Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Matematikatanítási és Módszertani Központ

Néhány háromszögekkel kapcsolatos tétel bizonyítása a gömbön –

A súlypont és a területfelező vonalak vizsgálata síkon és gömbön

BSc Szakdolgozat

Konzulens:
Lénárt István
Oktatáskutató

Témavezető:
Dr. Rózsahegyiné Vásárhelyi Éva
Egyetemi docens

Készítette:
Lados Bence Ferenc
Matematika BSc

Budapest, 2014.

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

1.1. Előszó

Szakdolgozatom alapjául Lénárt István tanár úr Nem-euklideszi geometriák órája szolgált, mely órák keretében elmélyültünk a gömbi geometriában. Egy új világ nyílt ki előttem, és nagyon érdekesnek találtam. Ennek a világnak szeretném egy kis részét részletesebben bemutatni.

Dolgozatomban a háromszögek súlypontját veszem fókusz alá, meg fogjuk nézni, hogy milyen hasonlóságok és különbségek vannak a síkháromszögek és gömbháromszögek esetében.

Ahhoz, hogy kicsit el tudjunk mélyülni ezekben a gondolatokban, a második fejezetben bevezetem a gömbi geometriához szükséges fogalmakat. Valamint az utolsó alfejezetben, mutatok egy másik interpretációt. Ennek a lényege, hogy gömbi geometriára mint önálló geometriára tekint. Nem használjuk az euklideszi térgeometria elemeit, ahhoz, hogy bevezessük a gömbi geometria alapfogalmait, hanem egy önálló rendszer alapjait fektetjük le. Az ehhez szükséges ismereteimet a Nem-euklideszi geometriák órán [2] szereztem, és ennek segítségével vezetem majd be itt is. Még fontos megemlíteni, hogy ezt a fejezetet, az utolsó alfejezettől eltekintve, az [1, o. 374-380] könyv alapján építettem fel. A harmadik fejezetben rátérünk a dolgozat témájára, a súlypont-tétel bizonyítására. A tételt háromféleképpen fogjuk belátni. Minden alkalommal, ugyanazzal a módszerrel bebizonyítom a gömbön és a síkon is a tételt.

A negyedik fejezetben pedig a területfelező vonalakkal és a területfelezők metszéspontjával foglalkozunk. Megvizsgáljuk, milyen hasonlóságokat és különbségeket mutatnak a síkháromszögek súlyvonalai és súlypontja a gömbháromszögek súlyvonalaival, területfelező vonalaival, illetve a súlyponttal és a területfelezők metszéspontjával.

1.2. Köszönetnyilvánítás

Köszönet Lénárt István tanár úrnak, hogy egy új világot nyitott ki előttem, hogy megmutatta, hogy máshogy is lehet tanítani, és nem utolsó sorban, hogy segített e szakdolgozat létrejöttében.

2. fejezet

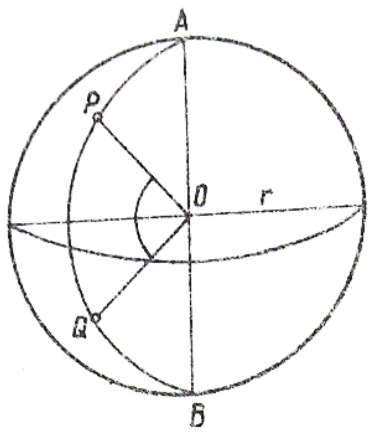
Gömbháromszögtan

2.1. Gömbi távolság

2.1.1. Definíció. *Legyen adott a gömbfelület két pontja, P és Q. Ha ezek a gömb középpontjával, O-val egy egyenesbe esnek, P-t és Q-t* átellenes pontok*nak nevezzük. Ha P és Q nem átellenes pontok, rajtuk keresztül csak egy főkör húzható, melyet az OPQ sík a gömbfelületen kimetsz.*

2.1.2. Definíció. *A főkör olyan gömbi kör, melynek sugara megegyezik a gömb sugarával.*

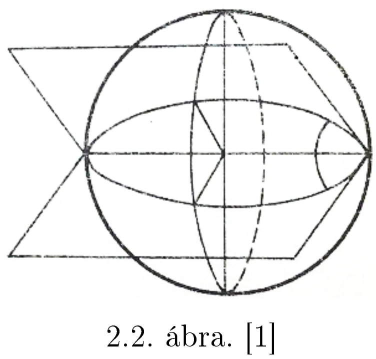
Két nem átellenes pont tehát egyértelműen meghatároz egy főkört. E főkörnek a P és Q közötti kisebbik ívét a P és Q pontok gömbi távolságának nevezzük. Két átellenes pont távolságán félfőkörívet értünk. A $\overset{\frown}{PQ}$ ív hossza: $\overset{\frown}{PQ}= rPOQ\sphericalangle$ ahol r a gömb sugara.



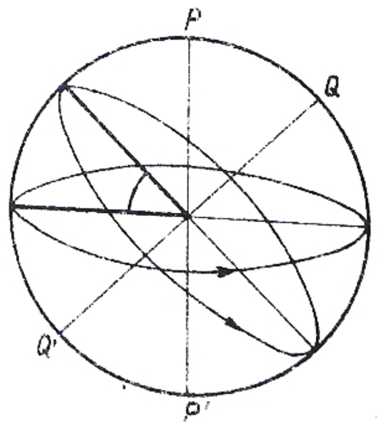
2.1. ábra. [1]

Ha ugyanazon gömb különböző pontjainak távolságát hasonlítjuk össze, a gömb sugarát egységnyinek vehetjük, így a gömbi távolságokat szögekkel fejezhetjük ki. A gömbi távolságmérés tekinthető euklideszi értelemben vett szögmérésnek. A szögeket fokokban vagy radiánban is mérhetjük.

A gömbfelületen a főkörívek játsszák ugyanazt a szerepet, mint síkban az egyenesek. Eltérés abban van, hogy két főkör egymást két (átellenes) pontban metszi. Így ún. *gömbkétszög* jön létre. A gömbkétszögeket határoló fél-főköröket, a gömbkétszög oldalainak nevezzük. Ezeknek hossza 180°-kal egyenlő.


2.2. ábra. [1]

Két egymást metsző főkörív által bezárt szögön a meszéspontjukban húzott érintők hajlásszögét értjük. Ez a szög megegyezik a főköríveket kimetsző két sík által bezárt lapszöggel. Ennek a szögnek a meghatározása akkor válik egyértelművé, ha pl. a főkörívekenek adunk meg haladási irányt, és a szögön egy olyan elforgatás nagyságát értjük, mellyel az egyik főkörív, haladási irányával együtt átmegy a másik főkörívbe. (2.2)



2.3. ábra. [1]

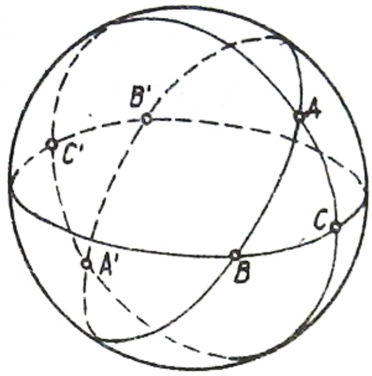
A középpontban a főkör síkjára merőleges egyenes a gömbfelületen két átellenes pontot metsz ki. Ezt a két pontot a főkör pólusainak nevezzük, a főkört pedig bármely pólusa polárisának. Az a pólus, mely a főkörön adott bejárási értelemben haladva bal kéz irányában fekszik, a bal oldali pólus. Két főkör által bezárt szög egyenlő a megfelelő pólusok által bezárt szöggel, azaz a pólusok gömbi távolságával. (2.3)

2.2. Gömbháromszög

2.2.1. Definíció. *Egy háromélű testszöglet (triéder), ha csúcsa a gömb középpontja, a gömbfelületből* gömbháromszöget *vág ki. A gömbháromszöget határoló ívek a gömbháromszög oldalai, az ívek közös pontjai a gömbháromszög csúcsai, az oldalak által bezárt belső szögek a gömbháromszög szögei.*

Most csak az ún. Euler-féle gömbháromszögekkel foglalkozunk, amelyekben minden oldal és szög kisebb, mint 180°.

Az ABC gömbháromszög oldalainak meghosszabításai egymást a háromszögön kívül fekvő A', B' és C' pontokban metszik. A gömbfelületet a három főkör nyolc gömbháromszögre osztja. A csúcsok átellenes pontjai által alkotott $A'B'C'$ háromszög az ABC háromszög *átellenes háromszöge*. Az $A'BC$, $AB'C$, ABC' háromszögek, melyeknek egy-egy oldala közös az ABC háromszöggel, az ABC háromszög *mellékháromszögei*. Az átellenes háromszögek megfelelő oldalai és szögei egyenlők, a mellékháromszög közös oldalai és ezen oldalakkal szemközt fekvő szögei egyenlők, a többi oldalak és szögek egymást 180°-ra egészítik ki.



2.4. ábra. [1]

A gömbháromszög minden oldalához két pólus tartozik. Járjuk be az oldalakat

$ABCA$ sorrendben, és vegyük a baloldai pólusokat, melyek egy gömbháromszöget, az eredeti gömbháromszög *polárháromszög*ét határozzák meg. Bármely gömbháromszög a saját polárháromszögének a polárháromszöge. Igazolható, hogy a polárháromszögek egyikének az oldalai a másiknak a megfelelő szögeit 180°-ra egészítik ki.

Egy gömbháromszög két oldalának összege a harmadik oldalnál nagyobb.

A gömbi távolság a két pontot összekötő rövidebbik főkörívnek felel meg.

A gömbháromszög oldalainak összege kisebb 360°-nál.

Ha ezt a tételt a polárháromszög oldalaira alkalmazzuk, úgy kapjuk:
A gömbháromszög szögeinek összege nagyobb 180°-nál (és kisebb 540°-nál). Ugyanis, ha a, b, c egy gömbháromszög oldalai és α, β, γ a szögei, akkor a polárgömbháromszög oldalai $180° - \alpha$; $180° - \beta$; $180° - \gamma$; tehát ha $a + b + c < 360°$, akkor $180° - \alpha + 180° - \beta + 180° - \gamma < 360°$, vagy más alakban:

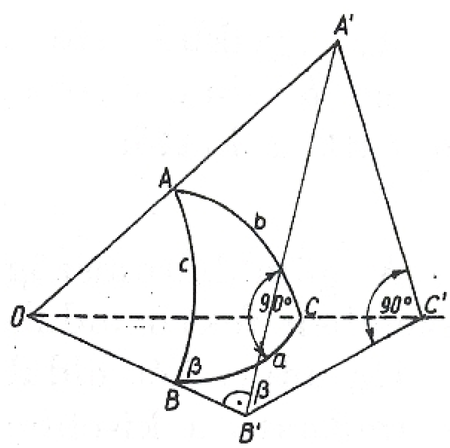
$$\alpha + \beta + \gamma > 180° \tag{2.1}$$

A gömbháromszögre, a síkháromszögekhez hasonlóan, sok tételt írhatnánk fel, ezek közül csak néhánnyal foglalkozunk, amelyeket bizonyítás nélkül felhasználunk. (Pl. itt is érvényes, hogy nagyobb oldallal szemközt nagyobb szög fekszik és ennek megfordítása.)

2.3. Gömbi trigonometria

2.3.1. A derékszögű gömbháromszög

Legyen az ABCgömbháromszögben $\gamma = 90°$, az a és b oldalak hegyesszögek. A gömbháromszög triéderét egészítsük ki az $OA'B'C'$ tetraéderré, egy olyan síkkal való metszéssel, mely B'-ben merőleges az OB'-re, így az $OB'C'$ síkra is. $A'B'$ és $B'C'$ merőleges OB'-re. $A'C'$ merőleges OC'-re, tehát az $OB'A'$; $OC'A'$; $OB'C'$ síkháromszögek derékszögűek (a derékszögek a középső betűk által jelzett csúcsoknál vannak). Az $OB'A'$ háromszögben az $A'B'$ befogóval szemközti szög a gömbháromszög c oldala, így:



2.5. ábra. [1]

2.3.1. Tétel (Gömbháromszögtan Pitagorasz-tétele)**.**

$$\cos c = \frac{OB'}{OA'} = \frac{OB'}{OC'} \cdot \frac{OC'}{OA'} = \cos a \cdot \cos b \tag{2.2}$$

Az $\frac{OB'}{OC'}$ és a $\frac{OC'}{OA'}$ arányokat az $OB'C'$ és $OC'A'$ derékszögű háromszögekből fejeztük ki. A kapott $\cos c = \cos a \cdot \cos b$ képlet a derékszögű gömbháromszög oldalai között állapít meg összefüggést, ezért a *gömbháromszögtan Pitagorasz-tételének* nevezik.

Egy hegyesszög szinusza kifejezhető két oldal szinuszának arányával.

$$\sin\beta = \frac{A'C'}{A'B'} = \frac{A'C'}{OA'} : \frac{A'B'}{OA'} = \frac{\sin b}{\sin c} \tag{2.3}$$

Hasonlóan

$$\sin\alpha = \frac{\sin a}{\sin c} \tag{2.4}$$

A szög koszinuszára a következőt kapjuk:

$$\cos\beta = \frac{B'C'}{A'B'} = \frac{B'C'}{OB'} : \frac{A'B'}{OB'} = \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} c} \tag{2.5}$$

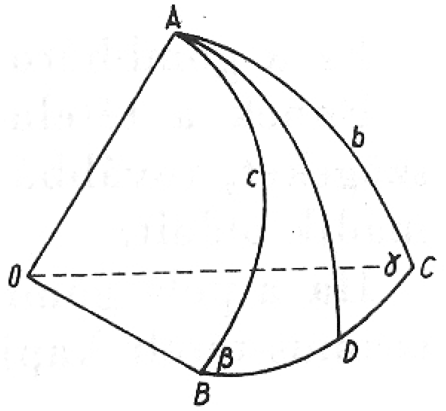
Hasonlóan:

$$\cos\alpha = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} c} \tag{2.6}$$

Ha az a és b oldal nem hegyesszögűek, akkor a mellékgömbháromszög oldalai már igen. Erre alkalmazva a kapott összefüggéseket beláthatjuk, hogy tompaszög esetén is érvényben maradnak.

2.3.2. A gömbháromszögtan szinusz-tétele

Legyen ABC egy derékszöget nem tartalmazó gömbháromszög, így OA nem merőleges az OBC síkra. Az OA egyenesen át az OBC síkra csak egy merőleges sík fektethető. Ez a sík a gömbfelületen kimetsz egy főkört, mely átmegy a-n, és messe a BC oldalt D-ben. Az AD gömbi távolság az ABC gömbháromszöget két derékszögű gömbháromszögre bontja (az $ADC\sphericalangle$ és $ADB\sphericalangle$ derékszög). Az ABD és ACD derékszögű gömbháromszögben:



2.6. ábra. [1]

$$\sin\beta = \frac{\sin \overset{\frown}{AD}}{\sin c} \qquad \sin\gamma = \frac{\sin \overset{\frown}{AD}}{\sin b} \tag{2.7}$$

Az egyikből $\sin AD$-t kifejezve és másikba helyettesítve $\sin\beta : \sin\gamma = \sin b : \sin c$ összefüggést kapjuk. Ugyanígy $\sin\alpha : \sin\beta = \sin a \sin b$, vagy együtt a kettő:

2.3.2. Tétel (A gömbháromszögtan szinusz tétele)**.**

$$\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = \sin a : \sin b : \sin c. \tag{2.8}$$

A gömbháromszög szögeinek szinuszai úgy aránylanak egymáshoz, mint a szemben fekvő oldalak szinuszai. Ez a gömbháromszögtan szinusz tétele.

Ha adott két oldal és a nagyobbikkal szemközti szög, úgy a szinusz-tétellel kiszámítható a kisebbel szemközti szög.

A megoldás során a szög szinusza a szöget még nem határozza meg egyértelműen hiszen $\sin\alpha = \sin(180° - \alpha)$. Ezért azt a szöget kell választani, amelyik esetében teljesült a „nagyobb oldallal szemben a nagyobb szög fekszik” tétel. Ha a kisebbikkel szemközit szög adott, akkor a síkháromszögtanhoz hasonlóan 0, 1 vagy 2 megoldást kaphatunk. Ugyanez a meggondolás érvényes, ha két szög és valamelyikkel szemben fekvő oldal adott.

2.3.3. A gömbháromszögtan koszinusz-tétele

Az előbb kapott ADB és ADC derékszögű gömbháromszögekre alkalmazhatjuk a megismert Pitagorasz-tételt (2.3.1 Tétel)

$$\cos c = \cos\overset{\frown}{BD}\cos\overset{\frown}{AD} \tag{2.9}$$

$$\cos b = \cos\overset{\frown}{CD}\cos\overset{\frown}{AD} \tag{2.10}$$

Elosztva egymással a két egyenletet

$$\frac{\cos c}{\cos b} = \frac{\cos\overset{\frown}{BD}}{\cos\overset{\frown}{CD}} = \frac{\cos(a-\overset{\frown}{CD})}{\cos\overset{\frown}{CD}} = \frac{\cos a - \cos\overset{\frown}{CD} + \sin a - \sin\overset{\frown}{CD}}{\cos\overset{\frown}{CD}}$$

$$\frac{\cos c}{\cos b} = \cos a + \sin a \cdot \operatorname{tg}\overset{\frown}{CD} \tag{2.11}$$

Az ADC háromszögből $\cos\gamma = \frac{\operatorname{tg}\overset{\frown}{CD}}{\operatorname{tg} b}$ amiből $\operatorname{tg}\overset{\frown}{CD} = \operatorname{tg} b \cdot \cos\gamma$.
Így $\frac{\cos c}{\cos b} = \cos a + \sin a \cdot \operatorname{tg} b \cdot \cos\gamma$ ebből

2.3.3. Tétel (Gömbháromszögtan oldalakra vonatkozó koszinusz-tétele)**.**

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos\gamma \tag{2.12}$$

Hasonlóan

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos\alpha \tag{2.13}$$

$$\cos b = \cos a \cdot \cos c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos\beta \tag{2.14}$$

Ez a gömbháromszögtan oldalakra vonatkozó koszinusz-tétele.

Ennek a tételnek a segítségével három adott oldalból meghatározhatjuk a szögeket, továbbá két oldalból és a közbezárt szögből meghatározhatjuk a harmadik oldalt.

Ha a polárgömbháromszögre alkalmazzuk a tételt, úgy a szögekre vonatkozó koszinusz-tételt kapjuk.

Mint ahogy már láttuk, ha a, b, és c egy gömbháromszög oldalai, és α, β, γ a szögei, akkor a polárháromszög oldalai $180-\alpha$, $180-\beta$, $180-\gamma$, hasonlóan a szögei pedig $180-a$, $180-b$ és $180-c$. Tehát így szól a tétel:

2.3.4. Tétel (Gömbháromszögtan szögekre vonatkozó koszinusz-tétele)**.**

$$\cos\gamma = -\cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \cos c \tag{2.15}$$

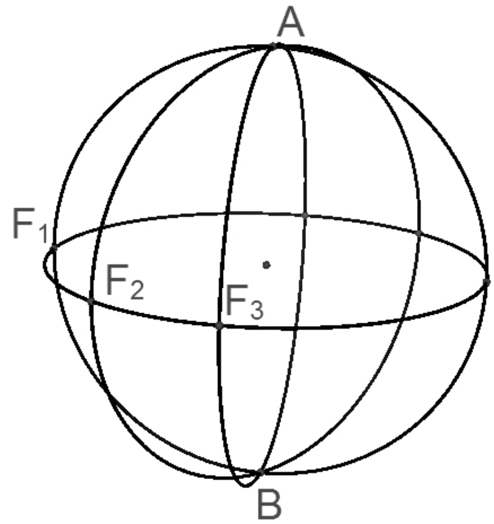
Ha behelyettesítsük a 2.3.3 tételbe a polárháromszög oldalait és szögeit, majd a koszinusz azonosságait alkalmazva következik az állítás.

2.4. Gömbháromszögtan mint nem-euklideszi geometria

Az előbbiekben bevezetett fogalmak (mint pl.: gömbi egyenes, egyenesek hajlásszöge, gömbi távolság) bevezethetők az euklideszi geometria nélkül is csak gömbi eszközök, alapfogalmak használatával. Legyen adott a gömbfelület, valamint az alaphalmaz elemei: pontok és egyenesek. Itt egyenes alatt a gömb egy főkörét értjük.

Vegyünk egy főkört és osszuk fel 360 részre, egy ilyen rész a gömbi távolságegység.

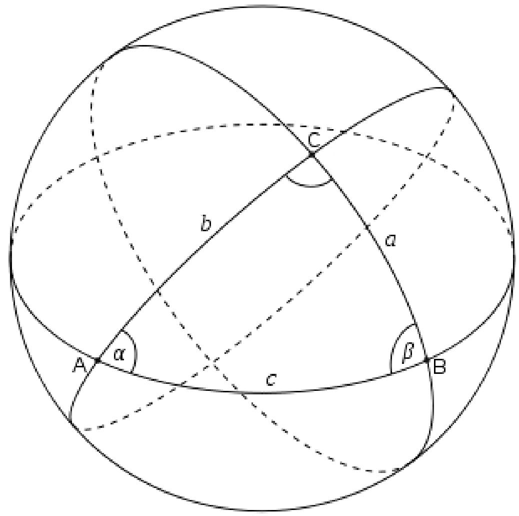
Bármely két egyenes egy átellenes pontpárban metszi egymást, valamint bármely átellenes pontpáron át végtelen sok egyenes fektethető. Két átellenes pont 180 egység távolságra van egymástól. Két egyenes meghatároz egy *gömbkétszög*et, vagyis a kétszögek csúcsai mindig átellenes pontok. (Tekintsünk el attól az elfajuló esettől, amikor két nem átellenes pontot összekötő szakaszokat veszünk, mert ugyan az is egy kétszög, de mindkét oldala ugyanazon egyenesben van.) A gömbkétszögek segítségével tudjuk értelmezni az egyenesek hajlásszögét.
Legyen AB egy gömbkétszög, vegyünk fel a csúcsaitól 90 egységnyire az F_1 és az F_2 pontokat, ezek felezőpontjai a kétszögnek, hiszen minden kétszög oldalhossza 180 egység. Ez a két pont meghatároz egy egyenest, ezen az egyesen tekintsük az F_1 és az F_2 pontok távolságát, ez lesz a gömbkétszög szárainak, illetve az azt alkotó egyeneseknek a hajlásszöge. Ilyen módon távolsággal tudunk szögeket definiálni és szögekkel távolságokat. Ez az egyenes, amit az előbb definiáltunk, a kétszög oldalainak felezőmerőlegese.
Az A csúcstól mind a két felezőpont 90 egységnyire van, vagyis az egyenes is, amit rajtuk keresztül fektettünk. Az $AF_1F_2\sphericalangle$-et, mint ahogy már láttuk, a szárain 90 egységre felvett pontokon keresztül fektetett szakasz hosszával tudjuk megadni. De ez a szakasz az A-ból indul, és a másik felezőpont rajta van az F_1F_2 egyenesen, vagyis A-tól 90 egységnyire van tehát $AF_1F_2\sphericalangle = 90°$ azaz 90 egység. (Az így létrejövő háromszöget *oktáns*nak nevezzük, melynek minden oldala és szöge 90°.)



2.7. ábra

Minden átellenes pontpárhoz hozzá tudunk rendelni kölcsönösen egyértelműen egy egyenest, mégpedig úgy, hogy a két pontot összekötő egyenesek valamelyikének vesszük a pontok közötti távolságának a felező merőlegesét. Ez az egyenes az összes, a pontpáron áthaladó egyenesre merőleges, nevezzük ezt a pontpár *poláris*ának és az egyeneshez rendelhető pontpárt pedig az egyenes *pólusá*nak.

Bármely három nem kollineáris pont egy *gömbháromszög*et határoz meg. Ezek közül azokkal foglalkozunk, melyeknek oldalai nem nagyobbak 180°-nál. Ezeket Euler-féle háromszögeknek nevezzük.



2.8. ábra

3. fejezet

A súlypont

Ebben a fejezetben a gömbháromszögek súlypontját fogjuk vizsgálni. Háromféle bizonyítást adunk arra, hogy a gömbön és a síkon egy háromszög súlyvonalai egy pontpáron illetve egy ponton mennek át, és ez a pont a súlypont. Az előbbiekben bevezetett fogalmakat, tételeket is használva fogom bizonyítani a tételt.
A 2.4 fejezetben bevezetett geometriai felépítés nem az euklideszi tér segítségével történt. Ezzel arra akartam rámutatni, hogy a gömbön is lehet geometriát csinálni új fogalmakkal, az euklideszi geometria segítsége nélkül. Viszont még nem született bizonyítás a súlypontra – tudomásom szerint, – mely csak ezen gömbi eszközöket használná, ezért a tételt az euklideszi geometria, a projektív geometria és gömbi trigonometria eszközeivel fogom bebizonyítani. Minden alkalommal meg fogjuk nézni a bizonyítást a síkon is, analóg módon, ahogy a gömbön is.
Az egyszerűség kedvéért egység sugarú gömbbel foglalkozom ebben a részben is. Persze az összes állítás igaz lenne nem egység sugarú gömbre, csak a számítások egyszerűsítése érdekében tegyük fel ezt. Nem fogok minden egyes tételt, állítást bebizonyítani, de ami szorosan kapcsolódik a témához, azokat az állításokat, tételeket bizonyítom.
Mindenekelőtt definiálok két fogalmat, amit minden részben használok:

3.0.1. Definíció (Súlyvonal). *Egy tetszőleges háromszög egyik oldalának felezőpontját a szemközti csúccsal összekötő szakaszt nevezzük súlyvonalnak.*

Meg kell jegyezni, hogy a gömbön a súlyvonalak két pontban metszik egymást, tehát szükséges még egy definició:

3.0.2. Definíció (Súlypont). *Az Euler-féle gömbháromszögek súlypontjának, azt a pontot nevezzük, melyet a súlyvonalak a háromszög belsejébe eső szakaszai metszenek ki.*

3.1. A gömb mint az euklideszi tér része

Ennek a résznek a síkgeometriai fogalmaihoz Hajós György könyvét [4] használtam. Tekintsünk most a gömbre, mint az euklideszi tér részére, majd az euklideszi geometria elemeivel vezessük vissza problémát a gömbről a síkra.

3.1.1. A centrális projekció

Legyen ABC egy általános gömbháromszög. A gömb O középpontjával az $OABC$ egy triéder. Az ABC pontok által kifeszített sík, és az $OABC$ triéder metszete egy háromszög. Ennek a háromszögnek a segítségével bizonyítjuk a súlypont-tételt a gömbön. De mindezek előtt definiálunk egy projekciót:

3.1.1. Definíció (Centrális projekció)**.** *Legyen adott egy nyílt félgömb G, vagyis egy olyan félgömb, amiről elhagytuk az egyetlen olyan főkörét, amit teljesen tartalmazna (az egyenlítőjét), valamint a gömb középpontja C, a vetítés középpontja, és egy S sík, ami párhuzamos, és nem azonos azzal a síkkal, ami áthalad a gömb középpontján és tartalmazza azt a főkört, amit elhagytunk. Legyen $P \in G$ egy pont a nyílt félgömbfelületen, P képét S-en az e „vetítő-félegyenes” határozza meg. Az e félegyenes a C-ből indul, és keresztülmegy P-n. A P' pont az $e \cap S$ lesz. Ez egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés, mert visszafelé S-ről tudunk vetíteni G-re hasonló módon.*

Ilyen módon a gömbi egyenesek az S síkon is egyenesek leszek, és ha két egyenes metszi egymást a gömbön, akkor metszik egymást a síkon is, és fordítva. Tehát a centrális projekció illeszkedés tartó.
Azzal, hogy kivettük az egyenlítőt, azt értük el, hogy nem kell bővíteni az euklideszi síkot ideális pontokkal és ideális egyenessel, tehát az euklideszi térben maradunk.

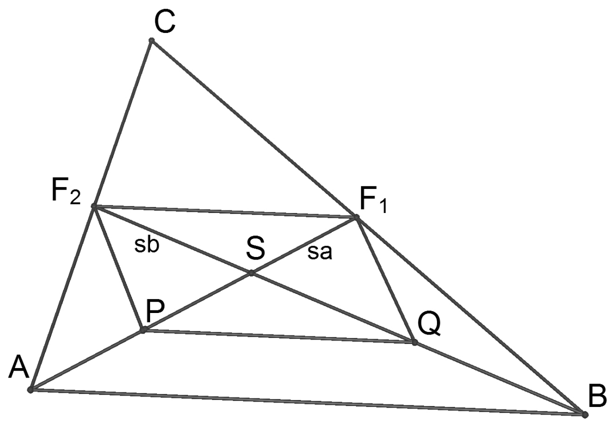
3.1.2. A síkháromszög súlypontja

Az ebben a részben tárgyalandó bizonyításban felhasználjuk a síkháromszögek súlypont-tételét, ezért most bebizonyítjuk ezt a tételt:

3.1.2. Tétel (Súlypont-tétel)**.** *A háromszög súlyvonalai egy pontban metszik egymást. Ez a pont a háromszög súlypontja. A háromszög bármely súlyvonalára igaz, hogy a súlypont a súlyvonal oldalfelező ponthoz közelebbi harmadoló pontja.*

Bizonyítás: [4]
Először megmutatjuk, hogy AF_1 és BF_2 súlyvonalak harmadolják egymást. Jelölje ABC háromszög s_a és s_b súlyvonalának metszéspontját S. Legyen továbbá az AS szakasz felezőpontja P, a BS szakasz felezőpontja Q. Az ABC háromszögben F_1F_2 középvonal, ezért F_1F_2 szakasz hossza fele AB szakasz hosszának és párhuzamos vele.

Az ABS háromszögben PQ középvonal, ezért PQ szakasz hossza fele AB szakasz hosszának és párhuzamos vele. A fenti két észrevételt összevetve azt kapjuk, hogy PQF_1F_2 négyszög paralelogramma, mivel PQ és F_1F_2 szakaszok egyenlő hosszúak és párhuzamosak. A paralelogramma átlói felezik egymást, így $PS = SF_1$ és $QS = SF_2$. Mivel P és Q az AS illetve BS szakaszok felezőpontjai, ezért $AS = 2SF_1$ és $BS = 2SF_2$. Ha bizonyításunkat az s_a, s_c súlyvonalpárra is elvégeznénk, akkor azoknak is s_a harmadolópontján (S ponton) kellene áthaladniuk. Ezért mindhárom súlyvonal ugyanazon az S ponton megy keresztül.



3.1. ábra

□

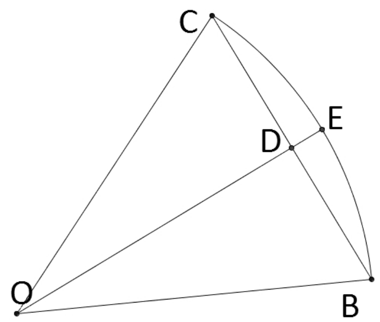
3.1.3. A gömbháromszög súlyvonala

3.1.3. Állítás. *Az ABC síkháromszög súlyvonalának centrális vetülete a gömbháromszög súlyvonala.*

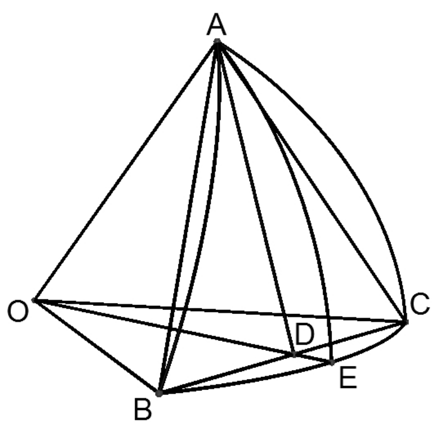
Bizonyítás:

Ahhoz, hogy belássuk a tételt, elég azt megmutatnunk, hogy a gömbháromszögben a BC oldalon az E pont oldalfelező valamint, hogy O, D, E, A egy síkban van. Kezdjük a felezőponttal:

Az OBC háromszög egyenlő szárú háromszög. Ebben a háromszögben az OD szakasz súlyvonal, tehát a D pont felezi a CB szakaszt. De mivel ez egy egyenlő szárú háromszög, ezért a szögfelező-tétel alapján ($CD : DB = 1 : 1$) OD szögfelező is. A körcikk ívhossza arányos a középponti szöggel, tehát egyenlő szögekhez egyenlő ívhosszak tartoznak. Tehát ha OD egyenessel metszve a CB körívet kapjuk az E pontot, ahol ahogy már megmutattuk, OD szögfelező, akkor az E pont az ív felezőpontja



3.2. ábra



3.3. ábra

lesz, tehát a gömbháromszög BC oldalának is felezőpontja.

Ezek után nyilvánvaló, hogy O, D, E, A pontok egy síkban vannak, mert egy egyenesen és egy rajta kívül fekvő ponton keresztül pontosan egy síkot fektethetünk.

Ez a sík tartalmazza a DA szakaszt, is ami az ABC síkháromszög súlyvonala. A definiált centrális vetítés alapján az AD síkbeli egyenes szakasz az AE gömbi szakaszba képződik, ami valóban egy gömbi egyenes lesz, hiszen olyan síkkal metszettük ki a gömbből ami átmegy a középpontján, tehát a metszet: főkör. Tehát AE gömbi szakasz az A csúcshoz tartozó súlyvonal.

$\square$

3.1.4. A gömbháromszög súlypontja

3.1.4. Tétel (Gömbháromszög súlypontja)**.** *A gömbháromszög súlyvonalai egy pontban metszik egymást, a súlypontban.*

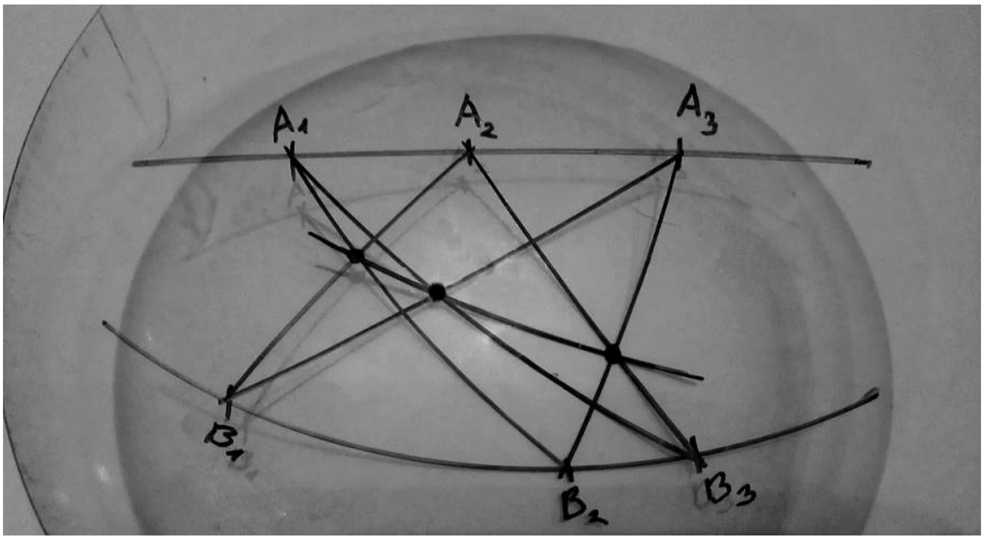
Bizonyítás:

Láttuk, hogy a gömbháromszög súlyvonalát le tudjuk vetíteni arra, a síkra amit a gömbháromszög három csúcsa feszít ki, így egy síkháromszöget kapunk, aminek súlyvonalai a gömbi súlyvonalak síkvetületei. Láttuk a 3.1.2-es tételben, hogy a síkháromszögek súlyvonalai egy pontban metszik egymást. Ennek a pontnak a képe a gömbháromszög súlypontja, mert a centrális projekció illeszkedéstartó. Ha a súlyvonalak a kijelölt síkban metszették egymást, akkor a gömbi súlyvonalak egy pontpárban metszik egymást.

$\square$

3.2. Papposz és Desargues tételei a gömbi geometriában

3.2.1. Papposz és Desargues tételei



3.4. ábra

3.2.1. Tétel (Papposz-tétel). *Vegyünk fel két egyenest a gömbön. Mind a két egyenesen vegyünk fel három pontot:* A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3. *Ekkor* A_1B_2 *és* A_2B_1 *metszete,* A_1B_3 *és* A_3B_1 *metszete és* A_2B_3 *és* A_3B_2 *metszete egy egyenesen vannak.*

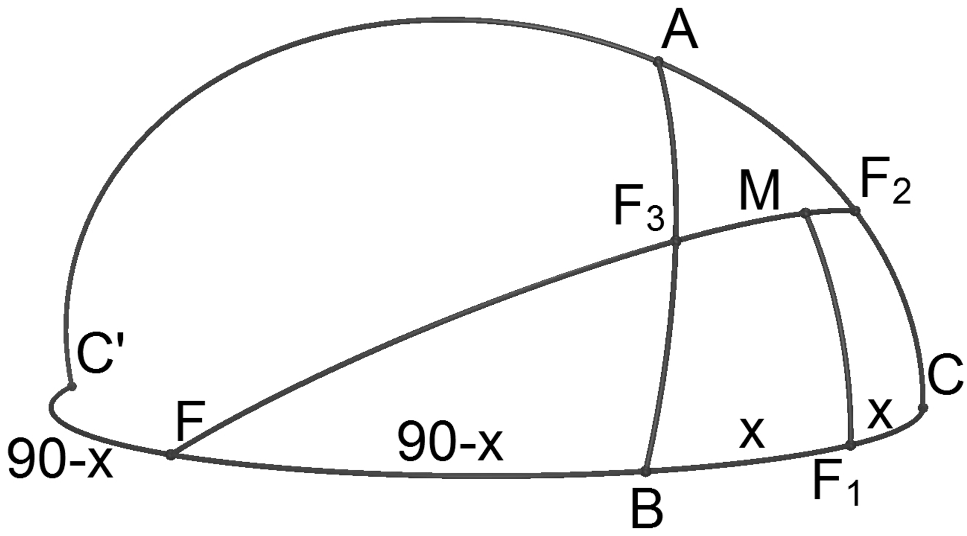
3.2.2. Tétel (Desargues-tétel). *A projektív síkon két háromszög akkor és csak akkor perspektív pontra nézve, ha egyenesre nézve is az.*

Bizonyításunkhoz Desargues tételére lesz szükségünk, ezért axiómaként feltehetjük Desargues tételének érvényességét a gömbi geometriában. Hessenberg bizonyította[1], hogy Papposz tételének érvényességéből Desargues tétele már következik, ezért axiómaként Papposz tételét is elfogadhatjuk axiómaként a további bizonyításokhoz.

3.2.2. Mellékháromszögek oldalfelező pontjai

A következő tételt a Nem-euklideszi geometriák tanítása az iskolában [2] című jegyzeteim alapján bizonyítom.

[1]Hessenberg, G.: Beweis des Desargues'sche Satzes aus dem Pascalschen. Mathematische Annalen, 6: 161-172. (1905)



3.5. ábra

3.2.3. Állítás (A mellékháromszög oldalfelező pontja [2]). *Legyen ABC általános gömbháromszög. Nevezzük F_1-nak az A-val szemközit oldalfelezőpontot, F_2-nek a B-vel és F_3-nek a C-vel szemközti felezőpontokat. Tekintsük az ABC' mellékháromszöget. Az F_2F_3 egynes (középvonal egyenese) metszete az ABC' háromszöggel, a BC' oldal F felezőpontja.*

Ilyen módon lehet képezni a többi mellékháromszög oldalfelező pontjait is, a megfelelő felezőpontokkal.

A következő lemma segítségével be tudjuk látni, hogy a középvonal meghosszabítása által kimetszett pont a mellékháromszögön felezőpont, és ha felvesszük a mellékháromszög felezőpontját, akkor egy egyenesen lesz az eredeti háromszög megfelelő felezőpontjaival.

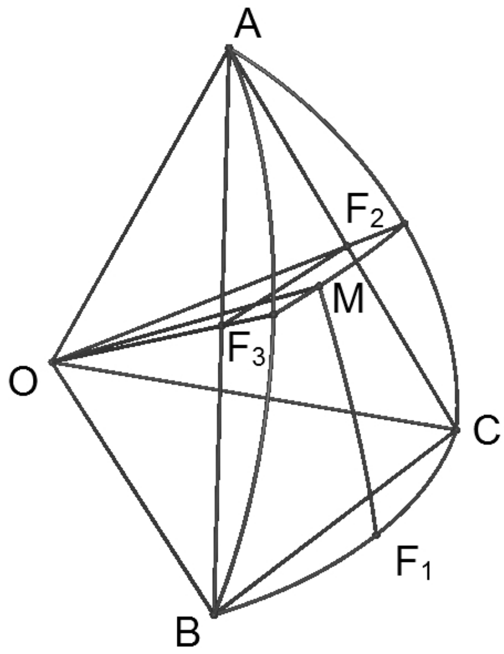
3.2.4. Lemma. *Az ABC gömbháromszög F_2F_3 középvonala, és a BC oldal felezőmerőlegese* $90°$*-os szöget zár be egymással.*

Bizonyítás:

Tekintsünk a gömbháromszögre, mint a gömbfelület olyan tartományára, amelyet egy, a gömbközépponttal azonos csúcspontú triéder metsz ki a felületből. Az OMF_1 sík merőleges az OBC síkra, mert F_1-ben merőlegest állítottunk BC gömbi egyenesre. Az oldalfelező merőleges is egy gömbi egyenes, így az a sík amely kivágja a gömb felületéből, átmegy a gömb középpontján, és merőleges lesz az OBC síkra. De azt is tudjuk, hogy az ABC síkháromszög középvonala merőleges a BC oldal felezőmerőlegesére, hiszen BC párhuzamos F_2F_3-mal.

Mivel az OMF_1 merőleges a BC síkegyenesre, így az ABC sík összes BC-vel párhuzamos egyenesére is merőleges, közte az F_2F_3 síkegyenesre is. Hasonlóan, mivel az OMF_1 síkra merőleges az F_2F_3 síkegyenes, így az OF_2F_3 sík is merőleges rá. Ez a sík, az OF_2F_3 sík, metszi ki a gömbből azt a főkört amely a gömbi háromszög középvonala, de mivel ez a sík merőleges az OMF_1 síkra, így a benne levő kör is merőleges erre a síkra, tehát az O középpontú F_1-en és M-en átmenő főkör is merőleges arra a körre. Tehát a gömbháromszög középvonala valóban merőleges a vele szemközti oldal oldalfelező merőlegesére.

□



3.6. ábra

És akkor most lássuk a 3.2.3 állítás bizonyítását:

Bizonyítás:[2]

A 3.5-ös ábra alapján. Tekintsük a CC' gömbkétszöget, melyben A és B pontok meghatározzák a háromszöget és a mellékháromszöget. Vegyük az F_2F_3 egyenes metszéspontját a BC' egyenessel, legyen ez a pont F. Láttuk, hogy az F_2F_3 egyenes merőleges a BC oldal felezőmerőlegesére. Tehát F_1MF háromszög egy kétszer derékszögű háromszög, melynek az F_1MF szöge és az MF_1F szöge 90°-os. Minden kétszer derékszögű háromszög olyan, hogy a háromszög azon csúcsa, amely nem a 90°-os szögeknél van, pólusa, annak az oldalnak amelyen a 90°-os szögek fekszenek. Másképpen, a póluson átmenő összes egyenes merőlegesen metszi a poláris egyenest. Mert ha veszünk egy tetszőleges pontot a polárison, akkor a pólus, a gömb középpontja, és az előbb vett pont által kifeszített sík merőleges lesz a polárist tartalmazó síkra, tehát a kapott sík által kimetszett főkör is merőleges lesz a poláris főkörre. Ezek alapján az F pólusa az F_1M egyenesnek. Így ha

$$|\overset{\frown}{CF_1}|=|\overset{\frown}{F_1B}|=x \quad \Rightarrow \quad |\overset{\frown}{BF}|=90-x \tag{3.1}$$

következik. De mivel a $|\overset{\frown}{CC'}|=180$, ezért

$$|\overset{\frown}{FC'}|=180-|\overset{\frown}{CF_1}|-|\overset{\frown}{F_1B}|-|\overset{\frown}{BF}| \tag{3.2}$$

ami pedig az előbbiek alapján:

$$|\overset{\frown}{FC'}|=180-(90-x)-x-x \quad \Rightarrow \quad |\overset{\frown}{FC'}|=90-x \tag{3.3}$$

Tehát F valóban felezi a BC' oldalt az ABC' mellékháromszögben.
Ugyanígy gondolkodunk visszafelé, amikor abból indulunk ki, hogy tekintjük a BC' oldal F felezőpontját és belátjuk róla, hogy egy egyenesen van az F_2 és F_3 pontokkal. Ha vesszük a BC' oldal felezőpontját, akkor az az előbbiekben látottak alapján 90 egység távolságra van az F_1 ponttól. Az F_1-ben állított merőleges egyenesnek így az F pont pólusa, és az összes olyan egyenes ezen a ponton halad keresztül, ami merőleges rá, mármint az F_1-ben állított merőleges egyenesre. De mivel az F_2F_3 merőlegesen metszi F_1M-et így neki is az F ponton kell áthaladnia.

□

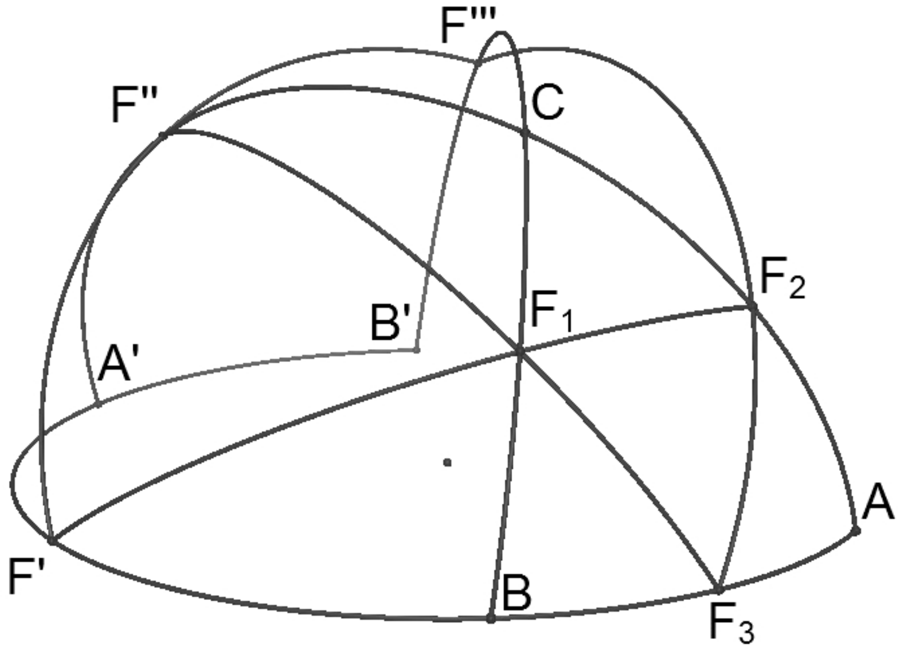
3.2.3. Súlypont-tétel bizonyítása Desargues tételével

Nézzük először a bizonyítást a gömbön, majd látni fogjuk, hogy hasonló módszerrel be lehet bizonyítani a tételt a projektív síkon is. Tehát lássuk a gömbi esetet:

3.2.5. Tétel (Gömbi súlypont-tétel)**.** *A gömbháromszög súlyvonalai egy pontpárban metszik egymást. A két pont közül az egyik a háromszög belsejébe esik. Ez a pont a gömbháromszög súlypontja.*

Bizonyítás:[2]
A 3.7-os ábra alapján. Legyen ABC egy tetszőleges gömbháromszög. Vegyük a középvonalak metszéspontjait, mégpedig a következőket: $F_1F_2 \cap BA' := F'$, $F_1F_3 \cap CA' := F''$ és végül $F_2F_3 \cap CB' := F'''$. Az előző részben bizonyított 3.2.3 állítás alapján, tudjuk, hogy F', F'' és F''' pontok rendre felezik a BA', CA' és a CB' oldalakat.
Most tekintsük a BCA' háromszöget. Ennek a háromszögnek az F' és az F'' felezőpontjai, valamint a $CA'B'$ háromszög, mellékháromszöge. Tehát, a 3.2.3 állítás alapján az $F'F''$ egyenes a $CA'B'$ háromszög CB' oldalfelező pontján megy át. Tehát F', F'' és F''' pontok kollineáris pontok, és az egyenes, ami tartalmazza őket, legyen s.
Desargues-tétel alapján, ha két háromszög egyenesre nézre perspektív, akkor pontra nézve is perspektív. Az ABC háromszög és az $F_1F_2F_3$ háromszög pedig perspektív az s egyenesre, mert ahogy már említettük: $F_1F_2 \cap BA' := F'$, $F_1F_3 \cap CA' := F''$ és végül $F_2F_3 \cap CB' := F'''$. Tehát a tétel értelmében pontra is perspektívek. Azaz az AF_1, BF_2 és a CF_3 egyenesek egy ponton mennek át, amely legyen S. Az S pont valóban a súlypont, mert F_1, F_2 és F_3 pontok felezőpontok, tehát a AF_1, BF_2 és a CF_3 szakaszok súlyvonalak.

□



3.7. ábra

3.2.6. Tétel (Súlypont-tétel). *A háromszög súlyvonalai egy pontban metszik egymást. Ez a pont a háromszög súlypontja.*

Bizonyítás:
Most is Desargues-tételét fogjuk használni, hogy lássuk, hogy a projektív síkon az előző bizonyítással analóg módon be lehet látni a tételt. Legyen ABC háromszög a projektív síkon. Vegyük a háromszög középvonalait, ezek párhuzamosak a megfelelő oldalakkal. A párhuzamos egyenesek ideális pontokban metszik egymást. Az így kapott három ideális pont pedig az ideális egyenesen fekszik. Tehát az ABC és az $F_1F_2F_3$ háromszögek egyenesre nézve perspektívek. Desargues-tétel alapján pedig, ha egyenesre nézve perspektívek, akkor pontra nézve is perspektívek. Tehát a súlyvonalak egy ponton mennek át: a súlyponton.

□

3.3. A súlypont-tétel bizonyítása gömbi trigonometriával

Láttuk az első fejezetben, hogy gömbháromszögek oldalaira és szögeire be tudunk vezetni szögfüggvényeket. Most az ott látottak alapján fogjuk a megfelelő szögfüggvényeket használni a súlypont-tétel bizonyításához. Ebben a részben Ceva-tételelével fogjuk bizonyítani. A Ceva-tételt Glen Van Brummelen könyvében szereplő gömbi Menelaosz-tétellel bizonyítom [5]. Lássuk, hogyan vezeti le Brummelen Menelaosz tételét a gömbön.

3.3.1. Menelaosz tétele a gömbön

3.3.1. Tétel (Síkbeli Menelaosz-tétel (3.8a))**.**

$$\frac{AK}{KB} = \frac{AT}{TD} \cdot \frac{DL}{LB} \tag{3.4}$$

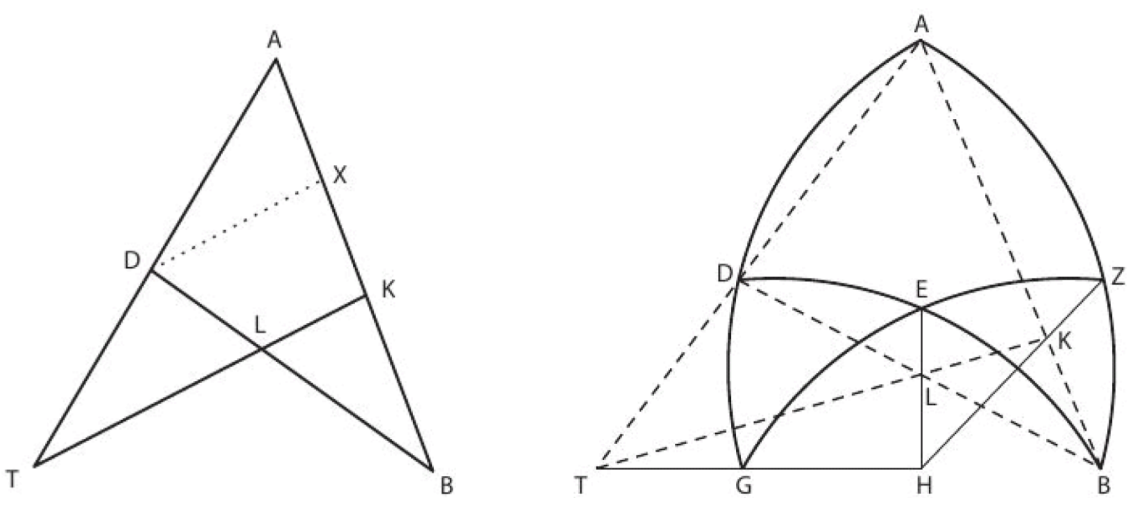
Másképpen:

$$(ABK) = (ADT)(DBL)$$

Ebből pedig már következik a közismertebb alak:

$$(ADT)(DBL)(BAK) = -1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{AT}{TD} \cdot \frac{DL}{LB} \cdot \frac{BK}{AK} = -1$$

Ahol (ABK) jelölés két pont osztóviszonyát jelenti: $(ABK) = \frac{AK}{KB}$.



(a) Síkbeli Menelaosz-tétel [5] (b) Gömbi Menelaosz-tétel[5]

3.8. ábra

Bizonyítás:

Húzzunk párhuzamost D-ből a TK szakasszal. Így $XAD\Delta \sim KAT\Delta$ és $DBX\Delta \sim LBK\Delta$. Ebből pedig következik az állítás:

$$\frac{AK}{KB} = \frac{AK}{XK} \cdot \frac{XK}{KB} = \frac{AT}{TD} \cdot \frac{DL}{LB}.$$

□

Az ábrát, amit Menelaosz használt, hogy bizonyítsa a tételét, kicsit nehéz értelmezni, mivel egy gömbi képet rajzolunk le a síkba. H a gömb középpontja. A görbék a főkörívek, amelyek a gömb felszínén futnak, és a szaggatott vonalak a síkbeli Menelaosz-tétel alakzatát adják, ahonnan indultunk. A K pont a gömb belsejében van, a T pedig azon kívül. Most észrevehetjük, hogy a három arány a Menelaosz síkbeli tételben, a pontok melyek meghatározzák az arányt, egy egyenesre esnek. Szeretnénk ezt a három arányt „kivetíteni” a megfelelő ívek arányára. Tehát átalakítani AKB-t $A\overset{\frown}{Z}B$-re, ADT-t $A\overset{\frown}{D}G$-re és DLB-t $D\overset{\frown}{E}B$-re. Ezekhez a következő lemmákra lesz szükség:

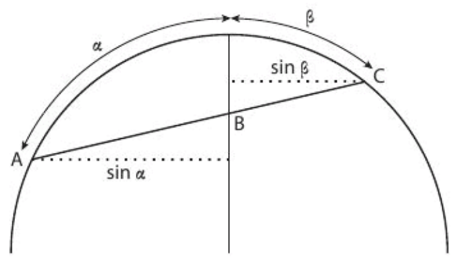
3.3.2. Lemma (A).

$$\frac{AB}{BC} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

Bizonyítás:

Vetítsük merőlegesen A-t és C-t a függőleges átmérőre. A gömb sugarát 1-nek véve, a két pontozott szakasz hossza $\sin\alpha$ és $\sin\beta$. A létrejött két háromszög hasonló, tehát a megfelelő oldalak aránya megegyezik.

□



3.9. ábra. Lemma (A)[5]

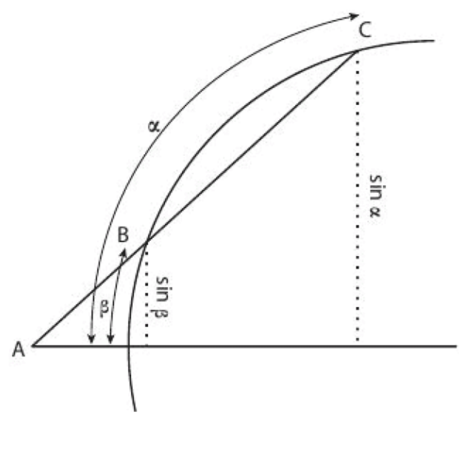
3.3.3. Lemma (B).

$$\frac{AC}{AB} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

Bizonyítás:

Vetítsük merőlegesen B-t és C-t a függőleges átmérőre. Az állítás azonnal következik abból, hogy a két létrejött háromszög hasonló.

□



3.10. ábra. Lemma (B)[5]

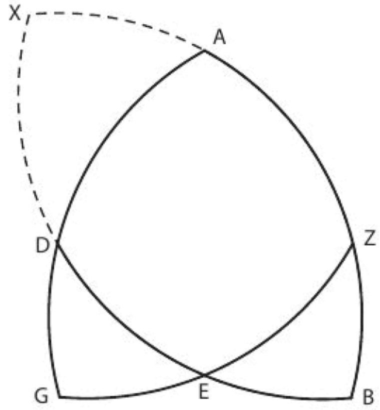
3.3.4. Tétel (Gömbi Menelaosz-tétel)**.**

$$\frac{\sin \overset{\frown}{AZ}}{\sin \overset{\frown}{BZ}} = \frac{\sin \overset{\frown}{AG}}{\sin \overset{\frown}{GD}} \cdot \frac{\sin \overset{\frown}{DE}}{\sin \overset{\frown}{EB}}.$$

Bizonyítás:

A 3.8b ábra alapján, a 3.3.2 lemma és a 3.3.3 lemma segítségével be tudjuk helyettesíteni a gömbháromszög megfelelő oldalainak szögfüggvényeit. Ezt a 2.1 részben leírtak alapján tehetjük meg. Így tulajdonképpen, megint a síkháromszögekre visszavezetve bizonyítottuk a tételt.

□



3.11. ábra. Gömbi Menelaosz-tétel[5]

3.3.2. Ceva tétele

Ceva tételére több bizonyítás létezik. Hajós Bevezetés a geometriába könyve [4] például *baricentrikus koordinátá*kra vonatkozó tételek segítségével bizonyítja a tételt. De van olyan bizonyítás is, mely a Menelaosz-tételt használja fel a bizonyításhoz. Ez azért hasznos a bizonyítás szempontjából, mert az előbbiekben láttuk, hogy Menelaosz tételét lehet a gömbön is értelmezni. Mielőtt a gömbi bizonyításra térnénk, lássuk először, hogy hogyan is szól a tétel és bizonyítása a síkon.

3.3.5. Tétel (Ceva tétele)**.** *Ha az ABC háromszög BC, CA, AB oldalegyenesein a csúcsoktól különböző A_1, B_1 és C_1 pontok úgy helyezkednek el, hogy*

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1, \tag{3.5}$$

akkor az AA_1, BB_1 és a CC_1 egyenesek egy pontban metszik egymást.

Bizonyítás:[6]

Használjuk Menelaosz tételét az BAB_1 háromszögre:

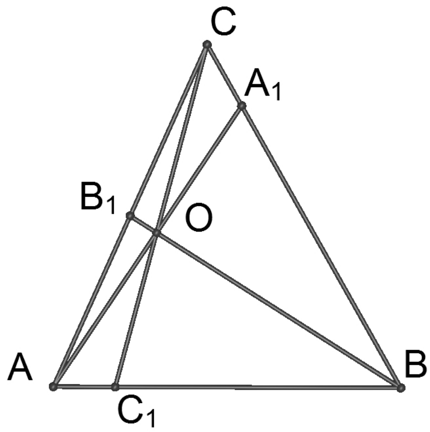
$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BO}{OB_1} \cdot \frac{B_1C}{CA} = -1. \tag{3.6}$$

Majd használjuk a BCB_1 háromszögre is.

$$\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CA}{AB_1} \cdot \frac{B_1O}{OB} = -1. \tag{3.7}$$

Majd a 3.6 és a 3.7 egyenleteket összeszorozva:

$$\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CA}{AB_1} \cdot \frac{B_1O}{OB} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BO}{OB_1} \cdot \frac{B_1C}{CA} = (-1) \cdot (-1). \tag{3.8}$$



3.12. ábra. Ceva tétele

Egyszerűsítés után kapjuk az állítást:

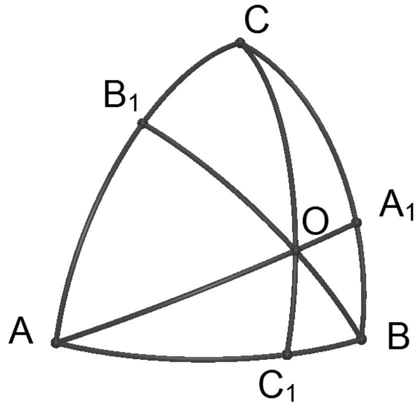
$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1. \tag{3.9}$$

□

3.3.6. Tétel (Gömbi Ceva-tétel)**.** *Ha az ABC gömbháromszög BC, CA, AB oldalegyenesein a csúcsoktól különböző A_1, B_1 és C_1 pontok úgy helyezkednek el, hogy*

$$\frac{\sin \overset{\frown}{AC_1}}{\sin \overset{\frown}{C_1B}} \cdot \frac{\sin \overset{\frown}{BA_1}}{\sin \overset{\frown}{A_1C}} \cdot \frac{\sin \overset{\frown}{CB_1}}{\sin \overset{\frown}{B_1A}} = 1. \tag{3.10}$$

akkor az AA_1, BB_1 és a CC_1 gömbi egyenesek egy pontban metszik egymást.



3.13. ábra. Gömbi Ceva-tétel

Bizonyítás:
Használjuk a gömbi Menelaosz-tételt az BAB_1 háromszögre:

$$\frac{\sin \overset{\frown}{AC_1}}{\sin \overset{\frown}{C_1B}} \cdot \frac{\sin \overset{\frown}{BO}}{\sin \overset{\frown}{OB_1}} \cdot \frac{\sin \overset{\frown}{B_1C}}{\sin \overset{\frown}{CA}} = -1. \tag{3.11}$$

Most használjuk a BCB_1 háromszögre is.

$$\frac{\sin \overset{\frown}{BA_1}}{\sin \overset{\frown}{A_1C}} \cdot \frac{\sin \overset{\frown}{CA}}{\sin \overset{\frown}{AB_1}} \cdot \frac{\sin \overset{\frown}{B_1O}}{\sin \overset{\frown}{OB}} = -1. \tag{3.12}$$

Majd a 3.11 és a 3.12 egyenleteket összeszorozva:

$$\frac{\sin \overset{\frown}{AC_1}}{\sin \overset{\frown}{C_1B}} \cdot \frac{\sin \overset{\frown}{BO}}{\sin \overset{\frown}{OB_1}} \cdot \frac{\sin \overset{\frown}{B_1C}}{\sin \overset{\frown}{CA}} \cdot \frac{\sin \overset{\frown}{BA_1}}{\sin \overset{\frown}{A_1C}} \cdot \frac{\sin \overset{\frown}{CA}}{\sin \overset{\frown}{AB_1}} \cdot \frac{\sin \overset{\frown}{B_1O}}{\sin \overset{\frown}{OB}} = (-1) \cdot (-1). \tag{3.13}$$

Egyszerűsítés után kapjuk az állítást:

$$\frac{\sin \overset{\frown}{AC_1}}{\sin \overset{\frown}{C_1B}} \cdot \frac{\sin \overset{\frown}{BA_1}}{\sin \overset{\frown}{A_1C}} \cdot \frac{\sin \overset{\frown}{CB_1}}{\sin \overset{\frown}{B_1A}} = 1. \tag{3.14}$$

□

3.3.3. Súlypont-tétel bizonyítása Ceva tételével

Tehát, ha teljesül ez az egyenlőség tetszőleges gömbi háromszög osztópontjaira, akkor az őket a szemközti csúcsokkal összekötő egyenesek egy pontpáron haladnak át. Ezt fogjuk kihasználni a súlypont létezésének bizonyítására.

3.3.7. Tétel (Gömbi súlypont-tétel)**.** *A gömbháromszög súlyvonalai egy pontban metszik egymást. Ez a pont a gömbháromszög súlypontja.*

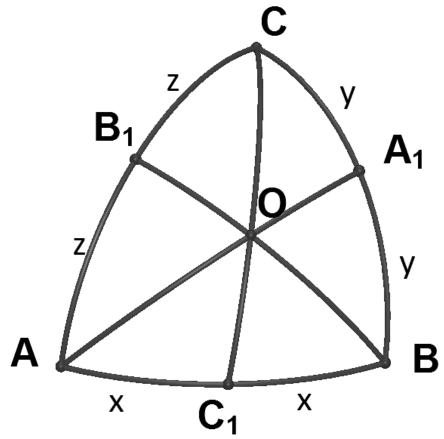
Bizonyítás:

Az állítás azonnal következik a 3.3.6 tételből, mert a hányadosok szögfüggvényeinek argumentumában lévő gömbi szakaszok hosszai azonosak, hiszen a súlyvonal az oldalfelezőpontot és a szemközti csúcsot összekötő szakasz. Ezek alapján:

$$\frac{\sin \overset{\frown}{AC_1}}{\sin \overset{\frown}{C_1B}} \cdot \frac{\sin \overset{\frown}{BA_1}}{\sin \overset{\frown}{A_1C}} \cdot \frac{\sin \overset{\frown}{CB_1}}{\sin \overset{\frown}{B_1A}} = 1. \quad (3.15)$$

$$\frac{\sin \overset{\frown}{x}}{\sin \overset{\frown}{x}} \cdot \frac{\sin \overset{\frown}{y}}{\sin \overset{\frown}{y}} \cdot \frac{\sin \overset{\frown}{z}}{\sin \overset{\frown}{z}} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1. \quad (3.16)$$

□



3.14. ábra. Gömbi súlypont-tétel

Hasonlóképpen lehet bebizonyítani a tételt a síkon is.

3.3.8. Tétel (Súlypont-tétel). *A háromszög súlyvonalai egy pontban metszik egymást. Ez a pont a háromszög súlypontja.*

Bizonyítás:

Írjuk fel Ceva tételét a háromszög súlyvonalaira. Mivel a súlyvonalak oldalfelezők, ezért a következő formát ölti az egyenlet:

$$\frac{AF_3}{F_3B} \cdot \frac{BF_1}{F_1C} \cdot \frac{CF_2}{F_2A} = 1, \quad (3.17)$$

de mivel oldalfelezőkről van szó ezért:

$$\frac{x}{x} \cdot \frac{y}{y} \cdot \frac{z}{z} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1. \quad (3.18)$$

□

4. fejezet

A területfelező vonal

Az előbbiekben láthattuk, hogy a súlyvonalak a gömbön egy pontpárban metszik egymást. Ebből a szempontból a gömbi és síkbeli súlyvonalak hasonló módon viselkednek. Nézzünk most egy a súlyvonalakkal kapcsolatos tulajdonságot, mely különbség lesz a gömbháromszögek és síkháromszögek között.

Ebben a fejezetben megvizsgáljuk a súlyvonalak egy másik tulajdonságát, a területfelezést. A síkon egy háromszög területe egyenes arányban van oldalhosszával:

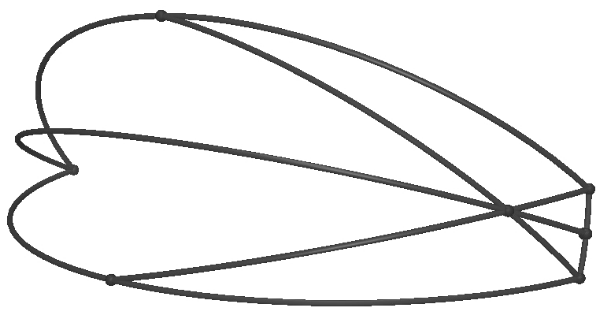
$$T_{\triangle} = \frac{a \cdot m_a}{2},$$

ahol a az egyik oldala és m_a az a oldalhoz tartozó magasság. Tehát amikor az a oldalt felezzük a súlyvonallal akkor az eredeti háromszöget a súlyvonal két egyenlő területű háromszögre vágja. Vagyis a síkháromszögek körében a súlyvonal területfelező vonal is egyúttal.

Ebben a fejezetben Lénárt István: *Axiomatizálás a gömbön* című előadás jegyzeteimet használtam irodalomként [3].

4.1. Gömbháromszögek területfelezője

Nézzük meg először, hogy van-e különbség a gömbháromszögek körében a súlyvonal és a területfelező vonal között?

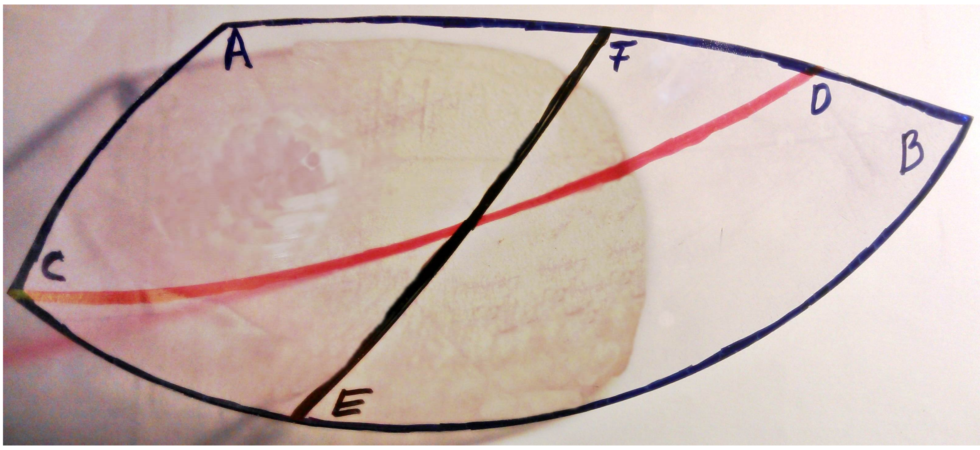


4.1. ábra

Csináljunk egy kétszögből egy háromszöget. Vágjuk le a csúcsát egy egyenessel, mely nem messze halad az egyik csúcstól, és merőleges a kétszög szögfelezőjére. Így kaptunk egy egyenlőszárú háromszöget, mely szinte akkora mint az eredeti kétszög. Vegyük fel a felezőpontokat, majd kössük össze a csúcsokkal. Ez egy egyenlő szárú háromszög, így az egyik súlyvonala a gömbháromszögek körében is területfelező lesz, de a másik kettőn jól látszik, hogy nem területfelezők. Még ebben a speciális esetben is jól látszik, hogy különböznek a tárgyalt vonalak, tehát láthatjuk, hogy van értelme különbséget tennünk a gömbháromszögek körében a súlyvonal és a területfelező vonal között.

4.2. A területfelezők tulajdonságai

Meg kell említeni, hogy a gömbháromszögek körében kétféle területfelezőről beszélhetünk. Az egyik a háromszög csúcsain áthaladó területfelezők, a másik pedig az oldal felezőpontján áthaladó területfelező. Ez a kettő ugyanis azért nem eshet egy egyenesbe, mert, ahogy az előbb láttuk, a súlyvonal nem azonos a területfelező vonallal (speciális esetektől eltekintve). Az alábbi képen a fekete egyenes a háromszög oldalfelező-pontján áthaladó területfelező, a piros egyenes pedig a háromszög csúcsán áthaladó területfelező.
A következőkben pedig azt fogjuk látni, hogy a csúcsokon áthaladó területfelezők egy pontpáron haladnak át, a területfelező-ponton.



4.2. ábra

4.2.1. A területfelezők metszéspontja

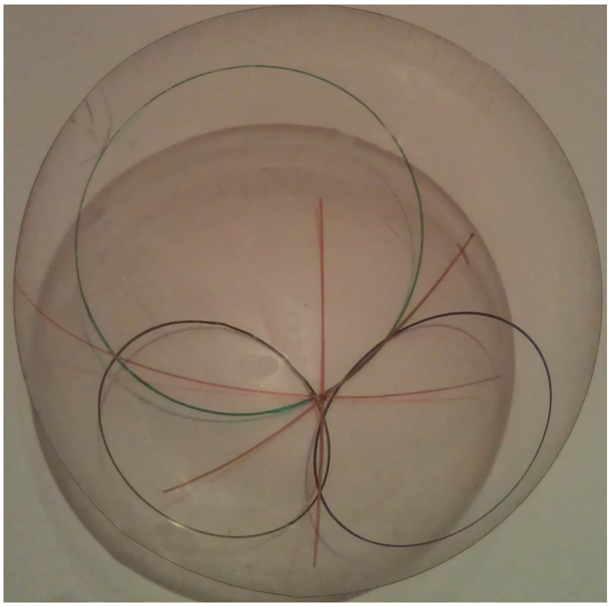
Hasonlóan, mint a síkon, a gömbön is értelmezhető az a kérdés, hogy mi lesz azon pontok mértani helye, amivel egy adott gömbháromszög rözített alapját összekötve, egy az eredetivel azonos területű háromszöget kapunk. A síkon ezen pontok mértani hely egy az alappal párhuzamos egyenes volt ami áthaladt a harmadik csúcson. A gömbön ez egy kör lesz, mégpedig az úgynevezett Lexell kör.

4.2.1. Lemma (Lexell-lemma). *Legyen adott egy ABC gömbháromszög. Azon P pontok mértani helye, melyre ABC és ABP gömbháromszögek területének mérőszáma azonos, két körnek, a Lexell-köröknek egy-egy köríve. Ezt a két kört pedig az alábbi módon kapjuk meg: $A'B'C$ pontokon és az $A'B'C''$ pontokon áthaladó körök, ahol A' és B' az A és B átellenes pontjai, C'' pedig C tükörképe az AB egyenesre. Ezeknek a köröknek pedig csak a C és C'' cúcsokat tartalmazó $A'B'$ nyílt körív lesz a megoldása, hogy Euler-féle háromszögek körében maradjunk.*

A másik lemma, amit használni fogunk, a hatványpont-tétel.

4.2.2. Definíció. *A hatványvonal bármely pontjából a két körhöz húzott érintődarabok hossza azonos.*

4.2.3. Lemma (Hatványpont lemma). *Három általános helyzetű kör hatványvonalai egy pontban metszik egymást.*



4.3. ábra

Tekintsük ennek a tételnek azt a speciális esetét, hogy három, egymást metsző kör hatványvonalai egy pontban metszik egymást. Ahol a hatványvonalon azt az egyenest értük, mely a két kör metszéspontjain halad át. Ez az állítás a gömbön is igaz.

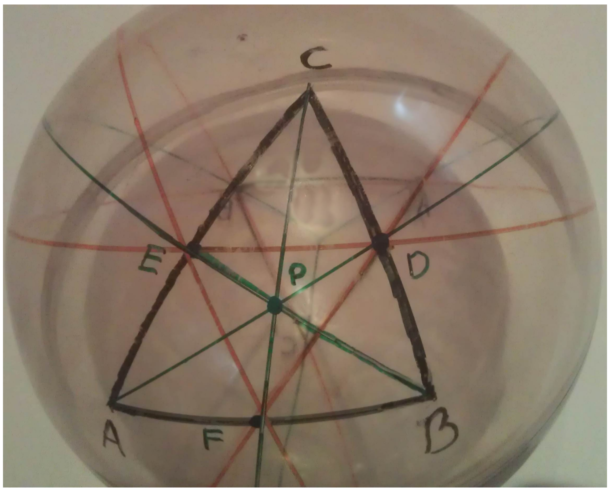
A fenti lemmák ismeretében már bizonyítható a következő tétel:

4.2.4. Tétel. *A gömbháromszög csúcsain áthaladó területfelezők egy pontpárban metszik egymást, amelyek egyike a területfelezők belső metszéspontja.*

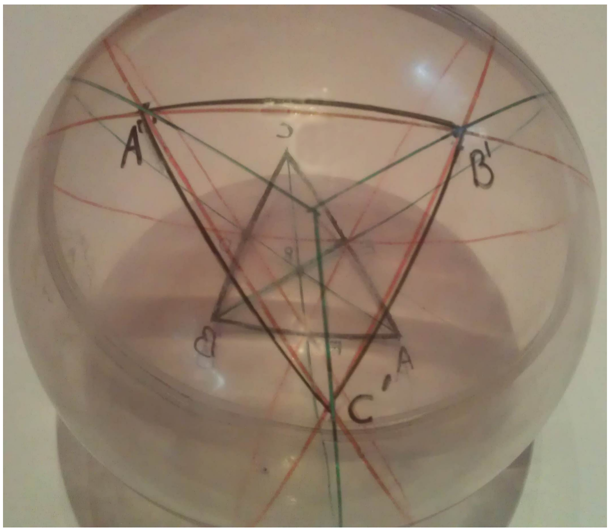
Bizonyítás:

Legyen adott ABC gömbháromszög. Vegyük, az A csúcsból induló területfelező vonalat, ez a BC oldalt D pontban metszi. Szerkesszük meg a A', B', és D pontokon áthaladó Lexell kört. Ezen a körön vannak azok a pontok melyek az A és B pontokkal fele akkora területű háromszöget alkotnak mint az eredeti ABC háromszög. Így rajta van az a pont is melyet a B csúcson áthaladó területfelező vonal metsz ki az AC oldalból, azaz az E pont.

Az AD szakasz két egyenlő területű háromszögre bontja az eredeti háromszögünket ABD-re és ACD-re. Vagyis ha megszerkesztjük az A', C' és D pontokon áthaladó Lexell kört is, akkor megkapjuk azon pontok mértani helyét is melyek az A és a C csúccsal összekötve fele akkora területű háromszöget alkotnak mint az ABC háromszög. Ez a kör metszi az AB oldalát az ABC háromszögnek. Ez a pont az F pont lesz, és ezen a ponton halad át következésképpen a C csúcs területfelező egyenese. Ezután pedig szerkesszük a B', C' és F pontokon áthaladó kört, ez át fog haladni az E ponton is, mert a BCE és BCF háromszögeknek egyaránt fele akkora a területe, mint az ABC háromszögnek. Megvan a három egymást metsző körünk, ezeknek a köröknek a létezik egy hatványpontja. Azt kell látnunk, hogy a hatványvonalak azonosak a háromszög területfelező vonalaival. Ez pedig abból következik, hogy a D ponton két kör is áthalad: az $A'B'D$ és az $A'C'D$, de ezek a körök A'-n is áthaladnak, vagyis az $A'D$ hatványvonal áthalad az A ponton is. Ez ugyan így igaz az E és az F pontokra is, tehát a hatványpont lemma értelmében a területfelező egyenesek egy pontpáron haladnak át.



4.4. ábra. Az ABC háromszög Lexell körei (piros), területfelezők (zöld)



4.5. ábra. Lexell körök áthaladnak az átellenes pontokon

□

Összefoglalás

A második fejezetben bevezettük a gömbi geometria alapfogalmait, valamint láttuk hogyan lehet kiterjeszteni a síkbeli trigonometriai ismereteinket, eleinte derékszögű gömbháromszögekre, majd, hogyan lehet általánosítani a többi Euler-féle gömbháromszögre.

Miután a második fejezetben lefektettük az alapokat a súlypont-tétel bizonyításához, rátérhettünk magának a tételnek a bizonyítására a harmadik fejezetben. Láthattunk három bizonyítást arra nézve, hogy az Euler-féle gömbháromszögek súlyvonalai egy pontpáron haladnak át, a súlyponton.A három bizonyítás a geometria különböző eszközeit használta fel, bemutatva ezzel a geometria sokszínűségét.

Egészen az utolsó alfejezetig a síkgeometria és gömbi geometria hasonlóságait láthattuk a bizonyításokon keresztül, de meg kell jegyezni, hogy számos különbség is van. Ezek egyikére tértem ki dolgozatom végén. Láthattuk, hogy síkbeli súlyvonal a háromszög területfelezővonala is, de a gömbháromszögeknél általában nem a súlyvonal a területfelezővonal. Éppen ezért kétféle területfelező vonalat tudunk megkülönböztetni a gömbháromszögek körében, a csúcson és az oldalfelező ponton áthaladót. Bebizonyítottuk, hogy a csúcson áthaladó területfelezők egy pontpárban metszik egymást.

Irodalomjegyzék

[1] Közgazdasági és jogi könyvkiadó (a Gömbháromszögtan című részt Rábai Imre írta): *A kultúra világa: Matematika, fizika, kémia*, Budapest, 1964.

[2] Lénárt István: *Nem-euklideszi geometriák tanítása az iskolában I-II* című előadások jegyzete

[3] Lénárt István: *Axiomatizálás a gömbön* című előadások jegyzete

[4] Hajós György: *Bevezetés a geometriába*, Budapest 1991.

[5] G. van Brummelen: *Heavenly mathematics. The Forgotten Art of Spherical Trigonometry.*, Princeton University Press, 2013.

[6] *https://hu.wikipedia.org/wiki/Ceva-tétel*

Képek forrásai

Az alábbi képeket a Közgazdasági és jogi könyvkiadó (a Gömbháromszögtan című részt Rábai Imre írta): *A kultúra világa: Matematika, fizika, kémia*, Budapest, 1964. könyvből vettem: 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6.

A 2.8 kép a *http://hu.wikipedia.org/wiki/Fájl:RechtwKugeldreieck.svg* című oldalról van.

A 3.8a, 3.8b, 3.9, 3.10, 3.11 képek G. van Brummelen: *Heavenly Mathematics – The Forgotten Art of Spherical Trigonometry*, USA 2013. könyvéből vannak.

A 2.7, 3.1, 3.2, 3.3, 3.6, 3.5, 3.7, 3.12, 3.13, 3.14, 4.1 képeket a Cabri 3D programmal készítettem.

A 3.4, 4.2, 4.3, 4.4 és a 4.5 képeket a Lénárt rajzgömbbel készítettem.