i P(B|A_i)P(A_i)$$

Ez a teljes valószínűség tétele.

Thomas Bayes brit matematikus a feltételes valószínűség és fordítottja közötti kapcsolatok tekintetében a következő teljes eseményrendszerekre alkalmazható tételt adta meg. Tegyük fel, hogy az $A_1, A_2, \dots A_n$ események teljes eseményrendszert alkotnak, B egy tetszőleges pozitív valószínűségű esemény, akkor

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_k P(B|A_k)P(A_k)} = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)}, \quad (i = 1, 2, \dots n).$$

Bayes nem a gyakoriságban, hanem a valószínűségben való hitet teremtett, amivel lehetővé tette a valószínűség alkalmazását minden helyzetben. A wikipédia szerint Bayes úgy definiálja a valószínűséget: „Egy esemény valószínűsége az arány aközött, hogy mi az elképzelés, attól függően, hogy az eseménynek milyen lehetséges kimenetelei lehetnek, valamint a várt dolog értéke között a megfigyelt következtetések alapján."

10. Definíció: *(Ω, 𝒜, P)* tetszőleges valószínűségi mező, az $A \in \mathcal{A}$ *és* $B \in \mathcal{A}$ *események* függetlenek, ha

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Ha A *és* B a fenti definíció alapján függetlenek és $P(A) > 0$, akkor

$$P(B|A) = \frac{P(B)P(A)}{P(A)} = P(B).$$

Ha $P(A) = 0$, vagy $P(A) = 1$, akkor az A *esemény* minden más eseménytől független. Ha A *és* B független, akkor A *és* $\bar{B}$, $\bar{A}$ *és* B, $\bar{A}$ *és* $\bar{B}$ is függetlenek.

11. Definíció: Az $A_1, A_2, \dots, A_n$ eseményeket teljesen függetlennek mondjuk, ha az $i_1, i_2, \dots, i_k (k = 2, 3, \dots, n)$indexek minden választása mellett fennáll, hogy

$$P\left(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k}\right) = P\left(A_{i_1}\right) P\left(A_{i_2}\right) \dots P\left(A_{i_k}\right).$$

Ha $A_1, A_2, \dots, A_n$ a 11. definíció alapján vett független események, akkor az események közül akárhogyan választunk ki k darabot $(k = 1, 2, \dots, n)$ és azokat ellentettjükkel pótoljuk, továbbra is független eseményeket kapunk.

12. Definíció: Legyen *(Ω, 𝒜, P)* valószínűségi mező, $\mathcal{T}_1 = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ és $\mathcal{T}_2 = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ két teljes eseményrendszer $\left(A_i \in \mathcal{A}, B_j \in \mathcal{A}; i = 1, 2, \dots n, j = 1, 2, \dots n\right)$. $\mathcal{T}_1$ *és* $\mathcal{T}_2$ teljes eseményrendszereket függetlennek nevezzük, ha minden *i*-re és *j*-re

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{A_i B_j}\right) = \mathrm{P}(\mathrm{A_i}) \mathrm{P}(\mathrm{B_j}).$$

13. Definíció: A $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \dots, \mathcal{T}_n$ teljes eseményrendszereket akkor mondjuk függetlennek, ha bárhogyan kiválasztva egy-egy eseményt, az egyes eseményrendszerekből, az így kapott *n* darab esemény független.

14. Definíció: Legyen *(Ω, 𝒜, P)* valószínűségi mező, $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}$, $\mathcal{A}_2 \subseteq \mathcal{A}$ pedig tetszőleges eseményalgebrák. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{A}_1$ *és* $\mathcal{A}_2$ függetlenek, ha minden $A_1 \in \mathcal{A}_1$ *és* $A_2 \in \mathcal{A}_2$ esetén

$$P(A_1 A_2) = P(A_1) P(A_2).$$

15. Definíció: Legyen *(Ω, 𝒜, P)* valószínűségi mező. Az *Ω* eseménytér ω elemein értelmezett $\xi(\omega)$ függvényt valószínűségi mezőnek nevezzük, ha minden $a < b$ valós számpárra azoknak az ω kimeneteleknek az összessége, melyekre $a \leq \xi(\omega) < b$ teljesül, véletlen esemény (vagyis $\in \mathcal{A}$).

A 15. definíció alapján $P(a \leq \xi(\omega) < b)$ valószínűség minden $a < b$ számpár esetén értelmezett.

16. Definíció: Legyen ξ valószínűségi változó. A $P(a \leq \xi < b)$ valószínűségek összességét, ahol $a < b$ tetszőleges valós számpár, a ξ valószínűségi változó eloszlásának nevezzük.

17. Definíció: A $P(\xi < x) = F(x)\,(-\infty < x < +\infty)$ függvényt a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvényének nevezzük.

A ξ valószínűségi változó eloszlása és eloszlásfüggvénye kölcsönösen egyértelműen meghatározzák egymást. Bármilyen $F(x)$ eloszlásfüggvény a következő tulajdonságokkal rendelkezik: $F(x)$ monoton nem-csökkenő, balról folytonos és $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$, $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$. A gyakorlatban kétfajta eloszlásfüggvény fordul elő a leggyakrabban, a diszkrét valószínűségi változó és a folytonos eloszlású valószínűségi változóé.

18. Definíció: A ξ valószínűségi változót diszkrétnek nevezzük, ha lehetséges értékeinek halmaza megszámlálható, azaz az általa felvett értékek véges, vagy megszámlálhatóan végtelen számsorozatba rendezhetők.

19. Definíció: Jelöljük a ξ által felvett értékeket x_0, $x_1, \dots$. Diszkrét valószínűségi változó esetén a $P(\xi = x_i)$ számokat nevezzük a ξ változó eloszlásának. Jelölje A_i a $(\xi = x_i)$ eseményt, ahol $i = 0, 1, \dots$. A_i események egymást páronként kizárják, mivel ξ az x_i értékek közül valamelyiket biztosan felveszi. Így $\{A_i\}$ eseményrendszer teljes és $\sum_i P(A_i) = 1$.

Így a diszkrét valószínűségi változó meghatároz egy teljes eseményrendszert, amit ξ által generált teljes eseményrendszernek nevezünk. A diszkrét valószínűségi változó eloszlásfüggvénye az x_i pontokban szakadásos, két, nagyság szerinti sorrendben növekvő x_i pont között pedig állandó értéket vesz fel. A szakadás nagysága az x_i pontban a $P(\xi = x_i)$ valószínűséggel egyenlő.

20. Definíció: A ξ valószínűségi változót és eloszlását folytonosnak mondjuk, ha ξ eloszlásfüggvénye folytonos.

21. Definíció: A ξ valószínűségi változó eloszlását és eloszlásfüggvényét abszolút folytonosnak mondjuk, ha a ξ eloszlásfüggvénye, $F(x)$ előállíthat

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

alakban, ahol az $f(t)$ függvény véges sok ponttól eltekintve folytonos, az integrál pedig Riemann-integrál.

Ha *F(x)* abszolút folytonos, akkor

i. $F(x)$ folytonos
ii. Azokban a pontokban, ahol $f(x)$ folytonos, $F(x)$ differenciálható és $F'(x) = f(x)$.
iii. $f(x) \geq 0$ *és* $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$.

Ha $F(x)$ abszolút folytonos, akkor tetszőleges $a < b$ valós számokra

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

22. Definíció: Ha a ξ diszkrét valószínűségi változó lehetséges értékei $x_1,\ x_2, \dots$ és $P(\xi = x_k) = p_k$, akkor a $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ számot a ξ várható értékének nevezzük és $E(\xi)$-val jelöljük.

$$E(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k\ ,$$

feltéve, hogy a jobb oldalon álló sor abszolút konvergens.

Az abszolút konvergenciára azért van szükség, mert ha nem teljesül, a sor összege átrendezéssel megváltoztatható lenne, a várható érték pedig nem lenne egyértelműen definiálva. Ha a $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ sor nem abszolút konvergens, akkor azt mondjuk, hogy a ξ valószínűségi változónak nem létezik várható értéke.

Ha a ξ valószínűségi változó korlátos, akkor létezik ξ várható értéke. Ha ξ 1 valószínűséggel egy c állandóval egyenlő, akkor $E(\xi) = c$. Ha $E(\xi)$ létezik, akkor $E(c\xi)$ is létezik és $E(c\xi) = cE(\xi)$. Ha $\xi_1,\ \xi_2, \dots ,\ \xi_n$ diszkrét valószínűségi változók, ξ_k lehetséges értékei $x_{k1},\ x_{k2}, \dots (k = 1, 2, \dots n)$, $f(x_1, x_2, \dots\ x_n)$ egy n változós függvény, akkor az $f(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n)$ valószínűségi változó értékét a következőképp számolhatjuk ki:

$$E\big(f(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n)\big) = \sum_{i_1, i_2, \dots i_n} f\big(x_{1i_1}, \dots x_{ni_n}\big) P(\xi_1 = x_{1i_1}, \dots \xi_n = x_{ni_n}),$$

feltéve, hogy a jobb oldalon álló sor abszolút konvergens.

Ha $E(\xi)$ és $E(\eta)$ léteznek, akkor létezik $E(\xi + \eta)$ és

$$E(\xi + \eta) = E(\xi) + E(\eta).$$

A $\xi - E(\xi)$ valószínűségi változó várható értéke 0. Ha ξ és η független valószínűségi változók, amelyeknek létezik várható értéke, akkor létezik $\xi\eta$ várható értéke is és

$$E(\xi\eta) = E(\xi)E(\eta).$$

Ha $E(\xi\eta) = E(\xi)E(\eta)$, akkor a ξ és η változókat korrelálatlanoknak nevezzük. Ha $E(\xi)$ létezik és ξ az origóra szimmetrikus valószínűségi változó, akkor $E(\xi) = 0$.

23. Definíció: A ξ diszkrét valószínűségi változó A feltétel melletti feltételes várható értékét $E(\xi|A) - val$ jelöljük, és a következőképpen értelmezzük:

$$E(\xi|A) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k P(\xi = x_k|A),$$

feltéve, hogy a jobb oldalon álló sor abszolút konvergens.

Mivel $P(\xi = x_k|A) \leq \frac{P(\xi = x_k)}{P(A)}$, ha $E(\xi)$ létezik, akkor $E(\xi|A)$ is létezik.

Mivel $f(x|A) \leq \frac{f(x)}{P(A)}$, ezért ha $E(\xi)$ létezik, akkor $E(\xi|A)$ is létezik. Ha $\{B_k\}$ tágabb értelemben teljes eseményrendszer és $E(\xi)$ létezik, akkor

$$E(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} E(\xi|B_k)P(B_k).$$

Ez a teljes várható érték tétele.

24. Definíció: A ξ valószínűségi változónak a η valószínűségi változóra vonatkozó feltételes várható értékén, amit $E(\xi|y)$-nal jelölünk, egy olyan valószínűségi változót értünk, amelynek értéke $E(\xi|A_y)$, ha $\eta = y$, ahol A_y a $(\eta = y)$ eseményt jelöli.

Ha $E(\xi)$ létezik, akkor $E(\xi|y)$-nak létezik a várható értéke és $E\big(E(\xi|\eta)\big) = E(\xi)$.

2.2.Az átpártolás matematikája

A játékmester probléma, vagyis a Monty Hall paradoxon lényegi kérdése az, hogy átpártolni, vagy az eredeti ajtónál maradni érdemesebb. Most, hogy az elméleti hátterét tisztáztam, bebizonyítom azt, miért is kell megváltoztatnunk döntésünket.

Akár heurisztikus gondolkodással is beláthatjuk az átpártolás helyességét. Tegyük fel, hogy A, B és C ajtók közül mi az A-t választjuk. Ekkor annak a valószínűsége, hogy az új autó az általunk választott ajtó mögött van, $P(A) = \frac{1}{3}$. A játékmester kinyitja a B ajtót, ami mögött nincs nyeremény. Ezután mi nem változtatjuk meg a döntésünket, ezáltal megtartjuk az 1/3-os esélyünket. Lássuk mindezt egy táblázatban.

Maradunk az eredeti választásnál			
Az ajtó, ami mögött az autó van	Az ajtó, amit választok		
	A	B	C
A	nyer	veszít	veszít
B	veszít	nyer	veszít
C	veszít	veszít	nyer

1. táblázat – Maradunk az eredeti választásnál

Az 1. táblázatban láthatjuk, hogy a választott ajtó és a nyeremény helye 9 féleképp kombinálódhat. Az összes esetből 3 az, amikor elvisszük a nyereményt. Ha az A-t választjuk, a játékmester kinyitja a B-t, vagy a C-t. Maradunk a döntésünknél és nyerünk, ha az autó az A ajtó mögött van, illetve veszítünk, ha a B, vagy a C mögött van. Ugyan így, ha a B-t, vagy a C-t választjuk, ő kinyit egy másik ajtót és akkor győzünk végül, ha az autó a B, illetve ha a C ajtó mögött van. Így tehát annak a valószínűsége, hogy elvisszük a főnyereményt (Ny) azzal a feltétellel, hogy a választás során nem változtattunk az eredeti döntésünkön (Nv) $P(Ny|Nv) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

Abban az esetben, ha átpártolunk egy másik ajtóhoz, a táblázat a következőkép alakul (2. táblázat).

Megváltoztatjuk a döntésünket			
Az ajtó, ami mögött az autó van	Az ajtó, amit választok		
	A	B	C
A	veszít	nyer	nyer
B	nyer	veszít	nyer
C	nyer	nyer	veszít

2. táblázat – Megváltoztatjuk döntésünket

Ha megváltoztatjuk a döntésünket az egyik üres termet rejtő ajtó kinyitása után, csak abban az esetben veszítünk, ha az eredetileg választott ajtó mögött volt az autó. A másik két esetben éppen arra az ajtóra váltunk, ami mögött a nyeremény van. Tehát, ha mi az A-t választjuk és az autó a B ajtó mögött van, akkor a játékmesternek a C ajtót kell kinyitnia. Megváltoztatjuk a döntésünket B-re és megnyerjük az autót. Ha az A-t választjuk és a C mögött van az autó, a játékmesternek a B ajtót kell kinyitnia, mi kiválasztjuk a C-t és megnyerjük az autót. Viszont, ha az autó az A ajtó mögött volt, a játékvezető kinyit egy üres ajtót és mi a másik üresre pártolunk. Láthatjuk, hogy három esetből kétszer elvittük a nyereményt, míg ha nem változtattuk meg a döntésünket, ebből a három esetből csak egyszer nyernénk. Így, annak a valószínűsége, hogy nyerünk *(Ny)*, azzal a feltétellel, hogy megváltoztatjuk a döntésünket *(V)* $P(NY|V) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

Vizsgájuk meg a problémát a Bayes tétel tekintetében is (wikipédia – Bayes tétel). Jelölje A_1, A_2, illetve A_3 azokat az eseteket, mikor rendre az első, a második, illetve a harmadik ajtó mögött van a nyeremény. Ekkor $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}$. Tegyük fel, hogy az első ajtót választottuk, a játékmester pedig a harmadikat nyitotta ki, ezt jelölje B. Mivel nem nyithatja ki azt az ajtót, ami mögött az autó van, annak a valószínűsége, hogy a játékmester a harmadig ajtót nyitja ki, ha az autó a második ajtó mögött van $P(B|A_2) = 1$. Ezzel párhuzamosan, annak a valószínűsége, hogy a játékmester a harmadik ajtót nyitja ki, azzal a feltétellel, hogy a harmadik ajtó mögött van az autó $P(B|A_3) = 0$. Ha két lehetőség van a választásra (vagyis a választott ajtónk mögött van az autó), akkor véletlenszerűen választ, $P(B|A_1) = \frac{1}{2}$ (annak a valószínűsége, hogy a harmadik ajtót nyitja ki, azzal a feltétellel, hogy az első mögött van az autó). Mivel nem tudjuk hol a díj, számunkra annak a valószínűsége, hogy a játékmester melyik ajtót nyitja ki, egyforma, $P(B) = 1/2$. A Bayes tételt alkalmazva a következő egyenleteket kapjuk.

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$P(A_2|B) = \frac{P(B|A_2)P(A_2)}{P(B)} = \frac{1\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$P(A_3|B) = \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B)} = \frac{0\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = 0$$

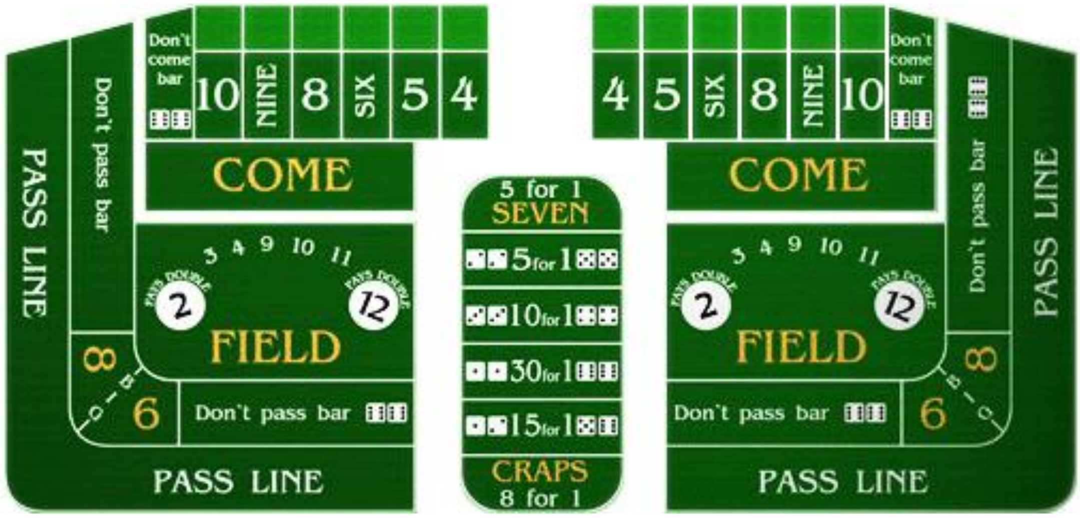
Láthatjuk tehát, hogy nagyobb valószínűséggel visszük el a nyereményt, ha átpártolunk, mivel az üres ajtó kinyitása után az eredeti választás valószínűsége 1/3 marad, míg a másik, még játékban lévő ajtóé 2/3.

3. Craps

A Craps az egyik legidősebb és legnépszerűbb kaszinójáték, amit a történészek többsége szerint az 1200-as években találtak ki Angliában. A történetek szerint egy Hazarth nevű kastély ostromának idején, Sir William of Tyre és lovagjai időtöltésképp alkották meg a játékot. A játék ezután terjedt el Angliában, majd Franciaországban. Innen terjedt el a gyarmatosítások után Amerikában is, ahol még több variációja született a különböző fogadási lehetőségeknek.[2] Ezt a játékot két kockával játszhatja korlátlan számú játékos. Ők felváltva résztvevők és dobók, akik a két kockát eldobva pontokat érnek el. A játék elején a „shooter”, azaz a dobó felteszi a tétet, majd választ kettőt az öt kocka közül, amit a játékvezető odatol neki. Ezek után eldobja őket úgy, hogy az asztal másik végén lévő falról visszapattanjanak. A dobás összege határozza meg a tétek sorsát, amelyeket

[2] A történeti áttekintés a következő forrás alapján készült: Online Casino Advice: Craps történelem, utolsó letöltés: 2014.04.25., link: http://www.onlinecasinoadvice.hu/craps/a-craps-tortenete/

előzőleg feltettek, a dobó és a többi résztvevő. Minden kör elején fogadhat az aktuális dobó és az asztal körül álló többi játékos egyaránt.



1. ábra: Craps asztal (forrás: http://hu.craps.net/szabalyok/)

3.1.Szabályok

A dobó, vagyis a „shooter" első dobása a „come-out roll". Ha ez 7, vagy 11, akkor és azok a játékosok, akik a „pass line"-ra, vagyis az ő győzelmére fogadtak, egyből nyernek, 1:1 tétaránnyal, vagyis visszakapják a tétjüket és még egyszer annyi zsetont. Ha viszont az első dobás 2, vagyis két egyes (snake eye), 3, vagy 12, akkor bekövetkezik a „craps". A shooter és akik rá fogadtak veszítenek, akik pedig a dobó ellen fogadtak, vagyis a „don't pass line"-ra, azok 2 és 3 érték esetén 1:1 arányban nyernek. Ezekben az esetekben ér véget a játék az első dobás után. Ha az első dobás, vagyis a come-out roll 4, 5, 6, 8, 9, vagy 10, a dobónak folytatnia kell játékot. Ilyenkor addig kell újra dobnia, míg az elsőnek kidobott összeg meg nem ismétlődik, vagy hetet nem dob. Ha az első érték visszatér, a dobó, és akik az első dobása után fogadtak rá (come), azok 1:1 tétaránnyal nyernek. Ellenben, ha nem az első dobás összege, hanem a 7 jön hamarabb, azok nyernek 1:1 arányban, akik a dobó ellen fogadtak az első dobás után (don't come). Lássunk egy példát. Ha az első dobás értéke 4, újra dobunk. Tegyük fel a következő dobássorozathoz jutunk, 4, 6, 8, 4. Ekkor velünk együtt azok is nyernek, akik a come-ra fogadtak, azok pedig veszítenek, akik don't come-ra. De ha például a sorozatunk 4, 6, 7, akkor veszítünk, veszítenek, akik a come-ra fogadtak és nyernek, akik a don't come-ra.

Ez csupán az alapjáték, ezeken kívül egyéb tétrakási lehetőségeink is vannak, amelyek a kijövő értékek valószínűségei alapján a következő csoportokba sorolhatók:

1. Ha az első dobás 4, vagy 10, 9:5 arányban nyernek azok, akik az első dobás után arra fogadtak, hogy a 4, vagy a 10 (az első dobás értékének megfelelően) jön előbb, nem a 7es. Itt, a dobón kívüli, fogadó résztvevők nyereménye azért nem egyezik meg a come-ra fogadókkal, mert ők az asztalon a konkrét számra tettek, nem a come-ra.
2. Ha az első dobás 5, vagy 9, 7:5 arányban nyernek, akik arra fogadtak, hogy nem 7, hanem 5, vagy 9 jön előbb.
3. Mikor az első dobás 6, vagy 8, 7:6 tétaránnyal nyernek, akik a 6, vagy a 8 hamarabbi érkezésére fogadtak.
4. Az egydobásos tét 3, 4, 9, 10, 11 esetén 1:1 arányban fizet, 2, 12 esetén 2:1 arányban fizet, 5, 6, 7, 8 esetén viszont a tétrakó elveszíti a zsetonokat.
5. 7:1 arányban fizet a „hardways" 4 és 10, ami 4 esetén azt jelenti, hogy 2db 2-es jön fel, 10 esetén pedig 2 db 5-ös.
6. 9:1 arányban fizet a „hardways" 6, vagy 8, ami az előzőek alapján két 3-as, vagy két 4-es.
7. 4:1 tétaránnyal lehet fogadni 7-re.
8. 7:1 arányban bármely craps-re, vagyis 2, 3, 12 összegekre.
9. „Hardways" craps 2 (1,1), vagyis a „snake eye" 30:1 arányban fial.
10. A „hardways" craps 3 (1,2) 15:1 tétaránnyal fogadható.
11. Szintén 15:1 tétaránnyal fizet a hardways 11 (5,6).
12. Valamint 30:1 aránnyal tehetünk a „hardways" 12 (6,6) összegre.

3.2. Esélyek[3]

Minthogy a Craps játékban két kockával dobunk, ennek matematikai háttere egyszerű valószínűségek kiszámításán alapszik. Az alapjáték eredményeit tovább egyszerűsíti, hogy 1:1-es tétaránnyal dolgozik. Lássuk akkor ezeket:

- A craps (vereség) dobások valószínűségeinél a 2 érték csak egyféleképp jöhet ki, két egyessel, amit az angol kaszinónyelv „snake eye" névvel illet. Ennek valószínűsége $\frac{1}{36}$. 3-nál az egyik kocka értéke lehet 1-es, vagy 2-es, míg a másik kocka ettől függően, csak egy féle szám lehet. Tehát a 3 összeg valószínűsége $\frac{2}{36}$.

[3] A fejezet Wintsche Gergely nyitrai előadásanyagának segítségével készült.

Végül a 12 ismét csak két 6-os kombinációjaként jöhet ki, ezért szintén $\frac{1}{36}$ a valószínűség erre a vereségre.

- Automatikusan nyerő esetek a hetet és tizenegyet érő dobások. A 7 valószínűsége mindközül a legjobb, hiszen az első kocka 6 félekép alakulhat, tehát $\frac{6}{36}$ eséllyel dobjuk. Ezzel szemben a 11 valószínűsége hasonlóan alakul, mint a háromé, vagyis $\frac{2}{36}$.
- A további esetekben folytatni kell a dobást, míg az elsőnek dobott érték, vagy bármilyen 7 értékű összeg fel nem jön. Ilyenkor nem számít, hogy hányszor és milyen értékeket dobtunk ki az első és az utolsó dobás között, vagyis a dobott sorozat (pl. 4, 5, 8, 7) hosszának és elemeinek nincs befolyása a valószínűségek alakulására. Ezekben az esetekben, ha az elsőként dobott érték *n*, az elsőnek feljött érték legyen *e*, az utolsóként dobott érték pedig legyen *v*. Ekkor a keresett valószínűségek a következőképp alakulnak.

$$\mathrm{P(e = n)}\frac{\mathrm{P(v = n)}}{\mathrm{P(v = 7) + P(v = n)}}$$

- Ez az egyik módja a valószínűség kiszámításának.
- A 3. táblázat mutatja a lehetséges valószínűségeket, amelyek eredményeit a következő képlettel számoltuk ki. Az első tag annak a valószínűsége, hogy az első kidobott érték n. A második tag pedig annak a valószínűsége, hogy a két lehetséges végkimenetel közül az következik be, amivel megnyerjük a tétet.
- A 3. táblázat alapján tehát a győzelem valószínűsége a dobó számára

$$\mathrm{P(győzelem)} = 2\frac{9}{324} + 2\frac{16}{360} + 2\frac{25}{396} + \frac{6}{36} + \frac{2}{36} = \frac{244}{495} \approx 95493.$$

első összeg	**valószínűsége**	**győzelem, vagy vereség**	**győzelem valószínűsége**
2	$\frac{1}{36}$	veszít	
3	$\frac{2}{36}$	veszít	
4	$\frac{3}{36}$	győz, ha 4 előbb jön, mint 7	$\frac{3}{36} \cdot \frac{3}{9} = \frac{9}{324}$
5	$\frac{4}{36}$	győz, ha 5 előbb jön, mint 7	$\frac{4}{36} \cdot \frac{4}{10} = \frac{16}{360}$
6	$\frac{5}{36}$	győz, ha 6 előbb jön, mint 7	$\frac{5}{36} \cdot \frac{5}{11} = \frac{25}{396}$
7	$\frac{6}{36}$	nyer	
8	$\frac{5}{36}$	győz, ha 8 előbb jön, mint 7	$\frac{5}{36} \cdot \frac{5}{11} = \frac{25}{396}$
9	$\frac{4}{36}$	győz, ha 9 előbb jön, mint 7	$\frac{4}{36} \cdot \frac{4}{10} = \frac{16}{360}$
10	$\frac{3}{36}$	győz, ha 10 előbb jön, mint 7	$\frac{3}{36} \cdot \frac{3}{9} = \frac{9}{324}$
11	$\frac{2}{36}$	nyer	
12	$\frac{1}{36}$	veszít	

3. táblázat – Dobó győzelmének valószínűségei

Hogy a számítások egyszerűbbek és átláthatóbbak legyenek, tegyük fel a továbbiakban, hogy 1 értékű tétet tettünk fel. Ekkor a nyeremény várható értéke

$$E(nyeremény) = 1 \times 1{,}493 - 1 \times (11 \times 33) = 0{,}493 - 0{,}507 = -0{,}014.$$

Lássuk most azokat az eseteket, amik nem az alapjáték 1:1 tétarányával dolgoznak. Itt szükségünk lesz azokra a valószínűségekre, ahol a 7 hamarabb jön fel, mint az elsőnek kidobott összeg. Ez a fentihez hasonlóan így alakul:

$$\frac{P(v = 7)}{P(v = 7) + P(v = n)}.$$

Ekkor a nyeremény várható értéke a következő:

$$E(nyeremény) = \frac{t_1}{t_2} \frac{P(v = n)}{P(v = 7) + P(v = n)} - 1 \frac{P(v = 7)}{P(v = 7) + P(v = n)},$$

$$ahol\ t_1\ és\ t_2\ a\ t_1{:}\,t_2\ tétarány\ elemei.$$

A különböző tétarányok várható értékeit a 4. táblázatban összegzem. Az egyszerűség kedvéért a kaszinók ezeknél a fogadásoknál csak öttel, illetve hattal osztható értékű téteket fogadnak el.

Példaként végigszámolom az egydobásos tét esetét. Itt az 1:1 tétarányú 3, 4, 9, 10 és 11 összegek valószínűségeinek összege szorzódik 1-gyel, a 2 és 12 valószínűségeinek összege a 2:1-es arány miatt kettővel, míg az 5, 6, 7 és 8 értékekre való veszteség miatt ezek valószínűsége -1-gyel. Így a várható érték egydobásos tét esetén

$$\frac{2+3+4+3+2}{36}1 + \frac{1+1}{36}2 - \frac{4+5+6+5}{36}1 = -\frac{1}{18}.$$

	tét neve	**tétarány**	**várható érték**
1.	4/10 a 7 előtt	9:5	-1/15
2.	5/9 a 7 előtt	7:5	-1/25
3.	6/8 a 7 előtt	7:6	-1/66
4.	egydobásos tét	1:1 és 2:1	-1/18
5.	hardways 4/10	7:1	-1/19
6.	hardways 6/8	9:1	-1/11
7.	bármely 7	4:1	-1/6
8.	bármely craps	7:1	-1/9
9.	hardways craps 2	30:1	-5/36
10.	hardways 3	15:1	-1/9
11.	hardways 11	15:1	-1/9
12.	hardways craps 12	30:1	-5/36

4. táblázat

Mint láthatjuk a nyeremény várható értéke minden esetben negatív. A kaszinójátékok hosszú távon mindig a banknak kedveznek, legyen szó kártya, vagy kocka, vagy bármilyen más szerencsejátékról. A következőkben láthatjuk majd, hogy ehhez az egyszerű kockajátékhoz képest, a szintén egyszerű szabályokkal vezérelt BlackJack mennyivel fáradtságosabb matematikai meggondolást igényel és azt, hogy a nyeremény várható értékei is másképp alakulnak majd.

4. BlackJack

A 21 az egyik legkedveltebb kaszinó játék a rulett, a craps és a póker mellett, mivel igen egyszerű, könnyen játszható és „viszonylag" nyereséges. Illetve mindezek mellett azért is vonzó az átlagos, mondhatni kezdő játékosok számára, mert elsőre úgy tűnik pusztán szerencse kérdése a győzelem. A gyakorlottabbak viszont már tudják, hogy a megfelelő stratégia és egyéb trükkök és taktikák nagyban javíthatnak esélyeiken. Ezek a játékmódok matematikai valószínűségeken alapulnak, számításokkal bizonyíthatóak és minél magasabb számú játékkal, akár élő, akár szimulált esetekkel közelíthetünk is ezekhez az értékekhez. A továbbiakban sort kerítek a BlackJack szabályainak ismertetésére, a húzási, vagyis az alapstratégia részletezésére és matematikai alátámasztásának felvázolására.

4.1. Szabályok[4]

A BlackJacket, avagy a huszonegyet francia kártyával játsszák, egy, kettő, négy, hat, illetve nyolc paklis változata van, ahol egy pakli 52 lapból áll, a standard kártyákból joker nélkül. Így tehát van négy szín, kör, káró, pikk és treff, és mindegyikből 13 féle kártya. Kettestől tízesig, amelyek értékét a rájuk írt szám jelenti, majd bubi, dáma és király, amelyek 10-10-10 pontot, illetve az ász, ami 1 vagy 11 pontot érhet. A játékot az nyeri, aki lapjainak összértéke közelebb áll a huszonegyhez, de azt még nem lépte túl. Egy ász és egy tízes értékű lap kombinációja adja a BlackJacket, ami a játék legerősebbje, de egyes kaszinókban az osztónál lévő ilyen párosítás mindig erősebb annál, mint ami a többi játékosnál van.

A játékot mindenki az osztóval (dealer) szemben játssza, így a többi játékosnál lévő lapok nem befolyásoljak a nyereményünket. Az hogy ők milyen lapot kapnak csak lapszámolásnál érdekel majd minket. Ha a húzott lapok értéke több mint 21, akkor vesztünk (bust), attól függetlenül, hogy az osztónál mennyi van. Ha a dealer lapjainak összértéke nagyobb, mint huszonegy, akkor minden még játékban lévő kéz, vagyis játékos (aki megállt 21 alatt) nyer. Ha sem az osztó sem a játékos nem lépi át a huszonegyet, akkor az veszít (lose), akinél kisebb összérték van, illetve egyenlőség esetén döntetlen (push) és a feltett tétünk megmarad. A játékos tetszés szerint húzhat,

[4] A szabályokról szóló fejezet El Finito – A Blackjack Alapjai című könyve alapján készült.

vagy megállhat bármilyen kézre, míg az osztónak tizenhét alatt kötelező ráhúznia, míg tizenhéttől meg kell állnia. Ez a szabály a stratégia kidolgozása szempontjából alapvető fontossággal bír.

A játék kezdetén az osztó megkeveri a lapokat, majd az egyik játékos egy vágókártyával elvágja a paklit,[5] majd a dealer szétválasztja és egyiket a másik elé helyezi. Ezután egy jelölőkártyát helyez a pakli utolsó harmada után, ha a kártyák idáig elfogynak, újrakeverik a paklit. Mielőtt még a játék elkezdődne, az osztó a legfelső kártyát a használt kártyákat tartalmazó kártyaégetőbe teszi és ezzel az előkészítő műveletek végéhez érve elkezdődik a játék. Ezek a rituálék a véletlen jelenlétét hívatottak fenntartani.

A játék menete roppant egyszerű, a dealer felszólítja a játékosokat, hogy tegyék meg tétjeiket, majd kiosztja a lapokat. Az osztó balról jobbra kiosztja az első majd a második sor lapot felfelé fordítva, kivéve az ő második lapját, ami lefordítva marad (leosztás). Ezután a játékosok előtt többféle választási lehetőség áll. Kérhetnek új lapot (hit), megállhatnak (stop), duplázhatnak (double down) – ilyenkor meg egyszer ugyanannyi tétet kell betenniük, mint amivel indítottak –, szétválaszthatnak (split) – ha két ugyan olyan lapjuk van, ekkor még egyszer ugyan annyi tétet raknak fel és két kezük lesz a továbbiakban –, vagy feladhatják a játékot (surrender) – ekkor a tét felét visszakapják. Duplázni akkor érdemes, ha jó esélyt látunk arra, hogy a harmadik lappal elég közel kerülünk a 21-hez, mivel ezután már nem húzhatunk több lapot.

A BlackJackben köthetünk biztosítást, ha az osztó felfelé néző lapja ász. Ekkor az adott tétünk felével fogadunk, majd amikor az osztó megnézi lefelé fordított lapját, ha az tízes értékű, azaz a dealernek BlackJacke van, akkor a tétünket elveszítjük, de a biztosításként berakott tét dupláját visszakapjuk, vagyis az eredeti tét felét veszítjük csak el. Ha az osztónak nincs BlackJacke, a biztosításra betett tétet veszítjük el, az eredeti téttel pedig játékban maradunk. A BlackJack alapszabályai ugyanazok, de minden kaszinó alkothat saját házszabályokat. Ez az oka annak, hogy nem mindenhol lehet feladni, vagy biztosítást kötni. Ennek folytán változhat az is, mekkora a tétek alsó, illetve felső limitje, vagy az, hány paklival játszunk.

[5] Itt a pakli az összes játékban lévő kártyát jelenti attól függetlenül, hány 52 lapos pakli teszi is azt ki.

4.2. Stratégiák és matematikai hátterük

A húzási, avagy az alapstratégia lényege, hogy minden egyes lapértékhez létezik egy specifikus válaszlépés (4. szakirodalom), ami a paklik számától függően, habár nem túl nagymértékben, de eltérő lehet. Ez a stratégia valószínűségi összefüggéseken alapul, ezért a gyakorlatban előfordulhat, hogy az optimális döntéssel mégis veszítünk, akár többször is egymás után, de a valószínűségeknek megfelelő lépések betartása, az egyenletes játék biztosítja a hosszú távú előnyt a házzal szemben. Ebből a szempontból fontos a Las Vegas ostroma című film azon momentuma, amelyet a korábbiakban a játékmester probléma mentén is elemeztünk: az intuícióinkat és érzelmeinket félretéve, a matematikai valószínűségeknek megfelelően kell döntenünk a játék folyamán.

4.2.1. Az alapstratégia

Az alapstratégiát tehát matematikai számításokkal határozhatjuk meg az adott játéktól függően (kaszinó házi szabályai). Az 5. táblázat az interneten és egyéb helyeken fellelhető, az alapstratégia lépéseit bemutató táblázatok felhasználásával készült, a használt paklik számától függetlenül, így könnyen láthatjuk azt is, miben térhetnek el egymástól az alkalmazandó stratégiák.

Az 5.1, 5.2 és 5.3 táblázatokban is látható, hogy a különböző kezeket három csoportra oszthatjuk. A hard leosztások csak számokat tartalmaznak, a szoft kezek egy ászt és egy számmal jelzett lapot, a párok pedig két egyforma értékű kártyát (4. szairodalom).

Játékos	Osztó									
Hard Kéz	2	3	4	5	6	7	8	9	T	A
5	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H
6	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H
7	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H
8	H	H	H	D/H	D/H	H	H	H	H	H
9	D/H	D	D	D	D	H	H	H	H	H
10	D	D	D	D	D	D	D	D	H	H
11	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D/H
12	H	H	S	S	S	H	H	H	H	H
13	S	S	S	S	S	H	H	H	H	H
14	S	S	S	S	S	H	H	H	H	H
15	S	S	S	S	S	H	H	H	H/R	H/R
16	S	S	S	S	S	H	H	H/R	H/R	H/R
17	S	S	S	S	S	S	S	S	S	R/S
18	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S
19	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S
20	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S

5.1. táblázat

Játékos	Osztó									
Soft Kéz										
A,2	H	H	D/H	D	D	H	H	H	H	H
A,3	H	H	D/H	D	D	H	H	H	H	H
A,4	H	H	D	D	D	H	H	H	H	H
A,5	H	H	D	D	D	H	H	H	H	H
A,6	D/H	D	D	D	D	H/S	H	H	H	H
A,7	D/S	D/S	D/S	D/S	D/S	S	S	H	H	H/S
A,8	S	D/S	D/S	D/S	D/S	S	S	S	H/S	H/S
A,9	S	D/S	D/S	D/S	D/S	S	S	S	S	S

5.2. táblázat

Játékos	Osztó									
Párok										
2,2	H/P	H/P	P	P	P	P	H	H	H	H
3,3	H/P	H/P	P	P	P	P	H/P	H	H	H
4,4	H	H	H/P	D/P	D/P	H	H	H	H	H
5,5	D/H	D/H	D/H	D/H	D/H	D/H	D/H	D/H	H	H
6,6	H/P	P	P	P	P	H/P	H	H	H	H
7,7	P	P	P	P	P	P	H/P	H	H/R/S	H
8,8	P	P	P	P	P	P	P	P	P/S	P/R
9,9	P	P	P	P	P	S	P	P	S	S
T,T	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S
A,A	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P

5.3. táblázat

Jelmagyarázat:

- D (double) – duplázás, ha nem lehetséges, húzás
- H (hit) – lapkérés
- P (split) – szétválasztás

- R (surrender) – feladás
- S (stand) – megállás

4.2.2. Az alapstratégia matematikája

A következőkben azokat a matematikai folyamatokat fogom részben rekonstruálni, illetve felvázolni, amelyek a fenti táblázat eredményeihez vezetnek. A háttérben meghúzódó matematikai lépések első nekifutásra nem tűnnek bonyolultnak, de ha heurisztikusan szeretnénk megközelíteni az eredmény miértjeit, láthatjuk, hogy az egyszerű számítások nem vezetnek el minket a helyes megoldáshoz. Első próbálkozásaink az egyszerű valószínűségekkel azért nem érnek célt, mert a lehetséges esetek száma túl nagy.

Ha például arra gondolunk, hogy a kezünkben lévő lapok összege hard 12 és az osztó felfordított lapja egy 3-as, a táblázat alapján húznunk kell. Ezt próbálhatjuk azzal magyarázni, hogy ha végtelenített paklival számolunk, akkor az osztó következő lapjának várható értéke a lapok értékének átlaga kerekítve, ami 7 akkor is, ha az ászt 1 értékkel és akkor is, ha 11-gyel vesszük. Ha tehát az osztó felhúz egy hetest, majd még egy hetest, az eredmény 17 lesz, amire ő már megállhat, mi pedig veszítünk 12-vel. Ha a dealernél 4-es, 5-ös, vagy 6-os van, azért kell megállnunk, mert az ő végeredménye várhatóan 18, 19, vagy 20 lesz, míg a mienk 19 egy új lap húzásával, ami csak ezen esetek 1/3-ában vezet vereséghez. Ha nála 6, vagy annál magasabb lap van, újfent nem állhatunk meg, mert az osztó várható végeredménye 21 lesz, amivel biztosan ver minket, hacsak nem érjük el mi is a 21-et és így nem veszítjük el a téteket. Ez logikus érvelésnek hangzik, amivel talán meg is elégedhetnénk a játékasztalnál ülve, de abban a pillanatban, ahogy adott számú paklival szeretnénk számolni, máris kevésbé egyszerű a helyzet.

Tegyük fel, hogy konkrét számú paklival dolgozunk. A legegyszerűbb esetben legyen egy pakli, de hogy még egyszerűbb legyen a számolás, vegyük az egész paklit előkészítés nélkül, tehát nem vágtuk el és nem dobtuk a felső lapot az égetőbe. Ekkor 52 kártyánk van, minden értékből 4 db, illetve tízes értékből 16 (10, Bubi, Dáma, Király). Tekintsük továbbra is azt az esetet, mikor nálunk hard 12 (ász nélküli) van, az osztónál pedig 3-as. Mivel pontosan tudjuk melyik lapból hány darab van a pakliban, az első játékban kiszámolhatjuk, hogy várhatóan mi lesz az osztó következő lapja. Ez attól függően több féle lehet, hogy a mi 12 értékünk milyen lapokból áll össze. Ha még nem kértünk lapot, akkor lehet egy 2-es és egy tízes, egy 3-as és egy 9-es, egy 4-es és egy 8-as, egy 5-ös és egy 7-es, vagy két darab 6-os. De ha már húztunk egyszer, akkor az esetek tovább bomlanak. Lehet akár 4 db 2-es és egy 4-es összege is az ötödik húzás után. Ezekre az esetekre külön-külön meg kellene vizsgálnunk, hogy mi lehet az osztó második lapjának az értéke. Mivel 3-asra nem tud olyan lapot húzni, ami miatt meg kéne állnia, így a harmadik lapját is ki kell számolnunk, ami további eseteket ad, és így bonyolódik tovább a heurisztikus megközelítésünk, amivel a táblázatot meg szeretnénk fejteni.

Persze vannak olyan mezők, amelyeket egyszerű megmagyarázni és szükségtelen döntési egyenletekkel megközelíteni őket. Így például hard kéz esetén 11-ig még minden értékre ráhúzhatok, esetleg duplázhatok, mivel a legnagyobb lap, ami következhet egy tízes. Ha ászt húzok, azt tekinthetem egyesnek és nem sokallok be tőle, akárcsak ha tízest húzok, elérem a 21-et, vagyis nem tudok olyan lapot húzni, amivel túllépném a határt. Ha hard 18-on, vagy a fölött állok, azért érdemes megállni, mert nagyon kevés olyan lap, amivel nem sokallok be, vagy ha van egy tízes párom, azt azért nem választom szét és állok meg, mert kicsi az esélye annak, hogy az osztó 21-gyel megverjen, viszont, ha szétválasztok, könnyen elronthatom mindkét kezem.

4.2.3. Optimális stratégia a BlackJackben[6]

Ahhoz, hogy a táblázat elemeinek keletkezését megérthessük, kevésbé egyszerű számolásokra és további elméleti kiindulópontokra lesz szükségünk. Az alapstratégia matematikai vetületével egy korábbi elméleti cikk alapján foglalkozunk, amely a Journal Of The American Statistical Association című folyóiratban jelent meg 1956-ban. Ez a cikk az egyik legjelentősebb irodalom ebben a témában, az általam már sokszor említett A BlackJack alapjai című könyv is erre alapozza a matematikai háttérrel foglalkozó fejezetét. Ebben a dolgozatban csak a húzási stratégia bizonyításával foglalkozom, a speciális esetek fáradtságos és hosszadalmas visszafejtésére nem kerül sor.

A cikk alapján az ideális stratégiát döntési egyenletek segítségével állapíthatjuk meg, amelyekhez szükségünk van néhány jelölés bevezetésére. Jelölje D az osztó felfelé néző lapját. Ezután jelölje $M(D)$ azt a minimális egész számot, amire ha a mi lapjaink értéke x

---

[6] A fejezet a Journal of the americian statistical association című folyóiratban megjelent, The optimum strategy in blackjack című cikk alapján készült.

és $x < M(D)$, akkor húznunk kell, ha pedig $x \geq M(D)$, akkor megállni. Külön kell vizsgálnunk a hard és a soft kezek esetét, vagyis amikor nincs a lapok között ász, illetve, amikor van. Mivel az ász 1 értékkel is beszámolható, így ha besokallnánk, csak módosítjuk az értékét. Legyen *M(D)* hard kéz esetén és *M*(D)* soft kéz esetén a minimális állandó jelölése. *M(D)* és *M*(D)* alapján húzunk. Ha egy bizonyos értéknél már érdemes megállnunk, akkor az azon felülieknél is meg kell majd állnunk.

Jelölje $E_{s,x}$ az x összegen megálló játékos nyereményének várható értékét. Hasonlóan, jelölje $E_{d,x}$ az x összegre még pontosan egy lapot húzó játékos nyereményének várható értékét. Ha a „soft" kezek esetét vizsgáljuk akkor pedig $E_{d,x}$ az x összegre egy, vagy több lapot húzó játékos várható értékét. Ha x-et tekintjük változónak, $E_{d,x}$– $E_{s,x}$ általában monoton csökkenő függvényt adnak. Ekkor *M(D)* az a legkisebb olyan egész szám, amelyre $E_{d,x} - E_{s,x} < 0$.

Ahhoz, hogy a döntési egyenletet könnyen áttekinthető formában írjuk fel, bevezetjük a T valószínűségi változót, ami az osztó lapjainak összege. Mivel az osztó 17 alatt nem állhat meg, $T \geq 17$. Így ha $T > 21$, vagy $T < x$, akkor a játékos megnyeri a tétet, ha $T = x$, nincs tétmozgás, illetve ha $x < T \leq 21$, akkor a játékos veszít. Ezekkel kifejezve a megállás várható értéke

$$\begin{aligned} E_{s,x} &= P(T > 21) + P(T < x) - P(x < T \leq 21) \\ &= P(T > 21) + P(T < x) - [1 - P(T > 21) - P(T = x) - P(T < x)] \\ &= 2P(T > 21) - 1 + 2P(T < x) + P(T = x) \end{aligned}$$

A döntési egyenlet felírásához szükségünk van még $E_{d,x}$ felírására, azaz az x összegre lapot húzó játékos nyereményének várható értékére. Jelölje J a játékos végösszegét, miután húzott még egy kártyát, illetve soft kéz esetén akár többet is. Ekkor a leosztás végkimenetele háromféleképp alakulhat J értékétől függően. Mivel a dealernek (osztó) 16-ra még húznia kell, 17-re viszont már meg kell állnia, ezért $T \geq 17$. Az első esetben, ha $J < 17$, csak akkor nyerhetünk, mikor az osztó besokall. Ennek a várható értéke

$$P(T > 21) - [1 - P(T > 21)] = 2P(T > 21) - 1.$$

Mikor $17 \leq J \leq J$, a játékos győzelmének valószínűsége

$$P(T > 21) + P(T < J) - P(J < T \leq 21).$$

Harmadik esetben pedig, mikor a játékos végösszege túllépi a 21-t, a vereség a biztos esemény, így a győzelem várható értéke -1.

Természetesen J és T hatással vannak egymásra, arra milyen lapot húzhatunk, de ez az eltérés elég kicsi ahhoz, hogy feltehessük, J és T függetlenek egymástól. Így a húzás várható értéke a következőképp alakul

$$E_{d,x} = P(J < 17)[2P(T > 21) - 1] - P(J > 21) \\ + \sum_{j=17}^{21} P(J = j)[P(T > 21) + P(T < j) - P(j < T \leq 21)].$$

1. *Állítás:* Ezek után a döntési egyenletünk

$$E_{d,x} - E_{s,x} = P(J < 17)[2P(T > 21) - 1] - P(J > 21) - 2P(T > 21) + 1 - 2P(T < x) \\ - P(T = x) + \sum_{j=17}^{21} P(J = j)[P(T > 21) + P(T < j) - P(j < T \leq 21)]$$

Némi algebrai átalakítással ezt az egyenletet egyszerűbb alakra hozhatjuk. A feldolgozott irodalomban ezek összevontan, végeredményként szerepelnek:

$$E_{d,x} - E_{s,x} = -2P(T < x) - P(T = x) - 2P(T > 21)P(J > 21) + 2P(T < J \leq 21) \\ + P(T = J \leq 21)$$

Mivel a két egyenlet azonossága számomra nem volt olyan egyértelmű, mint ahogy a cikk írói gondolták, a következőkben levezetem az összefüggéseket.

$$E_{d,x} - E_{s,x} = 2P(J < 17)P(T > 21) - P(J < 17) - P(J > 21) - 2P(T > 21) + 1 \\ - 2P(T < x) - P(T = x) + \sum_{j=17}^{21} P(J = j)P(T > 21) \\ + \sum_{j=17}^{21} P(J = j)\ P(T < j) - \sum_{j=17}^{21} P(J = j)\ P(j < T \leq 21) \\ + P(J > 21)P(T > 21) - P(J > 21)P(T > 21)$$

A zárójelek fel- és a summák szétbontása után hozzáadtunk, majd elvettünk $P(J > 21)P(T > 21)$-et, ezzel nem változtattunk az egyenlet értékén.

$$E_{d,x} - E_{s,x} - 2xP(T < x) - P(T = x) + P(T > 21)\left[P(J < 17) + \sum_{j=17}^{21} P(J = j) + P(J > 21)\right] + P(J < 17)P(T > 21) - P(J < 17) - P(J > 21) + 1 - 2P(T > 21) + \sum_{j=17}^{21} P(J = j)\ P(T < j) - \sum_{j=17}^{21} P(J = j)\ P(j < T \leq 21) - P(J > 21)P(T > 21)$$

A $P(J < 17) + \sum_{j=17}^{21} P(J = j) + P(J > 21)$ valószínűségek páronként kizárják egymást, összegük a biztos esemény, melynek valószínűsége 1. Ezáltal az egyenlet második sorában álló szorzat $P(T > 21)$. A harmadik sorban álló -2$P(T > 21)$2t szétbontjuk, majd láthatjuk, hogy $1 - P(T > 21) = P(T \leq 21)$.

$$E_{d,x} - E_{s,x} = -2P(T < x) - P(T = x) \cancel{+ P(T > 21)} + P(J < 17)P(T > 21) - P(J < 17) - P(J > 21) + P(T \leq 21) \cancel{- P(T > 21)} + \sum_{j=17}^{21} P(J = j)\ P(T < j) - \sum_{j=17}^{21} P(J = j)\ P(j < T \leq 21) - P(J > 21)P(T > 21)$$

A pozitív és a negatív előjelű $P(T > 21)$ valószínűségek kiejtik egymást. Most ismét hozzáadunk és elveszünk két azonos tagot.

$$E_{d,x} - E_{s,x} = -2P(T < x) - P(T = x) + P(J < 17)P(T > 21) - P(J < 17) - P(J > 21) + P(T \leq 21) + \sum_{j=17}^{21} P(J = j)\ P(T < j) - \sum_{j=17}^{21} P(J = j)\ P(j < T \leq 21) - 2P(J > 21)P(T > 21) + P(J > 21)P(T > 21)$$

Az egyenlet alábbi tagokból álló részét a 6. táblázat segítségével szemléltetem:

$$P(J<17)P(T>21)-P(J<17)-P(J>21)+P(T\le 21)+\sum_{j=17}^{21}P(J=j)\;P(T<j)$$
$$-\sum_{j=17}^{21}P(J=j)\,P(j<T\le 21)+P(J>21)P(T>21)$$

T \ J	<17		17		18		19		20		21		>21	
<17	+	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-
17	+	-	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+	-
18	+	-	+	-	+		+	+	+	+	+	+	+	-
19	+	-	+	-	+	-	+		+	+	+	+	+	-
20	+	-	+	-	+	-	+	-	+		+	+	+	-
21	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+		+	-
>21	+	-											+	-

+ P (J < 17) P (T > 21)
- P (J < 17)
- P (J > 21)
+ P (T ≤ 21)
+ ∑ P (J = j) P (T < j)
- ∑ P (J=j) P (j < T ≤ 21)
+ P (J > 21) P (T > 21)

6. táblázat

Az egyenletben szereplő valószínűségek a táblázatban látható módon alakulnak, így a következő egyszerűbb formában írhatóak fel:

$$2P(T<J\le 21)+P(T=J\le 21)$$

Ezek után a döntési egyenlet valóban megegyezik a cikkben szereplő egyszerűsített alakkal:

$$E_{d,x}-E_{s,x}=-2P(T<x)-P(T=x)-2P(T>21)P(J>21)+2P(T<J\le 21)$$
$$+P(T=J\le 21)$$

Ez az általános döntési egyenlet, ami az x, vagyis a játékos kezének értékétől függően változhat, kimaradhatnak belőle bizonyos tagok. Mivel az osztó 16-ra még rá kell, hogy húzzon, csak 17-nél állhat meg először, így minden esetben $T \geq 17$. Az egyenlet első két tényezője 0, vagyis kiesik, ha $x < 17$. $P(J > 21)$ szintén kieshet, mikor „hard" (nincs a lapok között ász) $x < 12$, mert ilyenkor nincs olyan lap a pakliban, amit húzva átlépnénk a 21-t. Illetve kiesik ez a tag minden „soft" (van ász a lapok között) kéz esetén, hiszen ha húzás után besokallnánk, az ászt automatikusan 1 értékkel számoljuk. Ebből adódóan $E_{d,x} - E_{s,x} \geq 0$, ha $x(hard) < 12$ és $x(soft) < 17$. Itt tehát a keresett küszöbszám $M(D) > 11$, illetve soft kéz esetén $M^*(D) > 16$ minden D-re.

$12 \leq x(hard) \leq 16$ esetén az első két tényező ismét csak 0. Az egyenlet utolsó két tényezőjét pedig J és T függetlensége miatt átírhatjuk úgy, hogy szétbontjuk és súlyozzuk az előfordulásuk valószínűségével.

$$E_{d,x} - E_{s,x} = -2P(T < x) - P(T = x) - 2P(T > 21)P(J > 21) + \sum_{t=17}^{21} P(T = t)[2P(t < J \leq 21) + P(J = t)].$$

Mivel $12 \leq x \leq 16$ esetén az egyenlet első két tagja nem fordulhat elő, így az eredmény

$$E_{d,x} - E_{s,x} = -2P(T > 21)P(J > 21) + \sum_{t=17}^{21} P(T = t)[2P(t < J \leq 21) + P(J = t)].$$

$J - x$ (J a játékos végösszege, x aktuális lapjaink összege) valószínűségi eloszlása egy lap húzása után $P(J - x = 10) = \frac{4}{13}$, illetve $P(J - x = i) = \frac{1}{13}\big(i = 2,3,4,5,6,7,8,9,(1,11)\big)$. ha minden kártya egyforma valószínűséggel fordul elő. Ez a feltevés az élő játékban nem helyes, mivel általában több paklival játszanak, de igaz abban az egyszerű helyzetben, mikor az asztal 52 lap permutációiból áll. Ezzel a feltevéssel tehát $P(J > 21) = \frac{1}{13}(x - 8)$ $x(hard) \geq 12$ esetén, mivel $x - 8$ olyan lap van, aminek húzásával besokallna. Tegyük fel, $x(hard) = 12$, akkor $12 - 8$ olyan lap van, amivel besokallunk, a 4 féle 10 értékű kártya, $P(J > 21) = \frac{4}{13}$. $x(hard) = 13$ esetén 5, $x(hard) = 14$ esetén 6 olyan lap van, amit húzva veszítünk és így tovább. Szintén ez után a feltevés után következik, hogy $P(t < J \leq 21) = \frac{1}{13}(21 - t)$, ha $P(J = t) = \frac{1}{13}$ minden $17 \leq t \leq 21$ esetén. Itt $21 - t$

olyan lap van, amivel nyerhetünk. Ezek után a döntési egyenletbe behelyettesíthetjük a kapott értékeket:

$$E_{d,x} - E_{s,x} = -\frac{2}{13}(x-8)P(T > 21) + \sum_{t=17}^{21} \frac{1}{13}(43-2t)P(T = t).$$

Nem kell kiszámolnunk $E_{d,x} - E_{s,x}$ értékét minden $12 \leq x \leq 16$ esetén, elég találnunk egy olyat, amire az egyenlet nullát ad, a monoton csökkenés miatt onnan kezdve minden eredmény 0, vagy annál kisebb lesz. Jelölje ezt a megoldást *x₀*, $E_{d,x_0} - E_{s,x_0} = 0$-t átrendezve

$$x_0 = 8 + \frac{\sum_{t=17}^{21}(21{,}5 - t)P(T = t)}{P(T > 21)}.$$

A következőkben három esetet vizsgálunk, Az első, mikor $x_0 < 12$, ekkor $M(D) = 12$, mivel 12-nél kisebb számra bármit is húzunk, nem sokallunk be. A második, ha $x_0 > 16$, akkor $M(D) > 16$. Illetve a harmadik, mikor $12 \leq x_0 \leq 16$, ebben az esetben $M(D) = \lfloor x_0 \rfloor + 1$. $P(T > 21)$ egy adott értékére az osztónak nagyobb esélye van jó kezet szerezni, mint a minimális állandó szerint húzó játékosnak. Lássunk egy példát. Mikor $P(T > 21) = \frac{2}{5}$ és $P(T = 18) = \frac{3}{5}$, $x_0 = 8 + \frac{\frac{(21{,}58>)3}{5}}{\frac{2}{5}} = 13{,}25$, tehát $M(D) = 14$. Míg, ha $P(T > 21) = \frac{2}{5}$ és $P(T = 19) = \frac{3}{5}$, akkor $x_0 = 8 + \frac{\frac{(21{,}5kor)3}{5}}{\frac{2}{5}} = 11{,}75$, így $M(D) = 12$.

Abban az esetben, ha $x(hard) = 17$

$$E_{d,x} - E_{s,x} = -\frac{18}{13}P(T > 21) - \frac{5}{13}P(T = 17) + \sum_{t=18}^{21} \frac{1}{13}(43-2t)P(T = t).$$

Ezek után egy tetszőleges $P(T = t)$ értékre láthatjuk, hogy $E_{d,17} - E_{s,17} < 0$ minden D-re, tehát $M(D) \leq 17$.

„Soft" kezeknél a döntési egyenletre csak $x(soft) = 17$ esetén van szükség. Ekkor

$$E_{d,x} - E_{s,x} = -\frac{1}{13}P(T = 17) + \sum_{t=18}^{21} \frac{1}{13}(43-2t)P(T = t)$$

$P(T = t)$ bármely értékére láthatjuk, hogy minden D-re pozitív egyenletet kapunk. Így tehát $M^*(D) > 17$.

Az x_0 és a döntési egyenlet kiszámításához szükségünk van a $P(T = t)$ valószínűségre, ezt három lépésben számolhatjuk ki. Az első, hogy egzakt értékeket vizsgálunk, $P(T_s = v)$ a valószínűsége annak, hogy az osztó három kártyából v összeget ér el. Ezek a „three-card probabilities”, vagyis a „három-kártyás valószínűségek”(7. táblázat), ahol külön-külön ki tudjuk számolni a lehetséges D értékeket az osztó első lapja alapján. Azokat az eseteket is ide számoljuk, mikor a dealernek két lap után kötelező megállnia.

Első lap	Első három lap összege (egzakt)						Összeg
	17	18	19	20	21	>21	
2	0,0878	0,0800	0,0753	0,0675	0,0627	0,0941	0,4675
3	0,0894	0,0878	0,0800	0,0753	0,0675	0,1443	0,5443
4	0,0973	0,0800	0,0847	0,0800	0,0753	0,1992	0,6165
5	0,0941	0,0973	0,0894	0,0753	0,0769	0,2620	0,6949
6	0,1506	0,0902	0,0910	0,0831	0,0784	0,3169	0,8102
7	0,3639	0,1255	0,0690	0,0659	0,0588	0,0941	0,7773
8	0,1145	0,3529	0,1192	0,0580	0,0596	0,1741	0,8784
9	0,1145	0,0965	0,1145	0,1145	0,0345	0,1804	0,6549
T	0,1098	0,1082	0,1098	0,3255	0,1098	0,1788	0,9420
A	0,1020	0,1035	0,1020	0,1035	0,1020	0,1631	0,6761
Összeg	1,3239	1,2220	0,9349	1,0486	0,7255	1,8071	

7. táblázat – Az első három lap összegének egzakt valószínűségei

A második szakaszban a következő feltételes valószínűségeket számoljuk ki: $P(T = t|T_p = t_p)$, ami annak a feltételes valószínűsége, hogy az osztó eléri a $t, (t \geq 17)$ végösszeget feltéve, hogy t_p $(t_p < 17)$ részösszeg.

Az egyszerűség kedvéért feltételezzük, hogy bármely lap húzásának valószínűsége $1/52$ és akárhány kártyát húz is a játékos, a következő lap húzásának valószínűsége is $1/52$ (visszatevéses mintavétel).

A harmadik lépésben az előző két szakasz eredményeit kombinálva $P(T = t)$ egy közelítése $t \geq 17$-re

$$P(T=t)=P(T_s=t)+\sum_{j<17}P(T_s=j)P(T=t|T_p=j).$$

Kérdés ezzel a közelítéssel kapcsolatban, hogy mennyire pontos. Az egzakt értékekkel való számolás hosszú és fáradtságos folyamat, ezért a cikk csak két esetet vizsgál meg. $D=6$-ot és $D=10$-et. A konkrét és a közelített valószínűségek a legnagyobb eltérést $D=6$ esetén mutatják (8. táblázat).

t	17	18	19	20	21	>21
P(T=t) egzakt	0.166948	0.106454	0,107192	0,100705	0,097878	0,420824
P(T=t) hozzávetőleges	0,167625	0,107234	0,108017	0,101260	0,098364	0,417499

8. táblázat – *P(T=t)* alakulásai *D*=6 esetén (forrás: The Optimum Strategy in BlackJack)

D minden lehetséges értékére az egzakt és a hozzávetőleges valószínűségek közti különbség 1% alatt marad. A korábban származtatott x_0 kifejezés vizsgálata során láthatjuk, hogy a hiba legfeljebb 2% lehet. Az egyetlen eset, mikor ez a különbség változást okoz *M(D)* értékében, az a $D=10$. Itt ugyanis a kerekített összeg 16,01, ekkor $M(D)=17$, míg az egzakt 15,97, $M(D)=16$. Ez az eset további meggondolásokat igényelnek, amelyekre ebben a dolgozatban nem kerítünk sort.

A P(T=t) lehetséges értékei a fentebbi formula alapján a 9. táblázatban láthatóak.

	t							
		17	18	19	20	21	(natural) 21	> 21
D	2	0,141781	0,134885	0,131432	0,123829	0,119581	0	0,348492
	3	0,133533	0,133052	0,126197	0,122563	0,114903	0	0,369751
	4	0,132206	0,116037	0,122553	0,11793	0,114292	0	0,396983
	5	0,121374	0,124511	0,117753	0,105446	0,107823	0	0,423092
	6	0,167625	0,107233	0,108018	0,10126	0,98364	0	0,417499
	7	0,372743	0,139017	0,077841	0,079409	0,073437	0	0,257552
	8	0,131202	0,363359	0,129634	0,068457	0,070026	0	0,237322
	9	0,122256	0,104217	0,35755	0,122256	0,061079	0	0,232643
	10	0,114756	0,113186	0,114756	0,328873	0,03624	0,078431	0,213674
	(1,11)	0,128147	0,131284	0,129716	0,131284	0,051284	0,313725	0,11456

9. táblázat – Az osztó végösszegének valószínűségei (forrás: The Optimum Strategy in BlackJack)

Ha az osztó felfordított lapja tízes, vagy ász, megnézi a második lapját. Ha BlackJack, azonnal felfordítja és a játéknak vége. Viszont, ha a dealer nem mond semmit, a továbbiakban D=10, vagy D=(1,11) esetét úgy vizsgálhatjuk, hogy $P(T = t|T \neq natural\ 21)$[7]. Az eredményeket a 10-es táblázat mutatja.

		t						
		17	18	19	20	21	(natural) 21	> 21
D	10	0,124522	0,122819	0,124522	0,356862	0,039415	0	0,231859
	(1,11)	0,186728	0,191299	0,189015	0,191299	0,074728	0	0,16693

10. táblázat – Az osztó végösszegének valószínűségei, ha 2 lap után nincs BlackJackje (forrás: The Optimum Strategy in BlackJack)

Ezek után a megfontolások után már láthatjuk a húzási stratégia lépéseit. Az alapstratégia tehát megmutatja *M(D)* milyen értékeire álljunk meg, vagy húzzunk és folytassuk a játékot. A speciális esetekben *M(D)* és *M*(D)* kiszámítása és a várható értékek tovább bonyolódnak. Ezek kiszámítása a cikkben nehezen visszakövetjető és hosszadalmas, fáradtságos munkát igényelne, amivel ebben a dolgozatban nem foglalkozok.

4.2.4. Összegzés

A játékosoknak három kérdést kell szemmel tartaniuk a játszmák során. Az első, hogy adott helyzetben húzzanak, vagy megálljanak. A második, hogy mikor érdemes duplázni és a harmadik, hogy mikor válasszák szét párjaikat.

A játékosok keze általában egy egyértelmű, 21-nél kisebb, egész összeg, amit „hard" kéznek is nevezünk. Ha a lapok között ász is van, akkor ez az összeg nem egyértelmű, két lehetséges értéke is van attól függően, hogy az ászt 1-nek, vagy 11-nek számítják. Ezeket az eseteket nevezzük „soft" kezeknek. Néhány jelölést is bevezettünk a korábbiakban, amelyek segítettek az esetek leírásában. *D* az osztó felfelé néző lapja, ami 2, 3, ... 10, (1,11) lehetnek. *M(D)* egy egész szám, egy minimális állandó egyértelmű kezek számára. Ha az osztó felfordított lapja *D* és a játékos összege egyértelmű („hard") és kevesebb, mint *M(D),* akkor húzunk. Ha a játékos összege egyenlő, vagy nagyobb, mint *M(D),* akkor megállunk. *M*(D)* ugyan ezzel a megfontolással egy minimális állandó „soft" kezek számára. Ebben az esetben a játékos két lehetséges értéke közül a nagyobbikkal számolunk. A korábbi számolások alapján *M(D)* lehetséges értékeit, illetve a nem

[7] natural21: egy tízes és egy ász kombinációjából álló 21-t, vagyis a balckjacket természetes, vagyis natural21-nek is szokás nevezni.

részletezett speciális esetek közé tartozó „soft" kezekre vonatkozó *M*(D)* értékeit az alábbi, 11. táblázat mutatja:

M(D)	13	D = 2, 3	M*(D)	18	D ≤ 8, (1,11)
	12	D = 4, 5, 6		19	D = 9, 10
	17	D ≥ 7, (1,11)			

11. táblázat – *M(D)* alakulásai (forrás: The Optimum Strategy in BlackJack)

A duplázás és a szétválasztás háttere a dolgozatban nem részletezett, de a cikk eredményeit bemutatom a következő táblázatokban.

A játékos két lapjának összege (egyértelmű esetben)	≥ 12	11	10	9	≤ 8
D értékei, amelyekre duplázhatunk	-	2 ≤ D ≤ 10	2 ≤ D ≤ 9	2 ≤ D ≤ 6	-
A játékos két lapjának összege (soft kéz esetén)	≥ 19	18	17	13-16	12
D értékei, amelyekre duplázhatunk	-	4 ≤ D ≤ 6	3 ≤ D ≤ 6	D = 5, 6	D = 5

12. táblázat – Duplázás (forrás: The Optimum Strategy in BlackJack)

Párok	ászok, 8-asok	9-esek	7-esek	6-osok, 3-asok és 2-esek	4-esek	10-esek és 5-ösök
D értékei, amelyekre szétválasztunk	mindig	2 ≤ D ≤ 6, D = 8, 9	2 ≤ D ≤ 8	2 ≤ D ≤ 7	D = 5	-

13. táblázat – Szétválasztás (forrás: The Optimum Strategy in BlackJack)

4.3.Trükkök és taktikák

A minél sikeresebb BlackJack játékhoz az alapstratégián kívül (amit az előzőekben láthattunk) további két fontos stratégiai lépés járulhat hozzá. Ezek a lapszámolás és a helyes tétrakás, amelyekről ebben a dolgozatban csupán érintőlegesen esik majd szó, mivel ezek nem épülnek komolyabb matematikai tartalmakra.

4.3.1. Lapszámolás

Az átlagemberek tudatában a lapszámolás, mint valami titokzatos, számukra megtanulhatatlan dolog él, pedig csupán alapműveletekről van szó, amelyek megfelelő gyakorlással tökéletesen elsajátítható technikát képeznek. Ezek a módszerek tökéletesen alkalmasak arra, hogy megállapítsuk, előnyben vagy hátrányban vagyunk-e az adott helyzetben a kaszinóval szemben. A közhiedelemmel ellentétben a kártyaszámolás nem a lapok megjegyzéséről szól, hanem azok értékéről, méghozzá úgy, hogy bizonyos értékeket rendelünk bizonyos kártyatípusokhoz, lapcsoportokat alakítunk ki. A lapokhoz rendelt pontértékeket adjuk össze és ezen összeg segítségével döntjük el, hogy érdemes tovább játszani vagy sem. Lapszámoló rendszerek között is van természetesen különbség, de csak annyiban, hogy hogyan választják meg az egyes lapok értékét. Ezeket El Finito A BlackJack Alapjai című művében alaposabban is ismerteti, ám ebben a dolgozatban csak röviden és főként a HiLo rendszerről lesz szó.

Dr. Edward Oakley Thorp professzor az 1960-as évek elején kezdett el először foglalkozni a BlackJack ideális stratégiájával, mikor szimulációk sokaságát végezte el azzal kapcsolatban, hogy bizonyos lapcsoportok eltávolítása milyen hatással van az eredményekre. Ezekből az esetekből kikövetkeztetve hozta létre az első kártyaszámláló rendszert, a Thorp féle 10-es számlálót, ami a tíz értékű lapokhoz −9-et, a többihez, pedig +1-et rendelt. Ez idő tájt Allan Wilson is megalkotott egy ilyen rendszert, ahol az ász +4-et, a tízesek +1-et, a többi lap pedig −1-et értek. Ez a két kutatás számos tudóst késztetett arra, hogy új rendszereket hozzanak létre, vagy a már meglévőket finomítsák. Az évek során Harvey Dubner, Julian Braun, Stanford Wong, Jerry L. Patterson és Arnold Snyder foglalkoztak alaposabban a ma is nagy népszerűségnek örvendő Hi/Lo rendszer tökéletesítésével és reprezentálásával, amelynek lényege, hogy a tízesek és az ászok −1-et, 2-től 6-ig a lapok +1-et illetve a hét, nyolc, kilences lapok pedig nullát érnek (lásd: El Finito – A BlackJack Alapjai). Ezzel a rendszerrel találkozhatunk a 21 című filmben is, mivel a különböző lapszámolási rendszerek között ez számít a legismertebbnek és a legkedveltebbnek. Ennek oka az, hogy könnyen tanulható, kezelhető, legtöbbször hatékony és több pakli esetén is előnyös.

Jó lapszámolási mód választásával azt is könnyebben eldönthetjük, milyen leosztást hogyan érdemes megjátszani, rávezethet minket arra, hogy érdemes-e esetleg eltérni az alap stratégiától, ami habár matematikailag a legoptimálisabb megoldásokat mutatja. Ha például sok alacsony lap távozott már a pakliból, és a tízesek és ászok száma így elég magas, akkor bizonyos leosztásokat mégis szétválaszthatunk vagy megduplázhatunk, vagy éppen megállhatunk hamarabb.

A kártyaszámoló rendszereknek három aspektusban térhetnek el egymástól, a fogadási hatékonyságban, ami a kaszinóval szembeni előnyünket vagy hátrányunkat segít megállapítani, a játékhatékonyságban, ami megmutatja mikor érdemes változtatni az alapstratégián és a biztosítási hatékonyságban, ami azt segít eldöntenünk, hogy ha az osztó felfelé néző lapja ász, érdemes-e biztosítást kötnünk. A rendszerek között azonban egy sincs, amelyik mindhármat jobban teljesítené a többinél. El Finito, már említett könyvében pontosabb százalékos kimutatást is találunk, illetve tanácsokat arra vonatkozóan, adott körülmények között melyik rendszert érdemes használni.

5. Összegzés

A matematika feldolgozása filmekben és sorozatokban egyre népszerűbb. Néhol egész történeteket építenek fel rá, néhol csak érintőlegesen jelenik meg. A legtöbbször kártya és kockajátékok apropójából, kaszinókról és szerencsejátékokról szóló mozifilmekben és sorozatokban. Dolgozatomban két igen ismert és kedvelt játékot dolgoztam fel.

Láthattuk, hogy a Craps, ami egy igen egyszerű kockajáték, igen egyszerű matematikai háttérrel rendelkezik. A két kockával való dobás kimenetelei végesek, valószínűségeik egyszerűek és a nyeremények várható értéke is igen könnyen kiszámolható. ezáltal a szerencsére kevésbé hagyatkozva, nyereségesebb játékot játszhatunk. Ebben a játékban vannak a legjobb nyerési esélyeink, habár a ház előnye egyik játékban sem küzdhető le teljesen.

Így van ez a BlackJackban is, ami szintén egyszerű és kedvelt a gyakorlott és az alkalmi szerencsejátékosok körében is. A Crapssel szemben viszont bonyolultabb és kevésbé átlátható matematika áll mögötte. Nem számolható olyan könnyedén és gyorsan végig, időigényes és nehézkes meghatározni, mi a legmegfelelőbb lépés bizonyos kártyaállások során. A legtöbb, ezzel a játékkal foglalkozó szakirodalom és internetes oldal is csak szimulációkra alapuló valószínűségekkel indokolja az ajánlott lépéseket. A feldolgozott cikk és az egyetemi háttérismeretek alapján a 4.2-es fejezetben az alapvető húzási stratégia valószínűségeit mutattam be.

A kaszinók előnyét letornázni nem csak matematikai számításokkal tudjuk. A lapszámolás szintén népszerű téma a hollywoodi filmekben. Találkozhattunk vele az *Esőember*ben, a *Másnaposok*ban és a *21 – Las Vegas ostroma* című filmben is. A 4.3-as fejezetben az egyik legnépszerűbb ilyen rendszer bemutatásával foglalkoztam. A lapszámolás lényege nem az, hogy a pontos lapokat tartjuk fejben. Egyszerűbb egy logikai rendszer alapján értékeket rendelni a lapokhoz és az összegeket figyelembe véve várni a következő húzás eredményét. Mint láthattuk, a Hi-Lo rendszerben az alacsony lapok +1-gyel, a magasak -1-gyel számolandók, így minél nagyobb a kiment lapok összege, annál több magas lap van játékban, ami szintén beleszámít az esélyek latolgatásába.

A kaszinójátékok és a matematikát tartalmazó filmek pedagógiai szempontból hasznosnak mondhatóak, közelebb hozhatják a fiatalokat ehhez a tudományterülethez. Mindazonáltal, a mozifilmekben megjelenő matematikai tartalom nem mindig megbízható, néha csak látványelem. Mind az egyetemen, mind az alsóbb szintű iskolákban érdemes lehet bemutatni ezeket a megfelelő elemzés után.

6. Bibliográfia

1. Balázs Márton, Tóth Bálint (2012.11.18): Valószínűségszámítás 1. Jegyzet Matematikusoknak és Fizikusoknak, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, link: http://www.math.bme.hu/~balazs/vsz1jzetb-t.pdf
2. Baldwin – Cantey – Maisel – McDermott (1956): The Optimum Strategy In BlackJack, in Journal Of The Americian Statistical Association, 1956. szeptember, 429-439.o., link: http://www.bjmath.com/bjmath/basic/cantey.pdf
3. Baróti – Bognár – Fejes Tóth – Mogyoródi (1997): Valószínűségszámítás, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest
4. El Finito (2011): A Balckjack Alapjai, Amit mindenképpen tudnod kell, link: http://mek.oszk.hu/09200/09277/09277.pdf
5. Ketskeméty László (1996): Valószínűségszámítás és matematikai statisztika, Budapest, link: http://irh.inf.unideb.hu/~jsztrik/education/11/valseg-matstat-elo.pdf
6. Online Casino Advice: Craps történelem, utolsó letöltés: 2014.04.25., link: http://www.onlinecasinoadvice.hu/craps/a-craps-tortenete/
7. Solt György (1985): Valószínűségszámítás, 5. kiadás, Műszaki Könyvkiadó, Budapest
8. Wintsche Gergely (2013.06.27): Játékok és valószínűségek filmeken, nyitrai előadás anyaga
9. Wikipédia: Monty Hall – paradoxon, utolsó módosítási dátum: 2013.07.24. utolsó letöltés: 2013.10.30., link: http://hu.wikipedia.org/wiki/Monty_Hall-paradoxon
10. Wikipédia: Bayes tétel, utolsó módosítási dátum: 2013.03.11, utolsó letöltés: 2014.05.14., link: http://hu.wikipedia.org/wiki/Bayes-t%C3%A9tel