# A sorozatok az egyetemen és a középiskolákban

Szakdolgozat

Készítette: **Piliszky András**
Matematika BSc, Matematika tanári szakirány

Témavezető: **Munkácsy Katalin**, főiskolai docens
ELTE TTK, Matematikatanítási és Módszertani Központ

Eötvös Lóránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Budapest, 2014

# Tartalomjegyzék

# Bevezetés

> *„A matematikus nem attól matematikus, hogy tud számolni, ugyanúgy, mint ahogy egy futballista sem attól focista, hogy tud futni. Persze, ezt is megteszi, ha kell, hozzátartozik a szakmájához, de azért a focista nem egy futó, aki előtt időnként ott pattog egy labda. Azért focista, mert tud mit kezdeni a labdával, ha az éppen elébe kerül. A matematikus nagyjából ugyanígy van ezzel, csak az ő labdája valamiféle végletekig absztrakt objektum."*
>
> (Mérő László)

A dolgozatom címe Sorozatok az egyetemen és a középiskolában. Azért választottam ezt a témát, mert az analízis tanulmányaim alatt felkeltették az érdeklődésemet.

A középszinten tanulók számára 11. osztályban kerül bevezetésre a Fibonacci-sorozat, szinte a semmiből, ugyanis sorozatokról előtte az általános iskolákban tanulhattak a diákok. A végzősök számára a sorozatok témakör lényegi része a számtani és mértani sorozatokról ($n$-edik elem kiszámítása, első $n$ tag összege), illetve az úgynevezett vegyes feladatokról szól.

Emelt szinten 11. osztályban tanítják a sorozatokat. A középszintű anyag (11-12. osztályos egyaránt) is elhangzik, emellett itt tanítják a közepeket (számtani/mértani/harmonikus) és viszonyukat. Ezen felül szóba kerülnek olyan anyagrészek, ami esetleg az egyetemi tanulmányokat készíti elő, mint például: sorozatok korlátossága, monotonitása, határértéke, konvergens sorozatok tulajdonságai, határérték-számítási módszerek.

Ezek után az egyetemen találkoznak a hallgatók sorozatokkal és tulajdonságaikkal, amire későbbi tanulmányaik során is nagy szükségük lesz. A középiskolában, miután be lettek vezetve (általában év elején) nem történik semmi (nincsenek ezen témára épülő további tananyagok), ezért a tanulók tudása gyakran felszínes marad. Ezért érdemes a tanórán, vagy szakköri keretek között a szokásos szöveges feladatokon túl (számtaniból gyártott mértani sorozatok) olyan feladattípusokat, témákat keresni, amelyekben a tanulóknak a sorozatokkal kapcsolatban kell problémákat megoldaniuk. Ilyen lehet például a Fibonacci-sorozat explicit képletének keresése, vagy a közepek vizsgálata. Ezt a feladatkört Besenyei Ádám javaslata alapján, a cikkére támaszkodva dolgoztam fel.

Ezen észrevételek következtében dolgozatomban próbálok felépíteni egyfajta tanítási folyamatot a sorozatokról, ami segítheti a középiskolai diákokat a sorozatok témakörének megfelelő feldolgozásában. A leírt eszmefuttatást követve, több feladattal körítve, kiemelve a lényegesebb tartalmakat, ezen dolgozat akár szakköri foglalkozás keretében megvalósítható.

# Sorozatok

A sorozatok tanítása nem könnyű dolog sem a középiskolában, sem az egyetemen. Mind a kettő alkalommal úgy van bevezetve, mint egy speciális függvény, azonban a függvények ténylegesen csak az egyetem hatodik félévében (matematika alapjai című kurzus keretében) kerül axiomatikus definiálásra. A felépítés azt a matematikatanításban természetes didaktikai elvet képviseli, hogy a matematikai definíciók megtanulása előtt ki kell, hogy alakuljon a tanulókban a fogalmak szemléletes képe.

Dolgozatom első fejezetének célja a sorozatok középiskolai bevezetésének áttekintése, megmutatni az utat a számtani/mértani sorozatoktól az egyetemen definiált határérték fogalomig. Állításaimat analízis gyakorlaton felvetett és példatárakból kikeresett feladatok megoldásával illusztrálom.

## Sorozatok a középiskolában

Az egyik legnépszerűbb és leggyakrabban használt magyar nyelvű matematika tankönyv a Mozaik-os sokszínű Matematika tankönyv-sorozat, ezért ennek a könyvnek a segítségével dolgozom fel a középiskolai középszintű anyagot. A számsorozatok témakör a 12. osztályban kerül elő. Öt rövid alfejezetre van bontva ezen témakör, az első kettő lényegében ismertető a különféle módon definiált sorozatokra, ezután a számtani/mértani sorozatok kerülnek terítékre, végül a kamatszámítás. A középiskolai sorozatok csúcspontja lényegében a számtani/mértani sorozatok kevert feladatai. Azonban az egész témát egy definíció indítja:

definíció [1.]: A számsorozat olyan függvény, amelynek értelmezési tartománya a pozitív egész számok halmaza, értékkészlete számhalmaz.

Ezek után 15 oldalnyi példát sorol fel a könyv különféle sorozatokra, többek közt többször is említésre kerül a Fibonacci-sorozat rekurzív alakja. Ezek után definiálásra kerül a számtani sorozat, bekeretezett piros képletekkel együtt, végül hasonló módon a mértani sorozat is.

definíció[1.]: Azt mondjuk, hogy az $(a_n)$ sorozat számtani sorozat, ha van olyan $a$ és $d$ szám, amelyre teljesül, hogy $a_1 = a$, $a_{n+1} = a_n + d$, ha $n \geq 1$.

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$s_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$$

$$s_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} n$$

definíció[1.]: Az $(a_n)$ sorozatot mértani sorozatnak nevezzük, ha van olyan $a$ és $q$ szám, hogy $a_1 = a, \;\; a_{n+1} = a_n \cdot q$.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad (q \neq 1)$$

[1.] tankönyvből legnehezebbnek számító feladat a középiskolában a sorozat témakörből a következő:

1. feladat: Egy növekvő számtani sorozat első három elemének összege 54. Ha az első elemet változatlanul hagyjuk, a másodikat 9-cel, a harmadikat 6-tal csökkentjük, akkor egy mértani sorozat három egymást követő elemét kapjuk. Határozzuk meg a számtani sorozat első tagját és a különbségét.

megoldás: A számtani sorozat (második) összegző képletébe behelyettesítve:

$$s_3 = \frac{a_1 + 2d}{2} \cdot 3 = 3a_1 + 3d = 54,$$

$$a_1 + d = 18,$$

$$a_1 = 18 - d.$$

Átírom a számtani sorozat tagjait a feladatban leírtak alapján:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $számtani$: | $a_1$ | $a_2$ | $a_3,$ |
| | $a_1$ | $a_1 + d$ | $a_1 + d + d,$ |
| | $a_1$ | $18$ | $18 + d,$ |
| $mértani$: | $a_1$ | $9$ | $12 + d.$ |

A definíció alapján a szomszédos tagok kvóciense (hányadosa) állandó. Tehát

$$\frac{12+d}{9}=\frac{9}{a_1}=\frac{9}{18-d},$$

$$-d^2+6d+135=0.$$

A másodfokú egyenlet megoldó képletének segítségével kapott eredmények:

$$d_1=-9\,, \qquad\qquad d_2=15.$$

Azonban a feladat szerint egy növekedő sorozatról van szó, tehát pozitív differenciát kell kapnunk. Ezek alapján:

$$d=15\,, \qquad\qquad a_1=3.$$

## Sorozatok az egyetemen

Ezek után esetleg érettségi készülés során, illetve érettségin találkozhatnak a diákok sorozatokkal. Majd analízis 1. előadás keretein belül hangzik el, a már ismerős definíció.

definíció: $a\colon \mathbb{N}\to\mathbb{R}$ függvény[1], a jelölést módosítva a következőképp:

$$a(0),a(1),a(2)\ldots\to\ a_0,a_1,a_2\ldots,$$

ekkor $a_n$ valós számsorozat.

A sorozatok tanításának célja az egyetemen az első félévben, a határérték fogalmának megfelelő elsajátítása, ami az első nagy akadály szokott lenni az elsős hallgatók között.

[1] Érdekességképpen kigyűjtöttem a tanulmányaim során előkerülő függvény definíciókat:
középiskola:A és B nem üres halmazok között adott egy hozzárendelés, amely A minden eleméhez B valamely elemét rendeli. A-t, B-t és a hozzárendelést együtt függvénynek nevezzük. A az értelmezési tartomány, B a képhalmaz.
analízis: azt mondjuk, hogy f leképezés A-nak B-be, ha $\forall\ a\in A\ \ !\exists\ b\in B : f(a)=b$
matematikai alapjai: f függvény ha teljesíti a következő három tulajdonságot

- f halmaz
- minden eleme rendezett pár
- ha $<x,y_1>,<x,y_2>\in f$, akkor $y_1=y_2$

definíció: $(a_n)$ sorozat korlátos, ha

$$\exists\, K \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}: \ |a_n| \leq K.$$

definíció: $(a_n)$ sorozat monoton növő (csökkenő), ha

$$a_{n+1} \geq a_n \ \ (a_{n+1} \leq a_n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

definíció:azt mondjuk, hogy az $(a_n)$ sorozatnak határértéke az $A \in \mathbb{R}$, ha

$$\forall \varepsilon > 0\,, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}\,, \qquad \forall n \geq n_0: \qquad\qquad |a_n - A| < \varepsilon.$$

Az első kettő definíció azért fontos, mert általában, ha egy feladat célja egy sorozatról eldönteni, hogy konvergens-e, azt a következő tétel segítségével tesszük.

tétel [6.]: Ha az $(a_n)$ sorozat monoton és korlátos, akkor konvergens.

2. feladat: [2. 82.feladat] Konvergens-e az alábbi sorozat, ha igen mi a határértéke?

$$a_1 = \frac{3}{4}\,, \qquad a_2 = \frac{3}{10}\,, \qquad a_n = \frac{a_{n-1}}{1 + 2a_{n-1}}, \qquad \forall n > 2.$$

megoldás**:**

A képzési szabály alapján ez egy nem negatív tagú sorozatot, tehát egy alsó korlátja a 0. Monotonitás szempontból

$$a_n > a_{n+1},$$

$$a_n > \frac{a_n}{1 + 2a_n},$$

$$a_n + 2a_n^2 > a_n,$$

$$a_n^2 > 0.$$

Tehát monoton fogyó a sorozat és alulról korlátos, szükségképp a tétel miatt konvergens.

Legyen a sorozat határértéke *A*, ekkor $A = \lim a_n = \lim\ a_{n-1}$ . Tegyük fel, hogy $A \neq -\frac{1}{2}$ (ugyanis nem negatív tagú a sorozat), ekkor teljesül a következő egyenlőség

$$A = \frac{A}{1 + 2A}$$

Tehát a sorozat konvergens, és a határértéke 0.

Analízis 1. gyakorlatról maradt (eddig) megoldatlan házi feladat a következő példa:

3. feladat: Definíció alapján igazolja, hogy a következő sorozat határértéke 0.

$$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

megoldás**:**

Tehát meg kell adni egy $n_0$ küszöbindexet úgy, hogy

$$\forall \varepsilon > 0\,, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}\,, \qquad \forall n \geq n_0: \qquad\qquad |a_n - 0| < \varepsilon.$$

Vagyis a határérték létezését beláthatjuk, ha meg tudunk adni bármely epszikonhoz egy jó küszöbindexet.

$$\left|\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right| < \varepsilon$$

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \varepsilon$$

$$\frac{1}{2\varepsilon} < \sqrt{n}$$

$$\frac{1}{4\varepsilon^2} < n$$

Tehát például az $n_0 = \left[\frac{1}{4\varepsilon^2}\right] + 1$ jó választás küszöbindexnek.

4. feladat: [2. 85.feladat] Konvergens-e az alábbi sorozat, ha igen mi a határértéke?

$$a_0 = 1 \qquad\qquad a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{R}{a_{n-1}}\right) \qquad\qquad \forall n \geq 1, R > 1, R \in \mathbb{R}$$

megoldás**:**

Ismét az előbbiekben említett tételt szeretném használni, tehát első lépésben egy alsó korlátot keresek, majd belátom, hogy monoton csökkenő sorozat.

Ezt a sorozatot $n = 1$-től vizsgálva korlátosnak találom, ugyanis

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{R}{a_n}\right) \geq \sqrt{a_n \frac{R}{a_n}} = \sqrt{R} > 0.$$

megjegyzés: A képzési szabály alapján ez a sorozat nem negatív tagú sorozat, vagyis a 0 is egy alsó korlát.

Tehát a $\sqrt{R}$ egy alsó korlátja a sorozatnak. Sejtésem szerint $n = 1$-től monoton csökkenő, ezért megvizsgálom két egymás utáni általános tag viszonyát:

$$\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{R}{a_n}\right) = a_{n+1} < a_n,$$

$$\left(a_n + \frac{R}{a_n}\right) < 2a_n,$$

$$R < {a_n}^2,$$

$$\sqrt{R} < a_n.$$

Ezt már az előbb beláttuk, tehát a sorozat korlátos és monoton csökkenő, tehát konvergens. Legyen a határértéke $A$. Ekkor teljesül, hogy $A = \lim a_n = \lim\ a_{n-1}$ , továbbá

$$A = \frac{1}{2}\left(A + \frac{R}{A}\right).$$

Innen adódik az $A = \pm\sqrt{R}$ megoldások, de mivel nem negatív a sorozatunk, ezért a határérték csak $\sqrt{R}$ lehet.

megjegyzés:

Érdemes lehet bemutatni a középiskolákban ezt az utolsó feladatot, ha már a diákoknak megvan a kellő előképzettsége a feladat megoldásához, ugyanis ez egy nem ránézésre triviális sorozat, ami tetszőleges gyökértékhez tart.

# Fibonacci-sorozat

## A Fibonacci-sorozat bevezetése

A rekurzív sorozatoknak nagy szerepük van a modern matematikában. Ezen érdekes objektum kialakulása egy játékosnak tűnő feladattal indult (1. feladat). Ezután napjainkig különböző megfogalmazások születnek erre a feladattípusra. Érdemes bemutatni a diákoknak is, hiszen nagy élmény észrevenni az eltérő szöveg mögötti azonos tartalmat. Továbbá segíthet abban is, hogy a különböző tanulóknak más-más megközelítés lehet az egyszerűbb, átláthatóbb egy adott matematikai problémára.

Leonardo Pisano Fibonacci, 11-12. századi matematikus legjelentősebb munkájának az arab számok behozatalát tartják Európába, amit a Liber Abaci című könyve segítségével vitt végbe. Azonban világhírét egy sorozatnak köszönhet, amit a könyvében fejtegetett. A Fibonacci-sorozattal már a 6. században is foglalkoztak indiai matematikusok, de a nyugattal az olasz matematikus ismertette. A könyvben a következő formában volt található a probléma:

1. feladat: Mennyi nyula lesz a gazdának az egyes hónapokban, ha eleinte 1 pár nyula van, minden hónapban az a pár egy újabb párt fiadzik, továbbá minden újszülött nyúlpár a kéthónapos kort elérve egy újabb nyúlpárnak ad életet.

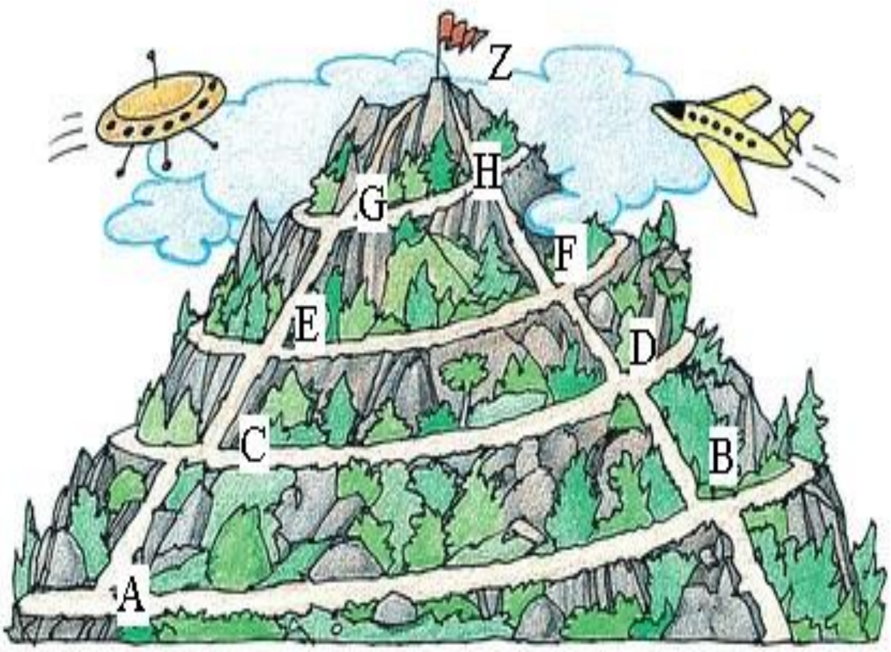
megoldás: Készítsünk táblázatot az első néhány hónapról.

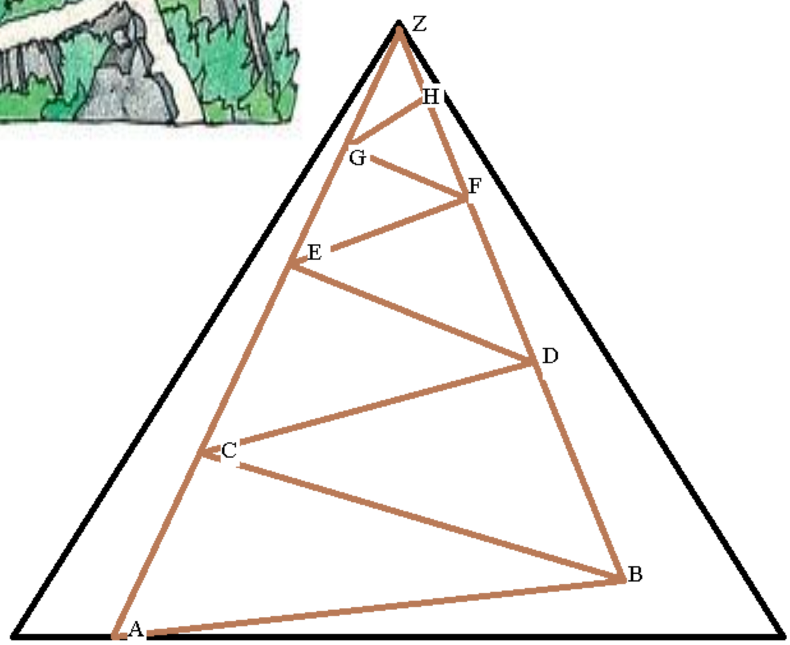
| hónap | idős nyúlpárok száma (idősebb, mint 1 hónap) | fiatal nyúlpárok száma (1+0 hónapos) | összes nyúlpár száma |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 2 |
| 2 | 1 | 1+1=2 | 3 |
| 3 | 2 | 1+2=3 | 5 |
| 4 | 3 | 2+3=5 | 8 |
| 5 | 5 | 3+5=8 | 13 |
| 6 | 8 | 5+8=13 | 21 |
| 7 | 13 | 8+13=21 | 34 |
| 8 | 21 | 13+21=34 | 55 |

Szépen látszik, hogy a nyúlpárokat számláló oszlopokból kiolvasható 3 sorozat ugyanazon számsorozat eltoltjai. A táblázatot folytatva az $n$-edik havi nyúlpárok számára az előző kéthavi nyúlpárok összegét kapnánk.

A következő feladat középiskolai tankönyvekben szokott felbukkanni:

2. feladat**:** Egy túra során egy hegyre akarunk feljutni. 3 út van: egy lanka szerpentin és 2 meredek ösvény. Hányféleképp juthatunk fel a hegy csúcsára a zászlóhoz (Z), ha haladhatunk bármelyik úton (akár felváltva is), de célunk mindig a feljebb jutás?



megoldás:

Vizsgáljuk meg, hogy az egyes pontokba hányféleképp juthatunk el. A pontba kezdünk, tehát az 1 „lehetőség”. Nézzük meg, hányféleképp mehetünk B-be? A→B ez egy lehetőség és más nincs. Hányféleképp mehetünk C-be? A→B→C vagy A→C ez már 2 lehetőség. Folytatva ezt a felírási módot, észrevehetjük, hogy az egyes pontokba menő útvonalak száma azon összeg, melynek tagjai a közvetlenül alatta lévő pontokba menő útvonalak számai. A végére a következő eredményre jutunk: Z pontba mehetünk annyiféleképp, amennyiféleképp H-ba, vagy G-be.

Definíció*:* A Fibonacci-sorozat egy olyan pozitív valós számsorozat, melynek rekurziója:

$$f_1 = 1, \qquad f_2 = 1, \qquad \forall n \geq 2, \qquad f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

tehát a sorozat tetszőleges tagja ($n \geq 2$) megegyezik, az őt megelőző két tag összegével.

megjegyzés:

Bizonyos könyvekben szokás a sorozat nulladik tagjának definiálni a 0-át, és első tagjának az 1-et. Előfordul, hogy első elemnek nevezik a 0-át és másodiknak az 1-et. Ezen sorozatok mind a Fibonacci-sorozatot adják.

A következő feladattal egyetemi tanulmányaim során találkoztam (Elemi Matematika 3), de gond nélkül feladható középiskolában is.

3. feladat: Hányféleképp fedhetünk le egy 2x2014-es négyzetrácsot 1x2-es dominókkal (egyrétűen, hézagmentesen, nem tudjuk a dominókat megkülönböztetni)?

megoldás:

Egyértelmű, hogy a dominókat kétféleképp helyezhetjük el egy 2x2-es négyzetrácson, vagy függőlegesen, vagy vízszintesen. Továbbá, ha vízszintesen helyezzük el vagy a felső, vagy az alsó sorban, akkor kellőképp a másik helyre kerül még egy vízszintes.

Próbáljuk megoldani a problémát kis négyzetrácsoktól kezdve:

| négyzetrács | lehetőség | db |
|---|---|---|
| 2x1 | I | 1 |
| 2x2 | II, = | 2 |
| 2x3 | III, =I, I= | 3 |
| 2x4 | IIII, =II, I=I, II=, == | 5 |
| 2x5 | IIIII, =III, I=II, II=I,<br>III=, ==I, =I=, I== | 8 |

sejtés: Ha a sorozat nulladik eleme 1, akkor a 2014-edik eleme pont a Fibonacci-sorozat 2015-ödik eleme lesz. Sejtésünket igazolva gondoljunk bele, hányféleképp fedhetünk le egy $2xn$-es négyzetrácsot ($n$ hosszúságú dominó-sorozat).

Az utolsó ($n$-edik) dominó lehet vízszintes, vagy függőleges. Függőlegesre végződő lesz a sorozat, ha az $n-1$ hosszúságú (tetszőleges) sorozatokhoz hozzáteszem az egy függőleges dominót. Vízszintes végűt pedig úgy tudok létrehozni, ha $n-2$ hosszúságú dominó-sorozathoz teszek hozzá egy vízszintes párt. Vagyos kapcsolat révén a megoldás ezen két érték összege lesz, pont mint a Fibonacci-sorozat képzési szabálya. Ezzel úgy néz ki, megoldottuk a problémát, a megoldás:

$$F_{2015} = F_{2014} + F_{2013} = 2F_{2013} + F_{1012} = 3F_{2012} + 2F_{2011} = 5F_{2011} + 3F_{2010} = \dots$$

Látszólag tényleg megoldottuk a problémát, de ezt az összegzési sort folytatni és levezetni $F_1$-ig nagyon sok idő lenne. Szeretnénk egy explicit képletet a Fibonacci-sorozatra, amibe csak be kell helyettesíteni a 2015-öt.

megjegyzés:

Az olyan sorozatokat, melynek kezdőértékei tetszőleges a, b számok és a Fibonacci-rekurzió igaz rájuk, Fibonacci-típusú sorozatnak nevezzük.

Később használandó állítás: Kettő (vagy több) Fibonacci-típusú sorozat összege is Fibonacci-típusú sorozat. Ennek igazolása fellelhető [5.].

## Explicit képlet keresése

Próbáljuk meg számtani vagy mértani sorozatként, illetve azok összegeként előállítani a Fibonacci-sorozatot az [5.] könyv alapján.

Ha egy számtani sorozat egyben Fibonacci-sorozat, akkor teljesül rá, hogy

$$a_{n-1} = a_1 + (n-2)d,$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d,$$

$$a_{n+1} = a_1 + nd,$$

$$a_1 + nd = a_{n+1} = a_n + a_{n-1} = 2a_1 + (2n-3)d,$$

ahol d a sorozat differenciája és $a_1$ az első elem.

Az egyenlet két végét $a_1$-re rendezve azt kapjuk, hogy

$$a_1 = (3-n)d$$

teljesül minden $n$-re. Ez azonban csak akkor teljesül, ha $a_1 = d = 0$, ami a csupa nullából álló sorozatot jelenti, ami ugyan Fibonacci-típusú, de nekünk nem segít most.

Próbáljuk meg mértani sorozatként felírni az előzőekhez hasonlóan:

$$a_{n-1} = a_1 q^{n-2},$$

$$a_n = a_1 q^{n-1},$$

$$a_{n+1} = a_1 q^n,$$

$$a_1 q^n = a_{n+1} = a_n + a_{n-1} = a_1 q^{n-1} + a_1 q^{n-2},$$

ahol q a sorozat kvóciense és $a_1$ pedig a sorozat első tagja.

Az egyenlet két végét nézve leosztunk $a_1$-el és $q^{n-2}$-el. Így a következő másodfokú egyenletet kapjuk:

$$q^2 = q + 1.$$

A másodfokú egyenlet megoldó képletébe helyettesítve a következő eredményre jutunk:

$$q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ és } q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Tehát tetszőleges $a_1$ kezdőérték esetén az $a_1, q_1$ paraméterekkel megadott mértani sorozat egyben Fibonacci-típusú is. Már csak az kellene, hogy az első két tag rendre 0 és 1 legyen. Ezt ezzel az egy sorozattal nem tudjuk elérni, de ha bevezetünk egy $b_1, q_2$ paraméterekkel definiált Fibonacci-típusú sorozatot, úgy már lehetséges. Korábban kimondott állítás szerint két Fibonacci-típusú sorozat összege is Fibonacci-típusú. Tehát úgy kellene $a_1$-et és $b_1$-et definiálni, hogy teljesüljön a következő két egyenlőség:

$$a_1 + b_1 = 0,$$

$$a_2 + b_2 = a_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + b_1 \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1.$$

A második egyenletet szorozzuk fel 2-vel és helyettesítsük az első egyenlet alapján

$a_1 = -b_1$ -et:

$$-b_1 - b_1\sqrt{5} + b_1 - b_1\sqrt{5} = 2,$$

$$-2b_1\sqrt{5} = 2,$$

$$b_1 = -\frac{1}{\sqrt{5}} \text{ és } a_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Tehát a Fibonacci-sorozat explicit képlete:

$$F_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

megjegyzés:

> Az index eltolódását az összeadandó sorozatok definiálásánál, a kezdő elemek megválasztása okozza. Ha az első tagokat nulladiknak tituláljuk, akkor a formula jobb oldala változatlan marad, és a bal oldalán $F_n$ áll.

megjegyzés:

Az egyetemen az explicit képletet generátorfüggvény segítségével vezetjük le.

A Fibonacci-sorozat generátorfüggvénye:

$$\sum_{k=0}^{\infty} F_k x^k.$$

Ennek és a képzési szabály segítségével felírható:

$$F(x) = F_0 + F_1 x + \sum_{k=2}^{\infty} F_k x^k = x + \sum_{k=2}^{\infty} (F_{k-1} x^k + F_{k-2} x^k),$$

$$F(x) = x + x \sum_{k=2}^{\infty} F_{k-1} x^{k-1} + x^2 \sum_{k=2}^{\infty} F_{k-2} x^{k-2},$$

$$F(x) = x + xF(x) + x^2 F(x),$$

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

Az utolsó egyenlet már ismerős, hiszen a mértani Fibonacci-típusú sorozat keresésénél is majdnem erre az egyenletre jutottunk. A nevezőt szorzattá bontva és tovább alakítva az egyenletet a következő eredményre jutunk:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k x^k \right].$$

Generátorfüggvény definíciója illetve a pontos levezetés a [4.] megtalálható.

## Egy Fibonaccihoz hasonló feladat megoldása

A Fibonacci-sorozat egy másodrendű homogén lineáris rekurzió. Másodrendű, mert az új tagot az előző kettő lineáris kombinációjából kapjuk. Homogén, mert nincs benne konstans tag. Lineáris, mert az új tag a régiekkel lineáris (elsőfokú) kapcsolatban van.

Nézzük meg, hogy meg tudunk-e oldani az előbbiekben használt módszerrel egy tetszőlegesen választott lineáris rekurziót. Legyen S sorozat a következő: (ma április 5. van)

$$s_0 = 4\,, \qquad s_1 = 5\,, \qquad\qquad s_n = 4s_{n-1} + 5s_{n-2}.$$

Direkt számolás alapján az első pár tag:

$$s_2 = 40\,,\ \ s_3 = 185\,,\ \ s_4 = 940\,,\ \ s_5 = 4685.$$

A Fibonacci-sorozatnál használtak alapján próbáljuk meg felírni kettő mértani sorozat lineáris kombinációjaként:

$$a_1 q^n = s_n = 4s_{n-1} + 5s_{n-2} = 4a_1 q^{n-1} + 5a_1 q^{n-2}.$$

Leosztva $a_1$-el (kizárva az $a_1 = 0$ esetet) és $q^{n-2}$-vel (kizárva $q = 0$ esetet) kapjuk:

$$q^2 = 4q + 5,$$

$$q^2 - 4q + 5 = 0,$$

$$q_1 = 5\,, \qquad\qquad q_2 = -1.$$

Ezek alapján legyen a két sorozatunk $(a_n)$ és $(b_n)$ úgy definiálva, hogy

$$a_n = 5^n, \qquad\qquad b_n = (-1)^n.$$

Ezek után a célunk $e_1$ és $e_2$ együtthatók meghatározása. Ehhez használjuk fel, hogy ismerjük az S sorozat nulladik és első elemét, ami azt jelenti:

$$4 = s_0 = e_1 5^0 + e_2(-1)^0 = e_1 + e_2,$$

$$5 = s_1 = e_1 5^1 + e_2(-1)^1 = 5e_1 - e_2.$$

Összeadva a két egyenletet és átrendezve kapjuk a következőt:

$$e_1 = \frac{3}{2}\,, \qquad\qquad e_2 = \frac{5}{2}.$$

Tehát az S sorozat explicit képlete:

$$s_n = \frac{3}{2}5^n + \frac{5}{2}(-1)^n = \frac{3 \cdot 5^n + 5 \cdot (-1)^n}{2}.$$

Ellenőrizzük az első pár tagra:

$$s_2 = \frac{3 \cdot 5^2 + 5 \cdot (-1)^2}{2} = \frac{80}{2} = 40,$$

$$s_3 = \frac{3 \cdot 5^3 + 5 \cdot (-1)^3}{2} = \frac{370}{2} = 185,$$

$$s_4 = \frac{3 \cdot 5^4 + 5 \cdot (-1)^4}{2} = \frac{1880}{2} = 940.$$

Úgy tűnik, hogy megegyezik a direktbe számolt értékekkel. Ezen kettő másodrendű lineáris rekurzió megoldása alapján sejthető, hogy ezzel a módszerrel minden másodrendű lineáris rekurziónak meghatározható az explicit képlete.

# Közepek képzése sorozatokkal

Dolgozatom ezen részében különböző közepek segítségével definiált sorozatokat és azok tulajdonságait mutatom be. A téma feldolgozásában nagy segítséget nyújtott a [7.] könyv.

## Számtani-mértani közép

Joseph-Louis Lagrange 1785-ös cikkében került publikálásra először a számtani-mértani közép konstrukciója.

Definiáljuk az $(a_n)$ és $(b_n)$ sorozatok a következő módon:

$$a_0 = a \quad és \quad b_0 = b,$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad és \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

Tehát a sorozatok $(n+1)$-edik tagja rendre az $n$-edik tagok számtani, illetve mértani közepe, vagyis $a_{n+1} = A(a_n, b_n)$ és $b_{n+1} = G(a_n, b_n)$.

Lagrange belátta, hogy minden $a, b > 0$ esetén az előbbi rekurzió szerinti $(a_n)$ és $(b_n)$ sorozatok konvergensek, méghozzá egy közös határértékhez tartanak, amit számtani-mértani középnek nevezünk.

Lagrange még nem így hívta ezt a közepet. Carl Friedrich Gauss adta neki ezt a nevet, mikor 14 éves korában újra felfedezte. Ezek után 22 éves korában dolgozta ki a következő összefüggést:

$$AG\left(1, \sqrt{2}\right) \cdot \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1 - t^4}} = \frac{\pi}{2},$$

ahol $AG\left(1, \sqrt{2}\right)$ jelöli az 1-nek és a $\sqrt{2}$-nek a számtani-mértani közepét, továbbá a szorzat második tényezője az úgynevezett elsőfajú teljes elliptikus integrál.

Később ezt az összefüggést általánosította tetszőleges $a, b > 0$ számokra:

$$AG(a,b) \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{a^2 cos^2\phi + b^2 sin^2\phi}} d\phi = \frac{\pi}{2}.$$

Tétel: Tetszőleges $a, b > 0$ számok esetén az előbbiekben definiált $(a_n)$ és $(b_n)$ sorozatokra igazak a következők:

a) Az $(a_n)$ és a $(b_n)$ sorozatok konvergensek, és a határértékük megegyezik.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Jelöljük ezt a határértéket $AG(a, b)$-vel.

b) Tetszőleges $a, b > 0$ számokra teljesül, hogy

$$AG(a,b) \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{a^2 cos^2\phi + b^2 sin^2\phi}} d\phi = \frac{\pi}{2}.$$

bizonyítás:

a) Tegyük fel, hogy $a \geq b$, ez semmilyen megszorítást nem jelent, ugyanis mind a számtani, mind a mértani közép szimmetrikus a változóikban. A sorozatok tetszőleges $n$-edik tagjára teljesül, hogy $a_n \geq b_n$ a mértani és a számtani közepek közötti egyenlőség miatt. Mivel két szám számtani és mértani közepe is a két szám között van, ezért teljesül a következő egyenlőtlenség minden $n > 0$ esetén

$$b \leq b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n \leq b_{n+1} \leq \cdots \leq a_{n+1} \leq a_n \leq \cdots \leq a_2 \leq a_1 \leq a.$$

Innen látszik, hogy az $(a_n)$ sorozat monoton csökkenő, továbbá korlátos ($b$ egy alsó korlát), ebből következik, hogy a sorozat konvergens. Hasonló módon a $(b_n)$ sorozat monoton növekvő és korlátos ($a$ egy felsőkorlát), tehát ez is konvergens.
Még azt kell belátnunk, hogy közös határértékhez tartanak. Írjuk fel a két sorozat különbségét, kihasználva, hogy $(a_n)$ számtani szorozat és $(b_n)$ monoton nő:

$$0 \leq a_{n+1} - b_{n+1} \leq a_{n+1} - b_n = \frac{a_n + b_n}{2} - b_n = \frac{a_n - b_n}{2}.$$

Hasonló módon folytatva az egyenlőtlenséget, rendre a $b_i$ tagokat fölülről becsüljük $b_{i-1}$-el, és az $a_i$-ket kibontjuk, $n$-edik lépésben a következőt kapjuk:

$$0 \leq a_n - b_n \leq \frac{a - b}{2^n}.$$

A különbségi sorozatunkat alulról becsültük a nulla sorozattal, továbbá felülről becsültük egy nullához tartó sorozattal. Ekkor a rendőrszabály értelmében a közrefogott sorozat is nullához tart. Mivel $(a_n)$ és $(b_n)$ sorozatok külön-külön is konvergensek, ezért szükségképp közös a határértékük.

b) Átalakítva az egyenletet a következőt kell belátni:

$$AG(a,b) = \left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{a^2cos^2\phi + b^2sin^2\phi}}d\phi\right)^{-1}.$$

Legyen

$$\Phi(a,b) = \left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{a^2cos^2\phi + b^2sin^2\phi}}d\phi\right)^{-1}.$$

ekkor elég belátni, hogy $\Phi(a,a) = a$ és $\Phi(a_{n+1}, b_{n+1}) = \Phi(a_n, b_n)$, mert így minden $n$-re $\Phi(a_n, b_n) = \Phi(a,b)$, ahonnan határátmenettel adódik az állítás.

Először belátjuk, hogy $\Phi(a_{n+1}, b_{n+1}) = \Phi(a_n, b_n)$, azaz az integrál invariáns a számtani-mértani közép rekurziójára nézve:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{a_n^2cos^2\phi + b_n^2sin^2\phi}}d\phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{a_{n+1}^2cos^2\psi + b_{n+1}^2sin^2\psi}}d\psi.$$

A bal oldali kifejezésen hajtsuk végre az úgynevezett Gauss-transzformációt

$$sin\phi = \frac{2a \cdot sin\psi}{(a+b) + (a-b)sin^2\psi}.$$

Mindkét oldalt deriválva kapjuk

$$cos\phi d\phi = 2a \cdot cos\psi \frac{(a+b) - (a-b)sin^2\psi}{\left((a+b) + (a-b)sin^2\psi\right)^2}d\psi.$$

A $sin^2\phi + cos^2\phi = 1$ összefüggés segítségével kifejezzük a $cos\phi$-t a helyettesítés összefüggéséből:

$$cos\phi = \frac{\sqrt{(a+b)^2 - (a-b)^2 sin^2\psi}}{(a+b) + (a-b)sin^2\psi} cos\psi.$$

Az előbbi két egyenlőségből adódik:

$$d\phi = 2a\frac{(a+b) - (a-b)sin^2\psi}{(a+b) + (a-b)sin^2\psi} \cdot \frac{d\psi}{\sqrt{(a+b)^2 - (a-b)^2 sin^2\psi}}.$$

A $sin\phi$-re és a $cos\phi$-re vonatkozó összefüggések alapján:

$$\sqrt{a^2 \cdot cos^2\phi + b^2 \cdot sin^2\phi} = a\frac{(a+b) - (a-b)sin^2\psi}{(a+b) + (a-b)sin^2\psi}.$$

Az iménti két egyenletből az integrandusra a következőt kapjuk:

$$\frac{d\phi}{\sqrt{a^2 \cdot cos^2\phi + b^2 \cdot sin^2\phi}} = \frac{d\psi}{\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \cdot cos^2\psi + ab \cdot sin^2\psi}}.$$

Ezzel igazoltuk az integrál invarianciáját a számtani-mértani közép rekurziójára tekintve.

Hátra van még annak igazolása, hogy $\Phi(a,a) = a$. Ehhez célszerű az $\frac{1}{\Phi(a,a)}$-t felírni:

$$\frac{1}{\Phi(a,a)} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{a^2 \cdot cos^2\phi + a^2 \cdot sin^2\phi}} d\phi = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a} d\phi = \frac{1}{a}.$$

Ezzel az állítás bizonyítása kész.

# Közepek általános bevezetése

definíció: Legyen $K: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ folytonos függvény. Ekkor $K$-t középnek nevezzük, ha teljesül rá a középérték-tulajdonság, azaz ha minden $a, b > 0$ esetén

$$\min(a, b) \leq K(a, b) \leq \max(a, b).$$

A közepeknek következő tulajdonságait értelmezhtejük:

definíció: Legyen *K* egy közép. Ekkor

- $K(a, b)$ diagonális, ha akkor, és csak akkor teljesül

  $$\min(a, b) = K(a, b) = \max(a, b),$$

  ha $a = b$.

- *K(a,b)* szimmetrikus, ha teljesül, hogy minden $a, b > 0$ esetén

  $$K(a, b) = K(b, a).$$

- *K(a,b)* pozitív homogén, ha teljesül, hogy minden $a, b > 0$ esetén

  $$K(\lambda a, \lambda b) = \lambda K(a, b) \qquad \forall \lambda > 0\text{-ra.}$$

definíció: Legyenek *K* és *L* közepek. Ekkor *K* összehasonlítható *L*-lel, ha az alábbi három feltétel közül teljesül valamelyik:

1. $K(a, b) \geq L(a, b) \quad \forall a, b > 0$ esetén.
2. $K(a, b) \leq L(a, b) \quad \forall a, b > 0$ esetén.
3. $K(a, b) \geq L(a, b)$, ha $a > b > 0$ és $L(a, b) \geq K(a, b)$, ha $b > a > 0$.

definíció: Legyenek *K* és *L* közepek. Ekkor definiálhatjuk tetszőleges $a, b > 0$ számokra a következő, úgynevezett Gauss-rekurziót:

$$a_0 = a \quad \text{és} \quad b_0 = b,$$

$$a_{n+1} = K(a_n, b_n) \quad \text{és} \quad b_{n+1} = L(a_n, b_n).$$

tétel:

a) Tegyük fel, hogy *K* vagy *L* diagonális közepek, továbbá *K* összehasonlítható *L*-lel. Ekkor teljesül, hogy az előbbiekben definiált $(a_n)$ és $(b_n)$ sorozatok konvergensek, és a határértékük megegyezik (jelöljük ezt a határértéket $(K \otimes L)$(a,b)-vel).
b) Ha *K* és *L* diagonális közepek, akkor $K \otimes L$ is diagonális.
c) Ha *K* és *L* homogén és szimmetrikus, akkor $K \otimes L$ is homogén és szimmetrikus.
d) $K \otimes L$ folytonos.

bizonyítás:

a) Tegyük fel, hogy az összehasonlíthatóság első feltétele teljesül, és legyen $a \geq b$. Így $a_1 \geq b_1$, továbbá a középérték tulajdonság miatt teljesülnek a következők:

$$a_0 \geq a_1 \geq b_0, \qquad a_0 \geq b_1 \geq b_0.$$

Ugyanígy felírható tetszőleges indexre, ha $a_n \geq b_n$, akkor az összehasonlíthatóság első feltétele miatt $a_{n+1} \geq b_{n+1}$, és a középérték tulajdonság miatt:

$$a_n \geq a_{n+1} \geq b_n, \qquad a_n \geq b_{n+1} \geq b_n.$$

Ezekből adódik, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén teljesül:

$$a_0 \geq a_1 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots \geq b_n \geq \cdots \geq b_1 \geq b_0.$$

Ennek alapján az $(a_n)$ és $(b_n)$ sorozatok monotonok és korlátosak, tehát konvergensek. Legyen $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ és $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$. Ekkor a *K* és *L* közepek folytonossága miatt a rekurzióból határátmenettel kapjuk, hogy $\alpha = K(\alpha, \beta)$ és $\beta = L(\alpha, \beta)$. Ekkor *K* vagy *L* diagonalitásából már következik, hogy $\alpha = \beta$.

Ha $b \geq a$, akkor az egyenlőtlenséglánc két végén lévő tag felcserélésével ($a_0$ és $b_0$) a bizonyítás hasonlóan megy. Ha az összehasonlíthatóság második feltétele áll fenn, akkor az $(a_n)$ és $(b_n)$ sorozatok felcserélésével adódik a bizonyítás. Az összehasonlíthatóság harmadik feltételének teljesülése esetén, $a_0 \geq b_0$ és $b_0 > a_0$ eseték szétválasztásánál szintén csak az egyenlőtlenségek iránya változik meg. Így az összehasonlíthatóság mindhárom esetére működik a bizonyítás.

b) Ismét feltehető, hogy $K \geq L$. Ekkor az a) pontban tárgyaltak alapján igaz:

$$L(a,b) = b_1 \leq (K \otimes L)(a,b) \leq a_1 = K(a,b).$$

A középérték-tulajdonságot kihasználva adódik:

$$\min(a,b) \leq L(a,b) \leq (K \otimes L)(a,b) \leq K(a,b) \leq \max(a,b).$$

Innen *K* és *L* diagonalitásából következik $K \otimes L$ diagonalitása.

c) Be kell látnunk, hogy

$$(K \otimes L)(\lambda a, \lambda b) = \lambda (K \otimes L)(a, b).$$

Definiáljunk kettő új sorozatot:

$$\widetilde{a_0} = \lambda a \quad \text{és} \quad \widetilde{b_0} = \lambda b,$$

$$\widetilde{a_{n+1}} = K\left(\widetilde{a_n}, \widetilde{b_n}\right) \;\; \text{és} \;\; \widetilde{b_{n+1}} = L\left(\widetilde{a_n}, \widetilde{b_n}\right).$$

Kihasználva *K* és *L* homogenitását, a sorozatok első tagjai:

$$\widetilde{a_1} = K\left(\widetilde{a_0}, \widetilde{b_0}\right) = K(\lambda a, \lambda b) = \lambda K(a, b) = \lambda a_1,$$

$$\widetilde{b_1} = L\left(\widetilde{a_0}, \widetilde{b_0}\right) = L(\lambda a, \lambda b) = \lambda L(a, b) = \lambda b_1.$$

A sorozatok következő tagjaiból is hasonló módon kiemelhető a $\lambda$, így indukcióval adódik, hogy

$$\widetilde{a_n} = \lambda a_n, \qquad \widetilde{b_n} = \lambda b_n.$$

Ebből következően az $(\widetilde{a_n})$ és $(\widetilde{b_n})$ sorozatok $\lambda \cdot (K \otimes L)(a, b)$-hez tartanak. Ha azonban definíció szerinti képzését nézzük a $\lambda a$ és a $\lambda b$ kezdőértékekből indított keveréknek, ekkor ezek a sorozatok $(K \otimes L)(\lambda a, \lambda b)$-hez tart. Mivel egy sorozat nem tarthat kettő különböző értékhez, ezért $\lambda \cdot (K \otimes L)(a, b) = (K \otimes L)(\lambda a, \lambda b)$.

Legyen

$$a_0 = b \quad \text{és} \quad b_0 = a,$$

$$a'_{n+1} = K(a_n, b_n) \;\; \text{és} \;\; b'_{n+1} = L(a_n, b_n).$$

Ekkor a *K* és *L* szimmetriáját kihasználva

$$a_1 = K(a, b) = K(b, a) = a'_1,$$

$$b_1 = L(a, b) = L(b, a) = b'_1.$$

A második tagtól kezdve $a_n = a'_n$ és $b_n = b'_n$ ezért határátmenettel $(K \otimes L)(b, a) = (K \otimes L)(a, b)$ adódik, ami pont $K \otimes L$ szimmetriáját jelenti.

d) Továbbra is feltehető, hogy $K \geq L$.
A $K \otimes L$ függvény folytonosságának igazolásához legyen $(a, b)$ rögzített, ekkor azt kell belátni, hogy minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik $\delta > 0$, hogy ha

$$|(a, b) - (a', b')| < \delta,$$

$$\text{akkor } |(K \otimes L)(a, b) - (K \otimes L)(a', b')| < \varepsilon.$$

Az $(a, b)$ kezdőértékekből indított Gauss-rekurzió sorozatait jelölje $(a_n)$ és $(b_n)$, valamint az $(a', b')$ kezdőértékekből indítottakat pedig $(a'_n)$ és $(b'_n)$. Ekkor $a'_n$ kifejthető a következő módon:

$$a'_n = K(a'_{n-1}, b'_{n-1}) = K\big(K(a'_{n-2}, b'_{n-2}), L(a'_{n-2}, b'_{n-2})\big) = \cdots$$

A rekurziót felhasználva véges sok lépésben eljutunk $a'$, $b'$-höz, vagyis $a'_n$ kifejezhető $(a', b')$ segítségével véges sok folytonos függvény kompozícióján keresztül. Hasonlóan $b'_n$ kifejezhető $(a', b')$ segítségével folytonos függvények kompozícióján keresztül. Léteznek tehát $K_n$ és $L_n$ folytonos függvények, hogy

$$a'_n = K_n(a', b'), \qquad b'_n = L_n(a', b').$$

A $K_n$ és $L_n$ függvényekre lehet úgy gondolni, mint olyan kétváltozós függvényekre, amelyek adott kezdőértékekhez hozzárendeli a megfelelő Gauss-rekurzióból nyert sorozatpár első és második sorozatát.

Rögzítsünk egy olyan *n* indexet, hogy teljesüljön:

$$|a_n - b_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ezen jelöléssel átírható a fenti egyenlőtlenség (utalva: átírt egyenlőtlenség):

$$|K_n(a, b) - L_n(a, b)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mivel $K_n$ és $L_n$ folytonos függvények, ezért van olyan $\delta > 0$, melyre igaz, hogy

$$\text{ha } |(a', b') - (a, b)| < \delta \text{, akkor}$$

$$|K_n(a', b') - K_n(a, b)| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad |L_n(a', b') - L_n(a, b)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

A bal oldali kifejezést kibontva és az átírt egyenlőtlenséget beírva adódik:

$$K_n(a', b') \le K_n(a, b) + \frac{\varepsilon}{2} \le L_n(a, b) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Az a) rész alapján $a'_n = K_n(a', b')$-t alulról becsülhetjük $(K \otimes L)(a', b')$-vel, illetve $b'_n = L_n(a, b)$-t felülről becsülhetjük $(K \otimes L)(a, b)$-vel, tehát

$$(K \otimes L)(a', b') \le (K \otimes L)(a, b) + \varepsilon.$$

Hasonlóan a jobb oldali egyenlőtlenséget kibontva, az átírt egyenlőtlenséget beírva, továbbá alulról és felülről becsülve a következő eredményre jutunk:

$$(K \otimes L)(a', b') \geq (K \otimes L)(a, b) - \varepsilon.$$

Az utolsó két egyenlőtlenség együtt éppen a folytonosságot fejezik ki. Ezzel a bizonyítás kész.

tétel: Invarianciaelv

Tegyük fel, hogy az $(a_n)$ és $(b_n)$ pozitív tagú sorozatok konvergensek és közös a határértékük, amely legyen $\alpha$. Ha $\Phi: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ olyan kétváltozós függvény, amely folytonos, továbbá $\Phi(x, x) = x$ minden $x > 0$ esetén, valamint $\Phi$ invariáns a két sorozatra nézve (azaz $\Phi(a_{n+1}, b_{n+1}) = \Phi(a_n, b_n)$ minden $n$-re), akkor $\alpha = \Phi(a_0, b_0)$.

Az eddigiekben használt sorozatok jelölését használjuk a bizonyításban: $a_{n+1} = K(a_n, b_n) \;\; és \;\; b_{n+1} = L(a_n, b_n)$, továbbá a közös határérték $K \otimes L$ .

bizonyítás:

Mivel $\Phi$ invariáns a sorozatokra, ezért $\Phi(K(a, b), L(a, b)) = \Phi(a, b)$, és minden $n > 0$ esetén $\Phi(a_n, b_n) = \Phi(a, b)$. Innen következik, hogy $\lim_{n\to\infty} \Phi(a_n, b_n) = \Phi(a, b)$. Továbbá a sorozatok a közös határértékhez tartanak ($\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = K \otimes L$), ezért az előbbi kifejezés megegyezik a következővel:

$$\Phi(a, b) = \Phi\big((K \otimes L)(a, b), (K \otimes L)(a, b)\big).$$

Végül $\Phi(x, x) = x$ teljesülése miatt adódik az állítás.

1. példa: Legyen

$$M(a, b) = \sqrt{a\frac{a + b}{2}} \;, \qquad N(a, b) = \sqrt{b\frac{a + b}{2}}.$$

Igazoljuk, hogy $a \neq b$ esetén

$$(M \otimes N)(a, b) = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{2(\log a - \log b)}}.$$

megoldás:

Az invarianciaelvet alkalmazva elég belátni, hogy az előbbi jobb oldali kifejezés invariáns a két sorozatra nézve, és az $a = b$ határesetben az értéke $a$.

Az invariancia azt jelenti, hogy:

$$\sqrt{\frac{a_{n+1}^2 - b_{n+1}^2}{2(\log a_{n+1} - \log b_{n+1})}} = \sqrt{\frac{a_n^2 - b_n^2}{2(\log a_n - \log b_n)}}.$$

A bal oldali kifejezést átalakítjuk, első lépésben az $n+1$-es tagok helyébe behelyettesítjük az $n$-es tagokat, majd egyszerűbb alakra hozzuk:

$$\sqrt{\frac{a_{n+1}^2 - b_{n+1}^2}{2(\log a_{n+1} - \log b_{n+1})}} = \sqrt{\frac{a_n \frac{a_n + b_n}{2} - b_n \frac{a_n + b_n}{2}}{2(\log \sqrt{a_n \frac{a_n + b_n}{2}} - \log \sqrt{b_n \frac{a_n + b_n}{2}})}} =$$

$$\sqrt{\frac{\frac{a_n^2 - b_n^2}{2}}{2(\log \sqrt{\frac{a_n(a_n + b_n)}{2} \frac{2}{b_n(a_n + b_n)}})}} = \sqrt{\frac{a_n^2 - b_n^2}{2 \cdot 2(\log \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^{\frac{1}{2}})}} = \sqrt{\frac{a_n^2 - b_n^2}{2(\log a_n - \log b_n)}}.$$

Még azt kell belátni, hogy

$$\lim_{b \to a} \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{2(\log a - \log b)}} = a.$$

Felhasználva a

$$\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{\log x} = 1$$

nevezetes határértéket:

$$\lim_{b \to a} \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{2(\log a - \log b)}} = \lim_{b \to a} a \sqrt{\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 1}{\log \left(\frac{b}{a}\right)^2}} = a.$$

## Arkhimédész-féle rekurzió

A Gauss-rekurzióhoz hasonlóan létezik egy másik iteráció, amely ugyancsak közepek keverésére alkalmas. Az Arkhimédész-féle rekurzió segítségével két ugyanolyan középnek a keverékét is lehet értelmezni (nem triviális módon).

definíció: Legyenek *K* és *L* közepek. Ekkor definiálhatjuk tetszőleges $a, b > 0$ számokra a következő, úgynevezett Arkhimédész-féle rekurziót:

$$a_0 = a \quad \text{és} \quad b_0 = b$$

$$a_{n+1} = K(a_n, b_n) \ \text{ és } \ b_{n+1} = L(a_{n+1}, b_n).$$

tétel:

Tegyük fel, hogy *K* és *L* szimmetrikus közepek, továbbá *K* diagonális. Ekkor az $(a_n)$ és $(b_n)$ sorozatok konvergensek és határértékeik megegyeznek. A határértéket jelöljük $(K \otimes_a L)(a, b)$-vel. Ekkor igaz, hogy:

$$K \otimes_a L = K \otimes L^*,$$

ahol $L^*(a, b) = L(K(a, b), b)$.

bizonyítás:

A rekurzió átírható a következőképpen:

$$a_{n+1} = K(a_n, b_n)$$

$$b_{n+1} = L(a_{n+1}, b_n) = b_{n+1} = L(K(a_n, b_n), b_n) = L^*(a_n, b_n).$$

Ez nem más, mint a *K* és $L^*$ közepekre vonatkozó Gauss-rekurzió, így alkalmazható a korábbi tétel, feltéve, hogy *K* és $L^*$ összehasonlítható.
Belátjuk, hogy ha $a < b$, akkor $K(a, b) \leq L^*(a, b)$, ha pedig $a > b$, akkor $K(a, b) \geq L^*(a, b)$.

Ha $a < b$, akkor a középérték-tulajdonság miatt

$$a \leq K(a, b) \leq b,$$

így

$$K(a, b) \leq L(K(a, b), b) \leq b,$$

ami azt jelenti, hogy $K(a, b) \leq L^*(a, b)$. A másik eset hasonlóan látható be.

megjegyzés:

Az invariancia elv alapján a $K \otimes_a L$ az a $\Phi: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ kétváltozós függvény, amely folytonos, továbbá $\Phi(x,x) = x$ minden $x > 0$ esetén, valamint

$$\Phi\big(K(a,b), L^*(a,b)\big) = \Phi(a,b).$$

Speciális esetben, ha $K = L$, vagyis a két keverendő közép megegyezik, akkor

$$\Phi(a,b) = \Phi\big(b, K(a,b)\big),$$

mivel

$$\Phi(a_{n+1}, b_{n+1}) = \Phi\big(K(a_n,b_n), K(K(a_n,b_n),b_n)\big) = \Phi\big(b_n, K(a_n,b_n)\big) = \Phi(a_n,b_n).$$

2. példa: Mutassuk meg, ha $K(a,b) = L(a,b) = \frac{a+b}{2}$, akkor

$$K \otimes_a L(a,b) = \frac{a+2b}{3}.$$

megoldás:

Be kell látnunk, hogy a két sorozat invariáns a $K \otimes_a L$-re nézve (vagyis teljesül, hogy $K \otimes_a L(a,b) = K \otimes_a L(b, K(a,b))$), továbbá, hogy $(K \otimes_a L)(x,x) = x$:

$$K \otimes_a L(a,b) = \frac{a+2b}{3} = \frac{b + 2 \cdot \frac{a+b}{2}}{3} = \frac{2b+a}{3} = K \otimes_a L(b, K(a,b))$$

$$K \otimes_a L(x,x) = \frac{x+2x}{3} = x.$$

3. példa: Mutassuk meg, ha $K(a,b) = L(a,b) = \sqrt{ab}$, akkor

$$K \otimes_a L(a,b) = \sqrt[3]{ab^2}.$$

megoldás:

Be kell látnunk, hogy a két sorozat invariáns a $K \otimes_a L$-re nézve (vagyis teljesül, hogy $K \otimes_a L(a,b) = K \otimes_a L(b, K(a,b))$), továbbá, hogy $K \otimes_a L(x,x) = x$:

$$K \otimes_a L(a,b) = \sqrt[3]{ab^2} = \sqrt[3]{b(\sqrt{ab})^2} = \sqrt[3]{ab^2} = K \otimes_a L(b, K(a,b))$$

$$K \otimes_a L(x,x) = \sqrt[3]{xx^2} = x.$$

4. példa: Mutassuk meg, ha $K(a,b) = L(a,b) = \left(\frac{a^p+b^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}$, akkor

$$K \otimes_a L(a,b) = \left(\frac{a^p + 2b^p}{3}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

megoldás:

Be kell látnunk, hogy a két sorozat invariáns a $K \otimes_a L$-re nézve (vagyis teljesül, hogy $K \otimes_a L(a,b) = K \otimes_a L(b, K(a,b))$), továbbá, hogy $K \otimes_a L(x,x) = x$.

$$K \otimes_a L(a,b) = \left(\frac{a^p + 2b^p}{3}\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{b^p + 2 \cdot \left(\left(\frac{a^p + b^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p}{3}\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\frac{b^p + a^p + b^p}{3}\right)^{\frac{1}{p}} = K \otimes_a L\big(b, K(a,b)\big)$$

$$K \otimes_a L(x,x) = \left(\frac{x^p + 2x^p}{3}\right)^{\frac{1}{p}} = x.$$

# Irodalomjegyzék


[1.] Kosztolányi J., Kovács I., Pintér K., Urbán J., Vincze I. – Sokszínű Matematika 12.

Mozaik Kiadó, 2013

[2.] Denkinger G., Gyurkó L. – Analízis gyakorlatok

Nemzedékek tudása tankönyvkiadó, 2001

[3.] Besenyei Á. - A számtani-mértani közép és egyéb érdekességek I-II.

KöMaL 2009 február és márciusi száma

[4.] Szabó Cs., Recski A., Katona Gy. - A számítástudomány alapjai

Typotex kiadó, 2002

[5.] Török Judit*: A* Fibonacci-sorozatról

Tankönyvkiadó, 1984

[6.] Laczkovich M., T. Sós V. - Analízis 1

Nemzeti Tankönyvkiadó, 2005

[7.] J. M. Borwein, P. B. Borwein – Pi and the AGM: A Study in Analytic Number Theory and Computational Complexity

John Wiley, 1987

# Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozom a témavezetőmnek, Munkácsy Katalinnak, akinek útmutatása nélkül ez a dolgozat nem jöhetett volna létre. Mindvégig bíztatott, ötleteivel, tanácsaival és problémafelvetéseivel segítette a munkámat.

Emellett hálával tartozom Besenyei Ádámnak, aki a témába vágó érdekes értekezését figyelmembe ajánlotta.