

# Ruletták

SZAKDOLGOZAT

**Készítette: Schanda Gergely György**

Matematika BSc - tanári szakirány

**Témavezető: dr. Naszódi Márton, adjunktus**  
ELTE TTK, Geometriai Tanszék



Eötvös Loránd Tudományegyetem  
Természettudományi Kar  
Budapest, 2014

# Tartalomjegyzék

1. Bevezető	2
2. A sokszög profilú kerék	3
3. Kardiod profilú kerék	6
4. A ciklois tautochron tulajdonsága	12
5. A ciklois brachisztochron tulajdonsága	17
Irodalomjegyzék	22

# 1. Bevezető

Szakdolgozatom célja néhány ruletta érdekes tulajdonságának bemutatása. Gördülő mozgással minden nap találkozhatunk, a ruletták alatt egy így mozgó pont pályáját értjük. Leggyakoribb példa a kerék egy pontjának pályája haladás közben. Céloom a differenciálgeometria segítségével négy érdekes problémát bemutatni.

Az első fejezetben egy „alternatív” autó kereket vizsgálok. Ennek lényege, hogy az így konstruált kerékkal rendelkező autó megfelelő úton egyenletesen, egyenes pályán mozog.

A második fejezetben szereplő feladat is egy egyenest ad eredményül, de az ott szereplő „kerékkal” már nem egyenletes mozgást kapunk. Ennek a feladatnak érdekessége, hogy itt két nevezetes ruletta (a ciklois és a kardiodid) által generált ruletta szerepel.

A harmadik fejezetben a ciklois egy tulajdonságát mutatom be, a cikloidális inga állandó periódusidejét. Az utolsó fejezet is a ciklois egy meglepő tulajdonságáról szól, itt a ciklis brachisztochron tulajdonságát bizonyítom.

Ezúton szeretnék köszönetet mondani Naszódi Mártonnak a konzultációkon nyújtott tanácsaiért.

## 2. A sokszög profilú kerék

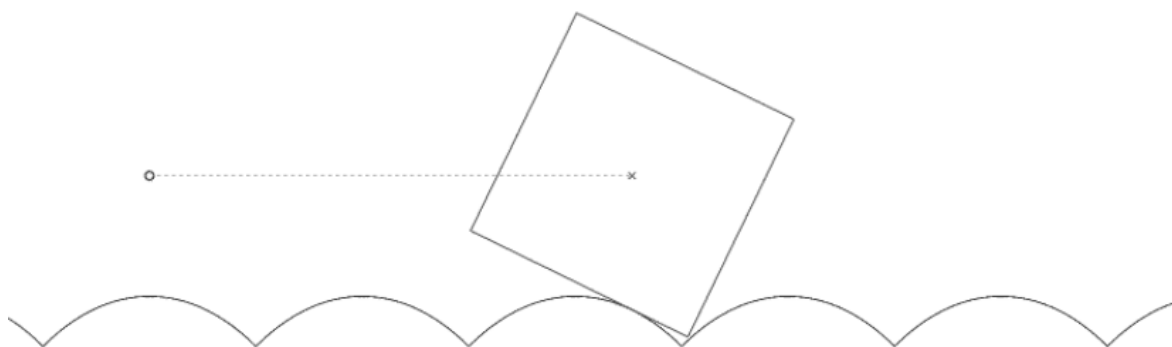
A Csodák Palotájában látható egy autó, amelynek érdekessége, hogy a kerekének profilja nem kör, hanem négyzet. A játék furcsasága, hogy az autó haladása közben az utas nem érez zötykölődést, a kerék formája ellenére. Ez a kerékhez kialakított speciális út miatt van így.

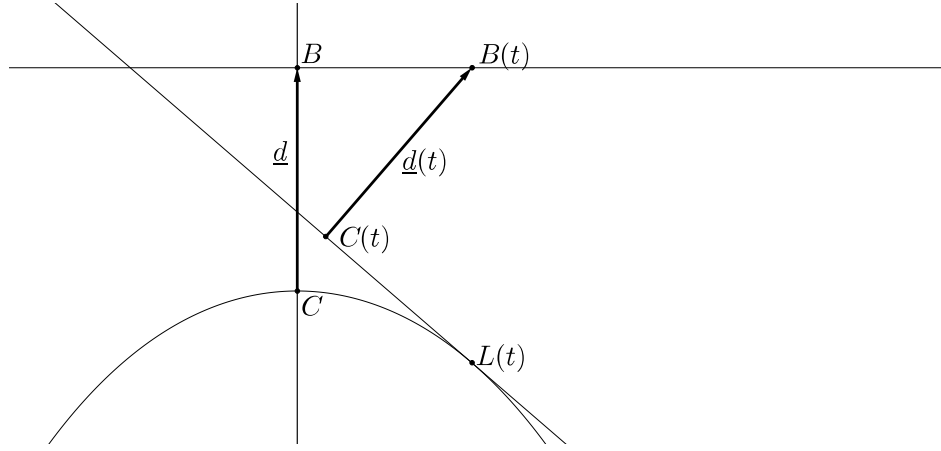
A négyzet profilú keréknél egy kicsit általánosabb esetet vizsgálunk, a szabályos sokszög kerekű autót, és a hozzá tartozó utat: a láncgörbét. A feladat levezetés nélkül, eredménnyel megtalálható a [3] oldal rulettákról szóló cikkében, ahol több animációs illusztráció is található.

**2.1. Definíció.** Láncgörbének *nevezzük azt a görbét melynek paraméteres egyenlete:*

$$L(t) = \begin{pmatrix} t \\ -A \cosh(\frac{t}{A}) \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$$

A görbe neve onnan ered, hogy egy a két végénél felfüggesztett lánc ilyen alakot vesz fel a gravitációs erő hatására.





**2.2. Állítás.** A láncgörbe ívhossza a  $[0, t]$  intervallumon:

$$\ell(L|[0, t]) = A \sinh\left(\frac{t}{A}\right) \quad (2.1)$$

Ennek bizonyítása a rutin számolással kijön a paraméteres görbék ívhossz képletéből.

Adott a rögzített  $\Sigma$  koordináta rendszerben a fenti egyenlettel megadott  $L$  görbe. Tekintsük  $L(0)$ -beli érintőhöz rögzített  $\Sigma_0$  koordináta rendszert, melynek  $x$ -tengelye az  $L(0)$  beli érintő, origója az  $L(0)$  pont,  $y$ -tengelye párhuzamos  $\Sigma$   $y$ -tengelyével. Ahogy ez az érintő gördül a görbén, a  $\Sigma_0$  koordináta rendszer is mozog: origója megegyezik az  $L(0)$  képével,  $x$ -tengelye a görbe  $L(t)$  beli érintőjével. Legyen ez a  $\Sigma_t$  koordináta rendszer. Jelölje  $B(t)$  a  $\Sigma_t$  koordináta rendszer  $[-\ell(L|[0, t]), A]$  pontját.

**2.3. Tétel.** A  $B(t)$  pont  $\Sigma$  beli koordinátája  $[t, 0]$  lesz.

*Bizonyítás:* Jelölje  $\mathbf{b}(t)$  helyvektor a  $B$  pont  $t$  pillanathoz tartozó képét, és  $\mathbf{c}(t)$  a  $B(t)$  pont merőleges vetületét a gördülő egyenesre. Legyen  $\mathbf{c}(t)$  helyvektora  $\mathbf{c}(t)$ , és  $\mathbf{d}(t) = \mathbf{b}(t) - \mathbf{c}(t)$ .

Könnyen látható, hogy  $\mathbf{c}(0) = L(0)$ , és  $\mathbf{d}(0) = [0, A]$ .

Ha vesszük a görbe aktuális helyét,  $L(t)$ -t, és az  $e$  pont beli érintőn az eddig megtett utat  $(\ell(L|[0, t]) - t)$ , megkapom  $\mathbf{c}(t)$ -t.

Azaz  $B$  képre adódik:

$$B(t) = L(t) - \frac{\mathbf{L}'(t)}{|\mathbf{L}'(t)|} (\ell(L|[0, t]) - t) + \mathbf{d}(t) \quad (2.2)$$

A  $\mathbf{d}(t)$  vektorról tudjuk, hogy merőleges lesz az  $\mathbf{L}'(t)$  sebességvektorra, és hossza mindig  $A$  lesz. Tehát  $\mathbf{d}(t)$ -t megkaphatjuk mint  $\mathbf{L}'(t)$  transzformáltját:

$$\mathbf{d}(t) = \begin{pmatrix} \sinh(\frac{t}{A}) \\ 1 \end{pmatrix} \frac{A}{\sqrt{1 + \sinh^2(\frac{t}{A})}}$$

Ezt behelyettesítve 2.2 egyenletbe és felhasználva az ívhossz 2.2 képletét:

$$\begin{aligned} B(t) &= \begin{pmatrix} t \\ -A \cosh(\frac{t}{A}) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -\sinh(\frac{t}{A}) \end{pmatrix} \frac{A \sinh(\frac{t}{A})}{\sqrt{1 + \sinh^2(\frac{t}{A})}} + \\ &+ \begin{pmatrix} \sinh(\frac{t}{A}) \\ 1 \end{pmatrix} \frac{A}{\sqrt{1 + \sinh^2(\frac{t}{A})}} \\ &= \begin{pmatrix} t \\ -A \cosh(\frac{t}{A}) + \frac{A(\sinh^2(\frac{t}{A})+1)}{\sqrt{1+\sinh^2(\frac{t}{A})}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} t \\ -A \cosh(\frac{t}{A}) + \frac{A \cosh^2(\frac{t}{A})}{\sqrt{\cosh^2(\frac{t}{A})}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} t \\ -A \cosh(\frac{t}{A}) + A \cosh(\frac{t}{A}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.3}$$

Azaz az  $B$  pont képe egy egyenes pályát ad. □

A sokszög kerekű autóhoz visszatérve:

Az  $n$ -szögű kerék kezdetben  $B$  középpontú, és alsó, vízszintes oldala az oldal felezőpontjában érinti az  $A$  paraméterű láncgörbét. Jelölje a sokszög köré írt körének sugarát  $R$ .

Mivel az érintési pont (az érintő oldal felezőpontja) és a  $B$  közötti vektort jelöltük  $\mathbf{d}$ -vel, adódik, hogy  $A = \frac{R}{\cos(\pi/n)}$ .

Látható, hogy a sokszög kerékkal,  $A$  paraméterű láncgörbeívekből álló úton haladva, egyenletesen, zökkenőmentesen haladhatunk.

### 3. Kardiod profilú kerék

A ciklison gördülő kardiod feladattal egy animációban találkoztam a [5] oldalon. Ezen ruletták rulettája érdekes eredménye miatt keltette fel a figyelmemet.

**3.1. Definíció.** *Egy rögzített körön kívülről csúszásmentesen gördülő azonos sugarú kör egy pontja által leírt görbét kardiodnak nevezzük.*

A kardiodnak itt egy olyan paraméteres képletét írjuk fel, amelynél a körök sugara  $r$ , a rögzített kör középpontja  $C_1 = (0, -r)$ , és a gördülő kör kezdeti középpontja  $C_2 = (0, r)$ :

$$r \begin{pmatrix} 2 \sin(t) - \sin(2t) \\ \cos(2t) - 2 \cos(t) + 1 \end{pmatrix} \quad t \in [0, 2\pi] \quad (3.1)$$

**3.2. Definíció.** *A kardiod csúcán a fenti paraméterezés szerinti  $t = 0$  pontot értjük.*

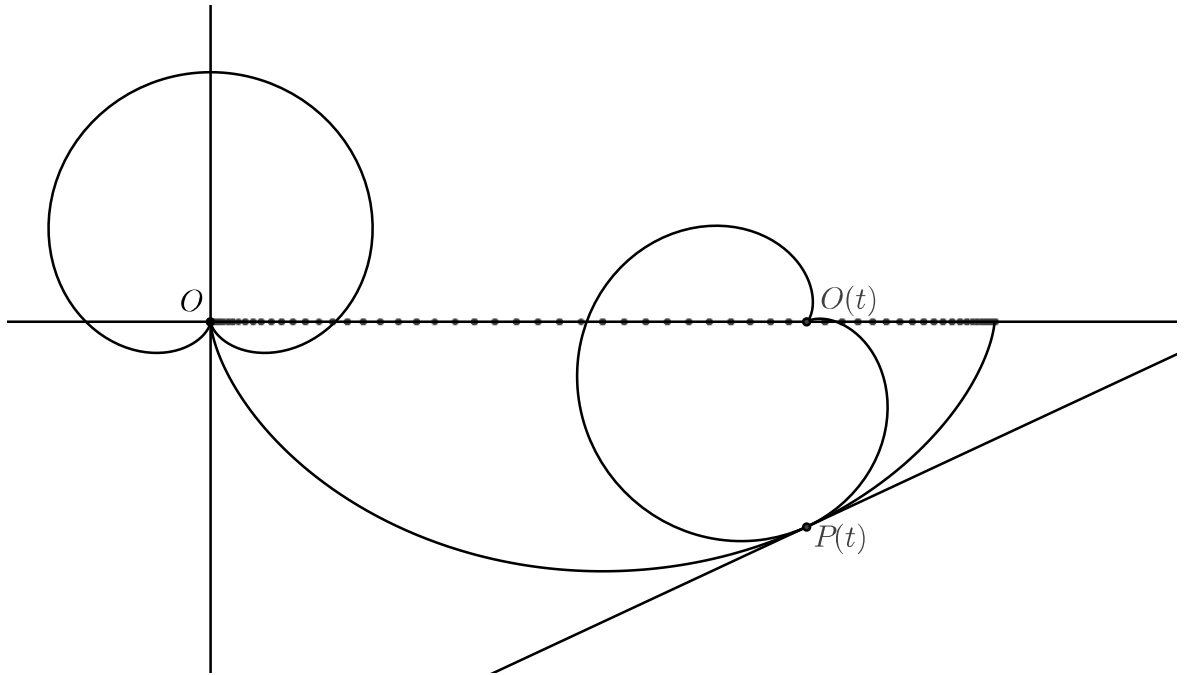
**3.3. Definíció.** *Egy egyenesen, csúszásmentesen gördülő kör egy pontja által leírt görbét cikloisnak nevezzük.*

A  $2r$  sugarú kör által generált ciklois egy paraméterezése:

$$2r \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ \cos(t) - 1 \end{pmatrix} \quad t \in [0, 2\pi] \quad (3.2)$$

**3.4. Feladat.** *Milyen pályán mozog egy kardiod csúcspontja, ha a kardiodot csúszásmentesen gördítem egy cikloison, amelynek egy periódusán vett ívhossza megegyezik a kardiod ívhosszával?*

A feladatban megfogalmazott, ugyanakkora ívhosszakra vonatkozó feltétel abban az esetben teljesül, ha a cikloist generáló kör sugara dupla akkora, mint a kardiodot



3.1. ábra. Cikloison gördülő kardioid

generáló két kör sugara (ez a lentebb szereplő ívhosszképletekből könnyen látható). Azaz a feladat megoldásához a fentebbi paraméterezésekre lesz szükség.

Ahhoz, hogy a gördülés vizsgálatánál mindkét görbénél ugyanazt a paramétert használhassuk be kell látni, hogy bármely  $t$ -ig a két görbe ívhossza megegyezik a  $[0, t]$  intervallumon. Azaz bármely  $t$  esetén azonosságra vezet a következő ívhosszakra vonatkozó egyenlet:

$$\begin{aligned}
 2r \int_0^t \sqrt{(1 - \cos(t))^2 + \sin^2(t)} dt &= r \int_0^t \sqrt{(2 \cos(t) - 2 \cos(2t))^2 + (2 \sin(t) - 2 \sin(2t))^2} dt \\
 \int_0^t \sqrt{4 \sin^2(t/2)} dt &= \int_0^t \sqrt{2 - 2 \cos(t) \cos(2t) - 2 \sin(t) \sin(2t)} dt \\
 \int_0^t 2 \sin(t/2) dt &= \int_0^t \sqrt{2 - 2 \cos^3(t) - 2 \sin^2(t) \cos(t)} dt \\
 \int_0^t 2 \sin(t/2) dt &= \int_0^t \sqrt{2 - 2 \cos(t)} dt \tag{3.3}
 \end{aligned}$$



A gördülés egyik fontos tulajdonsága, hogy bármely  $t$  időpillanatban a két görbe érinti egymást, az érintkezési pontban a két görbe érintője megegyezik. Mivel a ciklois  $P(t)$  pontbéli érintőjét könnyen meg tudjuk adni, a 3.4 feladathoz szükségünk van a következő lemmára:

**3.5. Lemma.** *Legyen  $\gamma$  a 3.1 paraméterezésű kardioid, és  $\nu$  a  $\gamma$  egy egybevágó példánya egy irányítás tartó egybevágóságnál. Legyen adott  $t \in \mathbb{R}$ , a generáló körök sugara,  $r$ , valamint a  $\gamma(t)$  pont képe  $\nu$ -n, és a  $\nu$  ottani érintővektora. Ekkor  $\nu$  csúcsa megkapható a következő eljárással:*

1. *Forgassuk el a  $\nu(t)$  körül az  $r$  hosszúságúra skálázott érintővektorát  $\frac{t}{2}$ -el. Ezzel megkaptuk a gördülő kör  $t$ -beli középpontját,  $C_2(t)$ -t*
2. *Forgassuk el a  $\nu(t)$  pontot  $C_2(t)$  körül  $(-t)$ -vel. Így megkapjuk a két kör érintkezési pontját,  $F(t)$ -t.*
3.  *$F(t)$ -t toljuk el  $\overrightarrow{C_2(t)F(t)}$ -vel, amivel megkapjuk a fix kör középpontját,  $C_1$ -et.*
4. *Forgassuk el  $F(t)$ -t  $C_1$  körül  $(-t)$ -vel. Ezzel megkaptuk a kardioid csúcspontját,  $O$ -t.*

*Bizonyítás:* A kardioid érintőjéről ismert, hogy áthalad a gördülő kör és az  $\overline{F(t)C_2(t)}$  egyenes metszéspontján  $E(t)$ -n. [1]

Mivel  $F(t)C_2(t)\nu(t)\angle$  megegyezik  $t$ -vel és  $\nu(t)C_2(t)E(t)\Delta$  egyenlőszárú háromszög, a  $C_2(t)\nu(t)E(t)\angle = t/2$  lesz.

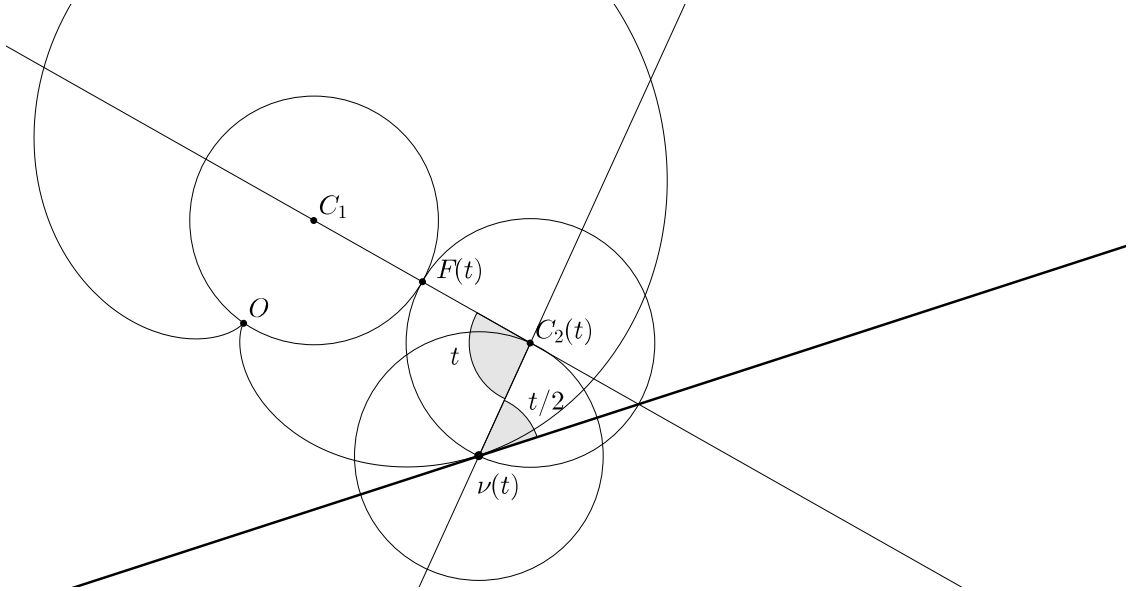
A kardioid  $t$ -beli pontját megkaphatjuk a csúcspont két  $t$  szögű elforgatásaként  $C_1$  és  $C_2(t)$  körül.

Innen látható, hogy a fenti eljárással a kardioid  $t$  pontját visszaforgatjuk a csúcspontjába.

□

A fent leírt szerkesztés lépései analitikusan:

Jelölje  $M_\alpha$  az  $\alpha$  szögű, pozitív irányba forgatás mátrixát, és  $\mathbf{v}$  a 3.5 lemmában szereplő érintővektort. Az átláthatóság érdekében a  $t$  paramétert elhagyom a pontok jelölésénél.



$$C_2 = \nu(t) + \frac{r}{|\mathbf{v}|} M_{\frac{t}{2}} \mathbf{v} \quad (3.4)$$

$$F = M_{-t}(\nu(t) - C_2) + C_2 \quad (3.5)$$

$$A = F + \overrightarrow{BF} \quad (3.6)$$

$$O = M_{-t}(F - C_1) + C_1 \quad (3.7)$$

Ha a 3.7 egyenletbe behelyettesítjük a többi pontra kapott összefüggéseket:

$$\begin{aligned}
O &= M_{-t}(F - C_1) + C_1 \\
&= M_{-t}(F - 2F + C_2) + 2F - C_2 \\
&= M_{-t}(C_2 - M_{-t}(\nu(t) - C_2) + C_2) + 2(M_{-t}(\nu(t) - C_2) + C_2) - C_2 \\
&= M_{-t}(-M_{-t}(\nu(t) - C_2)) + 2M_{-t}(\nu(t) - C_2) + C_2 \\
&= M_{-t}(-M_{-t}(\nu(t) - (\nu(t) + M_{\frac{t}{2}}\mathbf{v}\frac{r}{|\mathbf{v}|}))) + 2M_{-t}(\nu(t) - (\nu(t) + M_{\frac{t}{2}}\mathbf{v}\frac{r}{|\mathbf{v}|})) + \\
&\quad + (\nu(t) + M_{\frac{t}{2}}\mathbf{v}\frac{r}{|\mathbf{v}|}) \\
&= M_{-t}(-M_{-t}(-M_{\frac{t}{2}}\mathbf{v}\frac{r}{|\mathbf{v}|})) + 2M_{-t}(-M_{\frac{t}{2}}\mathbf{v}\frac{r}{|\mathbf{v}|}) + \nu(t) + M_{\frac{t}{2}}\mathbf{v}\frac{r}{|\mathbf{v}|} \\
&= \frac{r}{|\mathbf{v}|}M_{-\frac{3}{2}t}\mathbf{v} - 2\frac{r}{|\mathbf{v}|}M_{-\frac{t}{2}}\mathbf{v} + \nu(t) + \frac{r}{|\mathbf{v}|}M_{\frac{t}{2}}\mathbf{v} \\
&= \frac{r}{|\mathbf{v}|}\left(M_{-\frac{3}{2}t} - 2M_{-\frac{t}{2}} + M_{\frac{t}{2}}\right)\mathbf{v} + \nu(t) \tag{3.8}
\end{aligned}$$

Visszatérve a ciklison gördülés esetére: A ciklois és a kardioid érintője azonos az érintkezési pontban, ezért a ciklois  $t$  paraméterbeli érintőjének irányvektorát,  $\mathbf{v}$ -t megkaphatjuk a ciklois paraméteres egyenletének első deriváltjaként, azaz  $\mathbf{v} = \nu'(t)$ .

$$\gamma(t) = 2r \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ \cos(t) - 1 \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

$$\gamma'(t) = 2r \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ \cos(t) - 1 \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

$$|\gamma'(t)| = 4r \sin\left(\frac{t}{2}\right) \tag{3.11}$$

A 3.8 egyenletben szereplő mátrixok összegét kiszámolva:

$$\begin{aligned}
M_{1,1} &= \cos\left(-\frac{3}{2}t\right) - 2\cos\left(-\frac{t}{2}\right) + \cos\left(\frac{t}{2}\right) \\
M_{1,1} &= -2\sin(t)\sin\left(\frac{t}{2}\right) \\
M_{2,1} &= \sin\left(-\frac{3}{2}t\right) - 2\sin\left(-\frac{t}{2}\right) + \sin\left(\frac{t}{2}\right) \\
M_{2,1} &= 2\cos(t)\sin\left(-\frac{t}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{t}{2}\right) \\
M_{2,1} &= 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)(1 - \cos(t))
\end{aligned} \tag{3.12}$$

A 3.8 egyenletbe behelyettesítve a fentieket,  $O$  pont  $t$  pillanatbeli képe:

$$\begin{aligned}
O(t) &= \frac{r}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \begin{pmatrix} -2\sin(t)\sin\left(\frac{t}{2}\right) & -2\sin\left(\frac{t}{2}\right)(1 - \cos(t)) \\ 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)(1 - \cos(t)) & -2\sin(t)\sin\left(\frac{t}{2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} \\
&+ 2r \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ \cos(t) - 1 \end{pmatrix} \\
&= r \begin{pmatrix} -\sin(t) & -(1 - \cos(t)) \\ 1 - \cos(t) & -\sin(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} + 2r \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ \cos(t) - 1 \end{pmatrix} \\
&= r \begin{pmatrix} 0 \\ (1 - \cos(t))^2 + \sin^2(t) \end{pmatrix} + 2r \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ \cos(t) - 1 \end{pmatrix} \\
&= 2r \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Azaz az  $O$  pont képe az  $x$  tengelyen halad végig, de nem egyenletes sebességgel.

## 4. A ciklois tautochron tulajdonsága

Az idő mérésére sokáig kerestek a mindennapokban is használható eszközt. Ezen eszközök egyik csoportja az ingaórák. Ezek az időt a kilengések darabszámával mérték. Feladat lett egy olyan inga konstruálása melynek periódusideje nem függ a kilengés nagyságától. A matematikai inga (egy súlytalan kötélből, és rá erősített tömegpontból álló inga modell) pontos megoldásnak tűnt, de a számítások azt mutatták, hogy lengésideje csak közelítőleg egyezne meg különböző nagyságú kitérések esetén (a közelítés nagyon jó  $8^\circ$ -nál kisebb kilengés esetén).

A kilengéstől független lengésidejű (izochron) ingát először Christian Huygens holland tudósnak sikerült készítenie a cikloisok segítségével. A cikloidális inga feladattal [1] könyvnek A ciklois titkai fejezetében találkozhatunk, egy másik levezetéssel együtt. A ciklois ezen tulajdonságához először a tautochron tulajdonságát kell belátnunk.

**4.1. Definíció.** *Egy görbét tautochronnak mondunk, ha az az idő, ami alatt egy rajta elhelyezett golyó a görbe legalsó pontjáiig súrlódásmentesen gurul le a gravitáció hatására, nem függ a golyó kiindulási pontjától.*

A fentebb is szerepelt, lefele álló cikloisnak csak az első periódusának első felével foglalkozunk, azaz a golyók kiindulópontjai  $t \in [0, \pi]$  intervallumban vannak, míg a görbe alját a  $t = \pi$  adja. A számítások során a ciklois következő paraméterezését fogom használni:

$$\begin{aligned}x &= r(t - \sin(t)) \\y &= r(1 + \cos(t))\end{aligned}\tag{4.1}$$

**4.2. Feladat.** *Számoljuk ki, hogy a ciklois  $t = p$  paraméterű pontjáról, nyugalomból induló golyó mennyi idő alatt ér le a ciklois  $t = \pi$  paraméterhez tartozó pontjába, csak a gravitációból adódó gyorsulást kihasználva.*

Ennek kiszámolásához a cikloist egy töröttvonallal közelítjük.

Legyen  $\Delta t = \frac{t}{N}$ , és  $t_i = i\Delta t$  ( $i = 0, 1, \dots, N$ ). Jelölje  $\Delta T_i$  a  $\gamma(t_i)$ -ből  $\gamma(t_{i+1})$ -be gurulás idejét. Ekkor a fizikai képletből a következő összefüggés adódik:

$$\Delta T_i \approx \frac{|\gamma'(t_i)| \Delta t}{v(t_i)} \quad (4.2)$$

A  $h_0 = 1 + \cos(p)$  kezdő magasságból induló golyó,  $h = 1 + \cos(t_i)$  magasságbeli pontjára az energiamegmaradást felhasználva kiszámítható a golyó  $t_i$ -beli sebessége:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2(t_i) + mg(h - h_0) &= 0 \\ \frac{1}{2}mv^2(t_i) &= mg(h_0 - h) \\ v^2(t_i) &= 2gr(1 + \cos(p) - (1 + \cos(t_i))) = 2gr(\cos(p) - \cos(t_i)) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Az így kapott  $\Delta T_i$ -ket összegezve, és a felbontás határértékét nézve kapjuk:

$$\begin{aligned} T &= \int_p^\pi \sqrt{\frac{r^2(2 - 2\cos(t))}{2gr(\cos(p) - \cos(t))}} dt = \\ &= \sqrt{\frac{r}{g}} \int_p^\pi \sqrt{\frac{1 - \cos(t)}{\cos(p) - \cos(t)}} dt = \\ &= \sqrt{\frac{r}{g}} \int_p^\pi \sqrt{\frac{2\sin^2(\frac{t}{2})}{2\sin(\frac{t+p}{2})\sin(\frac{t-p}{2})}} dt = \\ &= \sqrt{\frac{r}{g}} \int_p^\pi \sqrt{\frac{\sin(\frac{t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})\cos(\frac{p}{2}) + \cos(\frac{t}{2})\sin(\frac{p}{2})} \cdot \frac{\sin(\frac{t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})\cos(\frac{p}{2}) - \cos(\frac{t}{2})\sin(\frac{p}{2})}} dt = \\ &= \sqrt{\frac{r}{g}} \int_p^\pi \sqrt{\frac{1}{\cos^2(\frac{p}{2}) - \operatorname{ctg}^2(\frac{t}{2})\sin^2(\frac{p}{2})}} dt = \\ &= \sqrt{\frac{r}{g}} \int_p^\pi \sqrt{\frac{1}{1 - \sin^2(\frac{p}{2})(1 + \operatorname{ctg}^2(\frac{t}{2}))}} dt \end{aligned} \quad (4.4)$$

Az így kapott képletben szereplő integrál kiszámolása nehéz, de a WolframAlpha[2] segítségével sikerült a következő határozatlan integrált kiszámítani:

$$\begin{aligned}
& \int \sqrt{\frac{1}{1 - c(1 + \operatorname{ctg}^2(\frac{x}{2}))}} dx = \\
& = -\sqrt{2}\sqrt{\cos(x) - 1} \frac{1}{\sin(x)} \log(\sqrt{2c + \cos(x) - 1} + \sqrt{2} \cos(\frac{x}{2})) = \\
& = -\sqrt{2}\sqrt{\cos(x) - 1} \frac{1}{\sqrt{1 - \cos(x)}} \log(\sqrt{2c + \cos(x) - 1} + \sqrt{1 + \cos(x)}) = \\
& = -2\sqrt{-1} \log(\sqrt{2c + \cos(x) - 1} + \sqrt{1 + \cos(x)}) \tag{4.5}
\end{aligned}$$

Ide a  $c$  helyére visszaírva a  $\sin^2(\frac{p}{2})$ -t:

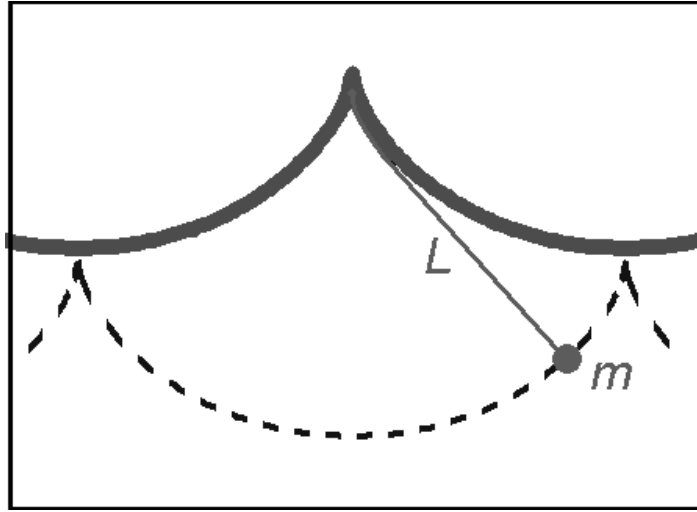
$$\begin{aligned}
& -2\sqrt{-1} \log(\sqrt{2\sin^2(\frac{p}{2}) + \cos(x) - 1} + \sqrt{1 + \cos(x)}) = \\
& = -2\sqrt{-1} \log(\sqrt{1 - \cos(p) + \cos(x) - 1} + \sqrt{1 + \cos(x)}) = \\
& = -2\sqrt{-1} \log(\sqrt{\cos(x) - \cos(p)} + \sqrt{1 + \cos(x)}) \tag{4.6}
\end{aligned}$$

Ezek segítségével már fel tudjuk írni a 4.4 eredményét:

$$\begin{aligned}
T & = \sqrt{\frac{r}{g}} \left[ -2\sqrt{-1} \log(\sqrt{\cos(t) - \cos(p)} + \sqrt{1 + \cos(t)}) \right]_p^\pi = \\
& = \sqrt{\frac{r}{g}} (-2\sqrt{-1} \log(\sqrt{-1 - \cos(p)}) + 2\sqrt{-1} \log(\sqrt{1 + \cos(p)})) = \\
& = \sqrt{\frac{r}{g}} (-2\sqrt{-1}) \log\left(\frac{\sqrt{1 + \cos(p)}}{\sqrt{-1}\sqrt{1 + \cos(p)}}\right) = \\
& = \sqrt{\frac{r}{g}} (-2\sqrt{-1}) \log(\sqrt{-1}) = \sqrt{\frac{r}{g}} (-2\sqrt{-1}) \frac{\sqrt{-1}\pi}{2} = \pi \sqrt{\frac{r}{g}} \tag{4.7}
\end{aligned}$$

Így azt kaptuk, hogy a cikloisíven bárhol elhelyezett golyó az ív aljára ugyanannyi idő alatt jut el, hiszen a kapott eredmény nem függ  $p$ -től.

Ebből azt a következtetést lehet levonni, hogyha tudunk olyan ingaórát csinálni, ahol a matematikai ingával ellentétben a felfüggesztett súly nem kör, hanem ciklois pályán mozog, akkor annak periódusideje állandó lesz, nem fog a kilengéstől függeni (csak az inga hosszától).



Ha az inga felfüggesztési pontjánál pofákat helyezünk el, azzal rákényszerítjük az ingát, hogy ne kör, hanem más pályán mozogjon. Matematikai nyelvre lefordítva: van egy görbénk (pofánk), amiről egy egyenest gördítünk fel-le, és ekkor az egyenes egyik kijelölt pontja cikloispályán mozog. Ilyen pofa könnyen található az evolúta-evolvens kapcsolatot felhasználva. Ehhez fel kell használnunk néhány differenciálgeometriai fogalmat.

**4.3. Definíció.** A  $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  görbének a  $t \in I$  helyen vett görbületén a  $\kappa(t) = \frac{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}$  számot értjük.

**4.4. Definíció.** Simán paraméterezett görbén egy  $C^\infty$ -osztályú  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  leképezést értünk. A  $\gamma$  simán paraméterezett görbét regulárisnak nevezzük, ha  $\gamma'(t) \neq 0$  bármely  $t \in I$ -re.

**4.5. Definíció.** A  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  reguláris sima görbe. A  $t$ -beli normális egységvektorának az érintőirányú egységvektor  $+90^\circ$  elforgatottját nevezzük. Jele:  $\mathbf{N}(t)$ .

**4.6. Definíció.** Egy síkgörbe evolútája a görbületi középpontjainak halmaza.

$$\gamma_e(t) = \gamma(t) + \frac{1}{\kappa(t)} \mathbf{N}(t) \quad (4.8)$$



**4.7. Definíció.** *Adott egy reguláris görbe a síkon. Fejtsük le egy rögzített  $Q$  pontjából kezdve a görbét a következő módon: a görbe minden  $P$  pontjához a  $P$ -beli érintőre mérjük fel a görbe  $Q$  és  $P$  közötti ívhosszát. A kapott  $Q'$  pontok alkotta görbét a  $Q$  ponthoz tartozó evolvensnek nevezzük.*

A fenti definíciókból látszik, hogy egy görbének több evolvensé létezik, de csak egy evolútája. Ismert, hogy ha  $\gamma_2$  görbe a  $\gamma_1$  görbe evolútája, akkor a  $\gamma_1$  görbe a  $\gamma_2$  görbe evolvensé.

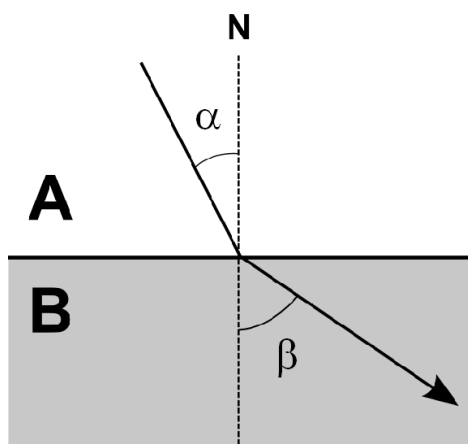
A feladat célja egy olyan pofa választása, amit egy olyan görbe ír le aminek evolvensé egy ciklois. Felhasználva azt a tényt, amit ebben a dolgozatban nem bizonyítunk, hogy a ciklois evolútája egy vele megegyező (eltolt) ciklois, látható, hogy ha a pofákat cikloisoknak választva megkapjuk az izochron ingánkat.

## 5. A ciklois brachisztochron tulajdonsága

A brachisztochron problémát a következőképp fogalmazhatjuk meg: Adott egy kiindulópont, és egy lentebbi, nem közvetlenül alatta található célpont. Ha a kiindulópontban elhelyezett golyó csak a gravitáció hatására gyorsul, milyen alakú lejtőn haladva fog a legrövidebb idő alatt a célpontba eljutni.

A problémával sok matematikus foglalkozott: Galilei tévesen azt hitte, hogy a negyed körív a megoldás, végül több matematikus is megtalálta a megoldást, a cikloist. Az itt olvasható levezetés szorosan követi [1] könyvben található. Johann Bernoulli bizonyításhoz felhasználjuk a fény tulajdonságairól szóló Fermat-elvet:

**Fermat-elv:** *Két pont között a fény azon útvonalon halad, amelyre teljesül, hogy a megtételéhez szükséges idő a lehető legrövidebb az összes lehetséges két pont közötti útvonal közül.*



Ekkor, ha  $c_A$ -el és  $c_B$ -vel jelöljük az A illetve a B közegben a fény sebességét, fennáll

a következő:

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{c_A}{c_B} \quad (5.1)$$

Mivel ennek a törtnek értéke konstans két adott közegre, ha veszünk a közegekből egy-egy pontot amik közötti legrövidebb utat keressük, akkor egyértelműen meghatározható a két közeg határán az a pont, ahol a fény áthalad.

Az 5.1 egyenletet átrendezve a következőt kapjuk:

$$\frac{\sin(\alpha)}{c_A} = \frac{\sin(\beta)}{c_B} = \text{konstans} \quad (5.2)$$

Ha két közeg helyett sok egymás utánit veszünk, akkor is fennáll a fentebbi megállapítás.

Ezért, ha végtelen sok nagyon keskeny, vízszintes közegre veszünk, akkor közelítéssel azt kapjuk, hogy a fenti egyenletek igazak egy folytonosan változó, inhomogén közegre is. Azaz egy olyan közegben ahol a fény sebessége függőleges irányban folytonosan változó  $c(y)$  függvény, miközben a vízszintesek mentén állandó.

Egy ilyen közeg két rögzített pontja között a fény egy olyan  $L$  görbén fog terjedni, amire fennáll:

$$\frac{\sin(\alpha(y))}{c(y)} = \text{konstans} \quad (5.3)$$

Emlékeztetőül:  $\alpha(y)$  az  $L$  görbe  $y$  ordinátájú pontjában húzott érintőnek egy függőleges egyenessel bezárt szöge, míg  $c(y)$  ugyanitt a fény sebessége.

Visszatérve a brachisztochron problémára: Egy olyan koordináta-rendszerben ahol az  $y$ -tengely lefelé növekszik (így az  $y$  koordináta a golyó eddigi magasságvesztését jelöli) jelölje  $v(y)$  az  $y$  ordinátájú pontban a sebesség nagyságát. Így az energiamegmaradásból megkaphatjuk:

$$v(y) = \sqrt{2gy} \quad (5.4)$$

Mivel a sebesség csak a magasság változásától függ, a görbe pályájától független, használhatjuk erre a problémára a Fermat-elv 5.3 következményét.

$$\frac{\sin(\alpha(y))}{\sqrt{y}} = \text{konstans} \quad (5.5)$$

Innentől a problémát a másik irányból meg közelítve: nem azt fogjuk belátni, hogy a brachisztochron görbe a ciklois, hanem azt, hogy a ciklois brachisztochron, azaz a cikloisra igaz a fenti egyenlet.

Ehhez elsőként azt látjuk be, hogy a brachisztochron feladatban leírt pontok között hogyan adhatunk meg egy ciklois pályát:

**5.1. Állítás.** *Adott kiinduló pont, A és nála alacsonyabban lévő célpont, B között egyértelműen megadható egy fordított ciklois, melynek csúcspontja van A-ban, és a B az első íven helyezkedik el.*

A ciklois egyértelmű megadásához a következők szükségesek: egy egyenes bázisgörbének, egy gördülő kör, és a kiinduló érintkezési pont.

Ezek közül a kiindulópont: A, és az egyenes: az A-ban húzott x-tengellyel párhuzamos egyenes adott. A kör megadásához elég a sugarát:  $r$ -t megadnunk.

Vegyük észre, hogy a feladatban szereplő pontok átvihetők eltolással, és az y-tengelyre tükrözéssel olyan helyzetbe ahol az A képe az origó, míg B a negyedik síknegyedben van. Azaz az állítás kimondható a következő formában:

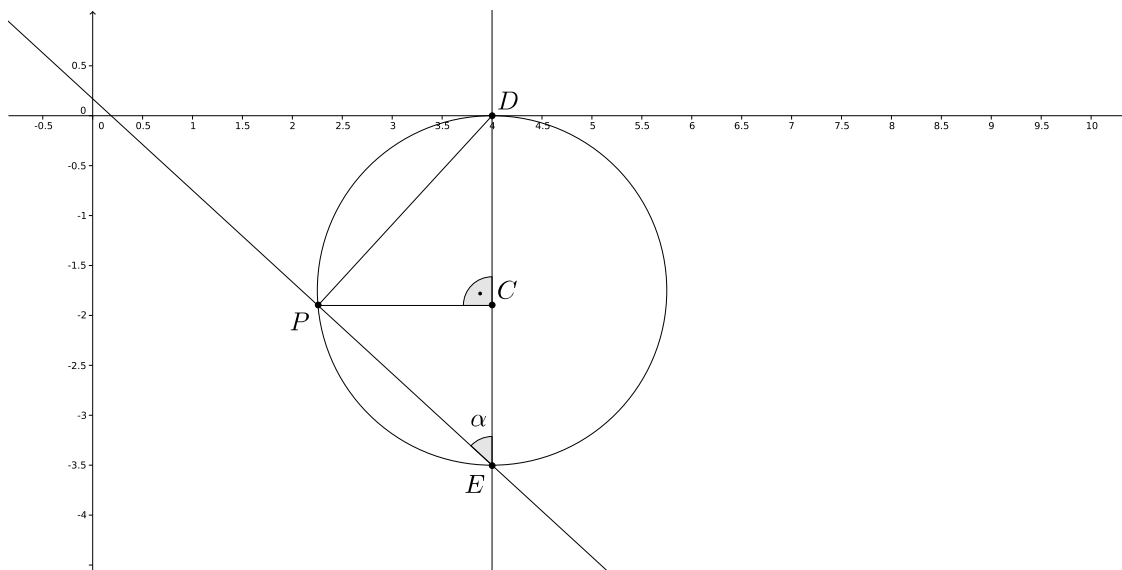
**5.2. Állítás.** *Tetszőleges  $P(x,y)$  koordinátájú ponthoz, ahol  $x > 0$  és  $y \leq 0$  egyértelműen megadható olyan  $r \in \mathbb{R}$  szám, amire a pont az origóból kiinduló,  $r$  sugarú generáló kör által meghatározott ciklois első íven helyezkedik el.*

*Bizonyítás:* Legyen az origót P-vel összekötő egyenes  $f$ . Vegyünk fel egy  $r = 1$  sugarú kör által generált, O-ból kiinduló cikloist.

Ekkor a cikloisnak és az  $f$  egyenesnek az O-n kívüli metszéspontját jelölje E. Ilyen metszéspont létezik, hiszen a ciklois érintője O-felé közeledve tart a függőlegeshez. Ha ezt a cikloist O-ból középpontosan nagyítjuk, úgy, hogy az E képe P legyen. Az így kapott ciklois O-ból indul, ott csúcspontja van, és P az első íven helyezkedik el.

A fentebbiekből következik, hogy ez a ciklois mindig megadható egyértelműen, a generáló körének sugara kiszámítható.  $\square$

Ha az így megadott cikloisra igaz a 5.5 egyenletben leírt tulajdonság, akkor az brachisztochron tulajdonságú lesz.



A Thalesz-tétel miatt  $EPD\angle$  derékszög. A merőleges szárak miatt  $DPC\angle = \alpha$ .  
Ekkor:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha) &= \frac{P_y}{(PD)} \\ \sin(\alpha) &= \frac{(PD)}{2r} \\ P_y &= \sin(\alpha) (PD) = 2r \sin^2(\alpha) \\ \sin(\alpha) &= \sqrt{\frac{P_y}{2r}} \\ \frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{P_y}} &= \sqrt{\frac{1}{2r}} = \text{konstans} \end{aligned} \quad (5.6)$$

Ebben az egyenletben  $\alpha$ -t és  $P_y$ -t is  $y$  koordináta függvényében megadható. Azaz a

cikloisra teljesül a 5.5 egyenletbeli tulajdonság, tehát a ciklois brachisztochron tulajdonságú.

Ezzel beláttuk, hogy a ciklois megoldása a brachisztochron problémának.

# Irodalomjegyzék

- [1] Simon Gindikin: *Történetek fizikusokról és matematikusokról*  
Typotex, 2003.
- [2] Wolfram Alpha <http://www.wolframalpha.com/>
- [3] Weisstein, Eric W. "Roulette." From MathWorld—A Wolfram Web Resource.  
<http://mathworld.wolfram.com/Roulette.html>
- [4] Wikipedia <http://en.wikipedia.org/>
- [5] Robert Ferréol, Jacques Mandonnet 2012  
<http://www.mathcurve.com/courbes2d/cycloid/cycloid.shtml>