EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Analízis tételek alkalmazása KöMaL és más versenyfeladatokon

Lukács Imola

Matematika BSc

Szakdolgozat

Témavezető: Gémes Margit

Műszaki gazdasági tanár

Analízis Tanszék

Budapest, 2014

Tartalom

1. Bevezetés

Már évek óta figyelemmel kísérem a KöMaL versenyfeladatait. Középiskolás koromban én magam is lelkesen oldottam meg a hónapról hónapra megjelenő feladatokat. A KöMaL mellett a diákok körében jól ismert még az Arany Dániel matematika verseny, ezért döntöttem úgy, hogy a szakdolgozatomban erről is írok.

Az analízis témaköre nem kap akkora hangsúlyt a mai középiskolai tananyagban, így a versenyfeladatok között csak elszórtan találhatunk rá példákat, azonban az internet segítségével fellelhető az összes KöMaL feladat elektronikus formában több évtizedig visszamenőleg. Emellett az említett más versenyek feladatai is megtalálhatók elektronikus formában. A dolgozatomban két fő típusfeladatra keresek példákat a különböző versenyfeladatokból. A két típus a következő:

- függvények és grafikonok
- derivált alkalmazása

Ezekre mutatok két-három példát, a már fent említett versenyfeladatokból.

2. Vizsgált típusfeladatok

2.1 Függvények és grafikonok [1]

Az analízis, más néven függvénytan, a függvények vizsgálatával foglakozik. A függvények alapvető szerepet játszanak a világ matematikai leírásában.

Példák:

- A víz forráspontja függ az anyagi minőségtől, a felszíne fölötti levegő és gőz keverékének nyomásától, mindezek mellett megadható a tengerszint feletti magasság függvényében.
- A kör területe felírható a sugár függvényében.
- Egyenes pályán mozgó pontnak a kiindulóponttól való távolsága felírható a sebesség függvényében.

Tekintsünk egy $f: A \to B$ függvényt, ezen azt értjük, hogy az A halmaz mindegyik a elemének hozzá rendel egy B beli b elemet.

Jelölés:

$$b = f(a)$$

2.2 Derivált alkalmazása [2]

A $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ véges határértéket nevezzük az f függvény a pontbeli differenciálhányadosának vagy deriváltjának, ha a határérték létezik.

Jelölése:

$$f'(a) \ , \quad \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=a}$$

Derivált használata gyakran megkönnyíti az olyan feladatokat, ahol egy függvény minimumára vagy maximumára vagyunk kíváncsiak, emellett a függvényelemzésben is nagy szerepet játszik.

3. Középiskolai Matematikai Lapok, azaz KöMaL feladatok

3.1. B.3481. Legyen $f_1(x) = -\frac{2x+7}{x+3}$, $f_{n+1}(x) = f_1(f_n(x))$. Határozzuk meg $f_{2001}(2002)$ értékét.(2001 szeptember) [3] [1]

Felírjuk $f_1(x)$-et egyszerűbb formában:

$$f_1(x) = -\frac{2x+7}{x+3} = -2 - \frac{1}{x+3}$$

Az értelmezési tartomány: $D_f: x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

Általános képlet: $f_{n+1}(x) = f_1(f_n(x))$.

Kiszámítjuk $f_2(x)$-et, az általános képlet segítségével, (ahol $n = 1$):

$$f_2(x) = f_1(f_1(x)) = -2 - \frac{1}{f_1(x)+3} = -3 - \frac{1}{x+2}$$

Ekkor az értelmezési tartomány: $D_f: x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

[1] A tömör megoldás bővítése, annak sokkal részletesebb leírása.

Ezután meghatározzuk $f_3(x)$-et (ahol $n = 2$):

$$f_3(x) = f_1(f_2(x)) = -2 - \frac{1}{f_2(x) + 3} = x$$

$$f_4(x) = -2 - \frac{1}{x + 3}$$

$$f_5(x) = -3 - \frac{1}{x + 2}$$

$$f_6(x) = x$$

A számolások alapján arra a sejtésre jutottunk, hogy $f_{3n}(x) = x$.

Teljes indukció segítségével bizonyítunk:

Állítás: $f_{3n}(x) = x$.

1. Már megmutattuk, hogy $n = 1$-re igaz és $n = 2$-re is igaz.
2. Indukciós lépés: Tegyük fel, hogy az állítás igaz $n = k$-ra.

$$f_{3k}(x) = x$$

3. Belátjuk, hogy igaz $n = k + 1$-re:

$$f_{3(k+1)}(x) = f_{3k+3}(x) = f_3(f_{3k}(x)) = f_3(x) = x$$

Ezzel beláttuk, hogy az állítás teljesül $n = k + 1$-re. Tehát igaz az állítás.

A teljes indukció elve alapján minden n pozitív egész számra teljesül, hogy $f_{3n}(x) = x$. A számolásból jól látszik, hogy a függvény az $x = -2$, $x = -3$ helyek kivételével mindenhol értelmezve van.
Ebből már könnyen meghatározható $f_{2001}(2002)$ értéke. Mivel 2001 is $3k$ alakú szám, ezért:

$$f_{2001}(2002) = 2002$$

3.2. *C.848. Határozzuk meg a $\sqrt{x-2}+\sqrt{3-x}$ kifejezés legkisebb és legnagyobb értékét.(2006 március) [3]* [2]

TÉTEL: Az első derivált és a lokális szélsőérték kapcsolata [2] **(3.1)**

Tegyük fel, hogy *f* differenciálható a-ban.

1. Ha $f^{'}(a) > 0$, akkor *f* lokálisan szigorúan növekedő a-ban.
2. Ha $f^{'}(a) < 0$, akkor *f* lokálisan szigorúan csökkenő a-ban.
3. Ha *f* lokálisan növekedő a-ban, akkor $f^{'}(a) \geq 0$.
4. Ha *f* lokálisan növekedő a-ban, akkor $f^{'}(a) \leq 0$.
5. Ha *f*-nek lokális szélsőértékhelye van a-ban, akkor $f^{'}(a) = 0$.

„Úgy is megfogalmazható, hogy ha *f* differenciálható a-ban, akkor az $f^{'}(a) = 0$ feltétel szükséges, de nem elégséges feltétele annak, hogy *f*-nek lokális szélsőértéke legyen a-ban." [2]

TÉTEL: Az első derivált és a lokális szélsőérték [2] **(3.2)**

Legyen *f* differenciálható az *a* pont egy környezetében.

(i) Ha $f^{'}(a) = 0$ és $f^{'}$ lokálisan növekedő az a helyen, akkor az a pont *f*-nek lokális minimumhelye.

(ii) Ha $f^{'}(a) = 0$ és $f^{'}$ lokálisan csökkenő az a helyen, akkor az a pont *f*-nek lokális maximumhelye.

(iii) Ha $f^{'}(a) = 0$ és $f^{'}$ szigorúan lokálisan növekedő a-ban, akkor az a pont *f*-nek szigorúan lokális minimumhelye.

(iv) Ha $f^{'}(a) = 0$ és $f^{'}$ szigorúan lokálisan csökkenő a-ban, akkor az a pont *f*-nek szigorúan lokális maximumhelye.

A függvény csak pozitív értéket vesz fel, ezért pontosan ott van maximuma és minimuma, ahol a négyzetének. $f^2(x) = 2\sqrt{(x-2)(3-x)} + 1$. Ebből megkapjuk, hogy $x \in [2{,}3]$ intervallumnak. Ennek a kifejezésnek a legkisebb értéke az 1, amelyet a következő esetekben vesz fel:

[2] A fellelhető megoldásban szerepelt a négyzetre emeléssel való minimum illetve maximumkeresés. A folytatás saját megoldás.

ha $x = 2$, akkor $f(2) = 1$,

ha $x = 3$, akkor $f(3) = 1$.

Kiszámítjuk $f'(x)$-et, majd megoldom az $f'(x) = 0$ egyenletet.

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x-2}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3-x}} = 0$$

$$\text{ha } \sqrt{x-2} \geq 0, \text{akkor } x \geq 2$$

$$\text{ha } \sqrt{3-x} \geq 0, \text{akkor } 3 \geq x$$

Azt várjuk, hogy a kapott intervallum valamely pontjában, lokális szélsőértéke lesz az $f(x)$ függvénynek.

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x-2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3-x}}$$

$$x = 2{,}5$$

A táblázat segítségével, amelyet a (3.1) és (3.2)-es tétel alapján töltünk ki, megállapítjuk, hogy az $x = 2{,}5$ pontban lokális maximuma vagy minimuma van a függvénynek.

TÉTEL: Monotonitás kritériuma [2] **(3.3)**

Legyen f folytonos $[a, b]$-ben és differenciálható (a, b)-ben.

(i) f akkor és csak akkor monoton növekedő $[a, b]$-ben, ha $f'(x) \geq 0$ minden $x \in (a, b)$-re.

(ii) f akkor és csak akkor monoton csökkenő $[a, b]$-ben, ha $f'(x) \leq 0$ minden $x \in (a, b)$-re.

(iii) f akkor és csak akkor szigorúan monoton növő $[a, b]$-ben, ha $f'(x) \geq 0$ minden $x \in (a, b)$-re, és ha $[a, b]$-nek nincs olyan részintervalluma, amelyen f' azonosan nulla.

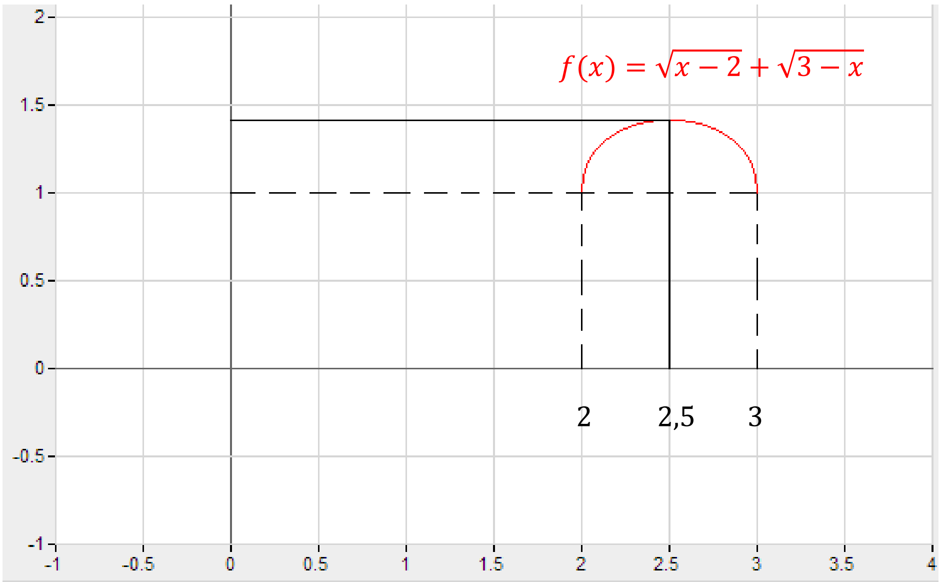
(iv) f akkor és csak akkor szigorúan monoton csökkenő $[a, b]$-ben, ha $f'(x) \leq 0$ minden $x \in (a, b)$-re, és ha $[a, b]$-nek nincs olyan részintervalluma, amelyen f' azonosan nulla.

x	$2 \leq x < 2{,}5$	$x = 2{,}5$	$2{,}5 < x \leq 3$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	lokális maximum	$\searrow$
	monoton nő	$f(2{,}5) = \sqrt{2}$	monoton csökken

(3.1), (3.2) és (3.3)-as tételek alapján

$$f(2{,}5) = \sqrt{2{,}5 - 2} + \sqrt{3 - 2{,}5}$$
$$f(2{,}5) = \sqrt{2}$$

Függvény képe:



1. ábra. [10]

$$x \in \mathbb{R} : 2 \le x \le 3 \text{ és } y \in \mathbb{R} : 1 \le y \le \sqrt{2}$$

Tehát a $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{3-x}$ legkisebb értéke: $f(2) = f(3) = 1$ a legnagyobb értéke pedig: $f(2{,}5) = \sqrt{2}$.

3.3. C.603. Határozzuk meg az $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2+1}$ függvény értékkészletét. (2000 november) [3][3]

Ezen a feladaton jól bemutatható a függvényelemzés, melynek eredményeképp felrajzolható a függvény grafikonja. A grafikonról leolvasható az $f(x)$ függvény érték készlete, amelyet R_f jelölünk.

Az adott $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ egy racionális függvény, amely két polinom függvény hányadosaként van megadva. Ezek értelmezési tartománya azoknak az x valós számoknak a halmaza, ahol $q(x) \neq 0$.

[3] Teljesen saját megoldás.

• Értelmezési tartomány meghatározása (D_f):

$$D_f : x \in \mathbb{R}$$

• Zérushelyek kiszámítása:

$$\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} = 0$$

Egy tört értéke ott 0, ahol a számlálója 0.

$$x^2 + x + 1 = 0$$

Ennek az egyenlőségnek pedig nincs megoldása, a megadott értelmezési tartományon. Tehát nem rendelkezik zérushellyel a függvény.

• Első derivált meghatározása, szélsőérték helyek kiszámítása derivált segítségével

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$$

x tengelyt nem metszi

y tengelyt a (0,1) pontban metszi

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2}$$

$(x^2 + 1)^2 \neq 0$

$$f'(x) = 0$$

$$1 = |x|$$

$$x = 1 \text{ vagy } x = -1$$

TÉTEL: Szélsőérték-tétel [1] **(3.4)**

Ha *f* folytonos a korlátos és zárt *[a,b]* intervallumon, akkor *f*-nek itt van minimuma, és van maximuma. Ha a minimumot m-mel, a maximumot M-mel jelöljük, akkor van olyan x_1 és x_2 szám, amelyre $f(x_1) = m$ és $f(x_2) = M$, továbbá teljesül, hogy $m \leq f(x) \leq M$ minden más, az *[a,b]* intervallumhoz tartozó *x* értékre.

• Második derivált kiszámítása

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2x(x^2 + 1) - (-x^2 + 1) \cdot 2x \cdot 2(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^4}$$

Algebrai átalakításokkal egyszerűbb alakra hozom:

$$f''(x) = \frac{2x \cdot (x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3} \qquad (x^2 + 1)^3 \neq 0$$

$$2x \cdot (x^2 - 3) = 0$$

$$x = 0 \; vagy \; x = \sqrt{3} \; vagy \; x = -\sqrt{3}$$

DEFINÍCIÓ: Előjelet vált a függvény [2] **(1)**

Az f' az *x* pontban előjelet váltva 0, azaz *x* egy bal oldali környezetében nempozitív és egy jobb oldali környezetében nemnegatív vagy fordítva.

Tehát a második derivált mindhárom pontban előjelet vált.

• Szélsőérték táblázat készítése

x	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↘	lokális minimum	↗	lokális maximum	↘
	monoton csökken	$f(-1) = 0{,}5$	monoton nő	$f(1) = 1{,}5$	monoton csökken

(3.1), (3.2) és (3.3)-as, tétel alapján

Tehát a $x = 1$, $vagy\ x = -1$ helyeken megkapjuk a (3.4)-es tételben szereplő *m*-et és *M*-et.

TÉTEL: A második derivált és a lokális szélsőértékek [1] **(3.5)**

Tegyük fel, hogy f'' folytonos az $x = c$ pontot tartalmazó nyílt intervallumon.

1. Ha $f'(c) = 0$ és $f''(c) < 0$, akkor f-nek lokális maximuma van az $x = c$ pontban.
2. Ha $f'(c) = 0$ és $f''(c) > 0$, akkor f-nek lokális minimuma van az $x = c$ pontban.
3. Ha $f'(c) = 0$ és $f''(c) = 0$, akkor nem állíthatunk semmi biztosat. A függvénynek lehet lokális minimuma, lokális maximuma, de lehet, hogy sem ez, sem az nincs.

x	$-\infty < -\sqrt{3}$	$x = -\sqrt{3}$	$-\sqrt{3} < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < \sqrt{3}$	$x = \sqrt{3}$	x> $\sqrt{3}$
$f''(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	konkáv	inflexiós pont	konvex	inflexi-ós pont	konkáv	inflexi ós pont	konvex

(3.5)-ös tétel alapján

Aszimptoták meghatározásához megvizsgáljuk a határértéket:

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$$

$$f(x) = \frac{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 1$$

A függvény ebben az esetben felülről korlátos.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 1$$

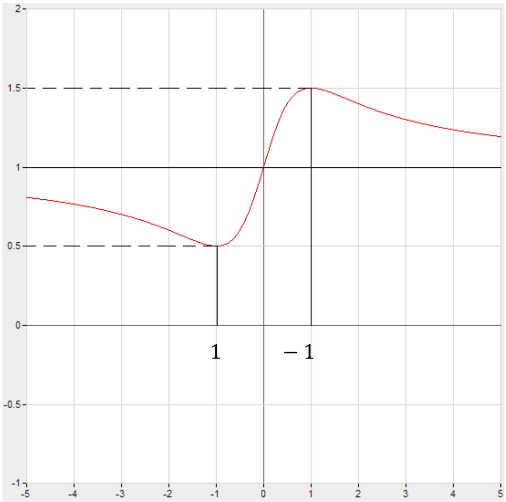
A függvény ebben az esetben alulról korlátos.

Az $y = 1$ tehát vízszintes aszimptota.

Mivel az f csökken a $[-\infty, -1]$ intervallumon, és sosem csökken az $y = 1$ aszimptota alá az $[1, \infty]$ intervallumon, ezért az $m = f(-1) = 0{,}5$ lokális minimum egyben abszolút minimum is, hasonlóképpen $M = f(1) = 1{,}5$-ben levő lokális maximum pedig abszolút maximum, mivel a $[-\infty, -1]$ részen sosem halad át az aszimptotán.

A függvénynek nincs függőleges aszimptotája.

• <u>A felrajzolt függvény:</u>



2. ábra [10]

$x \in \mathbb{R}$ $\acute{e}s$ $y \in \mathbb{R}: 0{,}5 \leq y \leq 1{,}5$

A $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2+1}$ függvény értékkészlete: $R_f: f(x) \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right] / \{1\}$.

3.4. *C.588. Írjuk fel az* $\boldsymbol{f}: (-\infty, -2) \rightarrow \mathbb{R}$*,* $\boldsymbol{x \rightarrow 2x^2 + 8x + 7}$ *függvény inverzét. (2000. május) [3]*[4]

DEFINÍCIÓ: *f* függvény injektív [5] **(2)**

Az f függvény a D halmazon injektív, ha különböző D-beli elemekhez különböző értékeket rendel.

DEFINÍCIÓ: Inverz függvény [2] **(3)**

Ha $f: A \rightarrow B$ injektív a teljes értelmezési tartományán, akkor f^{-1}-gyel jelöljük azt a leképezést, amely minden $b = f(a)$ elemhez hozzárendeli a-t $(a \in A)$. Ekkor $f^{-1}: B \rightarrow A$, $D(f^{-1}) = B$, $R(f^{-1}) = A$. Az f^{-1} leképezést *f* inverzének nevezzük.

TÉTEL:[2] **(3.6)**

Legyen $f: A \rightarrow B$ injektív a teljes értelmezési tartományon. Ekkor a $g = f^{-1}: B \rightarrow A$ függvénynek létezik az inverze, és $g^{-1} = f$.

[4] Teljesen saját megoldás, a feladat bővítése előadás jegyzet alapján., ahol egy hasonló példa szerepelt.

Mivel az inverz függvény létezésének feltétele, hogy f injektív legyen a teljes értelmezési tartományon, ezért fontos, hogy az értékkészlet minden eleméhez, csak egy elem tartozzon az értelmezési tartományból.
Az f függvény értelmezési tartománya: $D_f: (-\infty, -2)$
Ekkor $\forall x < (-2)$ értékhez egy $y > (-1)$ érték tartozik. Az f függvény inverzét úgy kapjuk meg, ha az $y = 2x^2 + 8x + 7$ egyenletből kifejezzük az x-et.

$$y = 2x^2 + 8x + 7 = 2(x+2)^2 - 1$$

$$x = \sqrt{\frac{y+1}{2}} - 2 \text{ vagy } x = -\sqrt{\frac{y+1}{2}} - 2$$

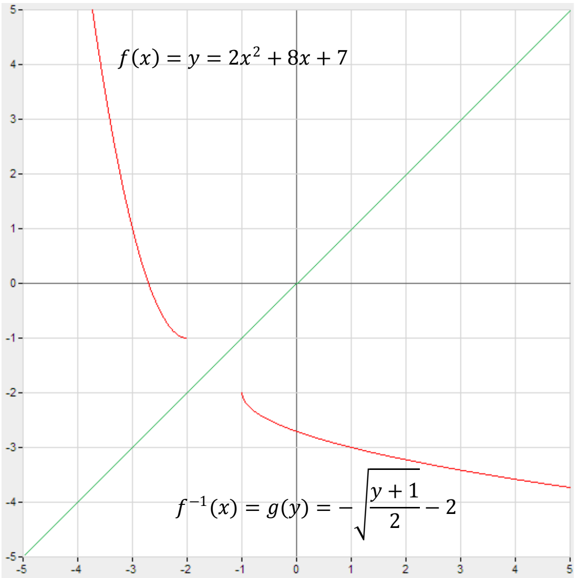
A két lehetséges megoldás közül nekünk csak az $x = -\sqrt{\frac{y+1}{2}} - 2$ jó, mivel ez tesz eleget annak a feltételnek, hogy $\forall x < (-2)$ értékhez egy $y > (-1)$ érték tartozzon. Tehát a keresett g inverz függvény$g: (-1, \infty) \to R$.

$$f^{-1}(y) = g(y) = -\sqrt{\frac{y+1}{2}} - 2$$

FELADAT BŐVÍTÉSE:

1. Mi az inverz függvény grafikonja? [4]

Ábrázoljuk a két függvényt ugyanabban a Descartes-féle koordinátarendszerben.
Az (x, y) pont az f függvény grafikonján van. Ha $f(x) = y$, akkor $f^{-1}(y) = x$. Ebben az esetben (y, x) pontnak rajta kell lennie az inverz függvény grafikonján.
A kérdés tehát az, hogy milyen geometriai transzformációval kaphatjuk meg $(x, y) \to (y, x)$ leképezést?
Ez a geometriai transzformáció pedig az $y = x$ egyenesre való tükrözés.

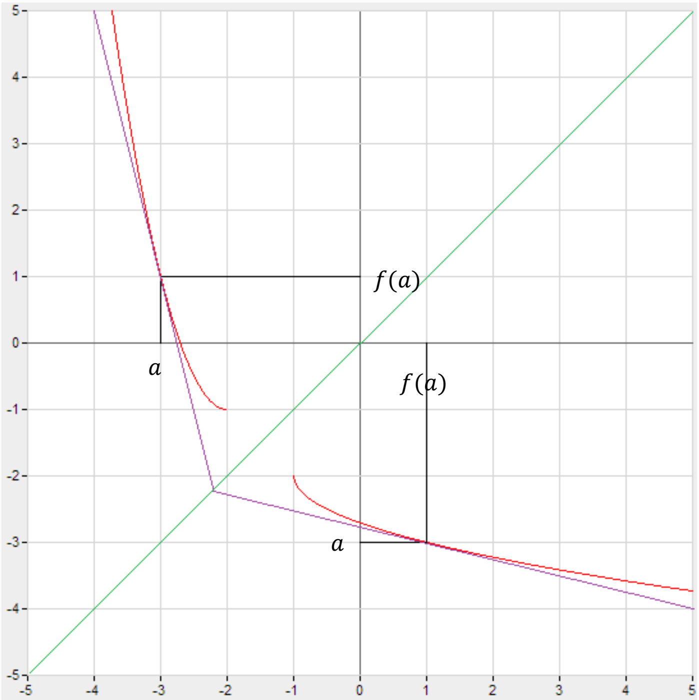


3. ábra [10]

Ezáltal megkaptuk az inverz függvény grafikonját.

2. *Mi az inverz függvény deriváltja* $\boldsymbol{a = -3}$ *pontban?[4]*

Tudjuk, hogy a derivált egy adott pontban húzott érintő meredekségével egyenlő. Tehát jelen esetben $(a, f(a))$ pontban húzott érintő $f^{'}$ meredekségét adja meg. f^{-1} deriváltja pedig az $(f(a), a)$ pontban húzott érintő egyenes meredekségével fog megegyezni. Mivel a grafikonok egymás tükörképei, ezért az érintők is. Tehát az $\left(a, f(a)\right)$ ponton áthaladó érintő meredeksége: $m_1 = f^{'}$, ekkor az $(f(a), a)$ ponton áthaladó egyenesnek $m_2 = \frac{1}{m_1} = \frac{1}{f'}$. Ebből következik, hogy az inverz függvény meredeksége, az eredeti f függvény deriváltjának reciproka.



4. ábra [10]

TÉTEL: Inverz függvény deriváltja [4] **(3.7)**

Az f injektív függvény deriválható a-ban és a derivált ($f'(a) \neq 0$) nem 0, akkor az f inverze deriválható $f(a)$-ban, és $(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$.

Az f függvény az $a = (-3)$ helyen $f(-3) = 1$ értéket veszi fel.

Az f függvény deriváltja:

$$f'(x) = 4x + 8$$

A (3.7)-es tételben megadott összefüggés alapján:

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{4 \cdot 1 + 8} = \frac{1}{12}$$

4. Arany Dániel versenyfeladatok

4.1 Határozzuk meg a valós számok halmazán értelmezett $\boldsymbol{f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+3x+4}}$ függvény legkisebb és legnagyobb értékét!(2005-2006. haladó 2 kategória 2 forduló) [5][5]

Értelmezési tartomány: $D_f: x \in \mathbb{R}$.

Első derivált meghatározása, ezáltal szélsőérték hely kiszámítása:

$$f'(x)=\left(\frac{x^2-1}{x^2+3x+4}\right)'=\frac{3x^2+10x+3}{(x^2+3x+4)^2}$$

$$f'(x)=\frac{3x^2+10x+3}{(x^2+3x+4)^2}=0 \qquad (x^2+3x+4)^2\neq 0$$

$$x=-3 \text{ vagy } x=-\frac{1}{3}$$

Tehát $x=-3\ vagy\ x=-\frac{1}{3}$ helyeken az $f(x)$ függvénynek szélsőértéke van.

x	$x<-3$	$x=-3$	$-3<x-\frac{1}{3}$	$x=-\frac{1}{3}$	$x>-\frac{1}{3}$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	lokális maximum	$\searrow$	lokális minimum	$\nearrow$
	monoton nő	$f(-3)=2$	monoton csökken	$f\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{2}{7}$	monoton nő

(3.1) és (3.2), (3.3)-as tételek alapján

Értékkészlet: $R_f: x \in [2,-\frac{2}{7}]$.

Meghatározom a függvény aszimptotáját:

$$f(x)=\frac{1-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}$$

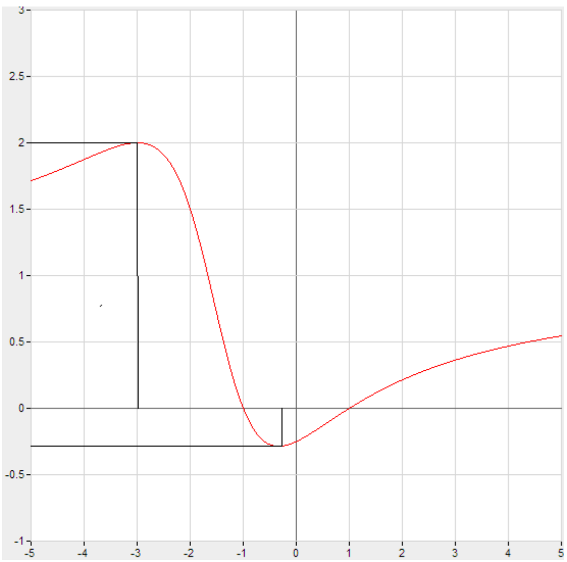
[5] Teljesen saját megoldás

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}} = 1$$

Az $y = 1$ tehát vízszintes aszimptotája az f függvénynek. Mivel f a $[-\infty, -3]$ intervallumon monoton nő, és sosem csökken $y = 1$ alá, a $[-3, -\frac{1}{3}]$ intervallumon monoton csökken, majd $[-\frac{1}{3}, \infty]$ intervallumon pedig sosem vesz fel 1-nél nagyobb értéket, ezért az $x = -3$ -ban abszolút maximuma, az $x = -\frac{1}{3}$-ban pedig abszolút minimuma van a függvénynek. Ebből következik, hogy $x = -3$ helyen az $f(-3) = 2$ a legnagyobb érték, amit felvesz a függvény. Az $x = -\frac{1}{3}$ helyen az $f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{7}$ pedig a legkisebb függvényérték.

A függvény megrajzolásával ellenőrizhetjük a kapott eredményeket.



6. ábra [10]

$$x \in \mathbb{R} \; és \; y \in \mathbb{R} : -\frac{2}{7} \leq y \leq 2$$

4.2 *Oldjuk meg a természetes számok (nem negatív egész számok) halmazán*

$$\mathbf{3(x-y)=x^2-xy+y^2}$$

egyenletet! (1998/99. év, haladó II kategória) [8][6]

Ezt a feladatot, azért választottam, hogy továbbfejlesztéséből egy analízisben gyakori példát vizsgálhassunk meg, amelynek megoldásához olyan tudás kell, melyet az egyetemen sajátít el az ember.

Átalakítom az egyenletet:

$$3(x-y)=x^2-xy+y^2$$
$$6(x-y)=2x^2-2xy+2y^2$$
$$0=(x-y)^2+x^2+y^2-6x+6y$$
$$18=(x-y)^2+(x-3)^2+(y+3)^2$$

Azaz három négyzetszám összegeként kell előállnia a 18-nak. $18=16+1+1$ pont megfelelő. Egy táblázat segítségével könnyen meghatározhatom, melyek az alkalmas *y*,*x* számpárok.

$(x-3)^2$	$(y+3)^2$	x	y	$x,y\in\mathbb{N}$	Teljesül-e, $(x-y)^2$ az egyenlőség
1	1	4	-2	nem jó -2 miatt	-
		2	-4	nem jó -4 miatt	-
16	1	7	-2	nem jó -2 miatt	-
		-1	-4	nem jó -1 és a -2 miatt	-
1	16	4	1	Jó	$(4-1)^2\neq 1$
		4	-7	Csak az $y=-7$ variáció nem	-
		2	1	Jó	$(2-1)^2=1$ JÓ
		2	-7	Csak az $y=-7$ variáció nem	-

Tehát az $x=2, y=1$ megoldása az egyenletnek.

[6] Tömör megoldás bővítése, annak részletes leírása. Feladat továbbfejlesztése teljesen önálló munka.

Ellenőrzés:

$$3(2-1)=3$$
$$2^2-2\cdot 1+1^2=3$$
$$3=3$$

FELADAT TOVÁBBFEJLESZTÉSE:

Az eredeti egyenlettel ekvivalens az $x^2-xy+y^2-3x+3y=0$ egyenlet.
Jelölje $f(x,y)=(x-y)^2+(x-3)^2+(y+3)^2-18$ polinomot.

1. Milyen $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ valós számpárok elégítik ki az $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^2+(\boldsymbol{x}-\mathbf{3})^2+(\boldsymbol{y}+\mathbf{3})^2=\mathbf{0}$ egyenletet?

Ekkor a feladatban megadott egyenletet bal oldalát megkaphatjuk a következő módon:

$$(x-y)^2+(x-3)^2+(y+3)^2=f(x,y)+18$$

Az $f(x,y)+18$ kifejezést $g(x,y)$-nak nevezem el. Így tehát az egyenlet megoldása megmutatja, hogy hol lesz a $g(x,y)$ kétváltozós függvénynek zérushelye.

Teljes négyzetek vizsgálatával oldjuk meg a feladatot:

$$(x-y)^2+(x-3)^2+(y+3)^2+18-18=0$$
$$(x-y)^2+(x-3)^2+(y+3)^2=0$$

Tudjuk, hogy három négyzetszám összege csak akkor nulla, ha mindegyik tag nulla.

$$(x-3)^2=0 \qquad\qquad (y+3)^2=0$$
$$x=3 \qquad\qquad y=-3$$

Ebben az esetben, $(x-y)^2\neq 0$

Tehát a nincs megoldása az $f(x,y)+18=0$ egyenletnek, azaz nincs zérushelye a $g(x,y)$ függvénynek.

2. *Milyen z valós számokra van megoldása a* $\boldsymbol{g(x,y) = f(x,y) + 18 = z}$ *egyenletnek?*

Feltehetnénk a kérdést úgy is, hogy mi az értékkészlete a $g(x,y)$ függvénynek.
Tehát az alábbi egyenlettel dolgozom:

$$z = x^2 - xy + y^2 - 3x + 3y + 18$$

Meg akarjuk határozni, hol van szélsőértéke a $z = g(x,y)$-nak.

„Egy többváltozós függvény viselkedésének az áttekintését megkönnyítheti, ha egyes változókat rögzítünk, és a függvényt a maradék változó függvényeként fogjuk fel. Az így kapott függvények az eredeti függvény úgynevezett **szekciófüggvényei**.” [2]

DEFINÍCIÓ: Elsőrendű parciális derivált [2] **(4)**

Legyen a g függvény értelmezve az $a = (a_1, a_2, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^p$ pont egy környezetében. Rögzítsük az $a = (a_1, a_2, \dots, a_p)$ pont koordinátáit, az *i*-edik kivételével és tekintsük a megfelelő

$$t \to g_i(t) = g(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots . a_p)$$

szekciófüggvényt. Az így kapott egyváltozós g_i függvény a_i pontban vett deriváltját (amennyiben létezik) az g függvény a pontban vett *i*-edik *parciális deriváltjának* nevezzük, és a

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(a),\ g'_{x_i}(a), D_i g(a), \partial x_i g(a), \partial_i g(a)$$

szimbólumok bármelyikével jelölhetjük.
A későbbiekben a $g'_{x_i}(a)$ jelölést használom leggyakrabban.

DEFINÍCIÓ: Lokális maximum, minimum hely [2] **(5)**

Azt mondjuk, hogy az g függvénynek az $a \in \mathbb{R}^p$ pontban lokális maximum (illetve *lokális minimuma*) van, ha a-nak van olyan U környezete, amelyben *f* értelmezve van, és minden $x \in U$-ra $g(x) \leq g(a)$ (illetve $g(x) \geq g(a)$). Ekkor az a pontot a g függvény lokális maximumhelyének (illetve *lokális minimumhelyének*) nevezzük.

DEFINÍCIÓ: Másodrendű parciális derivált [2] **(6)**

Legyen g értelmezve az $a \in \mathbb{R}^p$ pont egy környezetében. Ha a $D_j g$ parciális derivált létezik az a pont egy környezetében és $D_j g$ parciálisderivált-függvénynek létezik az i-edik parciális deriváltja az a pontban, akkor ezt a g függvény a-beli ij-edik másodrendű parciális deriváltjának nevezzük, és a

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(a)\,,\ D_i D_j\, g(a)\,,\ D_{ij}\, g(a)$$

szimbólumok bármelyikével jelölhetjük. (Az g függvénynek legfeljebb p^2 másodrendű parciális deriváltja lehet az a pontban.)

DEFINÍCIÓ: Hesse-mátrix [4] **(7)**

A $H_{g(x,y)} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} \partial x \partial x\ g(x,y) & \partial x \partial y\ g(x,y) \\ \partial y \partial x\ g(x,y) & \partial y \partial y\ g(x,y) \end{pmatrix}$ számokból álló mátrixot Hesse-féle mátrixnak szokás nevezni.

TÉTEL: Parciális derivált létezése [2] **(4.1)**

Ha a g függvénynek lokális szélsőértéke van az $a \in \mathbb{R}^p$ pontban, és g-nek léteznek a parciális deriváltjai a-ban, akkor $D_i g(a) = 0$ minden $i = 1, \dots, p$-re.

Írjuk fel, az $g(x,y)$ kétváltozós függvény elsőrendű parciális deriváltjait:

$$g_x^{'}(x,y) = \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = 2x - y - 3$$

$$g_y^{'}(x,y) = \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = 2y - x + 3$$

<u>*Szükséges feltétel*</u>: (4.1)-es tétel alapján, az elsőrendű parciális deriváltak zérusok legyenek.

$g_x^{'}(x,y) = 0$, ekkor $2x - y - 3 = 0$

$g_y^{'}(x,y) = 0$, ekkor $2y - x + 3 = 0$

A kapott megoldásából kiszámíthatók $x = 1$ és $y = -1$ értékek. Ez a számpár megadja, a $g(x,y)$ függvény összes szélsőérték helyét. Az *xy* síkon ez a pont a $P(1,-1)$. Ebben a pontban teljesülnie kell a szükséges feltételeknek.

Felírjuk a másodrendű parciális deriváltakat:

$$g''_{xx}(x,y) = \frac{\partial^2 g(x,y)}{\partial x^2} = 2 \ , \ g''_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2 g(x,y)}{\partial x \partial y} = -1 \ , \ g''_{yx}(x,y) = \frac{\partial^2 g(x,y)}{\partial x \partial y} = -1 \ ,$$

$$g''_{yy}(x,y) = \frac{\partial^2 g(x,y)}{\partial x^2} = 2$$

<u>Elégséges feltétel</u>: A g függvénynek lokális szélsőértéke (minimuma vagy maximuma) van, ha $H_{g(x,y)}$ determinánsa nagyobb, mint 0.

Ennek vizsgálatához, felírjuk a Hesse-mátrix determinánsát:

$$det\ H_{g(x,y)} = \left|H_{g(x,y)}\right| = \begin{vmatrix} \partial x \partial x\ g(x,y) & \partial x \partial y\ g(x,y) \\ \partial y \partial x\ g(x,y) & \partial y \partial y\ g(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - (-1) \cdot (-1) = 3$$

„Kétváltozós függvény szélsőértékei:

1. ha $det\ H_{g(x,y)} > 0$ és $g''_{xx}(x,y) > 0$, akkor (x,y)-ban lokális minimuma van,
2. ha $det\ H_{g(x,y)} > 0$ és $g''_{xx}(x,y) < 0$, akkor (x,y)-ban lokális maximuma van,
3. ha $det\ H_{g(x,y)} < 0$ akkor (x,y) -ban nincs lokális szélsőérték (valamilyen típusú nyeregpontról beszélünk),
4. ha $det\ H_{g(x,y)} = 0$, akkor a második deriváltból nem tudjuk kiolvasni a számunkra szükséges választ.” [11]

Mivel $det\ H_{g(x,y)} = 3$ és $g''_{xx}(x,y) > 0$, ezért az (x,y) pontban lokális minimuma van a függvénynek, ami azt jelenti, hogy $P(1,-1)$ pont minimum hely, ahol $z = 12$ értéket veszi fel.

A szélsőértékek keresésekor egy helyet találtunk, ahol maximum vagy minimum lehet. A $det\ H_{g(x,y)} = 3 > 0$ segítségével megkaptuk, hogy ezen a $P'(1,-1,12)$ helyen lokális minimuma van a függvénynek. Mivel $g(x,y) - 12$ függvénynek nincs zérushelye az $(1,-1)$ ponton kívül, ezért a $g(x,y)$ nem süllyed a P' pontot tartalmazó *xy* síkkal párhuzamos sík alá, tehát a lokális minimum abszolút minimum is. Ez közvetve következik abból, hogy a Hesse-determináns mindenhol pozitív, ami azt eredményezi, hogy a g szigorúan konvex. A konvexitás és a lokális minimum létezése együtt elégséges feltétel az abszolút minimumhoz.

A $g(x,y)$ akármilyen nagy értéket is felvehet. Ezt láthatjuk, ha $y = 0$-ban vizsgáljuk.

Ekkor:

$$z = x^2 - 3x + 18$$

Ez mutatja, hogy akármilyen nagy értékeket felvehet.

Ez alapján a $g(x,y)$ értékkészlete: R_f: $g(x,y) \in \mathbb{R}:\ g(x,y) \geq 12$

ÉRDEKESSÉG:

Hogyan vizsgálhatjuk meg a $g(x,y) = z$ értékét grafikus úton?

DEFINÍCIÓ: Kétváltozós általános másodfokú egyenlet **(8)**

$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$, ahol A-F-ig az együtthatók nem mind 0-ák.

Másodrendű felület, egy ilyen egyenlettel megadott halmaz. Ez egy kétváltozós általános másodfokú egyenlet, amellyel megadhatom a $z = g(x,y) = f(x,y) + 18$ egyenletű felületet. A számolás megmutatta, hogy a felület nem metszi az xy síkot. mivel $f(x,y) + 18 \neq 0$.

Vizsgáljuk meg, hogy is nézhet ki valójában ez a felület. Tekintsük a síkmetszeteket:

- *xz* síkkal vett metszete, ahol $y = 0$

$$z = f(x,y) + 18$$
$$z = x^2 - 3x + 18$$

Tovább alakítjuk:

$$z = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{63}{4}$$

Ha a parabola tengelye párhuzamos a z tengellyel, és tengelypontja nem az origó, hanem $T(u,v)$ koordinátájú pont, akkor a parabola egyenlete:

$$z = \frac{1}{2p}(x-u)^2 + v$$

Ahol *p* a parabola paramétere.

Tehát a tengelymetszettel kapott parabola $T\left(\frac{3}{2}, +\frac{63}{4}\right)$ tengelypontú és a parabola paramétere pedig $p = \frac{1}{2}$.

Az *xz*-vel párhuzamos síkokban, ahol $y = y_0$ konstans. Ezek szintén parabolák, az előző eltoltjai.

- *yz* síkkal vett metszete, ahol $x = 0$

  Az előző számoláshoz hasonlóan:

$$z = y^2 + 3y$$
$$z = \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{63}{4}$$

  Tehát a tengelymetszettel kapott parabola $T\left(-\frac{3}{2}, \frac{63}{4}\right)$ tengelypontú és a parabola paramétere pedig $p = \frac{1}{2}$.

  Az *yz*-vel párhuzamos síkokban, ahol $x = x_0$ konstans. Ezek szintén parabolák, az előző eltoltjai.

- *xy* síkkal vett metszete, ahol $z = 0$

  Mint azt láttuk, ebben az esetben nincs megoldása az egyenletnek,

$$0 = z = f(x, y) + 18$$

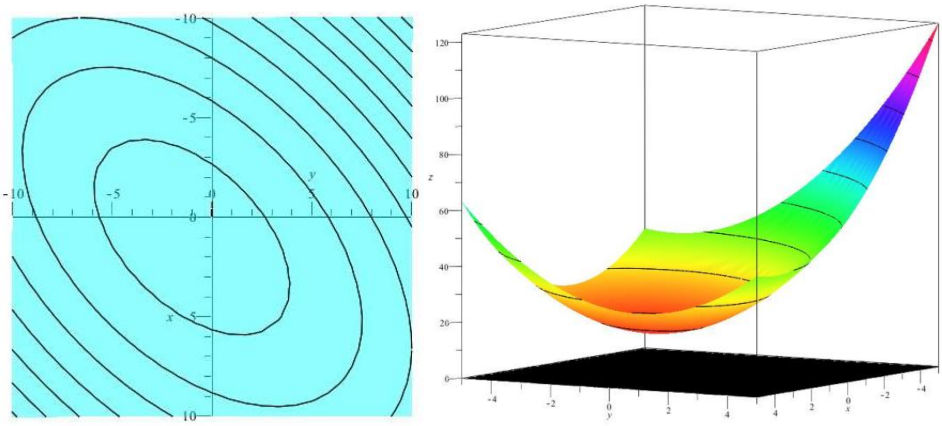
  Tehát $z \neq 0$. Azonban vizsgáljuk meg, milyen alakzatot kapunk az xy-nal párhuzamos síkokban, ahol $z = z_0$ konstans.

$$1 = \frac{x^2}{z_0} + \frac{y^2}{z_0} - \frac{xy}{z_0} - \frac{3x}{z_0} + \frac{3y}{z_0}$$

  Ha $z_0 > 12$ akkor az ellipszis nem elfajuló lesz, egyéb esetekben pedig elfajuló. Elfajulónak nevezzük az ellipszist, amikor az egyenletnek nincs, vagy csak egyetlen pont a megoldása.

Tehát az *yz* és *xz* síkokkal vett síkmetszete parabola, az *xy* síkkal vett síkmetszete pedig egy ellipszis egyenletére hasonlít. Látszik belőle, hogy nem origó középpontú az ellipszis. A három síkmetszet megfigyeléséből azt a következtetést vonom le, hogy ez egy elliptikus paraboloid.

A felületet ábrákon szemléltetjük:



$z \in \mathbb{R} : \ z \geq 12$

Az első ábra azt mutatja, hogy a $z = z_0 \geq 12$ értékekhez tartozó, *xy* síkkal párhuzamosan vett síkmetszetek olyan ellipszist adnak, amelynek nem az origó a középpontja és a tengelyeik nem párhuzamosak a koordináta tengelyekkel.
A második ábrán a teljes felületet látható, amelyet elliptikus paraboloidnak nevezünk.

5. Más versenyfeladatok

5.1. *Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny 2005-2006. tanévi első fordulója, II. kategória számára [6]*[7]

a) Ábrázolja az $[\mathbf{1}, \infty)$ ***halmazon értelmezett következő függvényt:***

$$\boldsymbol{x \to \sqrt[4]{1 - 2x + x^2} - \sqrt{x - \sqrt{4x - 4}}}$$

b) Jellemezze a függvényt a következő tulajdonságok szerint:
zérushely, értékkészlet, korlátosság, szélsőértékek, növekedés-csökkenés, monotonitás.

a) A függvény képletéből meghatározhatjuk, hogy $x \geq 1$. Emellett még észrevehető, hogy a kivonandó gyökjel alatt teljes négyzet áll.

$$\sqrt[4]{1 - 2x + x^2} = \sqrt{x - 1}$$

[7] A honlapon szereplő megoldás bővebb, részletesebb leírása.

A másik tagot is átalakítjuk:

$$x - \sqrt{4x - 4} = (\sqrt{x - 1} - 1)^2$$

Két intervallumon kell megfigyelnünk a függvény viselkedését:

- Ha $1 \le x < 2$, akkor $\sqrt{x - 1} < 1$, ekkor a függvény, amit vizsgálunk:

$$x \to \sqrt{x - 1} - \left(1 - \sqrt{x - 1}\right) = 2\sqrt{x - 1} - 1$$

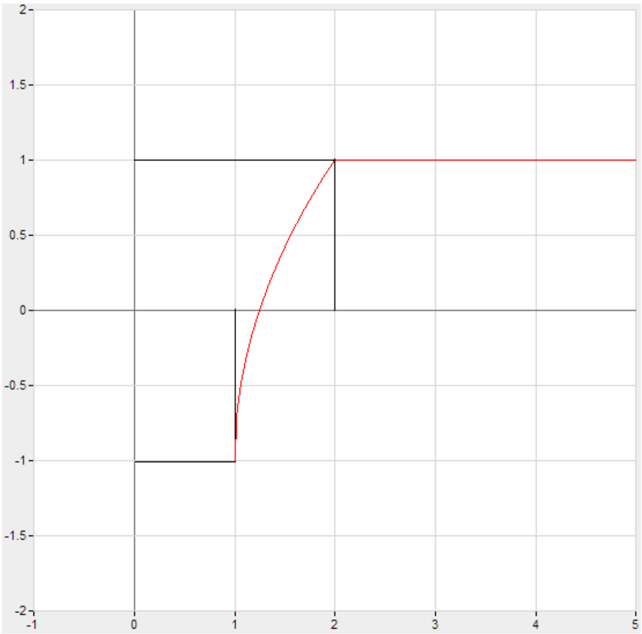
- Ha $2 \le x$, akkor $\sqrt{x - 1} \ge 1$, ekkor a vizsgálandó függvény:

$$x \to \sqrt{x - 1} - \left(\sqrt{x - 1} - 1\right) = 1$$

A függvény zérushelye:

$$2\sqrt{x - 1} - 1 = 0 \qquad\qquad x = \frac{5}{4}$$

Ezek alapján a függvény ábrája:



7. ábra [10]

Értékkészlet: $R_f : x \in [-1,1]$.

b) ***Korlátosság, szélsőérték***: A függvény alulról és felülről is korlátos. A legnagyobb alsó korlátja a -1, a legkisebb felső korlátja pedig az 1. Ezek közül a függvény mindkét értéket fel is veszi. A függvény minimumhelye $x = 1$-nél van, ekkor a függvény -1-et vesz fel. A maximuma az 1, amit a függvény $\forall x: 2 \le x$ fel is vesz.

Növekedés-csökkenés, monotonitás: A függvény az értelmezési tartományon monoton növő, az [1,2] intervallumon szigorúan monoton növő.

5.2. Kalmár László verseny 2004. megyei, 8. osztály [9][8]

Határozzuk meg a következő függvény legkisebb értékét:

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{x^2-6x+10}{2x-6}, x}>3$$

Értelmezési tartomány: $D_f: x \in (3, \infty)$.

Könnyen egyszerűbb alakra hozhatjuk a függvényt, majd a (3.1) tétel használatával, meghatározhatjuk a szélsőértéket.

$$f(x)=\frac{(x-3)^2+1}{2(x-3)}=\frac{1}{2}(x-3)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-3}\right)$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x-3)^2}=0$$

$$|x-3|=1$$

$$x-3=1 \qquad\qquad x-3=-1$$

$$x=4 \qquad\qquad x=2$$

Az $x=2$-ben nincs értelmezve a függvény, mivel $x>3$

x	$3<x<4$	$x=4$	$4<x$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	lokális maximum	$\nearrow$
		$f(4)=1$	

(3.1), (3.2) és (3.3)-as tétel alapján

$$f(4)=\frac{4^2-6\cdot 4+10}{2\cdot 4-6}=1$$

Tehát $x=4$-ben abszolút minimuma van a függvénynek, és $x=4$ helyen 1-et vesz fel.

[8] Teljesen saját megoldás.

Összefoglaló

Dolgozatomhoz az analízis témaköréből gyűjtöttem versenyfeladatokat. Többnyire a középiskolás korosztálynak szóló feladatokból válogattam, azonban előfordul néhány általános iskolai példa is. Az analízis témaköréhez kapcsolódó feladatok keresése közben jól láthatóvá vált számomra, hogy feladatok nagy része a szélsőérték keresésével foglalkozik. Ezzel előkészítik az egyetemen elsajátítható függvény analízist, azonban a példákat többnyire négyzetösszegekkel oldják meg. A feladatok megoldásához, a tanulók még nem használják a differenciálszámítást. Vannak olyan középiskolák, ahol a matematika fakultációra járó diákok már találkoznak a feladatok megoldásának ezen módszerével. Ezt a témakört csak felszínesen érintik, azonban a jó képességű diákok nagy hasznát vehetik a versenyfeladatok megoldásában, ezért is kerestem példákat versenyfeladatok között. Így vannak olyan diákok, akik számára a differenciálszámítás, ha csak kis részben is, ismert anyagként kerül elő.

A dolgozatom azonban jól mutatja, milyen módszereket sajátíthatunk el az egyetemen, ezen feladatok gyorsabb megoldása érdekében.

Tanár szakos hallgatóként fontosnak tartom, hogy a diákoknak olyat mutathassak, ami felkelti az érdeklődésüket. Ezeknek a feladatoknak a gyorsabb megoldása pont ilyen szerepet tölt be.

Irodalomjegyzék

[1] George B. Thomas: *Thomas-féle Kalkulus*
TYPOTEX , Budapest 2008

[2] Laczkovich Miklós, T. Sós Vera, Simonovits Miklós: *Analízis I.*
Nemzetközi Tankönyvkiadó Zrt., Budapest 2006

[3] Kömal archívum:
http://www.komal.hu/verseny/korabbi.h.shtml

[4] Dr. Keleti Tamás: *Kalkulus 2 előadás jegyzet*

[5] Arany Dániel Matematikaverseny régebbi feladatai
http://www.kazinczy.gyor.hu/web/matek/AD_gyujt.htm

[6] Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny (OKTV)
http://www.oktatas.hu/kozneveles/tanulmanyi_versenyek/oktv_kereteben/versenyfeladatok_javitasi_utmutatok

[7] Fazekas Mihály Gyakorlóiskola: Matematika oktatási portál
http://matek.fazekas.hu/portal/feladatbank/egyeb/AranyDani/ad99fel/ad99felm.html

[8] Fazekas Mihály Gyakorlóiskola: Matematika oktatási portál
http://matek.fazekas.hu/portal/feladatbank/gyujtemenyek/Nem/tartalom.htm

[9] Fazekas Mihály Gyakorlóiskola: Matematika oktatási portál
http://matek.fazekas.hu/show.php?problem=2483&setting=m

[10] Függvényrajzoló program:
http://matek.hunyadi-csna.sulinet.hu/temak/fuggvenyek/grapher.html

[11] Hesse mátrix:
http://hu.wikipedia.org/wiki/Hesse-m%C3%A1trix