Lépjünk ki a térbe!

Szakdolgozat

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Készítette:

Marx Máté

Matematika BSc

Konzulens:

Moussong Gábor

Geometriai Tanszék

2014

Budapest

Tartalomjegyzék

Bevezető

Vannak síkbeli geometriai tételek, melyeket nagyon nehéz síkban bizonyítani, de térben egészen egyszerűen és frappánsan belátható az állítás érvényessége. Ha egy tételt nem is nagyon nehéz bizonyítani, akkor is van olyan eset, amikor sokkal látványosabb, érthetőbb térbe kilépve gondolkodni. Ilyen problémákat, tételeket és feladatokat gyűjtöttünk össze ebben a dolgozatban. Megmutatjuk, hogy milyen ésszerű, frappáns és akár középiskolai tudással is megérthető bizonyításokat adhatunk egy-egy tételre, feladatra, melyeket gimnáziumban csak nagyon ritkán, vagy nem tanítunk.

Arra koncentráltunk, hogy bemutassuk azt a megoldási módszert, ami nem mélyed bele a síkbeli kérdésekbe, hanem inkább kijjebb lép a térbe és ott próbálja meg elképzelni, hogy mi miért lehet. Sok esetben egy egyenes két sík metszésvonalaként nagyon könnyen kihozható. Ezt illeszkedési feladatokban gyakran kihasználjuk.

A felsorolt tételek bizonyításához többféle térbe kilépési módszert is használtunk. Ilyen például, hogy a feladatban szereplő körökre kúpot, vagy gömböt helyezünk. Van, hogy gömböt és kúpot is használunk. Több tétel bizonyításában egyszerűen kiemeljük az egyik pontot a síkból, ezáltal térbelivé tesszük az ábrát. Ilyen például a Desargues tétel, vagy a Papposz tétel duálisa.

Az általunk felsorolt tételek és feladatok nagy része a projektív geometriát veszi alapul, így ezek során nem térünk ki két egyenes párhuzamossága és metszése közötti különbségre, hiszen a projektív síkon bármely két egyenes metszi egymást.

A tételeket térbe kilépve bizonyítva egy másik szemléletet adhatunk a geometriai gondolkodásnak. Fontos, hogy több irányból is meg tudjunk közelíteni egy problémát. Így ha az egyikkel nem jutunk eredményre, akkor a másik út segíthet.

1. fejezet

A Brianchon tétel

Hajós György részletesen ismerteti ezt a tételt az [1] tankönyvben, mi is innen vesszük az ötletet. A Brianchon tétel a projektív geometria tárgyába tartozik, így gimnáziumban ritkán tanítjuk, de ha ezt a bizonyítást alkalmazzuk, akkor lényegében nem igényel nagyobb eszköztárat, mint amit érettségiig megtanítunk. A párhuzamos egyenesek ideális pontban való metszését nem tudjuk elkerülni, így a projektív síkon bizonyítunk.

1.1. Tétel (Brianchon). *Egy kör köré írt hatszög átellenes csúcspárjait összekötő egyenesek egy pontban metszik egymást.*

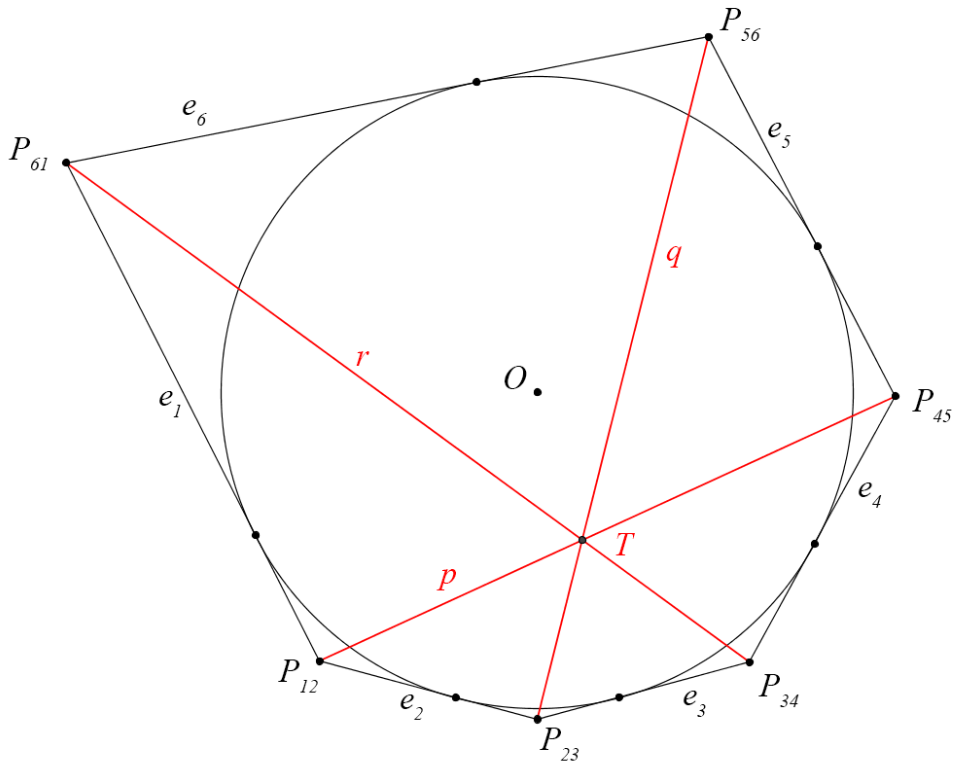
A három egyenes közös pontját, T-t a hatszög Brianchon-pontjának nevezzük.

1.1. Megjegyzés. A tétel a projektív geometria ismeretében könnyen átvihető bármely közönséges kúpszeletre, hiszen egy alkalmas transzformációval a projektív síkon bármely közönséges kúpszelet körbe vihető.

1.2. Megjegyzés. A projektív síkon az egyenesek mindig metszik egymást (párhuzamosság esetén egy ideális pontban). A tétel akkor is igaz, ha a hatszög oldalai, ezek érintési pontjai, valamint a hatszög csúcsai között ideális elemek is vannak. (például két szomszédos oldal párhuzamos, így a metszéspontjuk ideális pont)

1.3. Megjegyzés. A hat érintő ciklikus sorrendje teljesen függetlenül választható meg attól, hogy érintési pontjaik milyen sorrendben következnek a kúpszeleten.

Ha a síkban maradva próbáljuk bizonyítani a tételt, akkor polárisokkal, pólusokkal és a Pascal tétel segítségével ezt megtehetjük. Ezeket azonban nem gyakran tudjuk megtanítani gimnáziumban. Most egy középiskolás alapokon maradó bizonyítást adunk a tételre térbe kilépés segítségével.



1.1. ábra. A Brianchon tétel

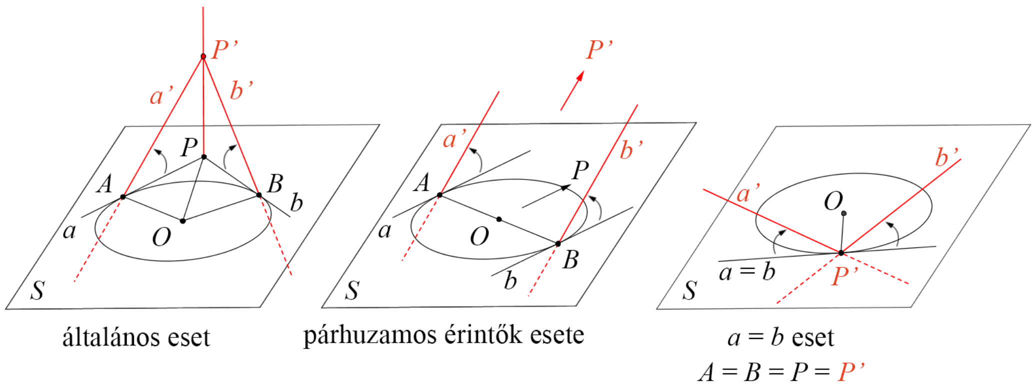
Az 1.1. ábra által mutatott jelölést bevezetve, ha a hatszög oldalait ciklikus sorrendjükben számozzuk (e_1 - e_6), és a hatszög csúcsait az alapján nevezzük el, hogy mely érintőkre illeszkednek (P_{12} - P_{61}), akkor a $p = P_{12}P_{45}$, $q = P_{23}P_{56}$ és a $r = P_{34}P_{61}$ egyeneseket kapjuk. Tételünk szerint ezek az egyenesek egy közös pontban metszik egymást (ábránkon a T pontban).

A tétel bizonyításához először be kell látnunk egy segédtételt.

1.1. Definíció. Legyen adott egy O középpontú k kör és egy azt E-ben érintő t egyenes. Tekintsünk az E érintési pontra O-ból. Ekkor a t egyenes OE körüli pozitív irányba való elforgatásán az óra járásával ellentétes irányba való forgatást értjük.

Vegyük az S síkban lévő O középpontú k kör két pontját. Legyenek ezek A és B. Ezekben a pontokban legyenek az érintőegyenesek rendre a és b. Most forgassuk el az a egyenest az OA egyenes körül α szöggel pozitív irányba. Ezt a kiforgatott egyenest nevezzük a'-nek. Ezután ugyanígy forgassuk el a b egyenest az OB egyenes körül, de negatív irányba. Ezt a kiforgatott egyenest nevezzük b'-nek. (1.2. ábra)

1.1. Lemma. *Ekkor az a', b' egyenesek is metszik egymást és P' metszéspontjuk merőleges vetülete az S síkra éppen az eredeti a, b egyenesek P metszéspontja.*



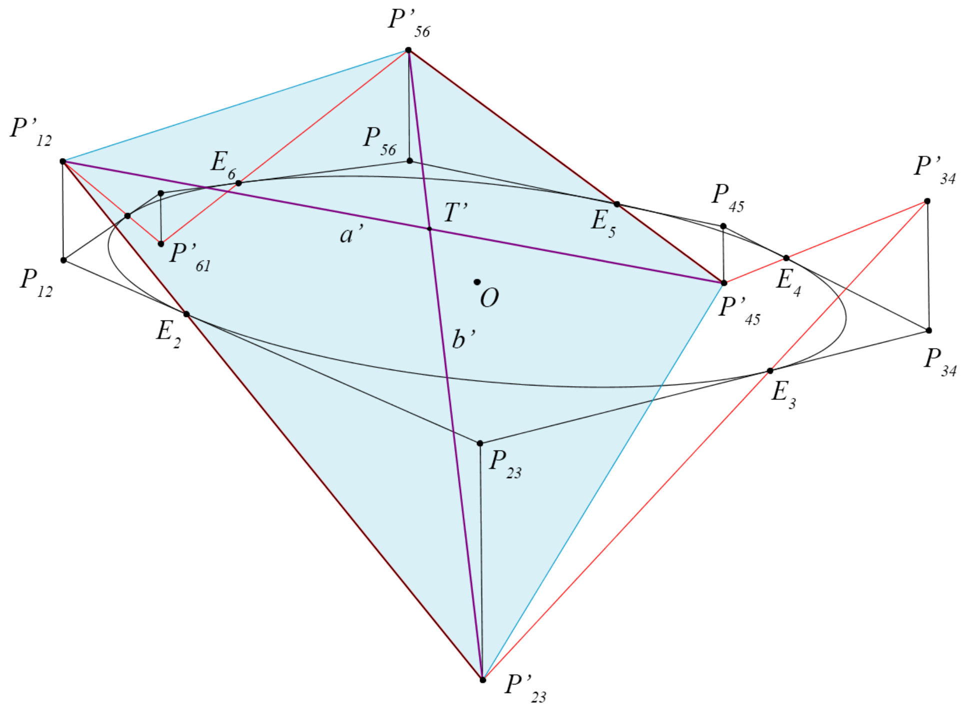
1.2. ábra. Egy kör érintőinek kiforgatása

1.4. Megjegyzés. Ha az a és b egyenesek azonosak, akkor a két egyenes kiforgatása után a metszéspont helyben marad, a két egyenest ugyanazon egyenes körül forgatjuk, csak különböző irányba. Így a metszéspont és az érintési pont egybeesik. Ha pedig a két érintő párhuzamos, akkor sincs probléma, hiszen a projektív síkon dolgozunk. Ezen a síkon az egyenespárok mindig metszik egymást. Ha párhuzamosak, akkor a végtelen távoli ideális pontjukban. (Ábránkon nyíllal jeleztük az irányát.)

Bizonyítás. (1.1. lemma) Vegyük azt a T síkot, ami az S síkot az $AOB\angle$ szög szögfelező egyenesében merőlegesen metszi. Erre a T síkra szimmetrikusan helyezkednek el az a, b érintők, az A, B pontok, a kör és az OA, OB szakaszok. Ebből következik, hogy az a' és a b' egyenesek is egymás tükörképei a T síkra nézve, hiszen a tükrözés a forgatást ellentétes irányú forgatásba viszi. (A forgatás nem őrzi meg a körüljárást, hanem ellentettjére változtatja.) Az a', b' képegyenesek nem egyeznek meg, hiszen vagy különböző pontban döfik az S síkot, vagy ugyanannak az egyenesnek különböző forgatással létrehozott képei. Így a szimmetriából következik, hogy a' és b' egyenesek az S síkot ugyanabban a P' pontban metszik.

Az a' és a b' egyeneseket úgy kaptuk, hogy kiforgattuk a kör megfelelő sugara mentén az a és a b egyeneseket. Ebből következik, hogy az a' egyenes merőleges vetülete az S síkra éppen az a egyenes lesz és ugyanígy a b' egyenes vetülete a b egyenes. Tehát a P' pont (ami az a' és a b' egyenesek metszéspontja) merőleges vetülete az S síkra a vetületi egyenesek metszéspontja. Ha tehát az a és a b

egyenesek különbözőek, akkor az ő P metszéspontjuk lesz a P' pont vetülete. Ha viszont az a és a b egyenesek megegyeznek, akkor az a' és a b' egyenesek is átmennek az $A = B$ ponton, így az ő P' metszéspontjuk (ami egyenlő az $A = B$ ponttal) merőleges vetülete is megegyezik az eredeti $a = b$ egyenes érintési pontjával, $A = B = P$-vel. (lásd 1.2. ábra, $a = b$ eset) $\square$



1.3. ábra. $P'_{12}P'_{45}$ és a $P'_{23}P'_{56}$ is egy síkban vannak, tehát metszik egymást

Bizonyítás. (1.1. tétel) Most, hogy az 1.1. lemmát beláttuk már könnyen bizonyíthatjuk a Brianchon tételt a következő ötlettel. Tekintsük azt a körülírt hatszöget, ami az S síkban lévő O középpontú kört az $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6$ pontokban érinti. A hatszög csúcsait jelöljük az 1.1. ábra jelölésének megfelelően. (P_{12} - P_{61}) Forgassuk el a hatszög oldalait az érintési pontjukhoz vezető sugár körül α hegyesszöggel, mégpedig az OE_1, OE_3, OE_5 sugarak körül O-ból tekintve negatív irányban, az OE_2, OE_4, OE_6 körül O-ból tekintve pozitív irányban. Tehát minden másodikat pozitív, míg a többit negatív irányba. A 1.1. lemma alapján ezek a kiforgatott egyenesek is metszik egymást, rendre a $P'_{12}, P'_{23}, P'_{34}, P'_{45}, P'_{56}, P'_{61}$ pontokban. Ha vesszük ezeket a pontokat, akkor a merőleges vetületük S-re az eredeti hatszög ugyanolyan indexű pontjai. Így a vetített pontok között nincsenek azonosak.

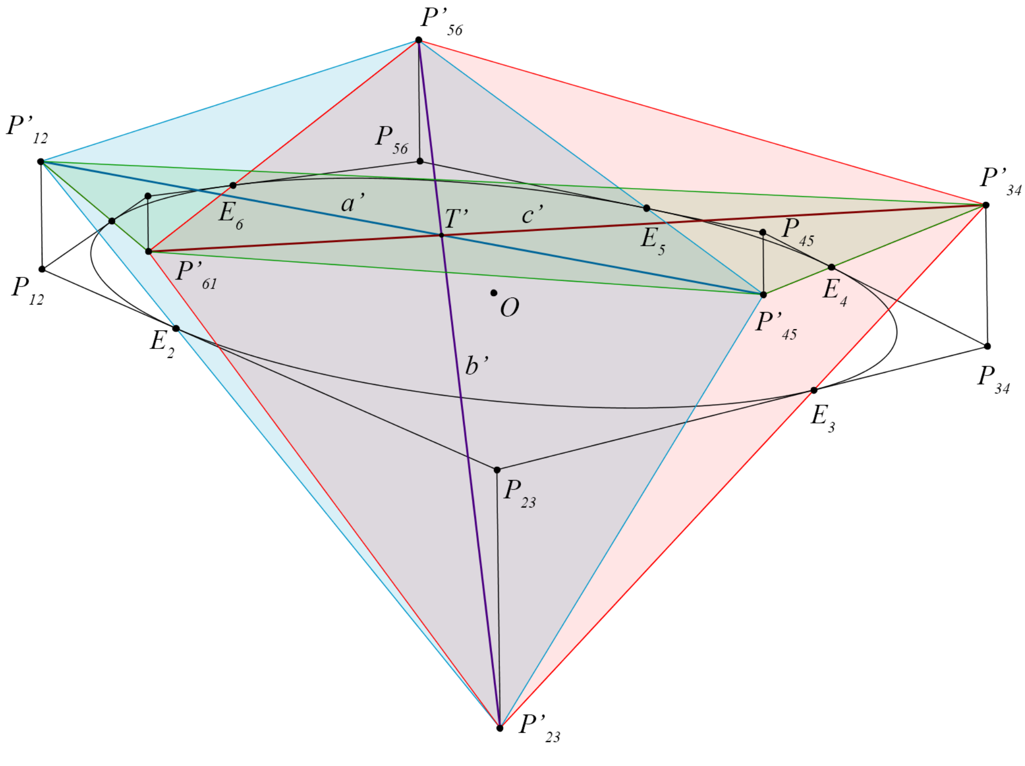
A 1.1. lemmából következik, hogy a $P'_{12}P'_{23}$ és a $P'_{45}P'_{56}$ egyenesek egy síkban vannak. Így a $P'_{12}P'_{45}$ és a $P'_{23}P'_{56}$ egyenesek is egy síkban vannak, tehát metszik egymást. (lásd 1.3. ábra)

Ugyanígy adódik az előző gondolatmenetből, hogy az

$$a' = P'_{12}P'_{45}, b' = P'_{23}P'_{56}, c' = P'_{34}P'_{61}$$

egyenesek közül bármely kettő metszi egymást. Ez azt jelenti, hogy ez a három egyenes vagy egy síkban van (ha a metszéspontjaik különbözőek), vagy egy közös ponton halad át.

Ha az a', b', c' egyenesek egy síkban volnának, akkor ez a sík tartalmazná a $P'_1, P'_2, P'_3, P'_4, P'_5, P'_6$ pontokat és az összekötő egyeneseiken elhelyezkedő $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6$ pontokat is, vagyis azonos lenne az S síkkal. Ez nem lehetséges, hiszen az S sík nem tartalmazza a kiforgatott érintőket, így nem tartalmazhatja egyszerre két különböző pontját egy ilyen egyenesnek. Tehát az a', b', c' egyenesek nincsenek egy síkban. (lásd 1.4. ábra)

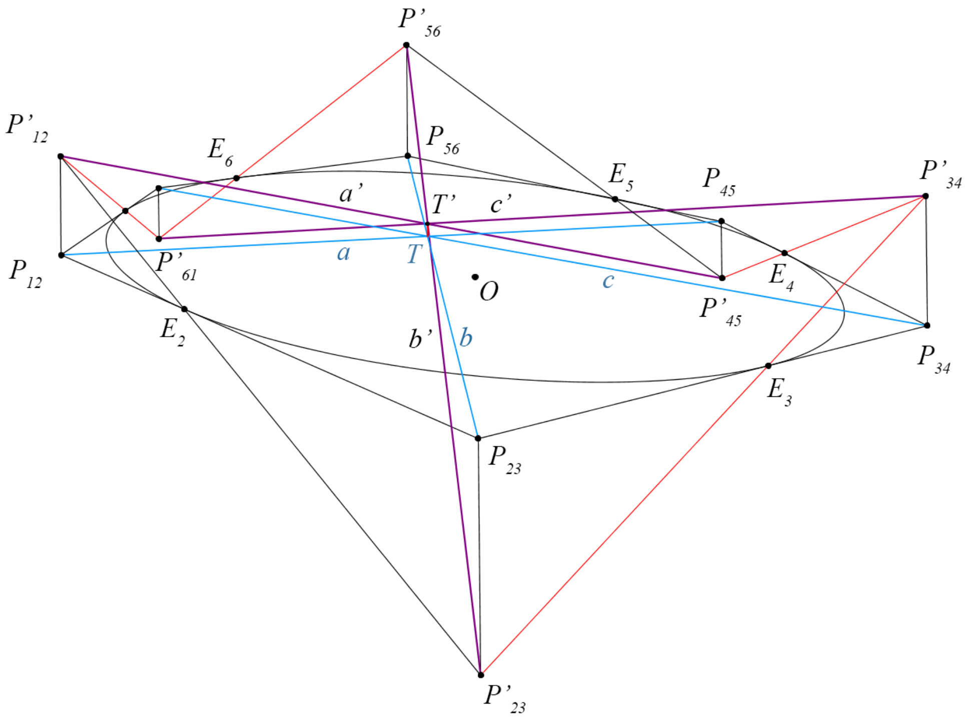


1.4. ábra. Az a', b', c' egyenesek egy közös ponton haladnak át

Az a', b', c' egyenesek ezek szerint egy közös ponton haladnak át. Ezért az S síkra vetett merőleges vetületeik, az

$$a = P_{12}P_{45}, b = P_{23}P_{56}, c = P_{34}P_{61}$$

egyenesek is egy pontban metszik egymást. (lásd 1.5. ábra, kék vonalakra visszavetítve) $\square$



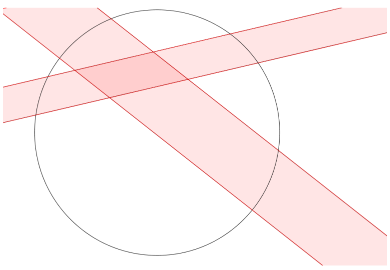
1.5. ábra. Az a, b, c egyenesek (kék színűek) egy pontban (T) metszik egymást

2. fejezet

Kör lefedése sávokkal

2.1. Feladat (Kör lefedése sávokkal). *Adott egy r sugarú körlap. Egy sáv párhuzamos egyenesekkel határolt síkrész, szélessége az egyenesek távolsága. Addig pakolunk sávokat a körlap síkjára, amíg le nem fedjük teljesen a körlapot. (lásd 2.1.ábra) Tegyük fel, hogy sikerült lefedni n darab sávval, melyeknek a szélessége $d_1, d_2, \ldots, d_n$. Bizonyítsuk be, hogy a sávok szélességének összege legalább kétszerese a körlap sugarának.*

$$\sum_{i=1}^{n} d_i \geq 2r$$



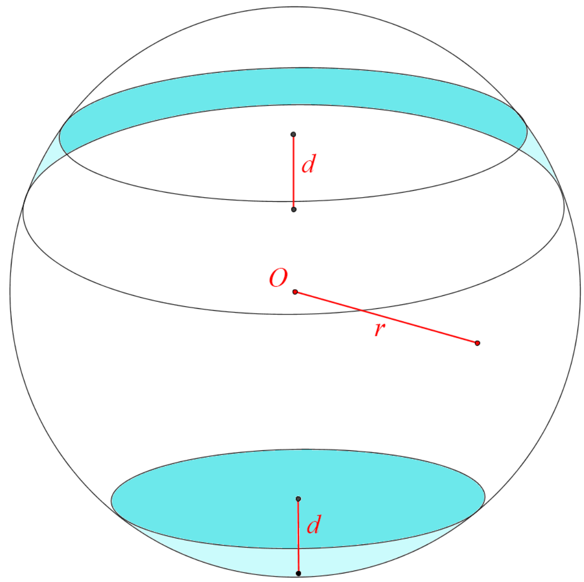
2.1. ábra. Lefedés sávokkal

Sejtés: A kört akkor tudjuk leghatékonyabban lefedni, ha egymás mellé szorosan elhelyezett sávokat teszünk, amik nem fedik egymást.
Ez a feladat egy tipikus alkalmazása a térbe kilépésnek, ugyanis síkban maradva nem igazán tudjuk bebizonyítani az állításunkat. Miért lesz igaz, hogy a leghatékonyabban úgy tudjuk lefedni a kört, ha egymás mellé tesszük a sávokat átfedés nélkül? Azonban térbe kilépve matematikai bizonyítást adhatunk arra, ami első ránézésre is logikusnak látszik, bár nehezen belátható. Ez a bizonyítás ráadásul nagyon egyszerű is.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy sikerült lefedni a kört n darab sávval, melyeknek a szélessége legyen $d_1, d_2, \ldots, d_n$. Állításunk szerint

$$\sum_{i=1}^{n} d_i \geq 2r$$

Ötlet: Azt a nagyon érdekes tényt használjuk fel a bizonyításhoz, mely szerint a gömböv felszíne csak a sugártól és a gömbövet a gömbből kimetsző párhuzamos síkok távolságától függ. (lásd 2.2. ábra) Térbe kilépve, helyezzünk egy gömböt a körünkre úgy, hogy a kör a gömbnek gömbi főköre legyen. Ekkor a sávokat a kör síkjára merőlegesen a gömbre vetítve gömböveket kapunk, melyek szélessége ugyanúgy $d_1, d_2, \ldots, d_n$, mint a kört lefedő sávoknak. Dolgozzunk ezekkel a gömbövekkel a kört lefedő sávok helyett, így a feladatot átfogalmazhatjuk a következőre.



2.2. ábra. Azonos felszínű gömbövek d szélességgel

2.2. Feladat. *Legyen adott egy gömbünk r sugárral. Fedjük le ezt a gömböt gömbövekkel, melyeknek szélessége legyen $d_1, d_2, \ldots, d_n$. Bizonyítsuk be, hogy a gömbövek szélességének összege legalább annyi, mint a gömb sugarának kétszerese.*

$$\sum_{i=1}^{n} d_i \geq 2r$$

Tudjuk, hogy a gömb felszíne $F_g = 4r^2\pi$, a gömböv felszíne pedig $S_0 = 2r\pi d_0$, ahol d_0 a gömbövet metsző párhuzamos síkok távolsága. Világos, hogy pontosan akkor sikerül lefedni a kört, ha sikerült lefedni a gömböt is gömbövekkel. Tehát a gömböt is le tudjuk fedni n darab gömbövvel, ahogy a kört is lefedtük n darab sávval. Viszont ha a gömböt teljesen lefedtük, akkor a gömbövek felszínének az összege legalább akkora, mint a gömb felszíne és pontosan akkora, ha nem volt átfedés semelyik két gömböv között.

$$\sum_{i=1}^{n} S_i \geq F_g$$

A képletbe behelyettesítve a gömb felszínét és a gömböv felszínét az alábbi összefüggést kapjuk.

$$\sum_{i=1}^{n} 2r\pi d_i \geq 4r^2\pi$$

A szumma jel elé kiemelhetőek a konstansok, így

$$2\pi r \sum_{i=1}^{n} d_i \geq 4r^2\pi$$

Ezt a képletet egyszerűsítve (r nagyobb, mint 0, hiszen egy gömb sugara) kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} d_i \geq 2r$$

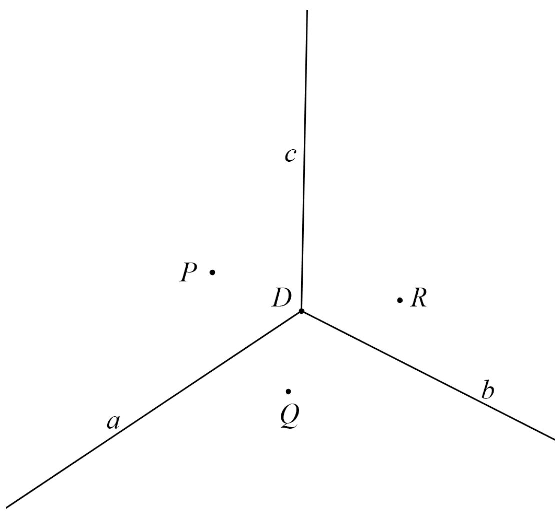
ami az eredeti feladat állítása volt. □

Tehát azt kaptuk, ami első ránézésre sejtésként megfogalmazódott bennünk, miszerint a kört lefedő sávokat úgy tudjuk leghatékonyabban elhelyezni, ha azok nem fedik egymást és szorosan egymás mellé tesszük őket. Erre egy matematikai bizonyítást láthattunk térbe kilépve.

3. fejezet

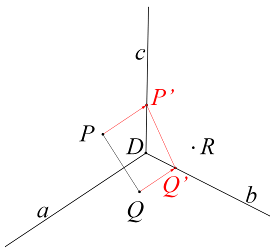
Háromszögszerkesztési feladat

3.1. Feladat. *Legyen adott a síkon három félegyenes* a, b, c, *melyek egy* D *pontból indulnak különböző irányba és a síkot három konvex szögtartományra osztják, valamint legyen adott minden szögtartomány belsejében egy-egy pont* P, Q, R, *melyek nincsenek rajta a félegyeneseken. Szerkesszünk háromszöget, melynek csúcsai a félegyeneseken vannak és oldalai átmennek az adott pontokon!*

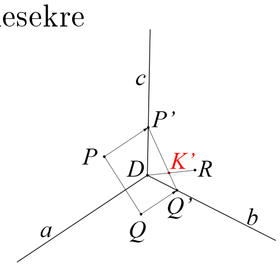


3.1. ábra. Az adott ábra

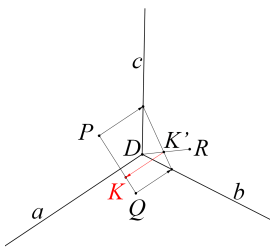
A feladatot nem lehet térben megoldani, hiszen szerkeszteni síkban kell. Azonban adhatunk egy olyan szerkesztést, aminek helyességét térben gondolkodva könnyű belátni.



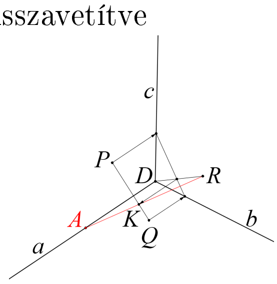
3.2. ábra. PQ szakasz vetítése a b és c félegyenesekre



3.3. ábra. $DR \cap P'Q' = K'$



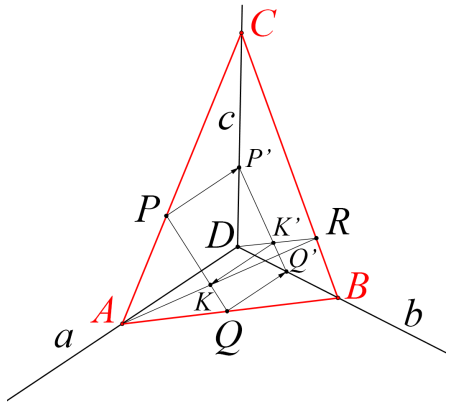
3.4. ábra. A K' pont visszavetítve



3.5. ábra. Az A pont szerkesztése

A szerkesztés menete nagyobb egységekre osztva a következő:

1. Szerkesszünk a-val párhuzamos egyenest P-n keresztül.
2. Vegyük az így kapott egyenes és a b félegyenes metszéspontját. (P')
3. Szerkesszünk ugyanígy a-val párhuzamos egyenest Q-n keresztül.
4. Vegyük az így kapott egyenes és a c félegyenes metszéspontját. (Q')
5. Most kössük össze a D és az R pontokat.
6. Kössük össze az P' és a Q' pontokat. (3.2. ábra)
7. A DR és a $P'Q'$ szakaszok metszéspontját nevezzük K'-nek. (3.3. ábra)
8. Szerkesszünk a-val párhuzamos egyenest K'-n keresztül.
9. Vegyük az így kapott egyenes és a PQ szakasz metszéspontját. (K) (3.4)
10. Kössük össze a R pontot az így kapott K ponttal.
11. Vegyük az így kapott egyenes és az a félegyenes metszéspontját. Ez a pont lesz a szerkesztendő háromszögünk egyik csúcsa, ami a-ra esik. (A) (3.5. ábra)
12. Az AQ egyenes és a b félegyenes metszéspontja lesz a háromszög B pontja.
13. A BR egyenes és a c félegyenes metszéspontjaként kapjuk a szerkesztendő háromszög C pontját.
14. Kössük össze a C pontot P-vel, ezen az egyenesen rajta lesz az A pont. (3.6. ábra)



3.6. ábra. A megszerkesztett háromszög

3.1. Megjegyzés. Előfordulhat, hogy az adott R pont a $P'Q'$ szakasz egyenesének D-vel megegyező oldalára esik, ekkor a háromszög A csúcsa nem lesz rajta az a félegyenesen, csak annak egyenesén. Ha pedig az R pont benne van az a félegyenes egyenesében, akkor a megoldás nem működik. A megoldások létezésére van nem triviális diszkusszió is, ezzel most nem foglalkozunk.

3.1. Állítás. *Tegyük fel, hogy az ABC háromszög a feladatnak megoldása. Ekkor azt állítjuk, hogy ez a szerkesztés jó, vagyis az ily módon megszerkesztett háromszög éppen ez az ABC háromszög.*

Bizonyítás. Tekintsük úgy az ábránkat, mintha egy tetraéderbe néznénk bele alulról. Legyen a szerkesztendő háromszögünk síkja a papír síkja, ezt nevezzük alapsíknak, és legyen D pont a tetraéder csúcsa, ami befelé áll a papírba. Ha most lefordítjuk a szerkesztés menetét erre a modellre, akkor látszik, hogy miért is jó ez a szerkesztés.

1. Vetítsük az ABC alapsíkban lévő PQ szakaszt a tetraéder BCD lapjára a tetraéder AD oldalélével párhuzamosan. ($P'Q'$)

2. A DR és a $P'Q'$ szakaszok a BCD síkban vannak, metszéspontjuk K'.

3. A K' pont rajta van a $P'Q'$ és a DR szakaszokon is.

4. Vetítsük vissza a K' pontot a PQ szakaszra. Ez a pont rajta lesz a DR szakasz alapsíkra visszavetített képén is, ami az AR szakasz. (R a vetítés során helyben marad, mert benne van az ABC síkban is, D pedig A-ba megy)

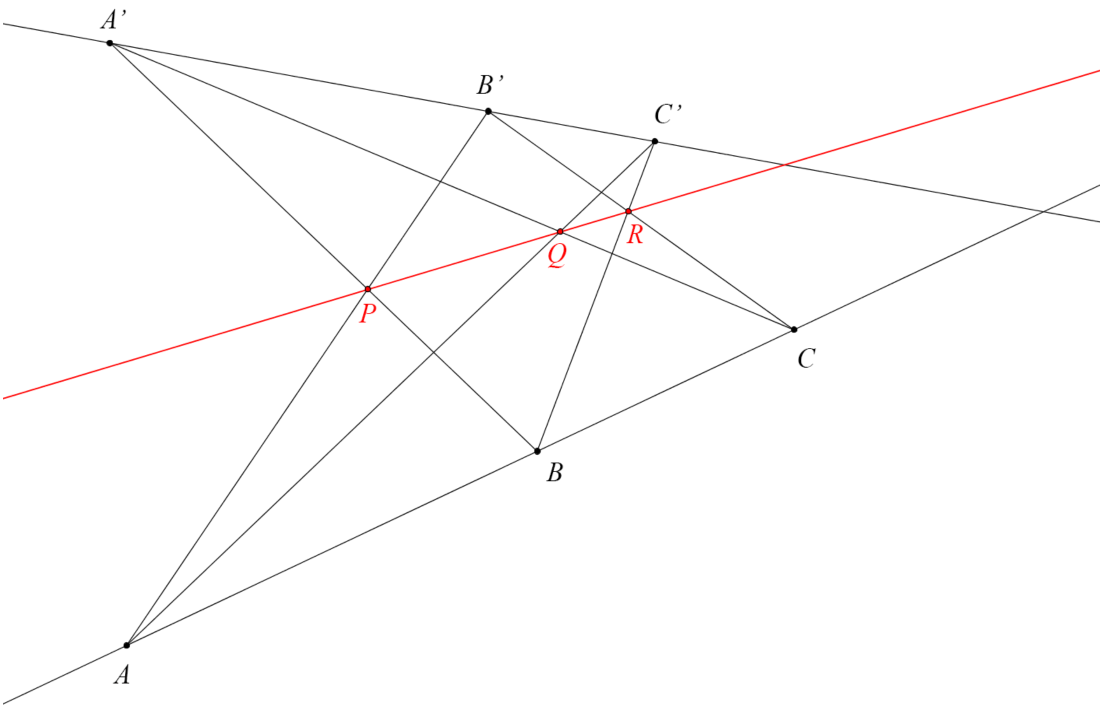
5. Tehát az RK egyenes tényleg az A pontot metszi ki az s félegyenesből.
6. Az A pont ismeretében a B és C pontokat is megfelelően szerkesztettük.

$\square$

4. fejezet

A Papposz tétel duálisa

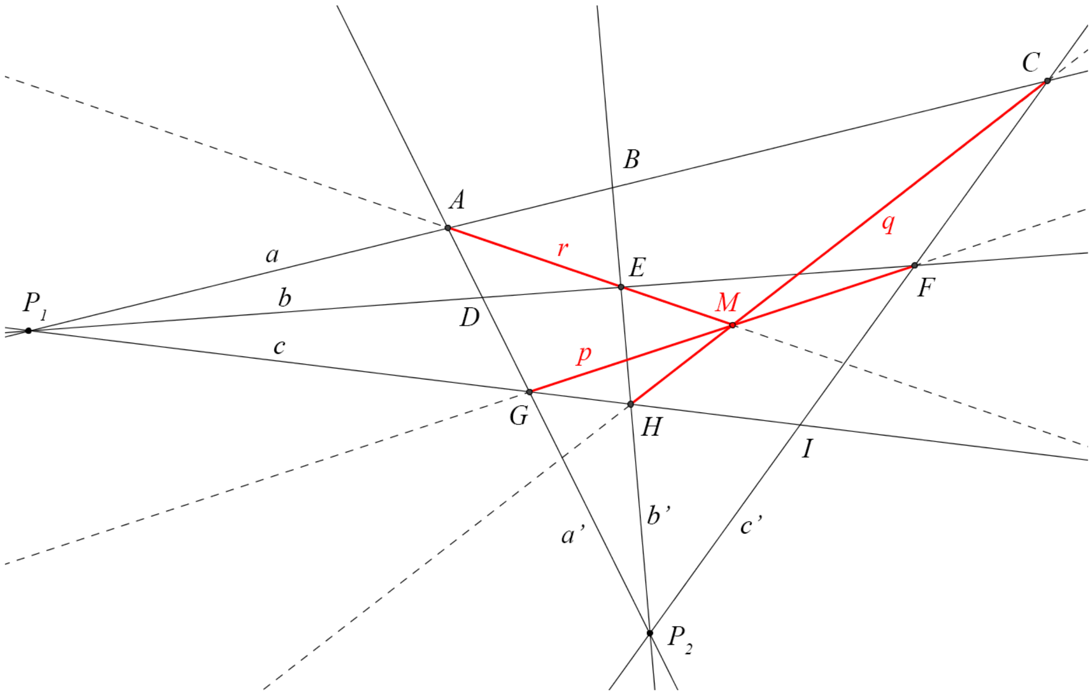
A Papposz tétel a projektív geometria egy fontos tétele. Ennek duálisa szintén érdekes tétel, ami szemléletesen bizonyítható térben.



4.1. ábra. A Papposz tétel

4.1. Tétel (Papposz). *Vegyünk a σ síkon két egyenest, az egyiken az A, B, C, a* *másikon pedig az A', B', C' pontokat. Legyen $P = AB' \cap BA', Q = AC' \cap CA', R = BC' \cap CB'$. Ekkor a P, Q, R pontok egy egyenesre esnek. (lásd 4.1. ábra)*

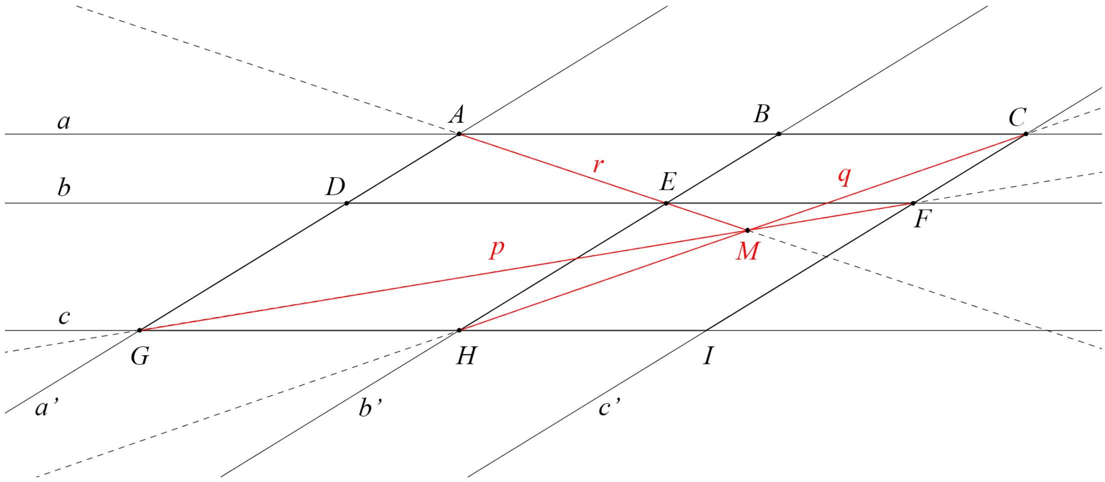
4.2. Tétel (A Papposz tétel duálisa általánosan). *Vegyünk a σ síkon két pontot, az egyiken keresztül az a, b, c, a másikon keresztül az a', b', c' egyeneseket. Ezek metszéspontjait nevezzük el sorban $A, B, C, D, E, F, G, H, I$ pontoknak. (lásd 4.2. ábra) Legyenek $p = FG$, $q = CH$ és $r = AE$ egyenesek. Ekkor a p, q, r egyenesek egy pontban metszik egymást.*



4.2. ábra. A Papposz tétel duálisa

Vegyük ennek a tételnek egy speciális esetét, amikor a P_1, P_2 ideális pontok, vagyis az a, b, c, valamint az a', b', c' egyenesek párhuzamosak.

4.3. Tétel (A Papposz tétel duálisának speciális esete). *Vegyünk a σ projektív síkon két ideális pontot, az egyiken keresztül az a, b, c, a másikon keresztül az a', b', c' egyeneseket. Ezek metszéspontjait nevezzük el sorban $A, B, C, D, E, F, G, H, I$ pontoknak. (lásd 4.3. ábra) Legyenek $p = FG$, $q = CH$ és $r = AE$ egyenesek. Ekkor a p, q, r egyenesek egy pontban metszik egymást.*



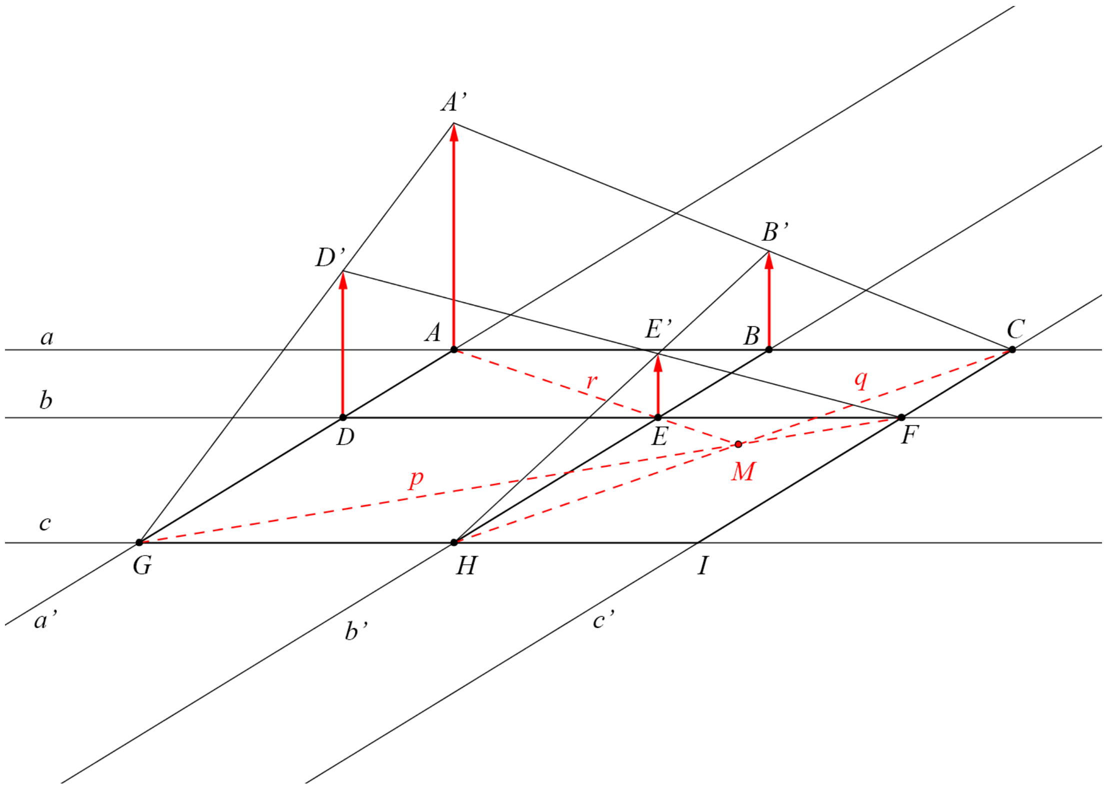
4.3. ábra. A Papposz tétel duálisának speciális esete

Bizonyítás. Emeljük ki az A pontot és a hozzá tartozó egyeneseket, pontokat az alapsíkra merőleges irányba! (lásd 4.4. ábra) A pont képe legyen A'. Így két vetítést kapunk. Legyen v_1 az a párhuzamos vetítés, ami az alapsík pontjait az $S = FGA'$ sík pontjaira vetíti az alapsíkra merőlegesen. Legyen ebben a vetítésben a D pont képe D'. Legyen v_2 az a párhuzamos vetítés, ami az alapsík pontjait a $T = CHA'$ síkra vetíti az alapsíkra merőlegesen. Ebben a vetítésben legyen B pont képe B' lesz.

Az S sík tartalmazza a FD' egyenest, így azt a pontot is, melybe a v_1 vetítés az E pontot viszi. Nevezzük ezt E_1'-nek. A másik síkunk T pedig tartalmazza a HB' egyenest, ezzel együtt az E pont v_2 vetítésben létrejött képét is, nevezzük ezt E_2'-nek. Azt állítjuk, hogy az E_1' és a E_2' pontok egybeesnek, vagyis ez a két vetítés az E pontot ugyanabba az E' pontba viszi. Ehhez az kell, hogy az EE_1' és az EE_2' szakaszok egyenlő hosszúak legyenek. Ha ez igaz, akkor a két sík metszésvonala (m) tartalmazza ezt az E' pontot, vagyis a metszésvonal visszavetített képére igaz, hogy tartalmazza az E pontot, amit a tételben állítottunk. Ezt hasonló háromszögekkel láthatjuk be. (lásd 4.5. ábra)

$GDD'\triangle \sim GAA'\triangle$, hiszen a szögeik egyenlőek. Ebből következik, hogy

$$DD' = \frac{GD}{GA} \cdot AA' \tag{4.1}$$



4.4. ábra. Az A pont kiemelése

Azt is láthatjuk, hogy $CBB'\triangle \sim CAA'\triangle$, szintén a szögeik egyenlősége miatt. Ebből következik, hogy

$$BB' = \frac{CB}{CA} \cdot AA' \tag{4.2}$$

Most írjuk fel az EE_1' és az EE_2' szakaszokat szintén hasonló háromszögekkel. $FEE_1'\triangle \sim FDD'\triangle$, mert a szögeik egyenlőek. Eszerint

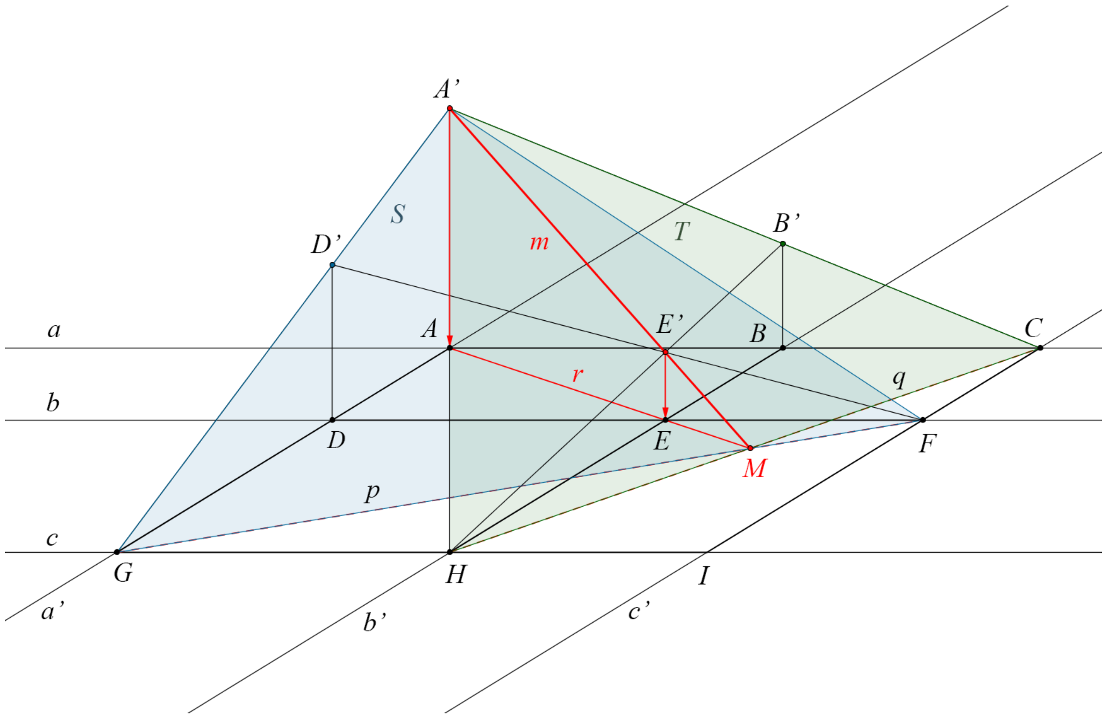
$$EE_1' = \frac{FE}{FD} \cdot DD' \tag{4.3}$$

$HEE_2'\triangle \sim HBB'\triangle$, mert a szögeik egyenlőek. Eszerint

$$EE_2' = \frac{HE}{HB} \cdot BB' \tag{4.4}$$

A 4.3. egyenletből a 4.1. egyenlet behelyettesítése után kapjuk, hogy

$$EE_1' = \frac{FE}{FD} \cdot \frac{GD}{GA} \cdot AA'$$



4.5. ábra. Az m metszésvonal visszavetített képe éppen az r egyenes

A 4.4. egyenletből a 4.2. egyenlet behelyettesítése után kapjuk, hogy

$$EE_2' = \frac{HE}{HB} \cdot \frac{CB}{CA} \cdot AA'$$

Az a, b, c és a', b', c' egyenesek párhuzamossága miatt az eredeti négyszögünket paralelogrammák alkotják, ezért $FE = CB, FD = CA, GD = HE, GA = HB$. Emiatt

$$EE_1' = \frac{FE}{FD} \cdot \frac{GD}{GA} \cdot AA' = \frac{HE}{HB} \cdot \frac{CB}{CA} \cdot AA' = EE_2'$$

Az E pont és az E_1' távolsága, valamint az E pont és az E_2' távolsága tehát megegyezik, így a két pont tényleg ugyanaz, $E_1' = E_2' = E'$. Az m metszésvonal ezek szerint átmegy ezen a E' ponton, így az m-et visszavetítve az alapsíkra (bármelyik vetítés ellentétével, hiszen m mindkét vetítésben r képe, ahogy az előbb beláttuk) azt kapjuk, hogy a képe az r egyenes. Az r egyenes tehát átmegy a p és q egyenesek metszéspontján M-en, hiszen M az m egyenes döféspontja az alapsíkkal, emiatt visszavetített képe önmaga. $\square$

4.1. Megjegyzés. A Papposz tétel duálisának ebből a speciális esetéből könnyen áttérhetünk az általános esetre, hiszen egy alkalmas projektív transzformációval (például egy középpontos vetítéssel) a P_1, P_2 pontokat átvihetjük ideális pontokba, így elég csak a speciális esetet bizonyítani. Ekkor a Papposz tétel duálisát is beláttuk általánosan, amiből a dualitás elve miatt már a Papposz tétel is következik.

5. fejezet

Két kör hatványvonala

5.1. Definíció (Pont körre vonatkozó hatványa). Egy a kör síkjában lévő pont körre vonatkozó hatványán azt a mennyiséget értjük, melyet úgy kapunk, hogy a pont és a kör középpontjának négyzeten vett távolságából kivonjuk a kör sugarának négyzetét.

$$h_k = PK^2 - r^2$$

ahol PK a pont és a kör középpontjának távolságát, r pedig a kör sugarát jelöli.

5.2. Definíció (Pont gömbre vonatkozó hatványa). Egy pont gömbre vonatkozó hatványán azt a mennyiséget értjük, melyet úgy kapunk, hogy a pont és a gömb középpontjának négyzeten vett távolságából kivonjuk a gömb sugarának négyzetét.

$$h_g = PK^2 - r^2$$

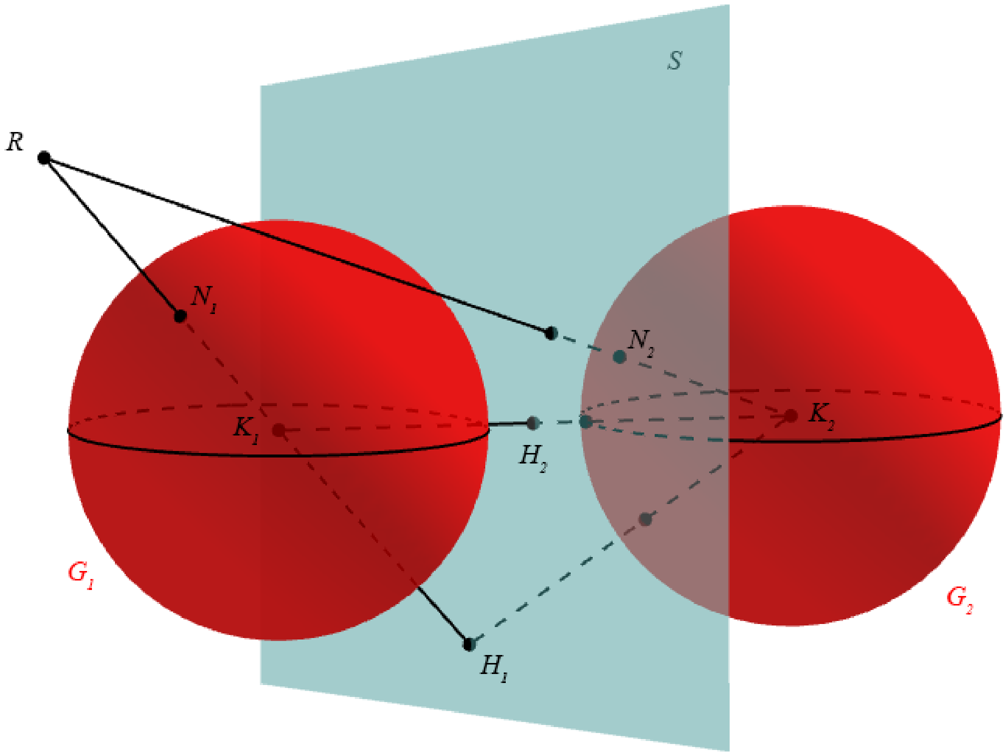
ahol PK a pont és a gömb középpontjának távolságát, r pedig a gömb sugarát jelöli.

5.1. Tétel. *A síkon legyen adva két különböző kör, melyek nem koncentrikusak. Ekkor azon pontok halmaza a síkon, melyek hatványa a két körre vonatkozóan egyenlő egy egyenes.*

A tétel bizonyításához először két segédtételt kell belátnunk.

5.1. Lemma. *Legyen adott két különböző nem koncentrikus gömb a térben, melyek azonos sugarúak. Ekkor azon pontok halmaza a térben, melyeknek a két gömbre vonatkozó hatványa egyenlő egy síkon vannak. (lásd 5.1. ábra)*

Bizonyítás. (5.1. lemma) A lemma bizonyítása nagyon egyszerű, hiszen a szimmetriából adódik minden.



5.1. ábra. Két egyenlő sugarú gömb hatványsíkja, R nem eleme S-nek

Legyen a két gömb szimmetriasíkja S (metsző gömbök esetén a metszéskör síkja). Vegyünk egy R pontot, mely különbözik a két gömb középpontjától (K_1-től és K_2-től) és nincs benne az S síkban. Ez a pont közelebb lesz az egyik gömb középpontjához, mint a másikhoz. (a szimmetrikus sík tartalmazza azokat a pontokat, melyek egyenlő távolságra vannak a középpontoktól) Tegyük fel, hogy a K_1 ponthoz van közelebb. Ekkor a $RK_1 < RK_2$ miatt a két hatvány sem egyezhet meg

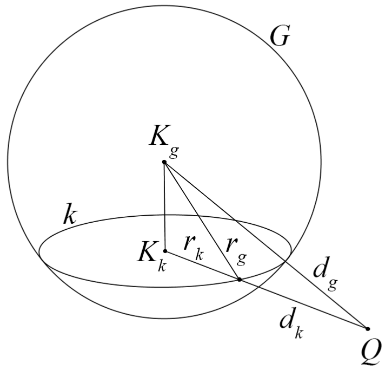
$$h_{g_1} = RK_1^2 - r^2 < RK_2^2 - r^2 = h_{g_2}$$

$$h_{g_1} \neq h_{g_2}$$

így ez a pont nem lehet benne a két gömb hatványsíkjában. □

5.2. Lemma. *Ha egy σ sík metsz egy K_g középpontú r_g sugarú G gömböt (a metszésvonal egy K_k középpontú r_k sugarú k kör), akkor a σ bármely pontjának ugyanakkora a hatványa a k metszéskörre vonatkozóan, mint a G gömbre.*

Bizonyítás. (5.2. lemma) Ez az állítás a hatvány definíciójából és a Pitagorasz tételből következik. Legyen h_k egy σ-beli Q pont hatványa a k körre vonatkozóan



5.2. ábra. Q hatványa ugyanannyi a körre és a gömbre vonatkozóan

és h_g ugyanezen pont G-re vonatkozó hatványa. Legyen $d_k = QK_k$ és $d_g = QK_g$ távolságok. (lásd 5.2. ábra) Ekkor definíció szerint

$$h_k = d_k^2 - r_k^2$$

A Pitagorasz tétel kétszeri alkalmazása miatt

$$r_k^2 = r_g^2 - (d_g^2 - d_k^2) = r_g^2 - d_g^2 + d_k^2$$

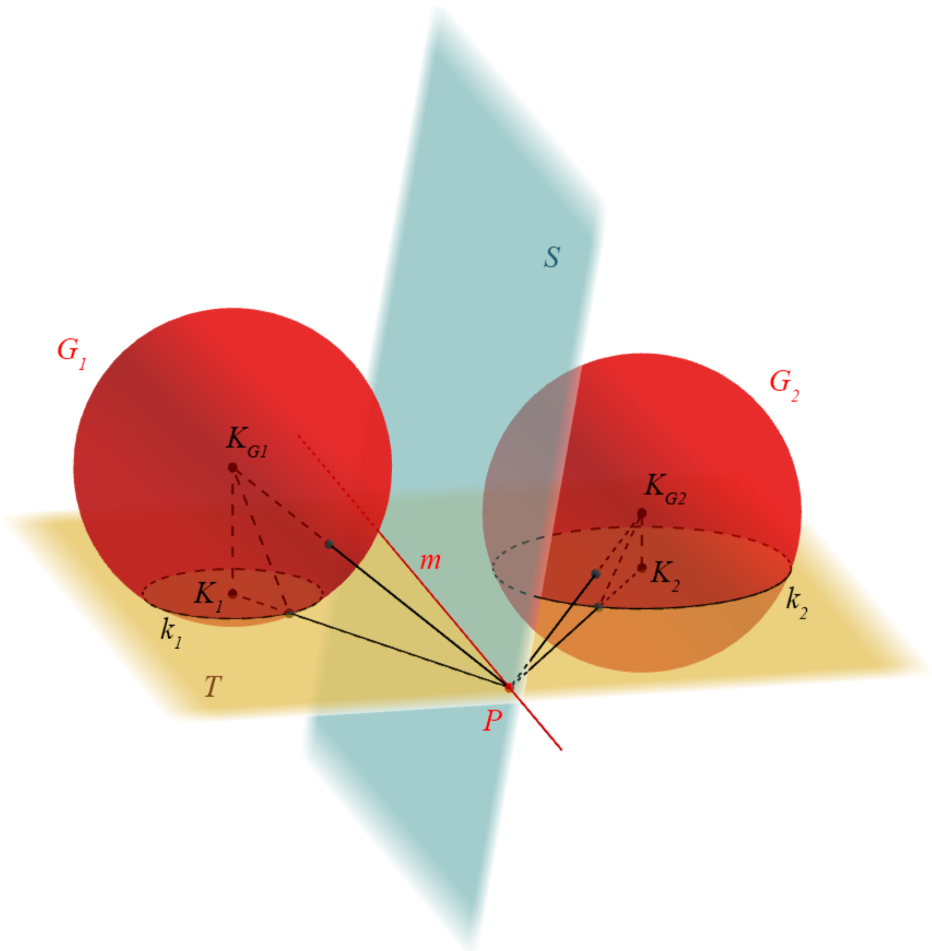
Ebből behelyettesítéssel következik, hogy

$$h_k = d_k^2 - r_g^2 + d_g^2 - d_k^2 = d_g^2 - r_g^2 = h_g$$

ami épp a gömbre vonatkozó hatványa a Q pontnak. Mivel Q megválasztásánál csak azt vettük figyelembe, hogy benne legyen a metsző síkban, ezért a sík minden pontjára igaz lesz az állítás. $\square$

Térjünk rá ezek után a tételünk bizonyítására. Ha térbe lépünk ki, akkor gyönyörűen látszik, hogy a keresett alakzat egy egyenes lesz.

Bizonyítás. (5.1. tétel) Legyen az alapsíkunk T. Helyezzünk a két körre a nagyobbik kör sugaránál nagyobb egyenlő sugarú gömböket. (mintha golyót gurítanánk a golyó sugaránál kisebb sugarú lyukra) A k_1 körre helyezett gömb legyen G_1, a k_2 körre helyezett pedig legyen G_2. A két gömbre vonatkozóan egyenlő hatványú pontok egy síkon vannak, ami a két gömb szimmetriasíkja. (lásd 5.1. lemma) Ezt nevezzük S-nek. Ekkor T és S metszik egymást egy m egyenesben. (lásd 5.3. ábra)



5.3. ábra. Két kör hatványvonala a két sík metszeteként

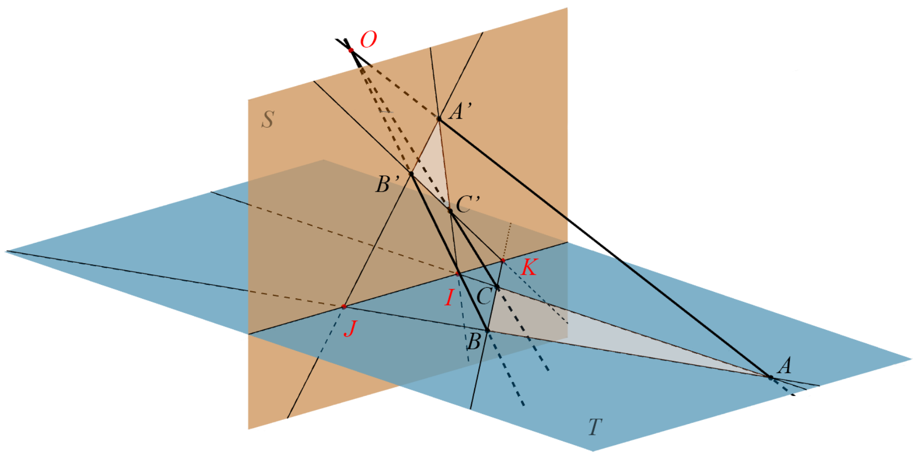
A 5.2. lemma alapján a T sík pontjainak hatványa a körökre vonatkozóan ugyanakkora, mint a rajtuk lévő gömbökre vonatkozóan. Tehát a két körre vonatkozóan akkor lesz egyenlő egy pont hatványa, ha a két gömbre vonatkozóan is. Ez akkor lehetséges, ha a pont benne van az S síkban is, vagyis rajta van a két sík metszésvonalán, ami az m egyenes. □

6. fejezet

A Desargues tétel

6.1. Megjegyzés. A következő tétel szintén a projektív geometria területén igaz teljesen. A párhuzamosságot emiatt itt sem tekintjük külön esetnek.

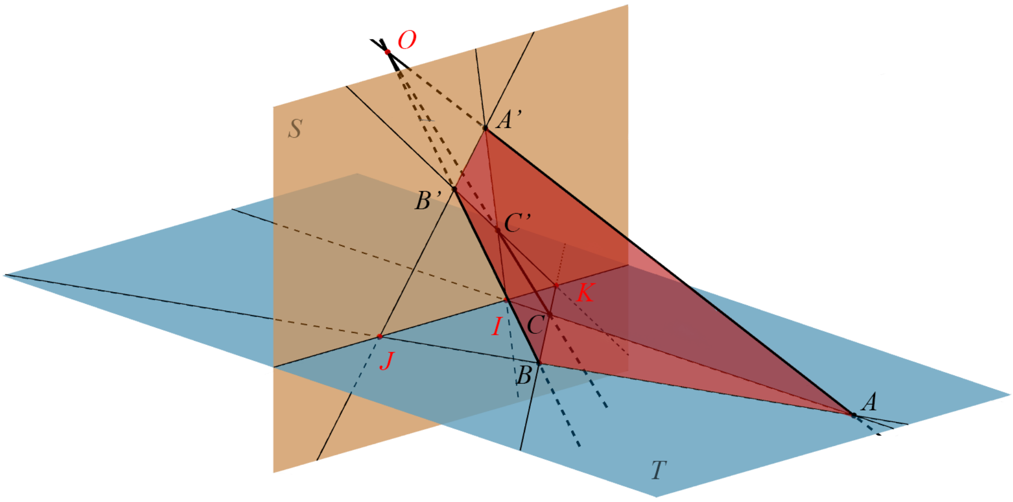
6.1. Definíció. Legyenek ABC és $A'B'C'$ háromszögek a síkon. A két háromszöget centrálisan perspektívnek nevezzük, ha az AA', BB', CC' egyenesek egy közös csúcsban metszik egymást. A két háromszöget tengelyesen perspektívnek nevezzük, ha $AB \cap A'B'$, $BC \cap B'C'$ és a $CA \cap C'A'$ metszéspontok kollineárisak.



6.1. ábra. A Desargues tétel térben

6.1. Tétel (Desargues tétel). *Legyenek ABC és $A'B'C'$ háromszögek a síkon. A két háromszög centrálisan perspektív akkor és csak akkor, ha tengelyesen is perspektív.*

A tétel igaz lesz a térben is, így a térbeli esetre a síkbelit visszavezetve egy könnyed, egyszerű bizonyítást kapunk.



6.2. ábra. Az AB és az $A'B'$ egyenes egy síkban vannak

Bizonyítás. (6.1. tétel) Először lássuk be, hogy ha a térben centrálisan perspektívek a háromszögek, akkor tengelyesen is. Tegyük föl, hogy a háromszögek különböző síkokban vannak.

Vegyük azt a három síkot, melyeket az AB, BC, CA egyenesek egyenként az O ponttal együtt határoznak meg. Messük el a síkok által alkotott konfigurációt a két adott háromszög síkjával, melyeket nevezzünk T-nek és S-nek. Ezek metszik egymást egy t egyenesben. Látszik, hogy az AB és a $A'B'$ egyenesek egy síkba esnek, hiszen az OAB sík tartalmazza A'-t és B'-t is. Ebből következik, hogy metszik egymást. Ugyanakkor az AB egyenes benne van a T síkban, az $A'B'$ egyenes pedig benne van az S síkban, melyek a t egyenesen metszik egymást. Ebből az következik, hogy az AB és az $A'B'$ egyenesek a t egyenesen metszik egymást. Ugyanígy látszik az is, hogy az AC és az $A'C'$ egyenesek, valamint a BC és a $B'C'$ egyenesek is a t egyenesen metszik egymást.

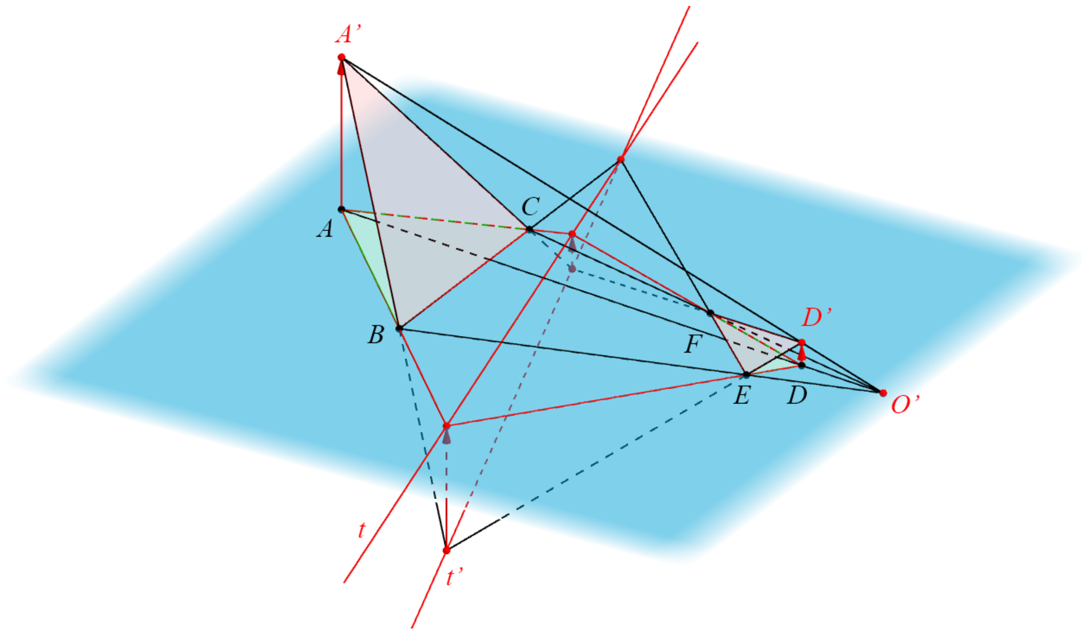
Most, hogy láttuk, hogy ha a háromszögek centrálisan persepektívek, akkor tengelyesen is, lássuk be fordítva is. Ha két háromszög a térben tengelyesen persepektív, akkor centrálisan is. Tegyük föl, hogy a háromszögek különböző síkokban vannak.

Ez talán még könnyebben látszik, mint a fordított irány. Vegyük például az AB és az $A'B'$ egyeneseket. Ezek a tengelyes perspektivitás miatt metszik egymást, tehát meghatároznak egy síkot. Ugyanígy a BC és $B'C'$ egyenesek és a

CA, $C'A'$ egyenesek is. Ez három általános helyzetű sík, amelyek páronként az AA', BB', CC' egyenesekben metszik egymást. A három sík egy közös pontban metszi egymást, amin keresztül mennek a páronkénti metszésvonalaik is, vagyis AA', BB', CC'. Ez a pont lesz a centrális perspektivitás centruma.

Most, hogy térben beláttuk a tételt, meg kell nézni, hogy egy olyan határhelyzetben, mint az egy síkban lévő háromszögek is teljesül-e?

A Papposz tétel duálisának bizonyításához hasonlóan emeljünk ki egy pontot, a hozzá tartozó vonalakkal együtt.

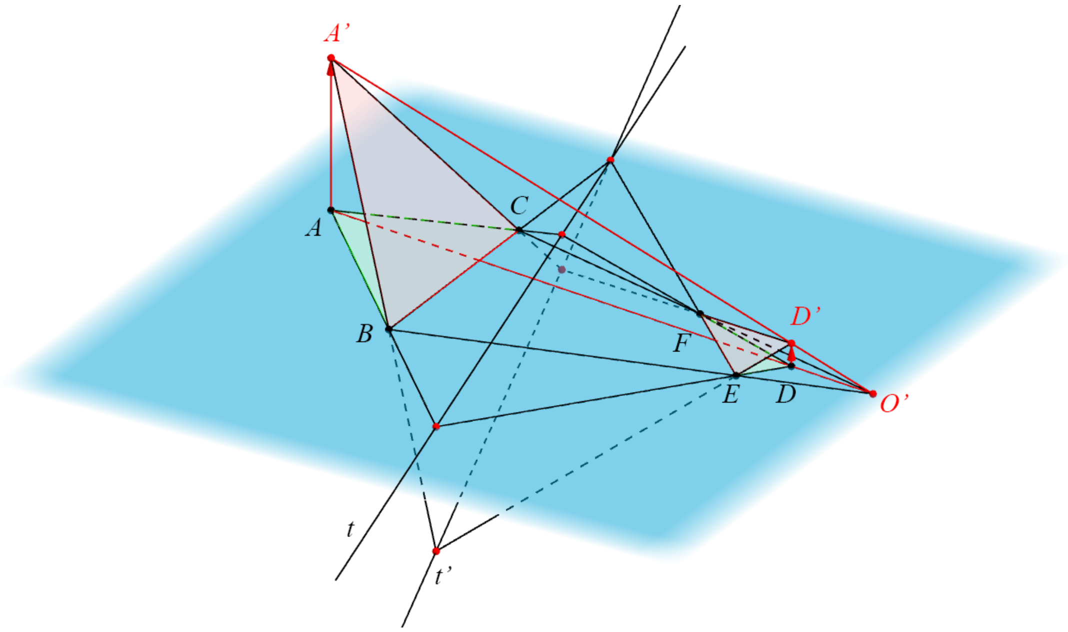


6.3. ábra. Ha centrálisan perspektívek, akkor tengelyesen is

Legyen a síkban két háromszögünk. Az egyik legyen ABC, a másik DEF. Tegyük fel, hogy ezek centrálisan perspektívek az AD, BE, CF egyenesekkel és O centrummal. Emeljük ki az A pontot egy A' pontba. Legyen v egy vetítés, mely az A pontot az A' pontba viszi, az AO egyenes pontjait az $A'O$ egyenesre vetíti a háromszögek síkjára merőlegesen. (lásd 6.3. ábra) Ekkor van két nem egy síkban lévő háromszögünk $A'BC$ és $D'EF$, melyek továbbra is centrálisan perspektívek maradtak ugyanazon O centrummal. Ezekre teljesül a Desargues tétel térbeli esete. Így van egy t' tengely, amire igaz, hogy az $A'B$, $D'E$ a BC,EF és a CA',FD' oldalegyenes párok ezen az egyenesen metszik egymást.

Most tekintsük a térbeli ábra merőleges vetületét az eredeti háromszögek síkjára. Az A' pont vetülete az A pont, így az $A'D'$, $A'B$, CA' egyenesek képe rendre az AD, AB, CA egyenesek. Vegyük a t' egyenest. Ezen az egyenesen metszik egymást az $A'B$, $D'E$ a BC, EF és a CA', FD' oldalegyenes párok. Ha tehát az $A'B$,

$D'E$, t' egyenesek metszik egymást a térben, akkor a merőleges vetületeik is metszik egymást a síkon. Ugyanígy belátható, hogy BC, EF, t', valamint CA',FD', t' vetületei is metszik egymást. Tehát a vetületi háromszögek oldalegyenesei páronként a t' egyenes merőleges vetületén metszik egymást, ami egy egyenes, nevezzük t-nek.



6.4. ábra. Ha tengelyesen perspektívek, akkor centrálisan is

Most vegyük azt az esetet, amikor a tengelyes perspektivitást tesszük föl. Legyen ABC és DEF tengelyesen perspektív a síkon t tengellyel. Vagyis az AB, DE, a BC, EF és a CA, FD egyenesek messék egymást egy t egyenesen. Most is emeljük ki az A pontot, csak most a v vetítés nem a centrumba futó egyeneseket vetíti, hanem a tengelyen metsző egyeneseket, melyek átmennek A-n. (lásd 6.4. ábra) Tehát t' az az egyenes, amiben a t-ben az alapsíkra merőleges sík az $A'BC$ síkot metszi. $A'B$ metszi t'-t, ezt a metszéspontot összekötjük E-vel, $A'C$ metszi a t' egyenest, ezt a metszéspontot pedig kössük össze F-fel. Ennek a két egyenesnek a metszéspontja adja meg a D' pontot, amivel megkapjuk az $A'BC$ háromszöghöz tengelyesen perspektív $D'EF$ háromszöget, ami nincs vele egy síkban. Ebből következik, hogy a két kapott háromszög centrálisan is perspektív az O ponttal. Az $A'D'$, BE, CF egyenesek a térben metszik egymást, így merőleges vetületeik is metszik egymást a síkon. Most tekintsük az $A'O$ egyenest, ami tartalmazza a D' pontot is. Ennek az egyenesnek a merőleges vetülete az alapsíkra éppen az AO egyenes, ami tartalmazza a vetületi pontokat is (A-t és D-t). A BE és a CF egyeneseknek pedig a merőleges vetületük önmaguk, így ezek továbbra is metszik

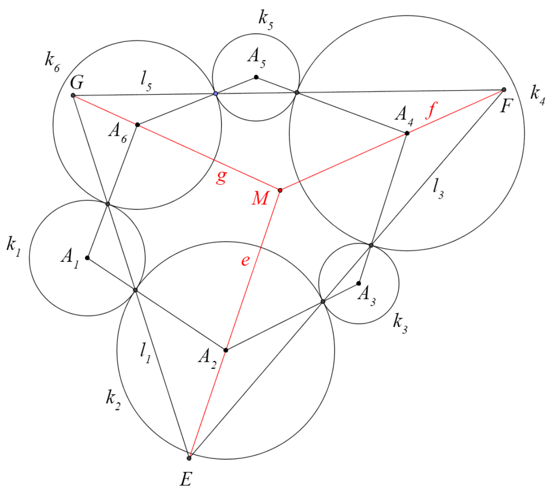
egymást az O pontban. Tehát a két háromszög centrálisan is perspektív.
$\square$

6.2. Megjegyzés. A bizonyítás vége, ahol a tengelyes perspektivitásból vezetjük le a centrális perspektivitást valójában fölösleges, hiszen a Desargues tétel két iránya egymás duálisa, így ha az egyik irány igaz, akkor a másik irány is igaz lesz a dualitás elve miatt.

7. fejezet

Hat kör érintkezése

7.1. Feladat. *Legyen adott az $A_1, A_2 \ldots, A_6$ hatszög. Az A_i középpontú k_i körök $(1 \leq i \leq 6)$ úgy helyezkednek el, hogy k_1 kívülről érinti k_2-t és k_6-ot, k_2 kívülről érinti k_1-et és k_3-at, általában k_i kívülről érinti k_{i-1}-et és k_{i+1}-et. A k_1-en található két érintési pontot összekötő egyenesnek és a k_3-on található érintési pontokat összekötő egyenesnek a metszéspontját összekötjük A_2-vel, ez lesz az e egyenes. Hasonlóan, a k_3-on, illetve a k_5-ön található két érintési pontot összekötő egyenesek metszéspontját és az A_4-et összekötve kapjuk az f egyenest. Végül a k_5-ön és a k_1-en található érintési pontokat összekötő egyenesek metszéspontját és az A_6-ot összekötő egyenes legyen g. Mutassuk meg, hogy az e, f, g egyenesek egy ponton mennek át. (lásd 7.1. ábra)*

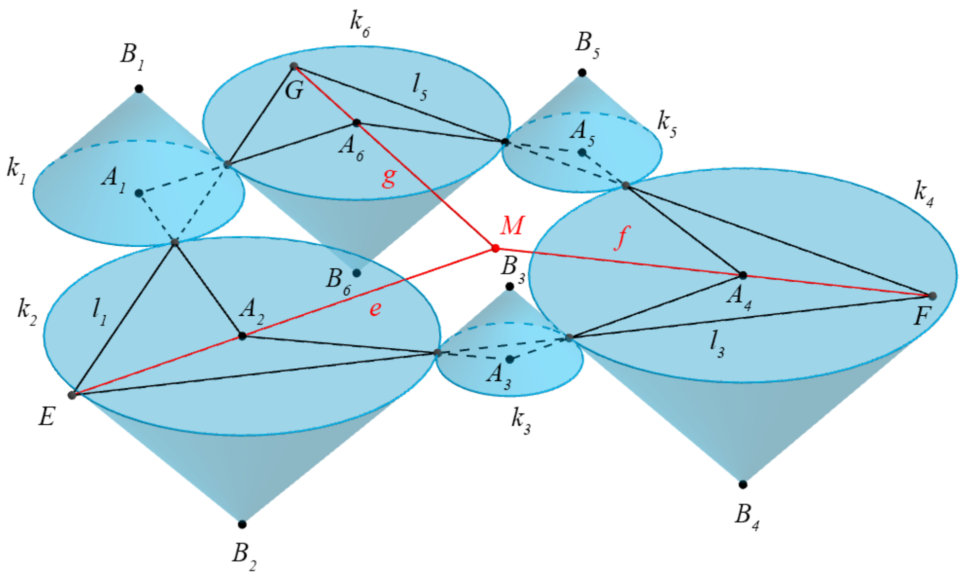


7.1. ábra. A feladat szerint az e, f, g egyenesek egy pontban metszik egymást

7.1. Megjegyzés. A feladatot 2008-ban az OKTV döntőjében, a III. kategóriában tűzték ki. Az eredeti szövegben kikötötték, hogy a hatszög konvex és minden szöge tompaszög (lásd [2] füzet). Erre azért volt szükség, hogy mindenképpen létezzen a metszéspont. Azonban ha megengedjük ideális pontok létezését, akkor ezeket fölösleges kikötni. Innentől az ideális pontokat is metszéspontoknak tekintjük.

Bizonyítás. A 7.1. ábra a feladat szövege alapján készült, a jelölést kiegészítjük azzal, hogy a k_1 körön lévő érintési pontokat összekötő egyenes legyen l_1, a k_3-on lévő érintési pontokat összekötő egyenes legyen l_3 és a k_5-ön lévő érintési pontokat összekötő egyenes pedig legyen l_5. Legyen $E = l_1 \cap l_3$, $F = l_3 \cap l_5$ és $G = l_5 \cap l_1$.

Most helyezzünk a körökre egy-egy azonos nyílásszögű kúpot a következő módon. A k_1, k_3, k_5 körökre helyezett kúp csúcsa legyen az alapsík által meghatározott egyik féltérben, míg a k_2, k_4, k_6 a másik féltérben. Az $A_1, \ldots A_6$ pontok fölé, vagy alá emelt kúpok csúcsai legyenek rendre $B_1, \ldots, B_6$. (lásd 7.2. ábra)

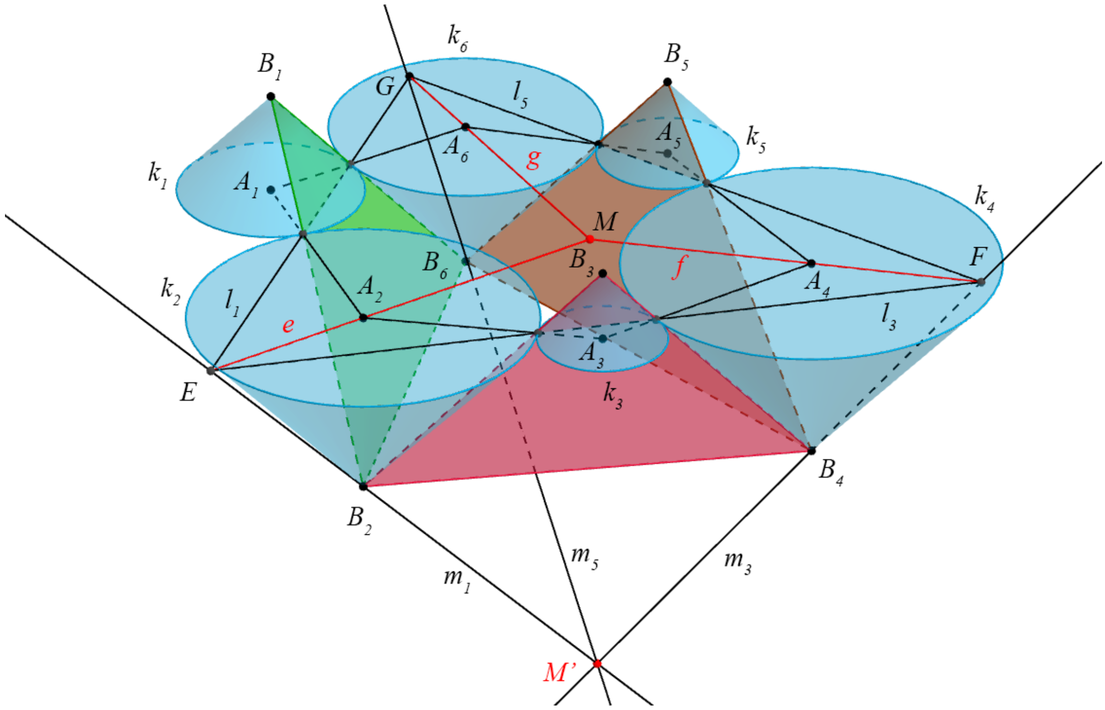


7.2. ábra. A körökre egyenlő nyílásszögű kúpokat helyezünk

Most vegyük az $S_1 = B_6B_1B_2$ síkot. Ez a sík az alapsíkkal éppen az l_1 egyenesben találkozik, mivel a kúpok azonos nyílásszögűek. Ugyanígy láthatjuk, hogy az $S_3 = B_2B_3B_4$ sík az l_3 egyenesben, az $S_5 = B_4B_5B_6$ sík pedig az l_5 egyenesben metszi az alapsíkot.

Ez a három sík (S_1, S_3, S_5) egy közös metszéspontban találkozik, nevezzük ezt M'-nek. Ezen a metszésponton áthaladnak a páronkénti metszésvonalaik is.

S_1 és S_3 metszésvonalai az alapsíkkal l_1 és l_3, tehát S_1 és S_3 metszésvonalára illeszkedik E, valamint a közös pontjuk B_2. Tehát a metszésvonal a $m_1 = EB_2$ egyenes. Ugyanígy gondolkodva az S_3 és az S_5 síkok metszésvonala az $m_3 = FB_4$ egyenes, az S_5 és az S_1 síkok metszésvonala pedig a $m_5 = GB_6$ egyenes.



7.3. ábra. A $B_6B_1B_2$, a $B_2B_3B_4$ és a $B_4B_5B_6$ síkok egy közös pontban metszik egymást

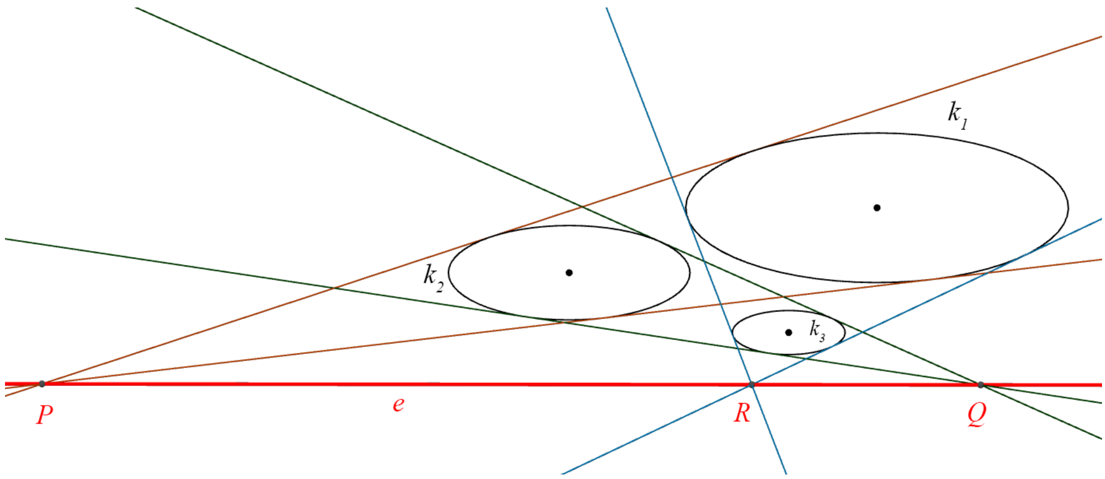
Az m_1, m_3, m_5 egyenesek merőleges vetülete az alapsíkra az e, f, g egyenesek, hiszen az őket tartalmazó alapsíkra merőleges síkok tartalmazzák az m_1, m_3, m_5 egyeneseket is. Az S_1, S_3, S_5 síkok metszésvonalai egy közös M' pontban metszik egymást, tehát a merőleges vetületeik is egy pontban metszik egymást, vagyis az e, f, g egyenesek egy pontban metszik egymást, ahogy a feladat állította. $\square$

8. fejezet

Három kör közös érintői

Egy érdekes tény, hogy három kör, melyek páronként egymás külsejében vannak (vagyis létezik közös érintőjük) páronkénti közös külső érintőinek metszéspontjai egy egyenesen vannak. Vajon ez akkor is igaz, ha csak bizonyos érintők vannak kívül, egyesek pedig belül?

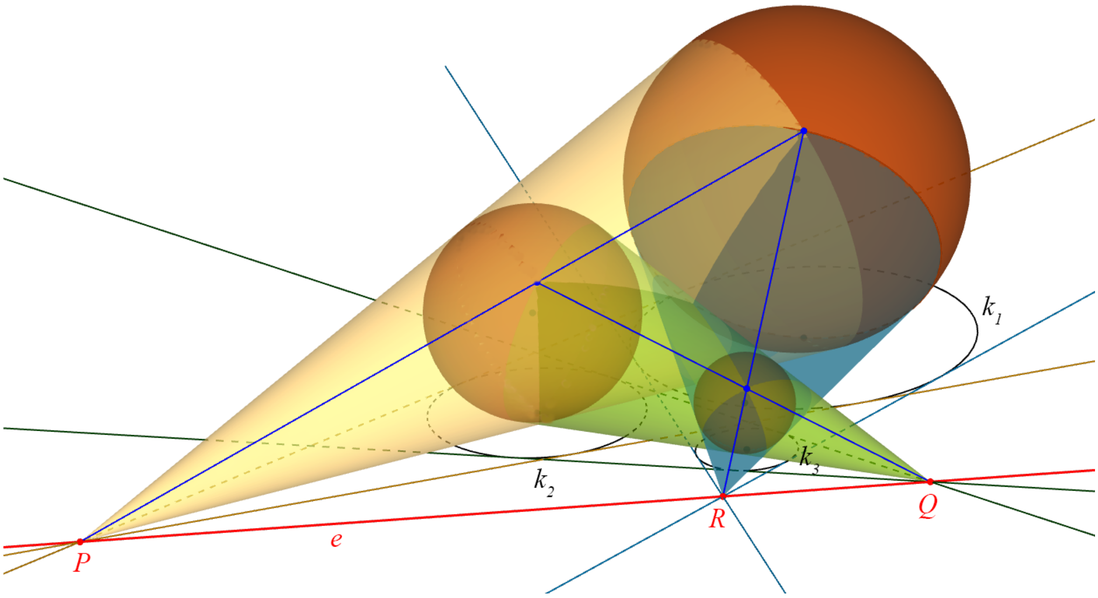
8.1. Tétel (Monge tétel). *A síkban bármely három egymás külsejében lévő körre igaz, hogy ha vesszük páronként a közös külső érintőiket, akkor ezek metszéspontjai egy egyenesre esnek. (lásd 8.1. ábra)*



8.1. ábra. A közös külső érintők metszéspontjai kollineárisak

8.1. Megjegyzés. Ha a körök között vannak ugyanakkora sugarúak, akkor ezek érintői párhuzamosak, tehát ideális pontokban metszik egymást. A párhuzamos egyeneseket innentől nem vesszük külön esetnek.

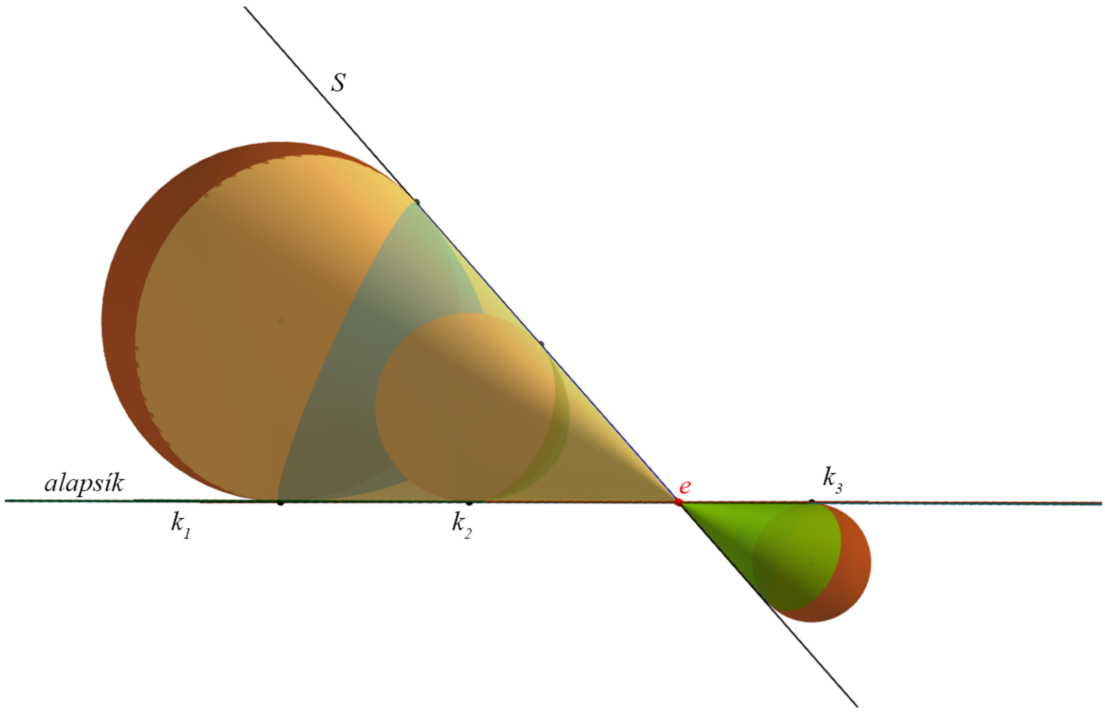
Bizonyítás. (8.1. tétel) Helyezzünk minden körre egy az ő sugarával megegyező sugarú gömböt, mely érinti az alapsíkot a kör középpontjában. Ekkor három gömböt kapunk. Meggondolható, hogy ezeket együtt mindig érinteni tudjuk egy az alapsíktól különböző síkkal úgy, hogy a gömbök a sík egy oldalán legyenek, kivéve, ha az eredeti körök középpontjai egy egyenesen vannak. Ezt az esetet a 8.2. megjegyzésben vizsgáljuk. Legyen ez a sík S. A gömbök páronkénti közös érintőkúpja az alapsíkon fekszik, így egy alkotója benne van az alapsíkban és ez az alkotó átmegy a körök érintőinek metszéspontján, hiszen ez az alkotó a két kör középpontját összekötő egyenes. Ez a pont a kúp csúcsa. Mivel az S sík érinti a gömböket, így páronként is érinti őket, vagyis az érintőkúpok egy-egy alkotója benne van az S síkban. (lásd 8.2. ábra) Ezek a kúp csúcsában metszik a körök síkját. Ebből következik, hogy a kúpok csúcsai, amik egyben a körök páronként vett külső érintőinek metszéspontjai az S sík és az alapsík e metszésvonalán vannak, tehát kollineárisak. □



8.2. ábra. A sötétkék vonalak benne vannak a három gömböt érintő S síkban

Nézzük meg, hogy mi történik, ha a három érintőpáros közül egyet, kettőt, vagy hármat belső érintőnek veszünk. Azt tapasztaljuk, hogy nem minden esetben lesznek egy egyenesen.

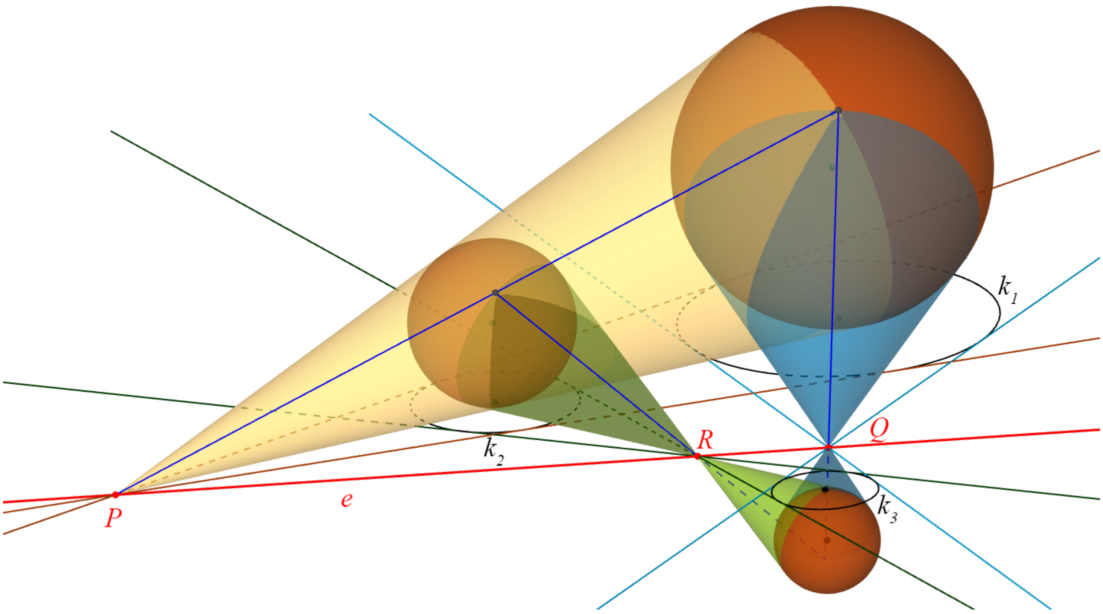
8.2. Tétel (Három kör közös érintői). *A síkban bármely három egymás külsejében lévő, nem kollineáris középpontú körre igaz, hogy ha vesszük páronként a közös érintőiket, akkor ezek metszéspontjai akkor és csak akkor lesznek egy egyenesen, ha a közös érintők közül páros számú belső, és páratlan számú külső érintőpár, vagy a körök középpontjai kollineárisak.*



8.3. ábra. Az egyik gömb átkerül az alapsík és az érintősík túloldalára

Bizonyítás. (8.2. tétel) A bizonyítás az előzőhöz nagyon hasonló. Helyezzünk most is a körök sugarával egyenlő sugarú gömböket a körökre, hogy azok a megfelelő kör középpontjában érintsék az alapsíkot. A három gömböt közösen kétféleképpen tudjuk síkkal érinteni. Az egyik eset a fenti 8.1. tétel esete, amikor a síkkal egy oldalról érintjük őket. Ebben az esetben a külső érintőkre kapunk egy bizonyítást.

Ha azonban szeretnénk belső érintőket is használni, akkor azoknál a gömböknél, ahol belső érintőkkel dolgozunk közös belső érintőkúpot fogunk használni, aminek a csúcsának két oldalára esik a két érintett gömb. Mivel azt szeretnénk, ha a közös belső érintőkúp csúcsa az alapsíkba esne, ezért az egyik gömböt, amit belülről érintünk az alapsík másik oldalára tesszük.(lásd 8.4. ábra) Így az alapsíkra esik az egyik alkotó, így nyilván a csúcs is. Ezeknek a kúpoknak az alkotóit úgy tudjuk csak felhasználni a bizonyításban, ha az érintősík nem egy oldalról érinti a három gömböt, hanem a kúp által belülről érintett gömböt az S sík is belülről érinti. Ez azt jelenti, hogy a belülről érintett gömbök átkerülnek az érintősík másik oldalára. (lásd 8.3. ábra) Ekkor már a belső közös érintőkúp egyik alkotója benne lesz az érintősíkban. Viszont ha egy gömb átkerül az S sík másik oldalára, akkor csak akkor lehetnek az alapsík és az érintősík metszésvonalán az érintőkúpok csúcsai, ha mind a két másik gömbbel belső érintési helyzetbe kerül. Ha nem így lenne, akkor az egyik közös érintőkúp alkotója nem lenne benne az S érintősíkban. Így ha egy gömböt átteszünk az alapsík túloldalára, akkor két külsőből két belső érintőpárt kapunk. Ha kettőt teszünk át, akkor ugyanazt esetet kapjuk, csak a sík szempontjából fordítva, ha pedig mindhármat áttesszük, akkor a 8.1. tétel esetét kapjuk fordítva. □



8.4. ábra. Belső érintőpárok esetén a gömbök közös belső érintőkúpját vesszük

8.2. Megjegyzés. Ha az érintősík egybeesik az alapsíkkal, akkor a két síknak nincs metszésvonala. Meggondolható, hogy ez az eset csak akkor fordulhat elő, ha a három kör középpontja egy egyenesre esik. Ekkor erre az egyenesre szimmetrikus minden. Így persze a közös érintők is ezen az egyenesen metszik egymást. Ebben a speciális esetben bármennyi belső és külső érintőpárt választhatunk, ezek mind ezen az egyenesen metszik egymást.

Irodalomjegyzék

[1] Hajós György *Bevezetés a geometriába*: Tankönyvkiadó, Budapest, 1979.

[2] Középiskolai Matematikai Lapok, 2008. novemberi szám.