Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Sajben Stefánia

A projektív geometria felépítése

BSc Szakdolgozat

Témavezető:

Szeghy Dávid

Geometriai Tanszék

Budapest, 2014

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném köszönetem kifejezni témavezetőmnek, Szeghy Dávidnak, aki segítséget nyújtva végigkísérte munkám alakulását a kezdetektől az utolsó simításokig. Hálás vagyok neki, hogy ötleteivel, magyarázataival támogatta szakdolgozatom elkészültét, a téma értő feldolgozását.

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

A matematikai elméletek fogalmakból és állításokból épülnek fel. Euklidesz(Kr.e. 300 körül) jött rá, hogy nem lehet minden állítást korábbi állításokra visszavezetni, szükség van olyan állításokra, amelyeket alapigazságoknak tekintünk. A matematikának nagyon izgalmas területe, hogy tudunk-e egyáltalán olyan állításokat megadni, illetve hány és milyen állításokat kell ahhoz megadnunk, hogy abból a tér elemeinek tulajdonságai, illetve a térben megfogalmazott tételek mindegyike levezethető legyen. Már gyermekkorban is tapasztalható, hogy az viszi előre a gondolkodást, ha a kérdéseket megválaszolják, okokat, magyarázatokat megadják, később pedig saját magunk keressük meg a válaszokat. Az a téma, amit én választottam szakdolgozatom témájának, az axiómák, részben cáfolja ezt az elképzelést, amit tanárként szem előtt kell tartani, részben pedig alátámasztja. Cáfolja, mivel *axiómá*kon a matematikai elmélet alapjául szolgáló olyan állításokat értjük, amelyeket bizonyítás nélkül elfogadunk. Alátámasztja, mivel ad igaz minimális számú olyan állítást, amit magyarázat nélkül elfogadunk, de minden mást le tudunk belőle vezetni.

Egy axiómára azonban egy egész elméletet nem tudunk építeni, ahhoz több axiómára lesz szükségünk. Axiómák összességét *axiómarendszer*nek nevezzük, melynek minden eleme egyszerre kell, hogy teljesüljön. Elvárásunk egy axiómarendszerrel szemben, hogy ellentmondásmentes legyen, azaz ne legyen olyan állítás, amelyet és amelynek tagadását egyaránt le tudjuk vezetni az axiómák segítségével. Legyen továbbá axiómarendszerünk független, tehát egyik eleme se legyen levezethető a többi axiómából. Ha az elmélet összes állításáról el lehet dönteni, hogy igaz vagy hamis, akkor axiómarendszerünk teljes. Nem vagyunk egyedül, ha úgy érezzük, hogy mindenre megadni a választ néhány állítás segítségével lehetetlen, hiszen gyakorlatban ez nem is teljesül, kiderült 1930-ban Kurt Gödel bizonyítása alapján, mivel bármely minimális követelményeknek megfelelő axiómarendszerek esetén léteznek el nem dönthető állítások.

Nézzünk egy kis történelmi áttekintést a [**3**] alapján, hiszen az axiómák sem egyetlen személyhez köthetők, hanem hosszú időn keresztül fejlődött ki. Ahogy fejlődött a tudomány, nem csak gyarapodtak az axiómák, hanem egyszerűsödött is az axiómarendszer. Mint már említettem a bevezető elején, a tudomány mai állása szerint Euklidesz foglalkozott ezzel elsőként, az *Elemek* című művében megadott axiómákat, amelyekkel egyenértékű axiómákon alapuló matematikai elméletet nevezzük ma *euklideszi geometriá*nak. A XIX. század második felében M. Pasch rendezési relációkkal kapcsolatos axiómájával(PRA) tisztázta, hogy a félsíkot, szám szerint kettőt, a sík egyenessel való kettévágásával kapjuk, hasonlóan félteret a tér síkkal történő kettéosztásával. Az axiómák tartalom szerinti csoportosításához D. Hilbert 1899-es *A geometria alapjai* című könyvét vesszük mérvadónak, ez alapján beszélünk a Párhuzamossági axióma mellett az illeszkedési, a rendezési, az Egybevágósági és a folytonossági axiómákról. Azonban a G. D. Birkhoff-féle 1930-as évekbeli vonalzó axiómával(BVA) kiválthatunk több Hilbert-féle axiómát.

Léteznek azonban olyan elképzelések, amelyek az euklideszi térben definiált tulajdonságoktól eltérő térbeli tulajdonságokkal bírnak, emiatt más axiómarendszerre építik fel a struktúrát. Ezeket nevezzük nemeuklideszi geometriáknak. A *projektív geometria* igaz csak a XVIII. század második felétől önálló ága a geometriának, de kifejlődésében nagyban szerepet játszott már az i.e. III. századi képzőművészet, melynek kapcsán kezdték tanulmányozni a perspektívát. A kialakulásban jelentős művek többek között: Euklidesz: *Optika*, amely a legkorábbról fennmaradt perspektivitásról szóló könyv, Apollóniosz: *Kónika*, 8 kötetes, a kúpszeleteket taglalja benne, Papposz: *Gyűjtemény*, művében Papposz nem csak saját, hanem korábbi időkből származó eredményeket is lejegyzett, Desargues: *Vázlat egy kúp síkkal történő metszésekor lejátszódó jelenségek megközelítésére*, melyben az involúció elméletét is megírta. Nem utolsó sorban Pascal pedig Desargues módszerét megértve már 16 éves korában kimondta híres tételét a kúpszeletekbe írt hatszögekről.

Dolgozatom három fő fejezetre osztható. Az első fejezetben a közoktatásban is tanított, mindenki által tapasztalat útján ismert euklideszi tér kapcsán vezetem be a témát, a fogalmakat, amelyeket geometriai tereknél általánosan használunk. Ismertetem a térelemeket, amik jelen vannak más geometriákban is, nem csak az euklideszi geometriában. Kimondom és fel is használom az axiómákat egy az axiómákból levezethető állításban. Az euklideszi tér axiómáit a fejezetnek a második részében össze is fogom hasonlítani a projektív tér axiómáival. A projektív tér axiómáinak bevezetése előtt a tér elemeit, a geometria kialakulását felvető transzformációt, a centrális vetítést vázolom. Az első fejezetben n-dimenziós térre kimondott, algebrai ismereteket megkövetelő projektív térbeli axiómarendszerrel kívánok majd tovább dolgozni a további két fejezetben, ahol már csak a projektív térrel foglalkozom, ami a szakdolgozatom középpontjában áll. Ez az egyetemi tanulmányaim során megismert projektív tér felépítési módjától teljes mértékben eltér, hiszen algebrai struktúrához definiálom a projektív teret, ezzel a matematika két különböző ága közti kapcsolatot megtalálva.

2. fejezet

Axiómák az euklideszi és a projektív térben

2.1. Axiómák az euklideszi térben

Ahhoz, hogy axiómarendszerről beszélhessünk, előbb ismernünk kell a tér elemeit, rajtuk bevezetett relációt. A pontokat, egyeneseket, síkokat soroljuk a térelemek közé, melyek a geometria alapfogalmai. Ahhoz, hogy megértsük, mégis mit értünk ezek alatt, írjuk körül szemléletesen tulajdonságaik segítségével. Válasszunk egy X halmazt, ezt nevezzük térnek, az euklideszi geometria alaphalmazának. Míg a pontok az X elemei, az egyenesek és a síkok bizonyos részhalmazok az alaphalmazban. Ezeknek a kitüntetett alakzatoknak, azaz térbeli részhalmazoknak, a jelölése is meghatározott. A pontokat nagy, az egyeneseket kis latin betűkkel jelöljük, a síkok azonosítására pedig a görög abc betűit használjuk. Geometriai fogalom továbbá az *illeszkedés*, ami alatt a térelemek között fennálló tartalmazást értjük. A P pont illeszkedik az e egyenesre, másképp a P pontra illeszthető az e egyenes, ha $P \in e$. Az f egyenes illeszkedik a Σ síkra, azaz az f egyenesre illeszthető a Σ sík, amennyiben $f \subset \Sigma$. Ha a pontok egy egyenesre illeszkednek, akkor *kollineáris* pontoknak nevezzük őket. Pontok egy rendszerét pedig abban az esetben nevezzük *komplanáris*nak, amennyiben egy síkra illeszkednek.

Az axiómák közül azok, amelyek a térelemek egymáshoz viszonyított tartalmazásáról fogalmaznak meg állításokat, az illeszkedési axiómák.

Definíció. Euklideszi téren a következő tulajdonságokat teljesítő rendszert értjük:

(IA1): Két pontra egy és csakis egy egyenes illeszkedik.

(IA2): Bármely síkhoz illeszkedik három nem kollineáris pont.

(IA3): Három nem kollineáris ponthoz egy és csakis egy sík illeszkedik.

(IA4): Ha egy egyenes két pontja illeszkedik egy síkhoz, akkor az egyenes illeszkedik a síkhoz.

(IA5): Van a térben négy olyan pont, amelyek nem kollineárisak és nem komplanárisak.

(IA6): Ha két síknak van egy közös pontja, akkor van egy további közös pontjuk is.

Az előzőekben kimondott összes axiómában, és a továbbiakban is, amikor egynél több pontról teszünk állítást, úgy értjük, hogy ezek különböző pontok. Az első axióma teszi egyértelművé számunkra, hogy mitől is egyenes egy egyenes, két ponthoz egyértelműen megadható mindkét irányba végtelen hosszú vonal, eszerint az $< A, B >$, $< B, A >$ illetve AB és BA jelöléseket is vezessük be, amelyek használhatók az egyenesre, amennyiben a két pont A és B. A következő kettő a síkot konkretizálja, hiszen megmutatja, hogy egy sík kapcsolata három nem kollineáris ponttal, legyen A, B és C, az illeszkedési relációt tekintve egyértelmű, és minden síkhoz találunk is ilyen pontokat, Σ jelölése az egyeneshez hasonlóan a generáló pontokkal, azaz $< A, B, C >$-vel is történhet, illetve a csak a pontok sorrendjében eltérő ekvivalens változataival. Így, hogy már tudjuk, mi az egyenes, illetve sík, az (IA4) segítségével megmondhatjuk, hogy ezen alakzatok között mi a kapcsolat. Az utolsó két axióma méretileg határolja be a 3-dimenziós teret, hiszen a térről illetve két metsző síkról beszél, ami ugyancsak térben képzelhető csak el. További igaz álítások is megfogalmazhatók a térbeli alakzatokra, de csak ezen axiómák segítségével, így a rendszer függetlenségének megtartása miatt azokat már nem nevezhetjük axiómáknak. Lássunk egy ilyen következményt.

Következmény. (IA1), (IA4), (IA6) -ból következik, hogy ha 2 különböző síknak van egy közös pontja, akkor a metszetük egy egyenes.

Bizonyítás. Ahhoz, hogy a következmény igazságát belássuk, vizsgáljuk 2 sík egymáshoz viszonyított helyzetét, és az egyes esetekben az axiómák segítségével állapítsuk meg a metszetet. Lehet két sík párhuzamos, ekkor a két síknak nincs közös pontja, lehet metsző, ekkor a síkoknak van közös pontjuk, de nem igaz az, hogy az egyik sík minden pontja eleme a másik síknak is, mert akkor egybeeső síkokról beszélünk. A következménynél fontos kikötnünk, hogy különböző síkokról van szó, hiszen ellenkező esetben nem zárhatóak ki az egybeeső síkok, amikre az illeszkedési axiómák, a 3 kiemeltet beleértve, ugyanúgy fennállnak. Egybeeső síkok esetén viszont tudunk mutatni (IA2) alapján 3 kollineáris pontot az egyik síkon, jelöljük a síkot Σ_1-gyel, amely 3 pont a másik síknak, Σ_2-nek is eleme, így a metszetüknek is. (IA3) szerint viszont 3 kollineáris ponthoz egy sík illeszkedik, tehát a metszetük egy sík lesz, nem pedig egyenes. Ugyancsak emiatt az axióma miatt azt is tudjuk, hogy $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ sík egybeesik Σ_1-gyel és Σ_2-vel. Kizárhatjuk továbbá a párhuzamos síkokat, hiszen nincs közös pontjuk, azaz metszetük az üres halmaz. Σ_3 és Σ_4 metsző síkok esetén (IA6) miatt tudunk mutatni 2 különböző pontot, amely mindkét síknak eleme, legyen A és B a két pont. (IA1) szerint $\exists! e : A \in e, B \in e$. Mivel $A \in \Sigma_3 \cap \Sigma_4$ és $B \in \Sigma_3 \cap \Sigma_4$, így (IA4) alapján e része mindkét síknak és a metszetnek is. Továbbiakban azt látjuk be, hogy a 2 különböző sík metszete maga az e egyenes. Kétféleképpen vehetünk hozzá A és B pontokhoz egy további tetszőleges pontot, amely C pontról azt állítjuk, hogy eleme a síkok metszetének. Tudjuk úgy választani, hogy az előző kettő ponttal kollineáris illetve nem kollineáris pont legyen a C. Amennyiben kollineáris pontot veszünk hozzá, ugyancsak az $e \subset (\Sigma_3 \cap \Sigma_4)$ tartalmazást fogjuk kapni, abban az esetben pedig ha C nem kollineáris A-val és B-vel, ellentmondás lép fel, hiszen az egybeeső síkok esetét kapjuk, pedig különböző síkokat tárgyaltunk. A következményben kikötött feltételek mellett valóban állíthatjuk, hogy a két sík metszete egy egyenes.

Szükséges volt bevezetni egyéb fogalmakat, axiómákat, amik a térben való kiigazodást, mozgást könnyítették meg, illetve annak alaposabb megismeréséhez járultak hozzá. Egyik ilyen terület az alakzatok távolságának vizsgálata, amihez alapfogalomként a pontok távolságát kell definiálnunk, amit a Birkhoff-féle vonalzó axióma ír le.

Definíció.(BVA) Adott egy olyan $d : X \times X- > R$ valós függvény, ahol az X a tér összes pontjának halmazát jelöli, az $X \times X = \{(A, B)|A, B \in X\}$ az X halmaz önmagával vett szorzata, és d teljesíti a következő feltételt: tetszőleges g egyeneshez létezik egy olyan $\xi : g \to R$ bijekció, hogy bármely a g-hez illeszkedő A, B pontokra fennáll a $|\xi(A) - \xi(B)| = d(A, B)$ összefüggés. A ξ kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés, mely egyben injektív és szürjektív is. Ez azt jelenti, hogy egy egyeneshez tudunk megadni egy olyan ξ koordinátázást, amely az egyenes minden pontjához különböző valós számokat rendel, és minden valós szám egyetlen egy pontot jelöl az egyenesen, miközben a fentebbi egyenlőség érvényben marad ezekre a pontokra.

Ezt a $d(A, B)$ számot fogjuk az A és B *távolság*ának nevezni. A távolság segítségével adhatunk meg egy térbeli rendezést, ami alapján egyértelműen eldönthető, hogy 3 pont közül melyik választja el a másik kettőt egymástól. Ezt a rendezési formát "közte van" relációnak nevezzük, és csak egyazon egyenesen elhelyezkedő pontokra állhat fenn.

Definíció. A, B és C legyenek különböző kollineáris pontok X-ben. Azt mondjuk, hogy C az A és B pontok között van, ha a $d(A, C) + d(C, B) = d(A, B)$ összefüggés fennáll.

Definíció. Egy $e \subset X$ (illetve $\Sigma \subset X$) esetén akkor mondjuk, hogy e (illetve Σ) elválasztja az A és B pontokat, ahol $A, B \in X$, ha e (illetve Σ) és $< A, B >$ metszete egy pont, ami A és B pontok között van.

A (BVA) felhasználásával a következőket állíthatjuk:

$d(A, B) = |\xi(A) - \xi(B)| = | - (\xi(A) - \xi(B))| = |\xi(B) - \xi(A)| = d(B, A)$

$d(A, A) = |\xi(A) - \xi(A)| = 0$

$d(A, C)+d(C, B) = |\xi(A)-\xi(C)|+|\xi(C)-\xi(B)| = |\xi(A)-\xi(B)| = d(A, B)$, ha C közte van az A és B pontoknak. Az abszolút érték ilyenformán összevonható, ha $(\xi(A) - \xi(C))$ és $(\xi(C) - \xi(B))$ azonos előjelűek, tehát az A és B pontokat elválasztó C pontra az is igaz, hogy $(\xi(A) - \xi(C)) * (\xi(C) - \xi(B)) > 0$. Ez egyben azt is jelenti, hogy nem csak a pontok között van térbeli rendezés, hanem a bijektíven hozzájuk rendelt valós számok között is fennáll egy rendezés, a "kisebb" reláció, hiszen az egyenlőtlenség szerint $\xi(A) < \xi(C) < \xi(B)$ vagy $\xi(B) < \xi(C) < \xi(A)$ egyikének teljesülnie kell. Ha ez nem teljesül, akkor C nem választja el egymástól A-t és B-t.

Definiáljuk a Pasch-féle rendezési axióma kimondása előtt a szakaszt, a félegyenest és a háromszögvonalat.

Definíció. Az $\overline{AB}$ szakasz az A, B pontok és az A és B pontokat elválasztó pontok uniója. Az A, B, úgynevezett végpontokon kívüli, pontjait a szakasznak belső pontoknak hívjuk. A szakasz hossza a végpontok távolsága, azaz $d(A, B)$.

Definíció. Az A kezdőpontú B-n átmenő félegyenesen az $[A, B >= \{P \in < A, B > \mid A \text{ nincs a } B \text{ és } P \text{ pontok között}\}$ alakzatot értjük.

Definíció. Legyen adva három nem kollineáris pont, A,B és C. Az A, B, C pontokkal, amelyeket csúcsoknak hívunk, meghatározott háromszögvonalon az $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ szakaszok uniójaként nyert alakzatot értjük, a három szakaszt pedig a háromszög oldalegyeneseinek nevezzük.

Definíció. (PRA) Ha adva van egy háromszögvonal, továbbá annak síkjában egy olyan egyenes, amelyre nem illeszkedik a háromszög egyik csúcspontja sem és metszi a háromszögvonal egyik oldalát, akkor az egyenes metszi a háromszögvonal még egy oldalát.

Az axióma tehát nem engedi meg, hogy egy egyenes egy háromszögnek csak egy oldalát messe. Mutassuk meg, hogy nem lehetséges az sem, hogy mindhárom oldalát messe.

Tegyük fel, hogy $ABC\triangle$ esetén metszi az egyenes a háromszögvonal összes oldalát, és nézzük meg, mi vezet ellentmondáshoz. Legyen D, E, F az egyenesnek azon 3 pontja, amiben rendre az $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ szakaszokat metszi, úgy hogy E válassza el D és F pontokat. A konstrukcióban a $< D, F >$ egyenes egyenesszerűségét tételezzük fel, és várhatóan ekkor az $ABC\triangle$ deformálódik, nem minden oldala lesz egyenes. Az A, D és F pontok nem kollineárisak, hiszen a $< D, F >$ egyenesen nincs rajta a háromszögvonal egyik csúcspontja sem. Mivel az A, F, C pontokról tudjuk, hogy kollineárisak és F az A és C szakasz belső pontja. Ha tekintjük az $< A, D >$ egyenest, és $\overline{BC}$ szakaszt szeretnénk meghatározni, azaz a B helyére vagyunk kíváncsiak, azt kapjuk, hogy B belső pontja $\overline{AD}$-nak, hiszen az E a $\overline{BC}$ szakasznak belső pontja. Egyszerre viszont nem lehet D az $\overline{AB}$-nak és B az $\overline{AD}$-nak is belső pontja, így beláttuk, hogy pontosan kettő oldalt metszenek az axiómában szereplő egyenesek.

Az egybevágósági axiómához szükségünk van újabb geometriai alakzatok, mint a félsík, a féltér és a zászló, illetve az egybevágósági transzformáció(rövidebben egybevágóság) fogalmára. Legyen adott egy Σ sík, egy rá illeszkedő e egyenes, egy $A \notin e$ pont, illetve egy $B \notin \Sigma$ pont.

Definíció. Az e egyenessel határolt A-t tartalmazó félsíkon azoknak a Σ-beli P pontoknak a halmazát értjük, melyekre igaz, hogy e nem választja el az A és P pontokat. Jelölése: $[e, A >$.

Definíció. A Σ-val határolt, B-t tartalmazó féltéren a $[\Sigma, B >$ alakzatot értjük.

Egy félegyenes, egy félsík és egy féltér által újabb alakzatot hozhatunk létre. Válasszunk olyan félegyenest, amely rajta van a félsík határegyenesén, félsík pedig tartalmazza a féltér határsíkját.

Definíció. Az ilyen alakzathármast nevezzük térbeli zászlónak.

Definíció. Egy olyan $\phi : X \to X$ bijektív leképezést, amelynél tetszőleges A, $B \in X$

pontokra fennáll a $d(A,B) = d(\phi(A),\phi(B))$ összefüggés, és amely egyenest egyenesbe képez, egybevágósági transzformációnak nevezünk.

Definíció. (EA) Ha adva van két térbeli zászló, akkor egyértelműen létezik egy olyan egybevágósági transzformáció, amely az első zászlót a második zászlóba viszi.

Minden térbeli zászlót egyértelműen megadhatunk négy nem komplanáris ponttal, legyenek A, B, C és D. Egy zászlót egy félegyenes, egy félsík és egy féltér segítségével határozunk meg, melyeket jelöljük az alábbi módon. Az A kezdőpontú, B-n átmenő félegyenes az $[A, B>$, az A és B pontok az e egyenest határozzák meg, az e egyenes és egy $C \notin e$ pont meghatároz egy Σ síkot, melyből az $[e, C>$-n az e egyenessel határolt C-t tartalmazó félsíkot értjük. Hasonlóan ha a Σ síkhoz hozzáveszünk egy $D \notin \Sigma$ pontot, a $[\Sigma, D>$ jelölje a Σ-val határolt, A-t tartalmazó alteret. Az axióma szerint tehát tudunk mutatni egy olyan egybevágóságot, amely A, B, C és D pontokat A', B', C' és D' pontokba viszi, hiszen ekkor a $Z(A,B,C,D)$ zászló is a $Z(A',B',C',D')$ zászlóba képződik.

Amennyiben csak az (IA1)–(IA6) illeszkedési axiómákat és a (BVA), (PRA), (EA) axiómákat használjuk fel a matematikai elmélet felépítéséhez, akkor az így nyert elméletet *abszolút geometriá*nak nevezzük. Az abszolút geometria tekinthető egy magnak is, hiszen az ezt felépítő axiómákhoz a (PA) axiómát hozzávéve kapjuk meg az *euklideszi geometriá*t, ám amennyiben a (HPA), azaz hiperbolikus párhuzamossági axiómát vesszük hozzá, a *hiperbolikus geometriá*t kapjuk meg. Utóbbi elméletből, amit Bolyai–Lobacsevszkij–féle geometriaként is szokás emlegetni, csak az euklideszivel vett fő különbségre fogok kitérni. A két matematikai elmélet illeszkedési axiómákban nem különbözik egymástól.

Végezetül nézzük meg a párhuzamossági axiómát és annak tagadását, ami az előbb említett két geometriához szükséges.

Definíció. (PA) Ha adott egy g egyenes és egy arra nem illeszkedő P pont, akkor az általuk meghatározott síkban csak egy olyan egyenes van, amely áthalad a P ponton és nem metszi g–t.

Definíció. (HPA) Ha adott egy g egyenes és egy arra nem illeszkedő P pont, akkor az őket tartalmazó síkban legalább két olyan egyenes van, amely illeszkedik a P pontra és nem metszi g–t.

2.2. A projektív tér axiómái

A perspektíva tanulmányozása a sokáig egyedüliként elfogadott, természetben is tapasztalható euklideszi geometriához képest olyan új elképzeléseket eredményezett, mint hogy létezik olyan struktúra, amelyben a tér bármely két egyenesének van közös pontja. Az újonnan bevezett pontok viszont az euklideszi geometriában nem szerepeltek, így muszáj ezeket hozzávennünk az alaphalmazunkhoz, azaz a térhez. A csillagász Johannes Kepler (1571–1630) és a francia építész Gérard Desargues (1591–1661) is foglalkoztak ezekkel a végtelen távoli pontokkal munkájuk során, mely pontok az *ideális pont* elnevezést kapták. Minden euklideszi egyeneshez hozzárendelünk egy ideális pontot úgy, hogy akkor és csak akkor fog megegyezni két egyeneshez hozzárendelt ideális pont, ha a két egyenes ugyanahhoz a párhuzamos egyenesosztályhoz tartozik. *Projektív egyenes*nek az euklideszi egyenes és a hozzá tartozó ideális pont unióját nevezzük. A végtelen távoli pontok mindkét irányból megközelíthetők az egyenesen, így a "közte van" reláció nem értelmezhető a pontokra a projektív egyenesek körében. Ebben a geometriában is elmondhatjuk, hogy pontok egy kitüntetett halmazaként fogható fel az egyenes, a sík valamint a tér is. Ez fennáll az euklideszi geometriából átvett térelemekre, de nem lesz másként az ideális pontok esetén sem, ami kapcsán beszélhetünk még *ideális egyenes*ről, *ideális sík*ról. Egy euklideszi síkot az egyeneseihez tartozó ideális pontokkal kibővítve nevezünk *projektív sík*nak, ezen ideális pontok pedig alkotják a síkhoz tartozó ideális egyenest. Ugyanez az ideális egyenese az ezzel a síkkal euklideszi értelemben párhuzamos síkoknak. A végtelen távoli pontokkal és egyenesekkel kibővített euklideszi tér a *projektív tér*. Az euklideszi tér összes párhuzamos síkosztályának megfelel egy–egy ideális egyenes. Ideális síknak pedig az euklideszi térhez definiált összes ideális pont halmazát nevezzük. Az ideális térelemek hozzávételével történik a projektív tér származtatása az euklideszi térből, azaz az euklideszi tér projektív kibővítése.

Mindez a projektivitás, azaz vetítés kapcsán merült fel, innen kapta a geometria a projektív geometria elnevezést. Ez a vetítés nem más, mint a meghatározott pontra történő középpontos, más néven *centrális vetítés*. A centrális vetítés esetén választunk egy tetszőleges helyzetű térbeli pontot, amelyet összekötjük a tárgy összes pontjával. A pontot vetítési centrumnak, jelölje C, az egyeneseket vetítősugaraknak, és a vetítősugarak összességét pedig sugárnyalábnak nevezzük. A tárgyunkról szeretnénk képet alkotni a folyamat során, ehhez válasszuk meg a képsíkot, amire az adott pontú centrális vetítés történjen. A képsíkon helyezkednek el a képpontok oly módon, hogy a P tárgypont, a C centrum és P képe, nevezzük P'-nek, ugyanazon az egyenesen helyezkedjenek el. A vetítési középpont és képpontok által meghatározott sugarak összessége a képalkotó sugárnyaláb. A probléma pedig az volt, hogy ha van egy tárgysíkot metsző képsík, és felveszünk a képsíkkal egy olyan párhuzamos síkot, nevezzük Σ-nak, amely tartalmazza a vetítés centrumát, akkor Σ-nak a tárgysíkkal vett metszetéből indított sugarak a centrumon áthaladva sosem fognak a képsíkon egy képpontot meghatározni, mivel egy ilyen egyenes teljes egészében része a képsíkkal párhuzamos Σ-nak. Tudunk azonban mutatni olyan sugársort a tárgysíkban, amely sugársort alkotó egyenesek mindegyike egy tetszőleges $T \in e$ pontra illeszkedik, ahol e-vel Σ-nak a tárgysíkkal vett metszetét jelöljük. A T a sugársor tartópontja. A sugársort alkotó egyenesek pontjait a tartópont kivételével leképezve a képsíkon a $< T, C >$ egyenessel párhuzamos egyenesek pontjait kapjuk. A tartóponthoz viszont nem tudnánk megadni képpontot az ideális pontok bevezetése nélkül, így nem lenne bijektív a leképezés, a kibővített síkban viszont már az.

Az előzőekben tárgyalt euklideszi axiómarendszer nem marad érvényben, hiszen az a nézet, hogy nem létezik két olyan egyenes a struktúrában, amelyeknek ne lenne metszéspontja, ellent mond a Párhuzamossági axiómának. A projektív geometria axiomatikus tárgyalását két olasz matematikus javasolta először, Gino Fano(1892) ás Mario Pieri(1899), további axiómák Oswald Veblen and John Wesley Young nevéhez köthetők(1908, 1910,1917).

Vezessünk be néhány definíciót az axiómarendszer tárgyalása előtt.

Definíció. Azt mondjuk, hogy egy n-dimenziós projektív tér egy k pontú pontrendszere általános helyzetű, ha közül semelyik $k-1$ sincs egy $(k-3)$-dimenziós altérben.

Sík, azaz $n=2$ esetén vegyünk $k=4$ általános helyzetű pontot, definíció alapján ezek közül egyik ponthármas sem fog egy egyenesre esni.

Definíció. Teljes négyszögnek nevezünk egy olyan konstrukciót, amely négy általános helyzetű pontból és az őket páronként összekötő hat egyenesből áll. A, B, C, D pontok a teljes négyszög csúcsai, AB, AC, AD, BC, BD, CD egyenesek a teljes négyszög oldalai.

Egy geometria axiómarendszere nem csak egyféle lehet, megadhatunk több ekvivalens rendszert is. Most tekintsük át a projektív tér illeszkedési axiómáit az illeszkedési reláció használatával. Azonban a relációt projektív tér esetén az euklideszi térbeli illeszkedéstől eltérően definiáljuk, mivel itt egy egyenes és egy egyenesre illeszkedő pontok halmaza között teszünk különbséget. Ezt figyelembe véve axiómák segítségével könnyen kaphatunk majd választ arra, hogy az új térelemek bevezetése után mely axiómák maradtak érvényben, illetve melyek nem.

Definíció. 3-dimenziós projektív térnek azokat a rendszereket nevezzük, melyekben teljesül, hogy

(p1): Bármely két különböző pontra egy és csakis egy egyenes illeszkedik.

(p2): Bármely két különböző síknak van legalább két közös pontja, vagyis legalább egy közös egyenese.

(p3): Egy tetszőleges egyeneshez és egy rá nem illeszkedő ponthoz egyértelműen megadhatunk egy tartalmazó síkot.

(p4): Egy tetszőleges síkot egy rá nem illeszkedő egyenes egyetlen pontban metsz.

(p5): Ha két különböző egyenes egy síkban fekszik, akkor pontosan egy pontban metszik egymást.

(p6): Ha két különböző egyenesnek van egy közös pontja, akkor egy síkban vannak.

(p7): Létezik 5 pont a térben úgy, hogy közülük semelyik 4 sincs egy síkban és semelyik 3 sincs egy egyenesen.

Nézzük meg most egyesével az axiómákat, viszgálva, hogy a projektív síkgeometria axiómái közé melyeket soroljuk, kitérve az euklideszi tér axiómáival fennálló kapcsolatokra.

A (p1) axióma megegyezik (IA1)-val. A (p3) axióma lényegében ugyanazt mondja ki, mint az (IA3). A projektív sík axiómái közé tartozik a (p5) síkra történő átfogalmazása, azaz (ax1): bármely két egyenesnek van legalább egy közös pontja.
További síkbeli axiómák: (ax2): Bármely két különböző egyenes metsző. (ax3): Létezik 4 pont a síkon, hogy közülük semelyik 3 sincs egy egyenesen.

A (p2) és (IA6) axómák közti különbség a (p5) axiómának a következménye. Abban különböznek, hogy projektív térben bármely két különböző síknak van egy közös pontja, amíg euklideszi térben ez párhuzamos síkok esetén nem teljesül, ahol találunk két olyan egyenest, melyek nem metszők. A (p7) nagyon hasonlít az euklideszi térben kimondott (IA5) axiómára, csupán annyiban térnek el, hogy euklideszi térben eggyel kevesebb ilyen pont létezését garantálja az axióma. Az (IA5) amiatt igaz, mert az (IA3) kimondja, hogy három nem kollineáris ponthoz illeszkedik egy sík, ha ezekhez hozzáveszünk egy olyan pontot, mely nem illeszkedik a három pont által meghatározott síkra, akkor teljesíti is az állítást, mindig tudok ilyen 4. pontot találni, ha nem lenne, nem lépnénk ki a síkból térbe.

Azonban dolgozatomban a projektív tér felépítését és annak tulajdonságait nem ábrázoló geometriai szempontból, hanem az úgynevezett analitikus geometria, vagy koordinátageometria segítségével szeretném vizsgálni, azaz a geometria fogalmaknak algebrai fogalmakat megfeleltetve, ezért most vezessünk be egy újabb axiómarendszert, ami már tetszőleges $n \geq 2$ dimenzióra használható.

Definíció. Legyen X egy tetszőleges halmaz S_i pedig $i = -1, 0, 1, .., n$ esetén X részhalmazainak egy-egy családja. Az $(X, S_{-1}, .., S_n)$ rendszert n-dimenziós projektív térnek, az S_i-k elemeit pedig az X ponttér i-dimenziós altereinek nevezzük, ha az alábbi axiómákat teljesítik:

(P1) Az egyetlen (-1)-dimenziós altér az üres halmaz, vagyis $S_{-1} = \emptyset$.

(P2) A 0-dimenziós alterek az X egypontú részhalmazai, vagyis $S_0 = \{\{p\} : p \in X\}$.

(P3) Az egyetlen n-dimenziós altér X, vagyis $S_n = \{X\}$.

(P4) Az S_i és S_j halmazok diszjunktak, ha $i \neq j$.

(P5) Alterek tetszőleges családjának a metszete is altér.

(P6): Bármely két W_1 és W_2 altérre fennáll a

$\dim(W_1) + \dim(W_2) = \dim(W_1 \cap W\_2) + \dim(W_1 + W\_2)$ dimenzióformula.

(P7): Létezik $n + 2$ általános helyzetű pont a térben.

A két axiómarendszer 3-dimenzió esetén ekvivalens, ahogy ezt a [**1**] kimodja a projektív terek axiomatikus tárgyalásánál. 2-dimenziós esetben, tehát projektív síkoknál, be is fogjuk látni az (Ekvivalencia) állításban a 3. fejezetben az addig bizonyított tulajdonságok segítségével.

3. fejezet

A projektív terek tulajdonságai

Láttuk, hogy a projektív tér elemeinek összességét az euklideszi tér elemeiből, azok ideális térelemekkel való kibővítésével kaptuk meg. Most nézzük meg, hogy tudunk-e azonosítani illetve hogyan egy pontot a projektív térben. Vezessünk be az E^2 euklideszi síkon egy O origójú, i, j egységvektorú Descartes-féle koordináta-rendszert, amiben egy $P \in E^2$ pontot egyértelműen meghatároz egy $(x, y) \in R^2$ koordináta, és adott koordináták esetén a (x, y) pontba vezető helyvektornak az $x * i + y * j$ vektor felel meg. Ez a koordinátázás a projektív sík euklideszi elemeire is jó lenne, viszont az ideális pontokhoz koordinátahármast nem tudnánk meghatározni, hiszen ezek a végtelenben vannak, végtelennel viszont a koordináták nem jelölhetők, mivel nem lenne egyértelmű amiatt, hogy -bizonyos esetektől eltekintve- más-más irányban különböző ideális pontok vannak. Elég csak az O tartópontú sugársort vizsgálnunk a síkon, hiszen egy párhuzamos egyenesosztályhoz egy ideális pont tartozik, és a párhuzamos egyenesek irányvektora is egy nemnulla skalárszorzótól eltekintve egyértelmű. Eszerint végtelenben levő pontokat kifejezhetjük véges koordinátákkal. Egy párhuzamos egyenesosztály ideális pontja megadható az origón áthaladó egyenesének egy tetszőleges irányvektorával, tehát egy ideális pont többféleképpen adható meg. Minden ilyen irányvektor egy pont helyvektora is egyben, így vegyünk hozzá az x, y koordinátákhoz egy további koordinátát, amit arra fogunk használni, hogy jelöljük ideális vagy közönséges pont-e az adott pont. Utóbbiaknak feleltessük meg az $[x, y, 1]$ homogén koordinátákat, az ideális pontoknak pedig az $[x, y, 0]$ homogén koordinátákat, amik, ahogy már volt volt szó róla, lényegében megegyeznek a $[\lambda * x, \lambda * y, 0]$, minden $\lambda \neq 0$ skalár esetén. Alkalmazzuk a közönséges pontok reprezentálásánál is ezt a szabályt, azaz egy pontot jelöljön a $[\lambda * x, \lambda * y, \lambda]$ homogén koordináta, ahol $\lambda \neq 0$ skalár. Így a projektív tér pontjainak koordinátái nem tűnhetnek egyértelműnek, hiszen egy síkbeli pontot egy egyenes ad meg, de a leképezés mégis egyértelmű. Úgy kell elképzelni, hogy E^2 síkhoz definiált homogén koordinátás térben, ahol adott egy x_1, x_2, x_3 tengelyű Descartes-féle koordinátarendszer, az E^2 sík az $x_3 = 1$ sík és a benne lévő koordinátarendszer O origója a $(0, 0, 1)$ pont, az x és y koordinátatengelyek pedig az x_1 és x_2 tengelyekkel párhuzamosak, így egy homogén koordináta által meghatározott egyenes, ha a harmadik koordinátája 1, akkor az $x_3 = 1$ síkból kimetszett pontnak felel meg. Ha $[x_1, x_2, x_3]$ alakban kapjuk meg a koordinátákat, akkor ebből a Descartes-koordinátákat olyan módon nyerjük vissza, hogy a homogén koordinátát $[\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}, 1]$ alakúra hozzuk, innen már látszik, hogy $x = \frac{x_1}{x_3}$ és $y = \frac{x_2}{x_3}$. A $[0, 0, 0]$ pont nem áll elő, mivel ellenkező esetben ez azt jelentené, hogy x és y egyszerre 0, azaz a $(0, 0)$ irányvektorú egyeneshez adja meg az ideális pontot, mivel ez egy kivétel, és ilyen irányvektorú egyenes nincs, így nem tartozik hozzá ideális pont sem.

A tér vektorainak halmazán műveletek is végezhetők, ezek felhasználásával a legtöbb állításról el tudjuk dönteni egy-egy probléma vizsgálata során, hogy teljesül-e a térben, illetve milyen feltételnek kell ahhoz teljesülnie, hogy igaz legyen. Vektortereket alapul véve is tudunk definiálni projektív tereket, de mielőtt jobban belemélyednénk a vektorterekhez asszociált projektív terek témakörbe, **[2]** alapján tekintsük át röviden az algebrai ismereteket. Vegyünk egy G nem üres halmazt és két kétváltozós műveletet, $^\circ$ és $\#$, amit G-n értelmezünk, azaz G két elemére alkalmazva a műveletet, G-beli elemet kapunk. Műveletekre értelmezzük a következő tulajdonságokat:

- asszociatív, ha $\forall x, y, z \in G$ esetén igaz, hogy $(x^\circ y)^\circ z = x^\circ(y^\circ z)$
- kommutatív, ha $\forall x, y \in G$-re $x^\circ y = y^\circ x$

- a műveletre nézve a csoportnak van egységeleme: $(\exists! e \in G)$ $(\forall x \in G)$ $x^\circ e = e^\circ x = x$

- invertálható, ha $(\forall x \in G)$ $(\exists! x^{-1} \in G)$ $x^\circ x^{-1} = x^{-1\circ} x = e$
- $\#$ disztributív $^\circ$ műveletre, ha $\forall x, y, z \in G$-re $(x^\circ y)\#z = (x\#z)^\circ(y\#z)$ és $z\#(x^\circ y) = (z\#x)^\circ(z\#y)$

Amennyiben a $^\circ$ műveletre teljesül, hogy asszociatív és egyértelműen létezik egységeleme, teljesül továbbá, hogy G minden elemének van egy és csak egy inverze, akkor G *csoport*. A kommutativitásnak azonban nem szükséges egy csoport esetén teljesülnie a csoportbeli műveletre, amennyiben teljesül, Abel-csoportnak nevezzük. Tekintsünk egy R halmazt, ha R az összeadásra nézve, amit $+$ jelöl, Abel-csoport, a szorzás pedig, jelölje $*$, asszociatív a halmazon, és érvényes a disztributivitás az összeadásra, akkor R *gyűrű*. A műveletekre bevezetett jelöléseket a továbbiakban is így fogjuk használni. Ha a szorzás is kommutatív és van egységeleme a gyűrűnek, továbbá minden nem nulla elemmel lehet osztani, akkor *test*ről beszélünk. Egy gyűrűt, ha nem nulla elemei csoportot alkotnak a szorzásra, *ferdetest*nek nevezünk. Ez alapján a testet kommutatív ferdetestként is definiálhatjuk.

Definíció. Vegyünk egy V halmazt. A V egy F ferdetest feletti vektortér, ha V-n be van vezetve

- az összeadás,
- a $\lambda \in F$ skalárral való szorzás,

és teljesül rá a következő:

- $(V, +)$, azaz a V halmaz és az azon értelmezett összeadás, Abel-csoportot alkot
- skalárral való szorzás disztributív az összeadásra, az alábbiak szerint:
  - $\forall \lambda \in F$ és $\forall v, w \in V$ esetén $\lambda * (v + w) = \lambda * v + \lambda * w$
  - $\forall \lambda, \mu \in F$ és $\forall v \in V$ esetén $(\lambda + \mu) * v = \lambda * v + \mu * v$
  - $\forall \lambda, \mu \in F$ és $\forall v \in V$ esetén $(\lambda * \mu) * v = \lambda * (\mu * v)$
  - $\forall v \in V$ esetén $1 * v = v$, ahol 1 az F egységeleme.

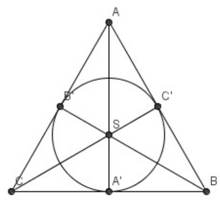
Vezessünk be egy ekvivalenciarelációt a $V' = V\backslash\{0\}$ halmazon. Vegyünk két vektort a V'halmazon, amely x, y vektorok ekvivalensek, ha $\exists \lambda \in F^\times\backslash\{0\}$ skalár, ahol $F^\times$ az F ferdetest multiplikatív csoportja, és λ-ra az $x = \lambda * y$ egyenlőség teljesül. Ennek az ekvivalenciarelációnak az ekvivalenciaosztályai kölcsönösen egyértelműen felelnek meg a

V egydimenziós lineáris altereinek. Világos, hogy az előbb azért zártuk ki a nullvektort és a nulla skalárt, hogy ez a megfeleltetés egyértelmű legyen, mert ha a $\lambda * y$ szorzat egyik tényezője 0, akkor a másik tényezőtől az eredmény már nem függ, hanem minden esetben 0-t kapunk eredményül, illetve az $x = 0$ lehetséges úgy is, hogy egy tetszőleges vektort 0-val szorzunk, illetve a 0 vektort bármilyen skalárral szorozva is ezt kapjuk. Ezen ekvivalenciarelációhoz tartozó ekvivalenciaosztályok halmazát a V vektortérhez asszociált projektív térnek nevezzük és $P(V)$-vel jelöljük. Minden $0 \neq v \in V$ vektorhoz tudunk mutatni ekvivalenciaosztályt, amit $[v]$-vel jelölünk, ez a $P(V)$ projektív tér egy eleme, amely pontot a v vektor határoz meg, röviden ezt a $[v] \in P(V)$ reprezentánsának is nevezzük.

A [**1**] által kimondott Wedderburn tétele alapján elfogadjuk, hogy minden véges ferdetest test, azaz a véges ferdetestek kommutatívak a szorzás műveletre. F test feletti n-dimenziós projektív térről, azaz a $PG(n, F)$-ről abban az esetben beszélünk, ha a vektortér, amihez a projektív teret asszociáljuk az $F^{(n+1)}$, ami olyan $x = (x_1, ..., x_k)$ alakú rendezett k-asok halmaza, ahol $k = n + 1$ és az x_i-k $1 \leq i \leq n + 1$ esetén F ferdetest elemei. $F^{(n+1)}$-ben két ilyen rendezett k-as összege alatt a k-asok megfelelő komponenseinek összegéből képzett rendezett k-ast értjük, az F-beli skalárral való szorzás esetén a k-as összes elemét szorozzuk meg a skalárral.

Ha az F a q elemből álló $GF(q)$ véges test, akkor a V vektortérhez asszociált n-dimenziós projektív teret $PG(n, q)$-val jelöljük. Csak abban az esetben létezik ilyen projektív tér, ha q egy prímhatvány, mivel minden véges test elemszáma prímhatvány. Nézzük meg mi ennek az oka. A testet jellemzi a *karakterisztiká*ja, azaz hogy hányszor kell összeadnunk az egységelemet, hogy a nullelemet kapjuk. Ez 0 vagy prímszám lehet, véges elem esetén viszont biztosan nem nulla, hiszen összeadásra zárt a test, így véges sokszor összeadva az egységet meg kell kapnunk a zéruselemet. A test *résztest*je egy összeadásra, szorzásra, additív és multiplikatív inverzképzésre zárt halmaz a testben, amely tartalmazza a testbeli egységelemet. Ha vesszük $GF(q)$ legszűkebb résztestjét, azaz prímtestjét, ez izomorf lesz Z_p-vel, ami a modulo p maradékosztályok p prím elemű teste. Az előbbi izomorfiából következik, hogy $GF(q)$ elemszáma prímhatvány.

A következőkben nézzünk egy példát véges testek feletti projektív síkra, ez legyen a *Fano-sík*, a kételemű $F_2 = \{0, 1\}$ test feletti projektív sík, $PG(2, 2)$. Az F_2 a legszűkebb test, hiszen a 0, 1 számoknak kötelezően szerepelniük kell az elemek között a test definíciója miatt, műveletei a modulo 2 összeadás és szorzás. A Fano-síknak 7 eleme van, az $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (0, 0, 1)$, $A' = (0, 1, 1)$, $B' = (1, 0, 1)$, $C' = (1, 1, 0)$, $S = (1, 1, 1)$.



Hogy az elemszám miért pont 7, egyelőre fogadjuk el, a példa utáni állítás ad majd rá magyarázatot. Arra keresünk először választ, hogy hány pont határoz meg egy egyenest, az axiómákra alapozva annyit tudunk, hogy 2 pont minimum kell hozzá. Egy pont rajta van egy egyenesen, ha az őt meghatározó vektor előáll az egyenes két mind egymástól, mind ettől a harmadik ponttól különböző pont meghatározó vektorainak lineáris kombinációjaként. Az adott pontok esetén a,b nullától és egymástól különböző vektorok nemnulla lineáris kombinációja az a,b,$(a + b)$, így minden egyenesnek 3 pontja van, amelyek az $[a]$, $[b]$, $[a + b]$. A Fano-sík szemléltetésére használjunk egy szabályos ABC háromszöget, melynek az A', B', C' pontok rendre az A, B, C-vel szemközti oldalak felezőpontjai, S az $ABC\triangle$ súlypontja. A Fano-sík egyeneseit azok és csak azok a pontok alkotják, amelyek egy euklideszi egyenesen, ebből 6 db található, vagy az $ABC\triangle$ beírt körén vannak.

Állítás. Az alábbi példa kapcsán általánosságban mutassuk meg, hogy egy q elemű test feletti projektív síkban minden egyenesnek $q+1$ pontja van. Így már felhasználhatjuk ezt a következő állításunkban.

Bizonyítás. (vázlatosan) Vektorterek és vektorterekhez asszociált, meghatározott test felett értelmezett projektív terek közti megfeleltetéskor egy vektort, ami egy pontot határoz meg a vektortérben, egy projektív térbeli pontot reprezentáló egyenesnek feleltetünk meg, melyet a vektor testelemekkel való végigszorzásával kapunk meg. A megfeleltetés egyenestartó. Egy tetszőleges projektív egyenes két vektor lineáris kombinációiként áll elő, ahol az együtthatók a testbeli elemeken futnak végig, de egyszerre nem lehetnek nullák, hisz akkor 1 ponttá, az origóvá fajul el az egyenes. Ha az egyik együttható nulla, akkor a másik vektor skalárszorosait kapjuk, ilyenből 2 van, ezek két projektív térbeli pontot határoznak meg, amik különböznek. Ha az egyik együttható sem nulla, akkor szorozzunk be az egyik együttható inverzével, ami ugyancsak testbeli elem, ekkor az egyik együttható 1, a másik együttható a test bármely eleme lehet, kivéve a nullát, amit már tárgyaltunk. Ilyenből $q-1$ van, és mindre különböznek is, mivel a két vektor lineárisan független. A két eset összesen $q+1$ pontot határoz meg.

Állítás. Legyen $e = \{P_{i_1}, P_{i_2}, \ldots, P_{i_{q+1}}\}$ egy egyenes a $PG(2,q)$ síkban. Ekkor az e egyenesnek, mint $(q+1)$-szögnek, a szabályos sokszög középpontja körüli elforgatottjai az alfa többszöröseivel q^2+q+1 különböző sokszöget alkotnak. Ezen elforgatottak mindegyike a $PG(2,q)$ sík egy-egy egyenesének felel meg és ezeken kívül nincs is más egyenes a síkon.

Bizonyítás. Két részből áll, először is be kell bizonyítanunk, hogy az elforgatottak mind egyenest alkotnak $PG(2,q)$-ban, majd ezen elforgatottak különbözőségét. Az F_q véges, q elemű test. Ahhoz, hogy megadhassuk, hogyan származtatható az F_q feletti $PG(2,q)$ projektív sík ciklikus reprezentációja, vegyük az F_{q^3} testet, melyben résztest az F_q, F_q feletti 3-dimenziós vektortérnek úgy, hogy F_q-ból zárjuk ki a nullát, mert szorzásra nézve enélkül nem lenne egyértelmű, így viszont az F_{q^3}-ból is kizárandó, szóval az $|F_{q^3} \backslash \emptyset| = q^3-1$. A 0-tól különböző skalárok száma a q elemű testben $q-1$, azaz $q-1$ vektor egymásnak skalárszorosai lesznek, egy egyenest határoznak meg, és a projektív síkon, mint tudjuk, ezek ugyaazt a pontot fogják reprezentálni, így meg is kaptuk a F_{q^3}-hoz asszociált 3-dimenziós projektív tér pontjainak számát: $\frac{q^3-1}{q-1} = q^2+q+1$. Legyen ξ egy kitüntetett elem, mely szorzásra nézve generálja az F_{q^3}-öt. A $PG(2,q)$ projektív síknak az elemeit jelölhetjük a $\xi^1, \ldots, \xi^{q^2+q+1}$ vektorokkal, mivel q^2+q+1 különböző elem van, tehát ξ_i, ξ_j ugyanazt az elemet jelölik, ha $i \equiv j \pmod{()} q^2+q+1)$. Megtehetjük, hogy az általunk vizsgált projektív tér pontjait euklideszi térben egy szabályos (q^2+q+1)-szög csúcsainak vesszük fel, minden egyenesnek $q+1$ pontja van, a ξ-vel való szorzás pedig megfelel egy $PG(2,q)$-ban egyenest egyenesbe képező transzformációnak. A transzformáció ebben a szabályos sokszögben a $[\xi_i]$ csúcsok egy $\frac{2*\pi}{q^2+q+1}$-szögű középpont körüli elforgatását jelenti.

Vizsgáljuk, hogy van-e köztük azonos egyenes. Jelöljük ezek halmazát a következőképp: $I = \{k \in Z : \xi^k(e) = e\}$, ahol e egyenest jelöl. Ha egy k benne van a halmazban, akkor a $-k$ is benne lesz, hiszen az pont azt jelenti, hogy visszaforgatom a kapott, az eredetivel azonos egyenesből a kiindulási helyzetbe. Ha a forgatás egy k. és j. hatványa is ugyanabba az egyenesbe viszi az egyenest, akkor a ξ^{k-j} is egy jó forgatás, azaz $k \in I$ és $j \in I$ esetén $k - j \in I$. Ez alapján a következőképp írható fel: $k = l * d$, ahol d és l pozitív egészek, és $l \in I$. A továbbiakban azt szeretnénk bizonyítani, hogy $d = q^2+q+1$. Vegyük a $k = q^2+q+1$ esetet, ami egy teljes környi elforgatás, azaz az egyenes minden pontja önmagába megy. Ennél korábbi hatványaira is igaz lehet, hogy az elforgatás előtti egyenest kapjuk az elforgatás után vissza, de mivel q^2+q+1 egy jó k szám, így a d osztója a (q^2+q+1)-nek. Az e csúcsponthalmaza felbontható diszjunkt szabályos $\frac{q^2+q+1}{d}$-szögek uniójára az alapján, hogy mely pontok mennek egymásba a forgatások során, hiszen nem feltétlenül teljesül az, hogy egy egyenes egy pontja a többi q pont mindegyikébe át fog menni. Az egyenest meghatározó sokszögön belül alkossanak ezen sokszögek csúcsosztályokat. Ha egy csúcsosztályból kiválasztunk egy tetszőleges csúcsot, akkor a köríven az egyik irányba elindulva a következő csúcsosztálybeli csúcsot ξ^d esetén kapjuk, a következőbe az első ξ^{2*d} után megy, még végül a kiindulási helyzetet a $\xi^{\frac{q^2+q+1}{d}*d} = \xi^{q^2+q+1}$ forgatás viszi. A csúcsosztályok számát, jelöljük z-vel, igaz nem ismerjük, de mindegyik csúcs beleesik egy csúcsosztályba, és a csúcsosztályokon belül ugyanannyi, szám szerint $\frac{q^2+q+1}{d}$ csúcs található, eszerint $z * \frac{q^2+q+1}{d} = q+1$-et, ahol $z \in Z$. Átrendezve $\frac{z}{d} = \frac{q+1}{q^2+q+1}$, és mivel q^2+q+1 és $q+1$ relatív prímek, így az egyetlen lehetséges megoldása az egyenletnek, ha $z = q+1$ és $d = q^2+q+1$. Tehát bizonyítottuk, hogy $PG(2,q)$-nak pontosan q^2+q+1

egyenese van, és ezek kivétel nélkül az e egyenes elforgatottjai.

Lássuk be néhány következményét az axiómáknak. Tekintsük át előbb az ehhez szükséges definíciókat.

Definíció. Egy $A \subseteq X$, ahol X egy tetszőleges halmaz, által generált $[A]$ altéren az A-t tartalmazó összes altér metszetét értjük, ez a legszűkebb olyan altér, melynek része A.

Definíció. Alterek összege, generátuma az uniójuk által generált altér, jelölésként a $\sum\limits_{i \in I} W_i$-t, véges sok altérre a $W_1 + .. + W_2$-t használjuk.

Állítás. Ha W_1, W_2 alterek, és igaz rájuk, hogy W_1 részhalmaza W_2-nek, akkor $dimW_1 \leq dimW_2$, az egyenlőség csak $W_1 = W_2$ esetben esetén teljesül.

Bizonyítás. Rekurzióval definiáljuk alterek egy növekvő sorozatát a tartalmazás műveletre, a következőképpen: $W_1 = V_0 \subseteq \ldots \subseteq V_l = W_2$.

$V_0 = W_1$-ből szeretnénk $V_l = W_2$-be jutni, ehhez segítségül vegyük V_k-t, amiről feltesszük, hogy már definiáltuk, továbbá a rekurzió $V_k = W_2$ esetén álljon le. Amennyiben az egyenlőség még nem áll fenn, azaz $\exists\ P \in W_2/V_k$ pont, folytassuk a rekurziót V_{k+1} megkonstruálásával egy tetszőleges ilyen P pont segítségével, $V_{k+1} = V_k + \{P\}$. A generátum az összeg két tagjához hasonlóan része W_2-nek. A dimenzióformula alapján $\dim V_{k+1} = \dim V_k + \dim\{P\} - \dim \emptyset = \dim V_k + 1$, hiszen pont dimenziója 0, az üres halmazé -1. Visszavezetve: $\dim V_k = \dim V_{k-1} + 1 = \ldots = \dim V_0 + k = \dim W_1 + k$. Továbbá $\forall k$-ra teljesülnie kell, hogy $\dim V_k \leq \dim W_2$ a tartalmazás miatt, tehát $\exists\ l >= 0$, mely index esetén a rekurzió leáll, és $\dim V_l = \dim W_2 = \dim W_1 + l \geq \dim W_2$. Egyenlőség csak $l = 0$ esetén áll fenn, amikor $W_2 = W_1$.

Lemma. Legyen W egy projektív tér valamely nem üres altere, $P \notin W$ pedig a tér egy pontja. Ekkor a $\{P\}$ és W generátuma, azaz összege, a $PQ = \{P\} + \{Q\}$ egyenesek uniója, ahol a Q a W altéren fut végig.

Bizonyítás. Válasszunk egy tetszőleges $Q \in W$ pontot, ez esetben a $W + \{P\}$ altér tartalmazza mind Q-t, mind P-t, így az altér definíciója szerint az összegüket, azaz QP vektort is, és annak skalárszorosait, azaz a PQ egyenest is, amely $\{P\}$ és $\{Q\}$ generátuma. Ebből az következik, hogy $\{P\} + W \supseteq \bigcup\limits_{Q \in W} PG$, hiszen minden $Q \in W$ esetén elmondhatjuk ezt. Vizsgáljuk most a másik irányból, vegyünk egy $R \in \{P\} + W$ pontot. Ha $R = P$, akkor bármely olyan PQ egyenes lefedi, amit az előzőekben konstruáltunk, és mivel W nem üres altér, így létezik is ilyen Q pont. Ha $R \neq P$, PR egyenest tartalmazza a $\{P\} + W$ altér, amiből $PR + W = \{P\} + W$. Dimenzióformula alkalmazásával $\dim(W \cap PR) = \dim W + \dim PR - \dim(\{P\} + W) = 0$. A térelemek közül a pontnak a dimenziója 0, ami azt jelenti, hogy PR egyenes a W alteret pontosan egy pontban metszi, nevezzük Q pontnak, és az R rajta van a PQ-n. Mivel $R \in \{P\} + W$ egy tetszőleges P-től különböző pont, és bármely $R \neq P$-re ugyanez fennáll, így ez a fordított irányú $\{P\} + W \subseteq \bigcup\limits_{Q \in W} PG$ tartalmazást is bizonyítja, amely az $R = P$ lehetőséget is magába foglalja.

Állítás. Valamely n-dimenziós X projektív tér egy W részhalmaza akkor és csak akkor altér, ha bármely két különböző P,$Q \in W$ pontra tartalmazza a PQ generátumukat.

Bizonyítás. Vegyük azt az irányt, amikor feltesszük, hogy W altér X-ben, és mutassuk meg, hogy ekkor bármely két pontra a generátum része W-nek. Bármely két különböző P,$Q \in W$ esetén a $PQ = \{P\} + \{Q\}$ generátum a legszűkebb altér, amely P és Q pontot is tartalmazza. Tekintsük a $W \cap PQ$ metszetet, ami alterek metszete, így altér, továbbá W-nek és PQ-nak is része, és tartalmazza mindkét pontot. Azonban a $PQ \subset (W \cap PQ)$ is igaz, hiszen definíció szerint a legszűkebb P és Q pontokat tartalmazó altér a P, Q pontokat tartalmazó $\widetilde{W_i}$ alterek metszete, aminek meg része a $W \cap PQ$. A tartalmazás tranzitív reláció, így $PQ \subset \cap\widetilde{W_i}$, és $PQ = W \cap PQ$, azaz $PQ \subset W$. Nézzük a másik irányt, amikor azt tesszük fel, hogy W részhalmaza X-nek, és bármely két különböző pontjára igaz, hogy tartalmazza a rajtuk átmenő egyenest is. Rekurzióval definiáljuk alterek egy növekvő sorozatát a tartalmazás műveletre úgy, hogy $V_0 = \emptyset$ legyen a kezdőtag és minden tagja W-ben legyen. Feltesszük, hogy V_k-t már definiáltuk, ekkor $V_k = W$ esetén álljunk le. Amennyiben létezik $P \in W/V_k$ pont, tehát $V_k \subset W$-nek, folytassuk a rekurziót egy tetszőleges ilyen P pont segítségével, $V_{k+1} = V_k + \{P\}$ legyen. Mivel $V_0 = \emptyset$ volt, így a V_1 egy W-beli pont, tehát $V_1 \subseteq W$. $k \geq 1$ esetén az előző lemma szerint $V_{k+1} = \underset{Q \in W}{\cup} PQ$, a feltétel szerint pedig minden P,$Q \in W$-re $PQ \in W$. A dimenzióformula alapján $\dim V_{k+1} = \dim V_k + \dim\{P\} - \dim \emptyset = \dim V_k + 1$, hiszen pont dimenziója 0, az üres halmazé -1, továbbá ebből adódik az is, hogy $\dim V_0 = -1 + 0 - (-1) = 0$, $\dim V_1 = 0 + 0 - (-1) = 1$,...,$\dim V_k = k$. Bármely W részhalmazáról van szó az n-dimenziós X térnek, mivel a V_k alterek benne vannak W-ben, így biztosan teljesül, hogy $\dim V_k \leq n$. Következésképp létezik egy olyan k szám, melyre a rekurzió megáll a $V_k = W$-nél, így W is az altérsorozat egy tagja, azaz altér.

Az előző két álítás felhasználásával ki tudunk mondani egy következményt is, amely azonos alaphalmazú n-dimenziós projektív tér struktúrák ekvivalenciájára ad egy erős állítást, ami leszűkíti a vizsgálódást csak az egyenesek halmazára.

Következmény. Az $(X, S_{-1}, S_0, \ldots, S_n)$ és az $(X, \widetilde{S_{-1}}, \widetilde{S_0}, \ldots, \widetilde{S_n})$ két n-dimenziós projektív tér struktúra ugyanazon az X halmazon, az S_1 és az $\widetilde{S_1}$ elemei egyenesek, ha ezek halmaza megegyezik, akkor $S_i = \widetilde{S_i}$, tehát az i-dimenziós alterek halmaza meg fog egyezni a két struktúrában, minden $-1 \leq i \leq n$-re.

Bizonyítás. (P1) axióma azt mondja ki, hogy az egyetlen (-1)-dimenziós altér az üres halmaz, eszerint $S_{-1} = \widetilde{S_{-1}}$. A 0-dimenziós alterek halmaza is meg fog egyezni, hiszen a bennük levő alterek egyetlen pontból állnak, amely pontok az alaphalmaz elemei, és a két struktúra alaphalmaza azonos. Az 1-nél nagyobb dimenziójú alterek halmazaihoz használjuk fel az elözö állításokat. Egy W altér és tőle diszjunkt 0-dimenziós altér összegét fel tudjuk építeni egyenesek segítségével, azaz ha a W altérhez hozzávett pont a P, akkor $W + \{P\} = \underset{Q \in W}{\cup} PQ$. Továbbá azt is tudjuk, hogy csak az a X-beli halmaz lehet altér, amely tartalmazza bármely két pontjának generátumát. Az egyenesek megegyeznek, tehát a belőlük épített i-dimenziós alterek és azok halmaza is meg fog egyezni a két struktúrában, minden $1 \leq i \leq n$-re. Ezzel beláttuk az állítást.

Ám nem csak két azonos dimenziójú projektív tér között találhatunk kapcsolatot. Minden altér egy projektív tér struktúrát örököl az egész tértől, azaz teljesülnek az altérhez definiált rendszerre a projektív tér axiómái.

Állítás. Ha W egy k-dimenziós altér valamely n-dimenziós $(X, S_{-1}, S_0, \ldots, S_n)$ projektív térben, akkor a W-hez tartozó projektív tér a $(W, S_{-1}^W, S_0^W, \ldots, S_k^W)$ rendszer, ahol az S_i^W-ket a következőképp definiáljuk: $S_i^W = \{A \in S_i : A \subseteq W\}$ a $-1 \leq i \leq k$ értékekre, azaz olyan X-beli részhalmazok egy családja, amelyek részhalmazok a W altérben is, továbbá az S_i^W-k lesznek a W ponttér i-dimenziós alterei.

Bizonyítás. Ahhoz, hogy belássuk, $(W, S_{-1}^W, S_0^W, \ldots, S_k^W)$ projektív tér, teljesülnie kell az illeszkedési axiómáknak. A (P1)-(P6) axiómák teljesülése triviális. A (P7) axióma teljesülésének megmutatásához tekintsük az $(X, S_{-1}, S_0, \ldots, S_n)$ projektív teret, amire az axiómák teljesülnek, így létezik benne $n+2$ általános helyzetű pont, amiket jelöljünk $P_1, P_2, ..., P_{n+2}$-vel. Ha egy pont nincs benne egy altérben, akkor az összegük egy az addigitól 1-gyel nagyobb dimenziójú altér. Az $(X, S_{-1}, S_0, \ldots, S_n)$ rendszer n-, a W altér k-dimenziós, így tudunk $n-k$ darab olyan W-től diszjunkt X-beli általános helyzetű pontot kiválasztani az $n+2$ pont közül, hogy igaz legyen az alábbi: ezek közül a $P_1, P_2, ..., P_{n-k}$ pontok közül mindig tudok úgy választani egy következő pontot, hogy az addigi W-t lépésenként 1-1 ponttal bővítő altértől diszjunkt legyen, azaz $P_i \notin W + \{P_1\} + ... + \{P_{i-1}\}$, és így teljesüljön a dimenziójukra, hog $\dim(W + \{P_1\} + ... + \{P_i\}) = k + i$ minden $1 \leq i \leq n-k$ esetén. A W-től diszjunkt $P_1, P_2, ..., P_{n-k}$ pontok generátumát nevezzük V-nek, ami így W-vel együtt az egész teret kifeszítik, hiszen $\dim(V + W) = \dim(W + \{P_1\} + ... + \{P_{n-k}\}) = k + (n-k) = n$. A dimenzióformula megadja nekünk a W-től diszjunkt pontok generátumának és a W altérnek hány dimenziós a metszete, azaz $\dim(V \cap W) = \dim V + \dim W - \dim(V + W)$, amiből a $\dim W = k$, a $\dim(V + W) = n$, továbbá mivel a V kifeszíthető $n-k$ ponttal, így

$\dim V \leq n-k-1$, aminek maximumértékét fel is kell vennie, hogy az egyenlet megoldható legyen, és így $\dim(V \cap W) = -1$, amiből a $V \cap W = \emptyset$ következik. Az $n+2$ általános helyzetű pont közül a maradék segítségével definiáljuk $1 \leq i \leq k+2$-re a $V_i = V + \{P_{n-k+i}\}$-t, ekkor $\dim V_i = n-k$, hiszen $\dim V$-nál 1-gyel nagyobb, és a V_i altér pontosan egy Q_i pontban metszi W-t, ami a dimenziótételből jön ki, $\dim(V_i \cap W) = \dim V_i + \dim W - \dim(V_i + W) = (n-k)+k-n = 0$. A $k+2$ metszéspontról azt állítjuk, hogy általános helyzetűek W-ben, ezt indirekten fogjuk bizonyítani, a feltevésünk tehát ennek tagadása, miszerint $Q_1, Q_2, ..., Q_{k+2}$ nem általános helyzetű pontok W-ben. Ekkor az általános helyzetű pontokkal ellentétben kiválasztható $k+1$, mondjuk $Q_1, ..., Q_{k+1}$, melyek egy olyan H alteret feszítenek ki, melyre $\dim H \leq k-1$. Ekkor egyfelől a dimenziótétel alapján: $\dim(V+H) = \dim V + \dim H - \dim \emptyset \leq (n-k-1)+(k+1)+1 = n-1$, másfelől pedig a $V+H = V+\{Q_1\}+...+\{Q_{k+1}\} = (V+\{Q_1\})+...+(V+\{Q_{k+1}\})$, mivel az, hogy külön-külön vesszük hozzá V-hez a pontokat, majd úgy adom össze az összegeket, nem vezet máshoz, mert $V+V$ maga a V. Tudjuk továbbá, hogy a következő is teljesül: $(V+\{Q_1\})+...+(V+\{Q_{k+1}\}) = (V+\{P_{n-k+1}\})+...+(V+\{P_{n+1}\}) = V+\{P_{n-k+1}\}+...+\{P_{n+1}\}$, aminek az az oka, hogy a $(V+\{Q_i\}) \subseteq (V+\{P_{n-k+i}\}) = V_i$ tartalmazás fenáll, hiszen a Q_i-vel a metszeteket jelöltük, de dimenzióik egyenlők, V-től eggyel több, mivel mindkettő esetben 1-1 diszjunkt pontot vettünk hozzá V-hez, tehát ekvivalens lépés, ha a metszéspontokkal vett összeget veszem. A második egyenlőség oka már előbb szerepelt. A V-t $P_1, P_2, ..., P_{n-k}$ pontok generálják, így összességében arra jutunk, hogy a $V+H = \{P_1\}+...+\{P_{n-k}\}+\{P_{n-k+1}\}+...+\{P_{n+1}\} = X$, de viszont $\dim X = n \nleq n-1$. Az indirekt bizonyítás során ellentmondásra jutottunk, így az eredeti állításunk is igaz, $\exists\ k+2$ általános helyzetű pont W-ben, melyek a $Q_1, Q_2, ..., Q_{k+2}$ pontok, a $(W, S_{-1}^W, S_0^W, \ldots, S_k^W)$ rendszer pedig projektív tér.

Végezetül a fejezet lezárásaként nézzünk meg egy állítást, ami összekapcsolja az ábrázoló geometria elemeinek felhasználásával felállított axiómarendszert azzal az analitikus axiómarendszerrel, amit mindeddig tárgyaltunk. Az előző fejezetben megadtunk egy közérthetőbb axiómarendszert a projektív síkok esetén, mondjuk ki ezeket most tulajdonságokként, és a fejezet által megismert vektorterekhez asszociált projektív terekre mutassuk meg $n = 2$ esetén, hogy valóban megvan az ekvivalenciakapcsolat.

Állítás (Ekvivalencia) Az $(X, \emptyset, \{\{p\} : p \in X\}, S, \{X\})$ rendszer, ahol X egy adott halmaz, $\emptyset$, $\{\{p\} : p \in X\}$, S, $\{X\}$ pedig rendre -1, 0, 1, 2-dimenziós alterek csoportja, akkor és csak akkor elégíti ki a 2-dimenziós projektív tér axiómarendszerét, ha az (X, S) párra teljesülnek a következő tulajdonságok:

- X bármely két különböző P, Q pontjához egyértelműen létezik olyan $e \in S$ egyenes, melyre $P \in e$ és $Q \in e$.
- Bármely két különböző e,$f \in S$ egyeneshez egyértelműen létezik olyan P pont, melyre $P \in e$ és $P \in f$.
- Létezik 4 pont az X-ben úgy, hogy közülük semelyik 3 sincs egy S-beli egyenesen.

Bizonyítás. Bizonyítsuk először a "csak akkor" irányt, azaz ha $(X, \emptyset, \{\{p\} : p \in X\}, S, \{X\})$ rendszer egy 2-dimenziós projektív tér, akkor a tér pontjaira és egyeneseire teljesül az állításban szereplő 3 tulajdonság. Mutassunk egy $e \in S$ egyenest, amelyre teljesül, hogy tartalmazza X két különböző P, Q pontját . A $\{P\}$ és $\{Q\}$ egy véges dimenziós vektortér alterei, összegük is altér lesz, és alkalmazhatjuk rájuk a dimenzióformulát: $\dim(\{P\} + \{Q\}) = \dim\{P\} + \dim\{Q\} - \dim(\{P\} \cap \{Q\}) = \dim\{P\} + \dim\{Q\} - \dim \emptyset = 0 + 0 - (-1) = 1$, amiből az következik, hogy $\{P\} + \{Q\} \in S$, válasszuk e-nek a $\{P\} + \{Q\}$ alteret. Továbbá indirekt bizonyítás útján beláthatjuk, hogy csak egy ilyen egyenes létezik. Tegyük fel, hogy $\exists f \in S$, úgy hogy $f \neq e$, $P \in f$ és $Q \in f$. Az $e \cap f$ altér, mivel alterek metszete, és $(e \cap f) \subseteq e$ és az $(e \cap f) \subseteq f$, így $\dim(e \cap f) \leq 1$, viszont P, Q is eleme a metszetnek, ami a dimenziójára nézve a $\dim(e \cap f) > 0$ egyenlőtlenséget adja, innen már következik a $\dim(e \cap f) = 1$. Mivel $\dim(e \cap f) = \dim e = \dim f$, korábbi állítás szerint $e \cap f = e = f$. Ezzel bizonyítottuk, hogy egyértelműen létezik a P, Q pontokat tartalmazó e egyenes. Mutassuk meg, hogy teljesül a második tulajdonság is, azaz két különböző egyeneshez egyértelműen létezik közös pont, metszéspont. A feltevés szerint $\exists e, f \in S$, amihez $\exists! P : P \in e, P \in f$. Mivel $e \subset (e + f)$, ezért $\dim e < \dim(e + f)$, viszont $\dim X = 2$, ami felső korlátot is szab $\dim(e+f)$-nak, azaz $\dim(e+f) = 2$, tehát $e+f = X$. Dimenziótétellel vizsgáljuk a két egyenes metszetét, $\dim(e \cap f) = \dim e + \dim f - \dim(e+f) = 1+1-2 = 0$, miszerint e és f metszete egy pont. A harmadik tulajdonság a (P7) axióma 2-dimenziós projektív tér esetén, hiszen definíció szerint a projektív sík négy pontját általános helyzetű pont-négyesnek mondjuk, ha közülük semelyik három nem esik egy egyenesre.

Az "akkor" irány bizonyításához feltesszük, hogy (X, S)-re teljesül a három tulajdonság, és bizonyítjuk, hogy a projektív tér axiómái teljesülnek a $(X, \emptyset, \{\{p\} : p \in X\}, S, \{X\})$ rendszerre. A (P1)-(P3) triviálisan teljesül. A (P4) bizonyításához használjuk fel a harmadik tulajdonságot, miszerint X-nek van legalább négy pontja, ebből következik, hogy S_{-1}, S_0 és S_2 páronként diszjunktak. A következőkben azt látjuk be, hogy ezek S_1-től is diszjunktak. Legyen A, B, C, D általános helyzetű pont, e pedig egy tetszőleges egyenes, a harmadik tulajdonságból következik, hogy legalább az egyik pont nincs rajta az egyenesen, legyen $A \notin e$, továbbá az AB, AC és AD egyenesek közül bármely kettő nem esik egybe, mivel egyébként lenne 3 pont, amely egy egyenesen lennének. Az egyenesek és az e egyenes metszéspontjai páronként különböznek, mivel a $AB \cap e = AC \cap e = E$ ellentmondáshoz vezetne, hiszen akkor $AB \cap AC = \{A, E\}$ lenne, ami két különböző egyenes esetén nem lehetséges. Ebből adódik, hogy egy egyenesnek legalább 3 különböző pontja van, tehát S_1 diszjunkt S_{-1}-től és S_0-tól is. Kell még az S_2-től való diszjunktság bizonyítása, ami viszont abból következik, hogy ha X egyenes lenne, akkor minden pontja az egyenesen lenne, így nem létezne X-ben négy általános helyzetű pont. Az ötödik axióma az alterek metszetéről állítja, hogy altér. Elég két altérre megmutatni az összes lehetséges esetet. W_1 és W_2 legyen a két altér. Ha az egyik altér az $\emptyset$, akkor a metszet is az $\emptyset$, ha az X, akkor a metszet a másik altér, ha egy pontból áll, akkor a metszet az vagy maga a pont, vagy az $\emptyset$. Egy esetet még nem néztünk, amikor két egyenes, e és f metszetére vagyunk kíváncsiak. Ha a két egyenes egybeesik, akkor a metszet is a szóbanforgó egyenes, ha $e \neq f$, akkor egy pontban metszik egymást, ami ugyancsak altér. A (P6), azaz dimenzióformula érvényben léte bizonyítandó már csak, hiszen az utolsó axióma megegyezik a feltevésben szereplő utolsó tulajdonsággal. Vizsgáljuk meg az eseteket. Ha az egyik altér tartalmazza a másikat, mondjuk $W_1 \subset W_2$, akkor $W_1 \cap W_2 = W_1$ és $W_1 + W_2 = W_2$, azaz $\dim(W_1 \cap W_2) + \dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$, ezt szerettük volna belátni. Tegyük fel, hogy $W_1 = X$, ekkor $W_1 \cap W_2 = W_2$ és $W_1 + W_2 = X$, amennyiben $W_1 = \emptyset$, akkor $W_1 \cap W_2 = \emptyset$ és $W_1 + W_2 = W_2$. Lehetséges még, hogy az egyik egy pont, legyen P, a másik egy egyenes, legyen e, és $P \notin e$, akkor $W_1 \cap W_2 = \emptyset$ és $W_1 + W_2 = X$, a dimenziótételbe behelyettesítve $0 + 1 = -1 + 2$. Ha W_1 és W_2 dimenziója megegyezik, akkor muszáj különbözniük. P és Q különböző pontok esetén $W_1 \cap W_2 = \emptyset$ és $W_1 + W_2 = PQ$, ahol PQ a közös egyenes, azaz a dimenziótétel a következőképp alakul: $0 + 0 = -1 + 1$, e és f különböző egyenesek esetén pedig a metszet egy pont, a generátum pedig maga a sík, X, azaz $1 + 1 = 0 + 2$ a formulába helyettesítés után.

Mivel e 3 egymástól független tulajdonság teljesülése ekvivalens azzal, hogy a rendszer projektív sík, így beláttuk, hogy 2-dimenzió esetén ez egy jó axiómarendszer.

4. fejezet

Desarques tétele

A Desargues-tétel a projektív geometria egy fontos tétele. A tétel euklideszi geometriában csak bizonyos megkötésekkel teljesül, amik a párhuzamossági axiómát szem előtt tartják, azonban minden legalább három dimenziós projektív térben teljesül. A következőkben a centrális és axiális perspektíva definíciója kimondása után kétszer is bizonyítjuk a tételt. Először lássuk be, hogy a ferdetestek feletti vektorterekhez asszociált projektív terekben igaz a Desargues-tétel, majd a projektív terek illeszkedési axiomáinak segítségével is bizonyítsuk.

Definíció. Azt mondjuk, hogy az $ABC\triangle$ és az $A'B'C'\triangle$ centrális perspektívában van, azaz egy P pontra nézve perspektívek, ha a megfelelő pontjaikat összekötő egyenesek, azaz AA', BB', CC', a P pontban metszők.

Definíció. Azt mondjuk, hogy az $ABC\triangle$ és az $A'B'C'\triangle$ axiálisan, e egyenesre vonatkozóan perspektív, ha megfelelő oldalaik metszéspontja egy egyenesen van, $AB \cap A'B' \in e$, $BC \cap B'C' \in e$ és $AC \cap A'C' \in e$.

Desargues-tétel. Két háromszög akkor és csak akkor perspektív egy pontra nézve, ha perspektív egy egyenesre nézve.

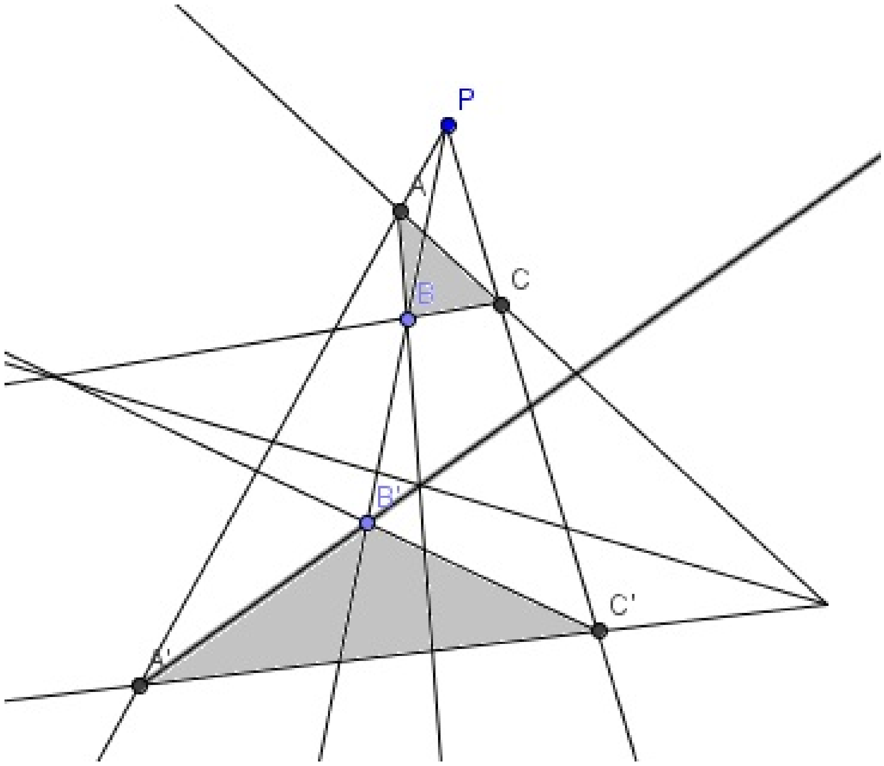
Bizonyítás. Legyenek az A, B, C és A', B', C' pontok a háromszögek csúcsai, a reprezentáló vektoraik a, b, c és a', b', c'. Két eset van, amikor a megfelelő csúcsok és oldalak közül valamelyik kettő egybeesik, illetve amikor ezek közül egyik sem esik egybe. Az első, egyben könnyebben belátható esetben tegyük fel, hogy $A' = A$, ekkor $P = BB' \cap CC'$ a centruma, az AQ egyenes pedig a tengelye a perspektivitásnak, ahol $Q = BC \cap B'C'$. Most nézzük azt a lehetőséget, amikor két oldal esik egybe, például $A'B' = AB$. A háromszögek $P = AB \cap CC'$ pontra, illetve, $Q = BC \cap B'C'$ és $R = AC \cap A'C'$ jelölések bevezetése után, QR egyenesre nézve perspektívek. Ekkor mindkét féle perspektivitás egyszerre teljesül.
A második esetben nézzük előbb a tétel odafele irányát, azaz feltesszük, hogy P-re nézve perspektívek a háromszögek. Legyenek a háromszög megfelelő oldalainak metszéspontjai $A'' = BC \cap B'C'$, $B'' = AC \cap A'C'$ és $C'' = AB \cap A'B'$. Azt szeretnénk belátni, hogy ezek kollineárisak. Használjuk ki ehhez, hogy a projektív teret vektorterekhez asszociáltuk, és fejezzük ki a pontokat reprezentánsukkal. Három pont akkor esik egy egyenesre, ha a meghatározó vektoraik lineárisan összefüggnek, tehát meg kell mutatnunk, hogy ha $A'' = [a'']$, $B'' = [b'']$ és $C'' = [c'']$, akkor $\alpha_1 * a'' + \alpha_2 * b'' + \alpha_3 * c''$ nem csak triviális esetben 0, vagyis amikor az $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. A $P = [p]$ pont az AA', BB', CC' egyenesek metszéspontja. Mivel P pont rajta van az egyeneseken, a reprezentáló vektora, p kifejezhető az a és a', b és b', c és c' lineáris kombinációjaként, $p = \lambda_1 * a + \lambda_2 * a'$, $p = \mu_1 * b + \mu_2 * b'$és $p = \nu_1 * c + \nu_2 * c'$. Ezek mivel a három egyenlet bal oldalán ugyanaz áll, megtehetjük, hogy vesszük páronként a jobb oldalakat, amik egyenlőek lesznek egymással, és átrendezzük őket a következő formára: $\lambda_1 * a - \mu_1 * b = \mu_2 * b' - \lambda_2 * a'$, $\nu_1 * c - \lambda_1 * a = \lambda_2 * a' - \nu_2 * c'$ és $\mu_1 * b - \nu_1 * c = \nu_2 * c' - \mu_2 * b'$. Ezek viszont azt fejezik ki, hogy vannak olyan pontok, amik felírhatók kétféleképp is, attól függően, hogy milyen egyenes elemeként fejeztük ki, továbbá ezek a pontok nem mások, mint a háromszögek megfelelő oldalainak metszéspontjait, amit kerestünk, így a $\lambda_1 * a - \mu_1 * b = c''$, $\nu_1 * c - \lambda_1 * a = b''$ és $\mu_1 * b - \nu_1 * c = a''$ teljesülnek. A felírás alapján már bizonyított, hogy kollineárisak-e, mivel $\alpha_1 * a'' + \alpha_2 * b'' + \alpha_3 * c'' = \alpha_1 * (\mu_1 * b - \nu_1 * c) + \alpha_2 * (\nu_1 * c - \lambda_1 * a) + \alpha_3 * (\lambda_1 * a - \mu_1 * b)$
$= \alpha_1 * \mu_1 * b - \alpha_1 * \nu_1 * c + \alpha_2 * \nu_1 * c - \alpha_2 * \lambda_1 * a + \alpha_3 * \lambda_1 * a - \alpha_3 * \mu_1 * b$
$= (\alpha_3 * \lambda_1 - \alpha_2 * \lambda_1) * a + (\alpha_1 * \mu_1 - \alpha_3 * \mu_1) * b + (\alpha_2 * \nu_1 - \alpha_1 * \nu_1) * c = 0$, amennyiben

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$-at 1-nek választjuk.

A fordított irány esetén feltesszük, hogy az $ABC\triangle$ és az $A'B'C'\triangle$ axiálisan perspektívek, legyenek az oldalak metszéspontjai $A'' = BC \cap B'C'$, $B'' = AC \cap A'C'$ és $C'' = AB \cap A'B'$. Vizsgáljuk azt az esetet, amikor a megfelelő oldalegyenesek metszéspontjai közül valamely egybeesik egy csúcsponttal. Az $A'' = A$, $B'' = B$ és $C'' = C$ esetek nem lehetségesek, mivel akkor $ABC\triangle$ elfajult háromszög lenne annak következtében, hogy az adott csúcs a vele szemközti oldalon lenne. Legyen $A'' = B$, a B és B' által meghatározott egyenesen van a P centrum, amennyiben centrálisan is perspektív a két háromszög, továbbá mivel az $A'' = BC \cap B'C'$, ezért B, B', C' pontok kollineáriak, viszont így a $CC' \cap BB' = C' = P$. Ebben és az ezzel szimmetrikus esetekben, amikor $A'' \in \{B, C, B', C'\}$, vagy $B'' \in \{A, C, A', C'\}$, vagy $C'' \in \{A, B, A', B'\}$, nem beszélhetünk PAA', PBB' és PCC'ponthármasokról, amik egy egyenesre illeszkednek. A nem elfajuló esetek bizonyításához használjuk fel az $AA'B''$ és a $BB'A''$ háromszögeket, melyek C''-re centrálisan perspektívek, hiszen AB, $A'B'$ és $B''A''$ egyenesek C''-ben metszik egymást. Erre már alkalmazhatjuk a tétel bizonyított irányát, azaz $\exists$ e egyenes, amire a két egyenes tengelyesen perspektív, méghozzá a $C = B''A \cap A''B$ és a $C' = B''A' \cap A''B'$ pontok által meghatározott egyenes a keresett e egyenes. A perspektivitás miatt az $(AA' \cap BB') \in CC'$, amiből már következik a centrális, P-re való perspektivitás, hiszen ez azzal jár, hogy a $AA' \cap BB' \cap CC'$ egy közös pont, P.

Az illeszkedési axiómákkal definiált projektív terek általánosabbak lehetnek a vektorterekhez asszociált projektív tereknél, vajon igaz-e abban is a tétel. Az $n \geq 3$-dimenziós projektív terekben az illeszkedési axiómákból következik a Desargues-tétel, ám sík esetén ez nincs így.

Desargues-tétel. ($n \geq 3$-dimenziós projektív tér illeszkedési axiómáival bizonyítva)
Bizonyítás. Legyenek az ABC és $A'B'C'$ háromszögek P pontra nézve perspektívek. Két esetet különböztetünk meg.



Első esetben az ABC és $A'B'C'$ háromszögek nem egy síkban vannak, azaz a $\Sigma = \{A\}+\{B\}+\{C\}$ és a $\Sigma' = \{A'\}+\{B'\}+\{C'\}$ síkok különbözők. Az A, B, C és P pontok egy 3-dimenziós alteret feszítenek ki, mely altér tartalmazza A', B', C' pontokat és a Σ és Σ' síkokat, illetve a két sík generátumaként is meg lehet adni. A dimenziótételből tudjuk, hogy Σ és Σ' metszete egy e egyenes, hiszen $\dim(\Sigma\cap\Sigma') = \dim\Sigma+\dim\Sigma'-\dim(\Sigma+\Sigma') = 2+2-3$. Azt szeretnénk belátni, hogy erre az e egyenesre perspektívek a háromszögek, azaz a megfelelő oldalak metszéspontjainak geometriai helyét kell megállapítanunk. Ha $\Sigma_{AB} = \{A\}+\{B\}+\{P\}$ megegyezne Σ vagy Σ' bármelyikével, akkor mind a kettővel egybeesne, de kikötöttük, hogy a konfiguráció nem egy síkban van. $\Sigma_{AB}\cap e$-ről a dimenziótétel alapján tudjuk, hogy $\dim(\Sigma_{AB}\cap e) = \dim\Sigma_{AB}+\dim e-\dim(\Sigma_{AB}+e) = 2+1-3 = 0$, azaz egyetlen pont, jelöljük P_{AB}-vel. A Σ_{AB} a két síkot a hozzájuk tartozó háromszögek megfelelő oldalegyeneseiben metszi, azaz $\Sigma_{AB}\cap\Sigma = AB$ és $\Sigma_{AB}\cap\Sigma' = A'B'$. AB és $A'B'$ részhalmaza Σ_{AB}-nek, azaz e-vel közös pontjuk csak a P_{AB} lehet. Ezt bizonyítja, hogy $AB\cap A'B'\cap e = (\Sigma_{AB}\cap\Sigma)\cap(\Sigma_{AB}\cap\Sigma')\cap(\Sigma\cap\Sigma') = \Sigma_{AB}\cap\Sigma\cap\Sigma' = \Sigma_{AB}\cap(\Sigma\cap\Sigma') = \Sigma_{AB}\cap e = P_{AB}$. A Σ_{BC} és a Σ_{AC} síkok bevezetésével hasonlóan beláthatjuk a $BC\cap B'C' = P_{BC}$ és a

$AC \cap A'C' = P_{AC}$ egyenlőségeket, ahol $P_{BC} = \Sigma_{BC} \cap e$ és $P_{AC} = \Sigma_{AC} \cap e$, amivel az e egyenesre való perspektivitást beláttuk.

Második esetben az ABC és $A'B'C'$ háromszögek ugyanabban a Σ síkban vannak, így a perspektivitás centruma, P is eleme Σ-nak. A bizonyításban a legalább 3-dimenziós tereket vizsgáljuk, így tudunk mutatni egy $S \notin \Sigma$ pontot. Korábbi állításból tudjuk, hogy egy n-dimenziós projektív tér k-dimenziós alterének van $k+2$ általános helyzetű pontja, hiszen minden altér egy projektív tér struktúrát örököl az egész tértől. Ez alapján választhatunk az SP egyenesen egy az S és P pontoktól különböző $\widetilde{S}$ pontot. Bizonyításunk független attól, hogy a P pont által kettéosztott SP egyenesen az S-sel azonos vagy különböző félegyenesen vesszük fel a $\widetilde{S}$ pontot. Az első esetre szeretnénk visszavezetni a jelenlegi esetet, így a két segédpontunk segítségével mutatunk egy olyan háromszöget, amely az ABC és $A'B'C'$ háromszögekkel egyaránt perspektív, viszont az általa kifeszített sík nem a Σ. A P pontot a pontra való perspektivitás definíciója alapján a megfelelő csúcsok összekötésével kaptuk, azaz $A' \in AP$ és a $\widetilde{S} \in SP$ alapján az $\{S\}+\{A\}+\{P\}$ tartalmazza az A', $\widetilde{S}$ pontokat és az SA és $\widetilde{S}A'$ egyeneseket. Az S pontot összekötve A, B és C pontokkal, az $\widetilde{S}$-t pedig A', B' és C' pontokkal, $SA \cap \widetilde{S}A' = \widetilde{A}$, $SB \cap \widetilde{S}B' = \widetilde{B}$ és $SC \cap \widetilde{S}C' = \widetilde{C}$. Az $\widetilde{A}\widetilde{B}\widetilde{C}$ a keresett háromszög, hiszen az ABC háromszöggel S-re nézve, míg az $A'B'C'$ háromszöggel $\widetilde{S}$-re nézve perspektív. $\Sigma_{\widetilde{A}\widetilde{B}\widetilde{C}} \neq \Sigma$, ha $\Sigma_{\widetilde{A}\widetilde{B}\widetilde{C}} = \{\widetilde{A}\} + \{\widetilde{B}\} + \{\widetilde{C}\}$, így igaz rájuk az első eset, azaz axiálisan is perspektívek, továbbá ennek tengelye a síkok metszeteként adódó e egyenes lesz. Az $AB \cap \widetilde{A}\widetilde{B} \cap e$ és az $A'B' \cap \widetilde{A}\widetilde{B} \cap e$ ebben az esetben is egy-egy pont e-n, ezeket a következőképp is írhatjuk: az $AB \cap e = \widetilde{A}\widetilde{B} \cap e$ illetve az $A'B' \cap e = \widetilde{A}\widetilde{B} \cap e$, amiből a $AB \cap e = A'B' \cap e$ adódik. Hasonlóan a $BC \cap e = \widetilde{B}\widetilde{C} \cap e$ és a $B'C' \cap e = \widetilde{B}\widetilde{C} \cap e$, illetve az $AC \cap e = \widetilde{A}\widetilde{C} \cap e$ és az $A'C' \cap e = \widetilde{A}\widetilde{C} \cap e$ egyenlőségekből adódik a $BC \cap e = B'C' \cap e$ illetve az $AC \cap e = A'C' \cap e$. Ezzel azt is bizonyítottuk, hogy $ABC\triangle$ és $A'B'C'\triangle$ is e egyenesre vonatkozóan perspektív. A ferdetestek feletti vektorterekre való bizonyításból átemelhető a „csak akkor” irány „akkor” irányból való következése.

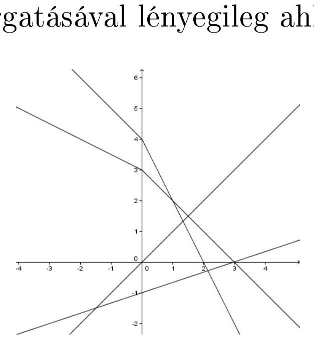
Azt állítjuk, hogy $n = 2$ esetén nem következik az illeszkedési axiómarendszerből a

Desargues-tétel. Ennek bizonyítása a következésre adott ellenpélda segítségével fog történni, amikor is egy általunk konstruált projektív síkban az illeszkedési axiómák teljesülnek, ám a Desargues-tétel nem. Projektív sík esetén megkülönböztetünk desarguesi illetve nem-desarguesi projektív síkokat.

Definíció. Egy projektív síkot Desargues-félének vagy desarguesinak nevezünk, ha benne bármely két, pontra nézve perspektív háromszög tengelyre nézve is perspektív, azaz teljesül rá a Desargues-tétel.

Az E^2-n bevezetett Descartes-féle koordináta-rendszerben az általunk konstruált sík pontjainak halmaza az $(x, y) \in R$ koordinátájú pontok és az ideális pontok uniója. A valós affin síkhoz képest viszont az egyeneseken némiképp változtassunk. Azokhoz az $y = m * x + b$ alakban felírható egyenesekhez, ahol $m, b \in R$, $m \geq 0$, illetve a függőleges egyenesekhez vegyük hozzá az ideális pontjukat. Amennyiben $m, b \in R$, $m > 0$, definiáljuk a következő módon: $\{(x, y) : x \leq 0, y = m * x + b\} \cup \{(x, y) : x > 0, y = 2 * m * x + b\}$, azaz a pozitív meredekségű egyenesek az y tengelyben "megtörnek", továbbá ezekhez a töröttvonalakhoz vegyük hozzá az $y = m * x + b$ egyenesek ideális pontját $\forall x$ esetén. Ezek következménye, hogy az ideális egyenes is része lesz az általunk leírt síknak.

A konstrukciót Moulton-síknak nevezzük F. R. Moulton amerikai matematikus után, aki 1902-ben találta ezt a Hilberténél egyszerűbb modellt nem-desarguesi síkokra, aki modelljében algebrai irányból közelítette meg a problémát. Az illeszkedési axiómák ebben a modellben is teljesülnek. Az ábrán szemléltetésképp egy ellenpélda a Desargues-tétel teljesülésére. Ahogy az ábrán is látszik a [**4**] által definiált egyenesek ugyanolyan jó ellenpéldaként szolgálnak, mint a [**1**] könyvben leírt x tengely menté megtörő egyenesek, hiszen a konstrukció -90°-os elforgatásával lényegileg ahhoz a megldáshoz juthatunk.



Bibliography

[1] CSIKÓS BALÁZS - KISS GYÖRGY, *Projektív geometria*, Polygon Jegyzettár, 2011

[2] KISS EMIL, *Bevezetés az algebrába*, Typotex, 2007

[3] VERHÓCZKY LÁSZLÓ, *Axiómarendszer és modellek*, ELTE TTK Matematikai Intézet, 2010

[4] A. BEUTELSPACHER - U. ROSENBAUM, *Projetive Geometry: From Fondations to Applications*