EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

A poliéderek szerkezeti tulajdonságai

SZAKDOLGOZAT

Készítette:
Sipos Evelin
Matematika BSC
tanári szakirány

Témavezető:
Szeghy Dávid
egyetemi tanársegéd
Geometriai Tanszék

Budapest, 2014

Tartalomjegyzék

Bevezetés **3**

1. A konvex poliéderek csúcsairól **4**

1.1. A Descartes-tétel 5

2. Összefüggések a konvex poliéderek csúcsai, élei, valamint lapjai között **7**

2.1. Az Euler-tétel 7

2.2. Az Euler formula következményei 9

2.2.1. A konvex poliéder oldaliról 9

2.2.2. A konvex poliéder csúcsairól 10

2.2.3. Szabályos poliéderek 11

2.2.4. Egy nem létező poliéder 12

2.2.5. Szerkeszthető, konvex poliéderek 14

2.2.6. A konvex poliéder éleiről 16

3. Félig szabályos testek **18**

4. Az poliéderek általánosítása **26**

4.1. Az általánosabb Euler-tétel 26

4.2. Az Euler-féle karakterisztika 27

4.3. Alakzatok összeragasztása 30

4.3.1. A karakterisztika változása 31

4.3.2. Lyukak, fogantyúk 32

Összefoglalás **33**

Felhasznált irodalom **34**

Képek forrásai **34**

Nyilatkozat **35**

Bevezetés

A geometria talán a matematika legelképzelhetőbb része, ezért is szeretik oly sokan az általános iskolásoktól egészen az egyetemi tanulmányokat folytatókig, beleértve engem is. A geometria számos területe közül az Euklideszi geometriára esett a választásom. Szakdolgozatomban a konvex poliéderek tulajdonságainak mélyebbre nyúló megismerésével foglalkozom.

Igyekeztem egy olyan logikai felépítést adni a szakdolgozatomnak, amely az egyetemen tanultakat felhasználva, majd ebből továbblépve más érdekes összefüggéseket ad egy konvex poliéderről.

Az első fejezetben Descartes tételét felhasználva rávilágítok a konvex poliéderek egyik közös tulajdonságára, ami a csúcsok defektusával releváns.

A második fejezetben Euler jól ismert tételével foglalkozom, majd következésképpen állításokat teszek a konvex test csúcsai, lapjai, valamint élei számának egymáshoz való viszonyairól. Itt már előtérbe kerül a szabályos test létezése, valamint megcáfolom számos poliéder szerkeszthetőségét.

Ezt a gondolatmenetet folytatva a harmadik fejezetben már nem csak a szabályos testekről, hanem a félig szabályos testekről is teszek egy állítást, miszerint véges sok ilyen poliéder létezik. Bebizonyítom továbbá, hogy csak néhány szerkeszthető, mert a többi más-más okokból nem adódhat.

Az utolsó fejezetben mindezek általánosítását fogalmazom meg az Euler-féle karakterisztika segítségével. Ezt felhasználva más hasonló, kiegészített, egyesített poliéderek közötti összefüggésekről is esik néhány szó.

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Szeghy Dávidnak, aki a kezdetektől fogva végigkísérte munkámat, és szaktudásával, ösztönzésével, türelmével, hasznos tanácsaival nélkülözhetetlen segítséget nyújtott szakdolgozatom elkészítésében.

„Agyunknak két félteke van: az egyik a polinomok szorzásáért és a nyelvekért felelős,
a másik pedig a dolgok térbeli irányításáért és mindenért, ami az életben fontos.
A geometria a matematikának az a része, amikor mindkét féltekét kell használni."

(Vladimir Arnold)

1. fejezet

A konvex poliéderek csúcsairól

Kezdetben vizsgáljuk meg, hogy adható-e szabályosság a poliéderek belső szögeit, illetve a defektusaikat illetően.

Descartes-tétel

1.1. Definíció: Konvex poliédernek nevezzük azokat a térbeli korlátos ponthalmazokat, melyek előállnak véges sok olyan zárt féltér metszeteként, amelyeknek van közös belső pontja.

Könnyen látható, hogy a poliéder határa lapokból áll, mivel egy határoló síknak a többi féltérrel vett metszete (azaz egy síkon zárt félsíkok metszete), egy konvex síkbeli sokszöget határoz meg. Ebből az is észrevehető, hogy a lapok szakaszok (élek) mentén csatlakoznak, az élek pedig csúcsokba futnak össze.

1.1. Megjegyzés: A poliéder néhány tulajdonsága: [1]

1. bármely él pontosan 2 lap közös oldala
2. bármely lapról bármely lapra eljuthatunk élekben egymáshoz csatlakozó oldalak véges sorozatán
3. bármely csúcsból bármely csúcsba eljuthatunk csúcsokban egymáshoz csatlakozó élek véges sorozatán
4. bármely élekből alkotta egyszerű, zárt törött vonal a poliédert két részre osztja

A későbbiekben szükségünk lesz néhány jelölésre:

- V: csúcs
- E: él
- F: lap

1.2. Definíció: Adott egy poliéder. Tegyük fel, hogy a P csúcs a poliéder $F_{1,} F_{2,} \dots, F_n$ lapjainak találkozásánál fekszik, és a lapokhoz rendre $\alpha_{1,}\alpha_{2,} \dots, \alpha_n$ szögek tartoznak - ezeket élszögeknek hívjuk. Ekkor a teljes szög és az élszögek összegének különbségét, azaz a $2\pi - \sum_{i:=1}^{n} \alpha_i$ - t a P csúcshoz tartozó **defektus**nak nevezzük.

Jelölés: A defektust jelölje T, amely nem tévesztendő össze a területtel, amiről most nem esik szó.

1.2. Megjegyzés: A defektus mindig egy pozitív szám (lásd 18. oldal).

1.1. Tétel: *Egy konvex poliéderben a csúcsok defektusának összege 4π.* [2]

$$T = 4\pi$$

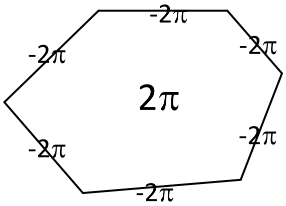
Bizonyítás: Ahhoz, hogy ezt belássuk, előbb egy egyszerűbb tételt fogunk bebizonyítani, amely így szól. Egy poliéderben a defektusok összege egyenlő a csúcsok és az élek különbségének a lapok számával vett összege, majd ennek a 2π-vel való szorzata. Formálisan

$$T = (V - E + F) \cdot 2\pi$$

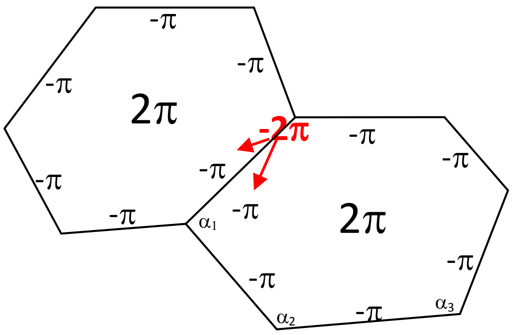
Ezt az egyenletet kicsit átrendezve adódik

$$T - 2\pi \cdot V = 2\pi \cdot (F - E)$$

Nézzük meg, mit is takar az egyenlet jobb oldala. Minden laphoz 2π-t és minden élhez (-2π)-t rendel.



A lapok találkozásánál valójában az élek találkoznak, így bármely két szomszédos lap egyik éle közös, ezért a (-2π)-t bontsuk kétfelé, azaz az élekhez tartozó két szomszédos oldalra írjunk $(-\pi)$-t.



Jelöljük n_k–val az F_k (k. lap) éleinek számát – nyilvánvalóan a csúcsok száma is ugyanennyi. Ekkor, mint ahogyan az ábrán is látszik, egy laphoz

$$2\pi - \pi \cdot \mathrm{n_k} = \pi \cdot (2 - \mathrm{n_k})$$

érték tartozik. Tehát a poliéder lapjaira (F) összegezve azt kapjuk, hogy

$$2\pi \cdot (F - E) = \sum_{\mathrm{F_k} \in F} \pi \cdot (2 - \mathrm{n_k})$$

Jelöljük α_i^k-val ahol $i := 1, 2, \dots, n_k$ a $k.$ laphoz tartozó szögeket. A defektus kiszámítása definíció szerint úgy történik, hogy a lapok helyett a csúcsokra ($V_l \in V$ csúcsra) összegezzük az ott lévő szögeket, majd kivonjuk 2π-ből

$$T = \sum_{V_l \in V} (2\pi - (\alpha_1^l + \alpha_2^l + \dots + \alpha_{m_l}^l))$$

Ha felbontjuk a szummát, akkor látható, hogy valójában a 2π-t kell összegezni a csúcsok számára, vagyis V-szer venni a 2π-t, és ebből kivonni minden egyes csúcsnál találkozó szögek összegét.

$$T = \sum_{V_l \in V} (2\pi - (\alpha_1^l + \alpha_2^l + \cdots + \alpha_{m_l}^l)) = 2\pi V - \sum_{V_l \in V} (\alpha_1^l + \alpha_2^l + \cdots + \alpha_{m_l}^l)$$

Ez utóbbi összegzést megkaphatjuk úgy is, ha a lapokhoz tartozó szögeket összegezzük, hiszen ez ugyanazt adja, ezért

$$\sum_V \alpha_i = \sum_{F_k \in F} \sum_{i=1}^{n_k} \alpha_i^k$$

Tudjuk, hogy ha α_i^k– val a $k.$ laphoz tartozó szöget jelöljük, akkor e szögek összege: $\sum_{i=1}^{n_k} \alpha_i^k$, ami felírható a sokszögekre tanult képlettel[1], miszerint

$$\sum_{i=1}^{n_k} \alpha_i^k = (n_k - 2) \cdot \pi$$

Tehát a defektus megkapható a következő módon

$$T = 2\pi V - \sum_{F_k \in F} \sum_{i=1}^{n_k} \alpha_i^k = 2\pi V - \sum_{F_k \in F} (n_k - 2) \cdot \pi$$

A $\sum_{F_k \in F} (n_k - 2) \cdot \pi$ majdnem úgy néz ki, mint a fentiekben kifejezett[2] $2\pi \cdot (F - E)$, csak a (-1)-szerese, ezért behelyettesítve az egyenletbe, azt kapjuk, hogy

$$T = 2\pi V - \Big(-\big(2\pi \cdot (F - E)\big)\Big) = 2\pi V + 2\pi \cdot (F - E) = 2\pi \cdot (V + F - E)$$

A későbbiekben bizonyított 2.1. tételből (Euler tétel) tudjuk, hogy $V + F = E + 2$ ezért

$$T = 2\pi \cdot 2 = 4\pi$$

□

[2]

Most már láttuk, hogy a defektus minden konvex poliéder esetén azonos. Értelemszerűen vetődik fel a kérdés, hogy találunk-e összefüggést a poliéder többi alkotóelemei között, mint például az élek, csúcsok, lapok. Éppen erre ad választ Euler poliéder tétele.

[1] Egy n-oldalú sokszög n-2 háromszögre bomlik. Tetszőleges háromszög belső szögeinek összege π.

[2] $2\pi \cdot (F - E) = \sum_{F_k \in F} \pi \cdot (2 - n_k)$

2. fejezet

Összefüggések a konvex poliéderek csúcsai, élei, lapjai között

Euler-féle poliédertétel

2.1. Tétel: *Adott egy konvex poliéder, melynek lapszámát jelölje F, csúcsszámát V, az élek számát pedig E. Ekkor a konvex poliéderre fennáll:*

$$F + V = E + 2$$

azaz, a csúcsok és lapok számának összege éppen kettővel több, mint az élek száma. [1]

Bizonyítás: Tekintsük a konvex poliédert egy bolygónak. Ezt megtehetjük, mert a konvex poliédert zárt félterek véges metszeteként állítunk elő, melyeknek van közös belső pontja, amit jelöljünk O-val, így a poliéder ($\mathcal{P}$) nem üres, azaz

$$\exists\delta > 0 : B(O, \delta) \subset \mathcal{P}$$

A poliéder egy zárt, konvex, korlátos alakzat. A fent említett O belső pontból egy tetszőleges K ponton át indítsunk egy félegyenest, amit jelöljünk $\overrightarrow{OK}$-val (K lehet külső és poliéderbeli pont is). Mivel a félegyenes zárt és konvex alakzat, így a poliéder és a félegyenes metszete is zárt és konvex, de ezen felül korlátos, mert a közös rész a poliéder egy részhalmaza. A poliéder nem üres, hiszen az O egy belső pontja, ezért az $\overrightarrow{OK}$ félegyenes sem lehet üres - O biztosan egy pontja ennek a félegyenesnek. Abból, hogy a félegyenes nem üres, valamint a poliéderrel vett metszete zárt konvex és korlátos adódik, hogy ez a közös rész egy zárt szakasz, aminek egyik végpontja O, másik pedig éppen a poliéder határpontja.

Vegyünk egy G gömböt a poliéder körül. Ekkor a fenti gondolatmenet alapján a gömb minden F pontjára a poliédernek pontosan egy H határpontja lesz az $\overrightarrow{OF}$ félegyenesen, így a poliéder határát kölcsönösen egyértelműen rá lehet vetíteni a gömbre – azaz ez egy bijektív leképezés. A csúcsok és élek meghatározzák a poliédert. A csúcsok a gömbre pontként fognak vetülni, az élek pedig főkör szakaszokként. De miért is van ez? Vegyük a poliéder tetszőleges AB élét. A gömb középpontjából történő vetítés esetén a vetítési sík az AOB lesz. Ez a sík egy gömbi főkör szakaszt fog kimetszetni, mivel áthalad a gömb középpontján, így a poliéder képe egy olyan gömbi poliéder lesz, ahol a lapokat főkörívek határolják.

Így jelen esetben a gömb egy bolygó, melyen a gömbi sokszögeket feleltetjük meg. Ezen sokszög lapjaira, mint „medencékre”, melyek oldalira, mint „gátakra” tekintünk. Így modellezzük a poliéderünket bolygóval, medencékkel, és gátakkal. Alaphelyzetben csupán az egyik medencében víz van. Az a célunk, hogy a bolygó összes medencéjét elárasszuk olyan gátak felrobbantásán keresztül, aminek csak egyik oldalán van vizes medence, azaz egy gát felrobbantásakor mindig elárasztunk egy újabb medencét. A második tulajdonság szerint[3] ez véges sok lépésben megoldható. A felrobbantott gátakat jelölje E_f. Az első tulajdonság miatt, miszerint minden él pontosan 2 lap közös oldala, a felrobbantott gátak száma, amelyeket jelöljünk E_f-fel, éppen egyel kevesebb a lapok számánál, hiszen csak olyan gátat robbantunk fel, amivel egy új medencét kell elárasztanunk. Mivel egy medence kiinduláskor is vízzel teli volt, így már csak eggyel kevesebbet kell elárasztani felrobbantott gátakkal, ezért

$$E_f = F - 1$$

A harmadik és negyedik tulajdonság alapján a legvégül megmaradt élek (gátak), amelyeket jelöljünk E_m-mel, egy összefüggő gráfot fognak alkotni, mivel a kiinduló poliéder összefüggő gráfnak volt megfeleltetve, és minden robbantás alkalmával csak olyan gátat tüntettünk el, amivel egy újabb medence elárasztásra került. Tehát az elárasztandó medence élei közül mindig csak egy került felrobbantásra, ezért bármely két csúcsa között lesz út, hiszen ha az úthoz eddig nem volt szükség erre az élre, akkor nincs baj, ha viszont használt él volt, ekkor ezt ki lehet cserélni az elárasztott medence menti „körbemenő kerülőútra". Ebből látszik, hogy bármely két csúcsa az eredeti gömbi poliédernek is összeköthető a megmaradt éleket használva, így E_m összefüggő. Az is bizonyos, hogy a megmaradt gráf nem tartalmaz kört, hiszen ekkor lenne még nem elárasztott medence, ezért ez a gráf valójában egy fa, aminek az éleire és a csúcsaira fennáll[4], hogy

$$E_m = V - 1$$

A bolygót kétféle gátak alkotják, a felrobbantottak és a megmaradtak, tehát ezek összessége kiadja a bolygó összes gátját (poliéder éleit), azaz

$$E = E_f + E_m = (F - 1) + (V - 1) = V + F - 2,$$

ami átrendezve

$$V + F = E + 2$$

éppen a bizonyítandó összefüggés. □

[1]

Ebből a tételből számos poliéderbeli tulajdonság levezethető, amiből nem csak a poliéder alkotóelemei közötti összefüggésekre következtethetünk, hanem a poliéderek egy csoportjára, a szabályos poliéderek mivoltára is.

[3] 4. oldal: 1.1. Megjegyzés

[4] lásd Lovász L., Pelikán J., Vesztergombi K.- Diszkrét matematika (8.2.3)

2. 2. Az Euler-formula következményei

Jelölje továbbra is a konvex poliéder csúcsainak számát V, lapjainak számát F, élei számát pedig E. Ekkor az Euler-formula

$$V + F = E + 2 \qquad \text{(A)}$$

Ha a poliéder csúcsainak fokát összegezzük (azaz, hogy hány él fut be az egyes csúcsokba), akkor a kapott érték kétszerese az élek számának, hiszen egy él két csúcsot köt össze, és ezt az élt mindkét végpontjánál lévő csúcshoz hozzászámoltuk. Mivel egy poliéderbeli csúcsba legalább 3 él fut, ezért

$$2E \geq 3V \qquad \text{(B)}$$

Ha a poliéder lapjainak oldaléleit összegezzük, akkor pontosan kétszer annyi élt kapunk, mint amennyi a poliédernek van, hiszen egy él pontosan két lap közös oldala, így kétszer számoljuk, mert két csatlakozó oldal mindegyikénél beleszámoljuk az adott oldal élszámai közé. Mivel egy poliéder lapjának legalább 3 oldala van, ezért

$$2E \geq 3F \qquad \text{(C)}$$

Az (A) és (B) összefüggéseket felhasználva[5] adódik

$$\begin{aligned} 2E + 3F \geq 3V + 3F &= 3E + 6 \\ 2E + 3F &\geq 3E + 6 \\ \boxed{3F - E \geq 6} \end{aligned} \qquad (1)$$

Az (A) és (C) alapján[6] pedig

$$\begin{aligned} 3V + 2E \geq 3V + 3F &= 3E + 6 \\ 3V + 2E &\geq 3E + 6 \\ \boxed{3V - E \geq 6} \end{aligned} \qquad (2)$$

[2]

Ezeket az egyenlőtlenségeket felhasználva adódnak a további állítások.

2.2.1. Állítás: *Minden konvex poliéder tartalmaz legalább egy 3-oldalú, 4-oldalú vagy 5-oldalú lapot.* [2]

Bizonyítás: Adott egy tetszőleges konvex poliéder, azaz se a csúcsok számáról, se a lapok számáról, se oldalszámáráról nem tudunk semmit. Azt viszont tudjuk, hogy egy lap oldalszáma legalább 3. Jelöljük F_k -val a k oldalú lapok számát. Ha összegezzük az F_k éleit $k \geq 3$ -ra, akkor lapok számát kapjuk, azaz

$$F = F_3 + F_4 + F_5 + \cdots + F_k + \cdots$$

[5] Tulajdonképpen (A) háromszorosát.
[6] Hasonlóan (A) háromszorosát.

Tudjuk, hogy a k oldalú lapot k él határolja. Minden él pontosan 2 lap közös oldala, ezért fennáll a

$$2E = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \cdots + kF_k + \cdots$$

egyenlőség. Ezt behelyettesítve az (1) összefüggés kétszeresébe ($6F - 2E \geq 12$)

$$6(F_3 + F_4 + F_5 + \cdots + F_k + \cdots) - (3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \cdots + kF_k + \cdots) \geq 12$$
$$3F_3 + 2F_4 + F_5 - F_7 - 2F_8 - 3F_9 - \cdots - (k-6)F_k - \cdots \geq 12$$

Ebben az egyenlőtlenségben a pozitív előjelű tagoknak ($3F_3 + 2F_4 + F_5$) nagyobbnak kell lenniük, mint 12, azaz biztosan van 3 vagy 4, vagy 5 oldalú lapja a poliédernek. □

[2]

2.1. Megjegyzés: legalább 4 ilyen lapja van, mert ha $F_4 = F_5 = 0$, akkor $3F_3 = 12$ az $F_3 = 4$.

2.2.2. Állítás: *Minden konvex poliéder tartalmaz legalább egy 3-adfokú, 4-edfokú vagy 5-ödfokú csúcsot.* [2]

Bizonyítás: Az állítást hasonlóan látjuk be. Veszünk egy tetszőleges konvex poliéder, azaz se a csúcsok számáról, se a lapok számáról, se oldalszámáráról nem tudunk semmit. Ebben az esetben azt vesszük figyelembe, hogy egy csúcsba legalább három él fut, tehát a konvex poliéder minden csúcsa legalább harmadfokú. Jelöljük V_k-val a k-adfokú csúcsok számát. A poliéder csúcsait a harmadfokú, negyedfokú, ötödfokú, … csúcsok összessége adja, azaz

$$V = V_3 + V_4 + V_5 + \cdots + V_k + \cdots$$

Mivel a k-adfokú csúcsba k él fut, és minden él éppen 2 csúcsot köt össze, ezért igaz a

$$2E = 3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + \cdots + kV_k + \cdots$$

egyenlőség. Ezúttal a (2) összefüggés kétszeresét használva ($6V - 2E \geq 12$)

$$6(V_3 + V_4 + V_5 + \cdots + V_k + \cdots) - (3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + \cdots + kV_k + \cdots) \geq 12$$
$$3V_3 + 2V_4 + V_5 - V_7 - 2V_8 - 3V_9 - \cdots - (k-6)V_k - \cdots \geq 12$$

A fentiekhez hasonlóan a pozitív előjelű tagoknak ($3V_3 + 2V_4 + V_5$) nagyobbnak kell lenniük, mint 12, ezért biztosan van legalább egy 3-ad, 4-ed vagy 5-ödfokú csúcsa a poliédernek. □ [2]

2.2. Megjegyzés: legalább 4 ilyen csúcsa van, mert ha $V_4 = V_5 = 0$, akkor $3V_3 = 12$ az $V_3 = 4$

2.2.1. Definíció: Azon poliédereket, melyeknek élei, élszögei, lapszögei egyenlők, ebből adódóan lapjai, testszögletei egybevágóak és szabályosak, **szabályos poliéder**eknek nevezzük. [8]

2.2.3. Állítás: *Pontosan 5 szabályos, konvex poliéder létezik.* [2]

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy a poliéder minden lapja p oldalú, és minden csúcs q-adfokú, azaz minden csúcsba q él fut. A lapok oldaléleit összegezve a poliéder éleinek kétszeresét kapjuk, mivel minden él pontosan két lap közös oldala, ezért

$$pF = 2E$$
$$F = \frac{2E}{p}$$

A csúcsok fokait összegezve ugyancsak az élek kétszeresét kapjuk, mert minden él pontosan két csúcsot köt össze, ezért

$$qV = 2E$$
$$V = \frac{2E}{q}$$

Az Euler formulába behelyettesítve F-et és V-t a következőt kapjuk

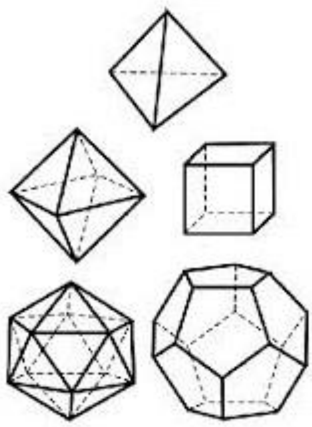
$$V + F = E + 2$$
$$\frac{2E}{q} + \frac{2E}{p} = E + 2$$
$$\frac{2Ep + 2Eq}{pq} = \frac{Epq}{pq} + \frac{2pq}{pq}$$
$$2Ep + 2Eq = Epq + 2pq$$
$$2E(p + q) - Ep = 2pq$$
$$E(2(p + q) - pq) = 2pq$$
$$E = \frac{2pq}{2(p + q) - pq} = \frac{2pq}{4 - (p - 2)(q - 2)}$$

Mivel p, q pozitív egész számok, tehát a számláló is pozitív, ezért a nevező is mindenképpen pozitív, mert a poliéder élszáma nem lehet negatív. Tehát

$$4 - (p - 2)(q - 2) > 0$$
$$(p - 2)(q - 2) < 4$$

Ez alapján nézzük meg, mik lehetnek p és q lehetséges értékei:

- $(p - 2)(q - 2) = 0$ akkor $(0 \cdot *)$ vagy $(* \cdot 0)$
  Tehát $p = 2$ és $q\ bármi$ vagy $q = 2$ és $p\ bármi$, de tudjuk, hogy $p, q \geq 3$ ezért ez az eset nem lehetséges
- $(p - 2)(q - 2) = 1$ akkor $(1 \cdot 1)$
  Tehát $p = 3$ és $q = 3$, ez éppen a **tetraéder**
- $(p - 2)(q - 2) = 2$ akkor $(1 \cdot 2)$ vagy $(2 \cdot 1)$



Tehát $p = 3$ és $q = 4$, ez éppen az **oktaéder**, vagy $p = 4$ és $q = 3$, ez pedig a **kocka**

- $(p-2)(q-2) = 3$ akkor $(1 \cdot 3)$ vagy $(3 \cdot 1)$
- Tehát $p = 3$ és $q = 5$, ez éppen az **izokaéder,** vagy $p = 5$ és $q = 3$, ez pedig a **dodekaéder**

Mivel más kombináció nem lehetséges p-re és q-ra, ezért csak ezek a szabályos poliéderek léteznek. □

[2]

Az eddig megkapott képletekből más szerkezeti tulajdonságait is megismerhetjük a poliédereknek.

2.2.4. Állítás: *Nincs olyan konvex poliéder, aminek 7 éle van.* [2]

Bizonyítás: Tegyük fel indirekten, hogy létezik ilyen poliéder. Ha ellentmondásra jutunk, akkor ez a feltevés hamis, tehát nem létezik 7 élű konvex poliéder. A bizonyításhoz az (A), (B), (C) összefüggéseket használjuk. Ha tudjuk, hogy 7 élű a poliéderünk, akkor számoljuk ki (B) és (C) alapján, hogy hány csúcsa és hány lapja van. Behelyettesítve a (C) egyenlőtlenségbe $E = 7$-et:

$$2 \cdot 7 \geq 3F$$
$$14 \geq 3F$$

Tudjuk, hogy egy poliéder lapjainak száma egész és – az 2.1. Megjegyzés alapján - legalább 4 db van belőle, ezért

$$F = 4$$

az egyetlen lehetséges lapszám. Nézzük meg a csúcsokra vonatkozó (B) összefüggést helyettesítéssel

$$2 \cdot 7 \geq 3V$$
$$14 \geq 3V$$

A csúcsok száma ugyancsak egész és - a 2.2. Megjegyzés alapján - minimum 4 csúcsa van egy poliédernek, ezért

$$V = 4$$

a csúcsok lehetséges száma. Tehát megtudtuk, hogy 7 él esetén a lapok és csúcsok száma egyaránt 4. Ez viszont nem elégíti ki Euler poliéder tételét, mert

$$4 + 4 \neq 7 + 2$$
$$8 \neq 9$$

azaz ellentmondásra jutottunk, ezért rossz volt a feltevés, vagyis nem létezik 7 élű konvex poliéder. □

Ezek után nézzük meg, hogy van-e még ilyen poliéder, ami nem létezik. Például létezik-e 10 lapból és 17 csúcsból álló poliéder.
Az Euler-formulába (A) behelyettesítve, megkaphatjuk, hogy ennek a poliédernek hány éle van.

$$V + F = E + 2$$
$$17 + 10 = E + 2$$
$$E = 25$$

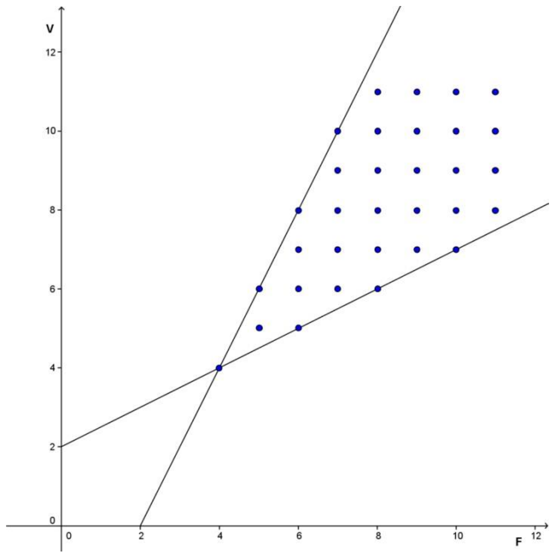
Viszont a (B) egyenlőtlenséget tudva látható, hogy ilyen poliéder nincsen, hiszen $2E \ge 3F$ -nek teljesülnie kell, de

$$50 = 2 \cdot 25 \ngeq 3 \cdot 17 = 51$$

Keressünk további poliédereket. A fentiekhez hasonlóan az (A), (B), (C) összefüggésekből következtetni lehet a lapok valamint a csúcsok lehetséges számára oly módon, hogy

$$2V + 2F = \boldsymbol{2E} + 4 \ge \boldsymbol{3F} + 4$$
$$2V + 2F \ge 3F + 4$$
$$2V - 4 \ge F \quad \longrightarrow \quad \boxed{V \ge \frac{1}{2}F + 2}$$
$$2V + 2F = \boldsymbol{2E} + 4 \ge \boldsymbol{3V} + 4$$
$$2V + 2F \ge 3V + 4$$
$$\boxed{2F - 4 \ge V}$$

A kapott összefüggéseket ábrázoljuk egy koordináta-rendszerben, melynek a két tengelye V és F lesz. Az ábrában lévő két egyenest éppen a fenti egyenlőtlenségek adják. Mivel V, F ∈ ℕ ezért jelöljük pontokkal a lehetséges csúcs-él párokat. [2]

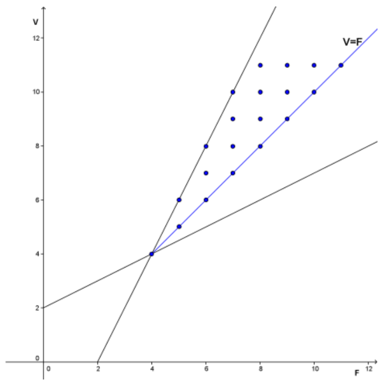


A **2.2.4**-es állítás igazsága a fenti ábráról is leolvasható. Euler tételéből tudjuk, hogy $E = V + F - 2$, azaz az élek számát a csúcsok és lapok száma befolyásolja. Látható a függvényen, hogy a legkisebb érték a $(4,4)$ karikához tartozik, hiszen ekkor az élek száma $4 + 4 - 2 = 6$ - ami a tetraéder. Minden karikából, egy másik karikába eljuthatunk V vagy F mentén egyesével lépegetve, s így növelve V és/vagy F értékét. A (4,4) ponthoz legközelebbi pont viszont az (5,5)-ben van, így biztosan egyszerre nő V és F is, ezért nem adódhat az $E = 7$, csupán az $E = 8$.

2.2.5. Állítás: *Minden karika egy megvalósítható poliéder.*

Bizonyítás: Egy n alapú gúlának $n + 1$ lapja és csúcsa, valamint $2n$ éle van. Ez a grafikonban éppen a $V = F$ egyenes, tehát tudjuk, hogy ezek a karikák megvalósíthatók. Mivel egy csonkításnál a csúcsok száma kettővel, a lapoké eggyel növekszik illetve egy felosztásnál a lapoké kettővel, a csúcsoké eggyel, ha ennek a fordítottját hajtanánk végre, azaz a csúcsok számát kettővel, míg a lapokét eggyel, a felosztás esetében a lapok számát kettővel, míg a csúcsokét eggyel csökkentenénk, és ezzel eljutnánk az $V = F$ egyenesre, akkor innen a csonkítást illetve a felosztást használva minden lépésben megvalósítható poliédert kapnánk. Azaz elég belátni, hogy az inverz lépéssel az $V = F$ egyenesre jutunk, mert ekkor a kiindulási pár megvalósítható egy n-alapú gúlával.

<u>Csonkítás</u>: Az n-alapú gúla alaplapjának csúcsai 3-adfokúak, ami azt jelenti, hogy egy csúcsba pontosan 3 él fut. Ezeket a csúcsokat levágva eggyel nő a poliéder lapjainak száma és kettővel a csúcsok száma. Minden ilyen vágással 3 új 3-adfokú csúcs keletkezik, ezért ez a folyamat a végtelenségig folytatható.



A csonkítással nyert poliéderek éppen a fenti koordináta-rendszerben, a $V = F$ egyenestől felfelé első rész, hiszen az ide eső pontok $(f_0, v_0) \in \mathbb{N}^2$ kielégítik a $V \geq F$ és $V \leq 2F - 4$ egyenlőtlenségeket, azaz

$$f_0 \leq v_0 \leq 2f_0 - 4$$

- ha $f_0 = v_0$: készen vagyunk
- ha $f_0 < v_0$: egy lépésben az f_0 értéke egyet csökken így $f_1 = f_0 - 1$ a v_0 értéke pedig kettőt, azaz $v_1 = v_0 - 2$

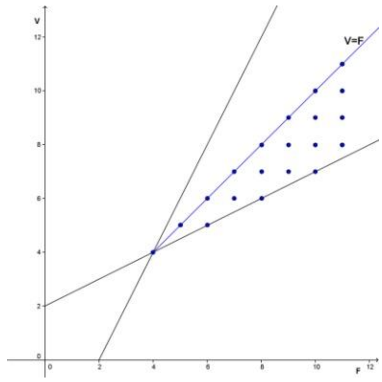
A két koordináta különbségének változása $v_0 - f_0$ -ról $v_1 - f_1$-re változik vagyis

$$(v_0 - 2) - (f_0 - 1) = (v_0 - f_0) - 1$$

Tehát a két koordináta különbsége egy lépés során eggyel csökken. Véges sok lépés során ez a különbség eltűnik azaz

$$v_0 - f_0 = 0$$
$$v_0 = f_0$$

Ezzel megkaptuk, hogy a $V = F$ feletti rész minden pontja visszavezethető a $V = F$ egyenesre. Ezért minden ottani poliéder az n-alapú gúlából ered.



Felosztás: A poliéder felosztása a következőképpen történik. Ismeretes, hogy az n alapú gúla oldallapjai háromszögek. Ezeket egy belső pontjuknál fogva megemeljük, úgy hogy a csúcspontjaik helyben maradnak, azaz mintha egy háromoldalú gúlát helyeznénk rá. Ezáltal a poliéder lapjainak száma kettővel, míg a csúcsok száma eggyel nő. Hasonlóan az előzőekhez ez az eljárás is a végtelenségig folytatható, hiszen minden emeléssel három új háromszöglap keletkezik.

A fenti gondolatmenet alapján az inverz lépéseket használva, a felosztással nyert poliéderek éppen a fenti koordináta-rendszerben a $V = F$ egyenestől lefelé első rész, hiszen az ide eső pontok $(f_0, v_0) \in \mathbb{N}^2$ kielégítik a $V \leq F$ és $V \geq \frac{1}{2}F + 2$ egyenlőtlenségeket, azaz

$$\frac{1}{2}f_0 + 2 \leq v_0 \leq f_0$$

- ha $f_0 = v_0$: készen vagyunk
- ha $v_0 < f_0$: egy lépésben az f_0 értéke kettővel csökken így $f_1 = f_0 - 2$, a v_0 értéke pedig eggyel, azaz $v_1 = v_0 - 1$

A két koordináta különbségének változása $f_0 - v_0$ -ról $f_1 - v_1$-re változik vagyis

$$(f_0 - 2) - (v_0 - 1) = (v_0 - f_0) - 1$$

Tehát a két koordináta különbsége egy lépés során eggyel csökken. Véges sok lépés során ez a különbség eltűnik azaz

$$v_0 - f_0 = 0$$
$$v_0 = f_0$$

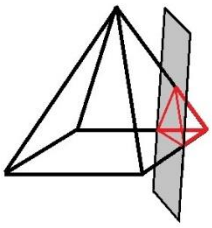
Ezzel megkaptuk a $V = F$ alatti rész minden pontja, visszavezethető a $V = F$ egyenesre. Tehát valóban az n-alapú gúla felosztásával további poliéderek nyerhetőek.

A következőben vizsgáljuk meg, hogy egy poliéder milyen élszámokkal rendelkezhet?

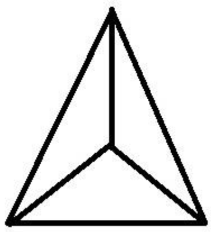
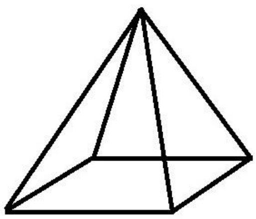
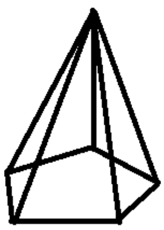
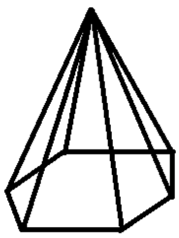
2.2.6. Állítás: *Egy konvex poliéder lehetséges élszámai* [2]

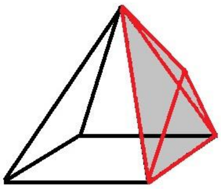
$$E \geq 6 \text{ de } E \neq 7$$

Bizonyítás:

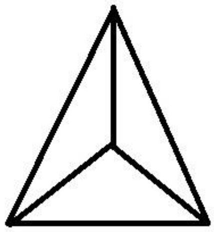
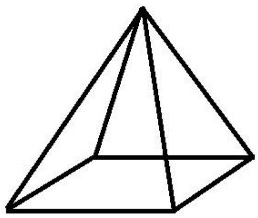
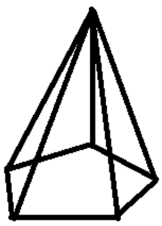
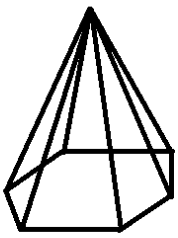


Nézzük meg analóg módon, hogy egy csonkítás során miképp változik a poliéder. A csonkítás a „csúcs levágását" jelenti, azaz egy n-alapú gúla esetén az alaplap csúcsait csonkítva kis tetraédereket vágunk le. Minden csonkítás során a lapok száma eggyel, a csúcsoké kettővel, míg az élek szám hárommal növekszik.

Csonkítások száma		**0** (Kezdeti állapot)	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**…**	**k**
n-alapú gúla										
	**lap**	4	5	6	7	8	9	10	…	(n+1)+k
	csúcs	4	6	8	10	12	14	16	…	(n+1)+2k
	él	**6**	**9**	12	15	18	21	24	…	**2n+3k**
	**lap**	5	6	7	8	9	10	11	…	(n+1)+k
	csúcs	5	7	9	11	13	15	17	…	(n+1)+2k
	él	**8**	**11**	14	17	20	23	26	…	**2n+3k**
	**lap**	6	7	8	9	10	11	12	…	(n+1)+k
	csúcs	6	8	10	12	14	16	18	…	(n+1)+2k
	él	**10**	**13**	16	19	22	25	28	…	**2n+3k**
	**lap**	7	8	9	10	11	12	13	…	(n+1)+k
	csúcs	7	9	11	13	15	17	19	…	(n+1)+2k
	él	**12**	**15**	18	21	24	27	30	…	**2n+3k**



Most nézzük meg, hogy mi történik egy-egy felosztás során. Ekkor mintha az oldallap középpontjánál fogva megemelnénk az oldallapot. Ez némileg eltér a csonkítástól, mivel itt a csúcsok száma növekszik eggyel, a lapoké kettővel, az élek száma pedig ugyancsak hárommal.

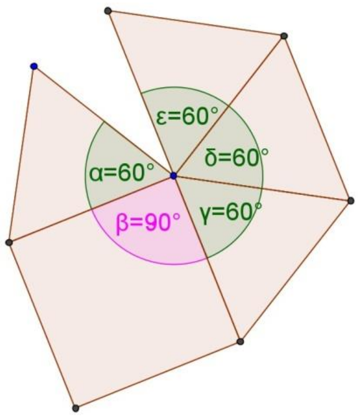
Felosztások száma		**0** (Kezdeti állapot)	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**…**	**k**
n-alapú gúla										
	**lap**	4	6	8	10	12	14	16	…	(n+1)+2k
	csúcs	4	5	6	7	8	9	10	…	(n+1)+k
	él	**6**	**9**	12	15	18	21	24	…	**2n+3k**
	**lap**	5	7	9	11	13	15	17	…	(n+1)+2k
	csúcs	5	6	7	8	9	10	11	…	(n+1)+k
	él	**8**	**11**	14	17	20	23	26	…	**2n+3k**
	**lap**	6	8	10	12	14	16	18	…	(n+1)+2k
	csúcs	6	7	8	9	10	11	12	…	(n+1)+k
	él	**10**	**13**	16	19	22	25	28	…	**2n+3k**
	**lap**	7	9	11	13	15	17	19	…	(n+1)+2k
	csúcs	7	8	9	10	11	12	13	…	(n+1)+k
	él	**12**	**15**	18	21	24	27	30	…	**2n+3k**

Látható, hogy minden esetben $2n + 3k$ alakú az élek száma. Tudjuk, hogy a poliédernek minimum 6 éle van, hiszen a legkevesebb élt tartalmazó poliéder a tetraéder, ennek pedig 6 éle van. A táblázatból is látszik, hogy minden páros él, ami $2n$ alakú éppen az n-alapú gúla élszáma. Minden páratlan élszám, ami $2n + 1$ alakú pedig az (n-1) -alapú gúla első csonkolásából, vagy első felosztásából adódik.

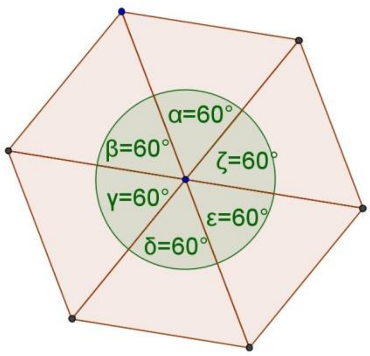
3. Fejezet

Félig szabályos testek

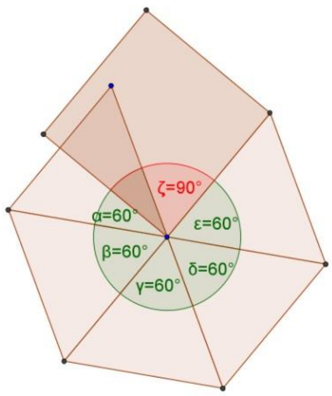
A fenti állításokat továbbgondolva vetődik fel a kérdés, hogy tulajdonképpen milyen félig szabályos testek is léteznek? Tudjuk, hogy ezeknek a poliédereknek szabályos lapjai vannak, amelyek lehetnek háromszögek, négyszögek, ötszögek stb. Belátható, hogy bármely konvex testben az egy csúcsnál találkozó lapok száma legfeljebb 5 lehet (1-3.ábra). Ez a megállapítás a test azon tulajdonságából ered, miszerint az egy csúcsnál találkozó lapok csúcsnál lévő szögeinek összege kevesebb, mint 360°. Ennek oka, hogy ha veszünk egy csúcsnál találkozó lapokat, és egy él mentén felvágjuk, akkor belátható, hogy síkba teríthető az ábrákhoz hasonlóan, azaz a kiterített lapok nem fedik át egymást és nem adják ki a teljes 360°-ot (mint a 1. illetve 2. ábrán). Az egy csúcsban találkozó lapok száma akkor lehet a legnagyobb, ha csak háromszögekből áll a poliéder, mivel ennél a szabályos síkidomnál a legkisebb a belső szög. Ekkor 6 db szabályos háromszöget tudunk letenni egymás mellé (2. ábra). Bármely más alakzatot választva vagy a 6 közül egy cserélése esetén is a csúcsnál lévő szögek összege meghaladja a 360°-ot, azaz az egy csúcsnál lévő lapok kiterítésekor a lapok fednék egymást.(3. ábra)



1. ábra



2. ábra



3. ábra

Ezek tudatában nézzük meg milyen konvex poliéderek lehetségesek? A megoldáshoz szükségünk van a szabályos síkidomok belső szögeinek ismeretére:

- háromszög: 60°
- négyszög: 90°
- ötszög:108°
- hatszög: 120°
- hétszög: 128,57°
- nyolcszög: 135°
- kilencszög: 140°
- tízszög: 144°

Mivel egy csúcsnál legalább 3 lap találkozik, így a tizenegy-szöget már nem kell nézünk, hiszen annak belső szöge $147{,}27°$, ezért a két legkisebb belső szögű síkidom (háromszög) „mellé” sem helyezhető már, mert ekkor a szögek összege $60° + 60° + 147{,}27° = 367{,}27°$, ami meghaladja a teljesszöget.

A Schäfli szám

Az egy csúcsban találkozó lapok oldalszámait valamint elhelyezkedéseit a Schäfli szám írja le. Ez a számsorozat az egyes lapok oldalszámaiból áll, olyan sorrendben, ahogyan a lapok „követik egymást”, azaz szomszédos lapok oldalszámai szomszédos számok a Schäfli számban[7]. Ezáltal megkülönböztetjük az (a,a,b,b) illetve (a,b,a,b) számokat, hiszen az első példában két egybevágó lap egymás mellé kerül, míg a második esetben felváltva követik egymást a lapok. Mindezeken felül nem irányított, és csak a ciklikus sorrend számít, azaz (a,b,c,d)=(b,c,d,a)=(c,b,a,d)=…=(a,d,c,b)=(d,c,b,a)=…

Bontsuk részekre a lehetséges eseteket aszerint, hogy egy csúcsnál hány lap találkozik.

A. 5 lap találkozik
   a) 3, 3, 3, 3, 3 oldalú lapok
      Szögek összege: $5 \cdot 60° = 300° < 360°$
      Ennek a poliédernek minden lapja egybevágó is, ezért ez szabályos, mégpedig ez az izokaéder.
   b) 3, 3, 3, 3, 4 oldalú lapok
      Szögek összege: $4 \cdot 60° + 90° = 330° < 360°$
      Ez a csavarcsonkított kocka.
   c) 3, 3, 3, 3, 5 oldalú lapok
      Szögek összege: $4 \cdot 60° + 108° = 345° < 360°$
      Ez a csavarcsonkított ikozidodekaéder.
   d) 3, 3, 3, 3, 6 oldalú lapok
      Szögek összege: $4 \cdot 60° + 120° = 360° \nless 360°$
      Tehát ez nem lehetséges, mivel a lapok csúcsban találkozó szögeinek összegének kisebbnek kell lennie, mint $360°$. Nyilvánvalóan nagyobb oldalszámú lap már nem jöhet szóba, mert így a szögösszeg meghaladja a $360°$-ot. Ezért a következő eset, ha csak 3 db háromszög valamint két másféle szabályos lap találkozik.
   e) 3, 3, 3, 4, 4 oldalú lapok
      Szögek összege: $3 \cdot 60° + 2 \cdot 90° = 360° \nless 360°$
      Ebben az esetben a legkisebb szögösszeg 3 db háromszög és 2 db négyzet esetén adódik, de mivel már ez is éppen $360°$, ezért ez sem kivitelezhető, valamint ezzel végeztünk az 5 lapból álló csúcsokkal, mert bármely lapot módosítva nagyobb szögösszeget kapnánk.

[7] Nyilvánvalóan az első és utolsó szám is.

f) 3, 3, 3, k, l oldalú lapok, ahol $k, l \geq 4,\ k, l \in \mathbb{N}$

Mivel $k, l = 4$ esetén is a szögösszeg nagyobb, mint a teljes szög, ezért ennél nagyobb oldalszámú lapokat véve a szögösszeg még nagyobb lesz.

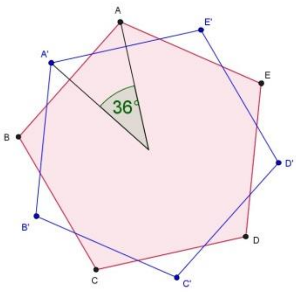
B. 4 lap találkozik

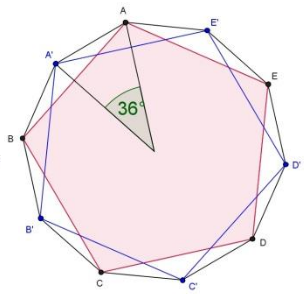
a) 3, 3, 3, 3 oldalú lapok

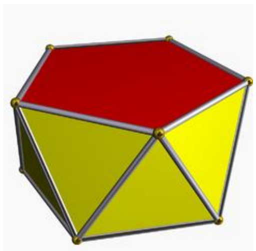
Ilyen létezik, ez az oktaéder.

b) 3, 3, 3, k oldalú lapok, ahol $k > 3,\ k \in \mathbb{N}$

Ezek mind léteznek, ezek az antiprizmák. Ezeket úgy kapjunk, ha egy szabályos n oldalú alakzatot elforgatjuk $(360°/n)/2$-vel. Az eredeti alakzat csúcsait összekötjük az elforgatott képükkel, valamint az eredeti alakzatban előtte lévő csúcs képével[8]. Ezután, az elforgatott alakzatot[9] megemeljük addig, amíg az oldallapok szabályos háromszöggé nem nyúlnak.

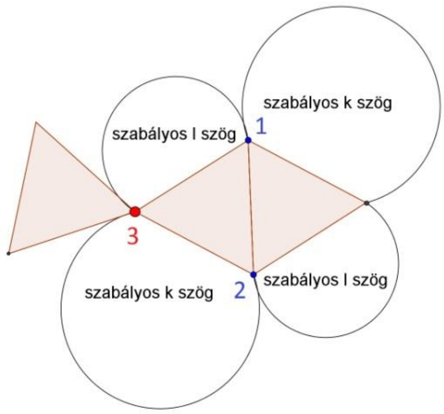






c) 3, 3, k, l oldalú lapok, ahol $k, l > 3,\ k, l \in \mathbb{N}$

A Schäfli szám nem csak a találkozó lapok oldalszámát mondja meg, hanem egy sorrendet is ad, ezért ez az elrendezés úgy nézne ki, hogy 2 db szabályos háromszög találkozik, méghozzá oldalukban. A másik két lap egy szabályos k-szög, valamint egy szabályos l-szög (1, 2-es csúcs). Mivel a Schäfli szám minden csúcsra érvényes, ezért a háromszögek találkozó oldalának másik végén (3. csúcs), hasonló módon felírható a k és l lap, csak éppen ellentétesen[10]. Most tekintve a háromszögek 3. csúcsait, azt látjuk, hogy egy háromszöget egy k oldalú és egy l oldalú szabályos lap vesz körül. Ide csak úgy tudnánk a másik háromszöget berajzolni, ha a két háromszög már nem szomszédosan, hanem egymással szemben lennénk. Ez pedig már a (3, k, 3, l) Schäfli számot mondaná meg, hiszen nem került egymás mellé a két háromszög.



[8] Szomszédos csúcsával, de egy poliéderen belül, ez vagy mindig a bal, vagy mindig a jobb legyen.

[9] Ez lesz a felső lap.

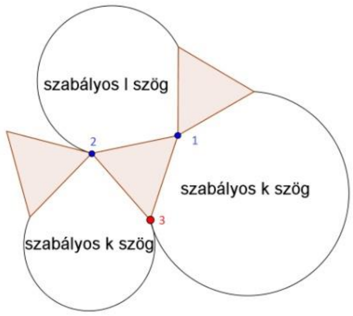
[10] Azért, hogy két k-szög, vagy l-szög ne kerüljön egymás mellé.

d) 3, k, 3, k oldalú lapok, ahol $k > 3,\ k \in \mathbb{N}$

- (3, 4, 3, 4) ilyen létezik, ez a kocka oktaéder
- (3, 5, 3, 5): ilyen létezik, ez az ikozidodekaéder
- (3, 6, 3, 6): ez nem létezik, hiszen a lapok csúcsnál lévő szögeinek összege éppen: $60° + 120° + 60° + 120° = 360° \nless 360°$, azaz ilyen test már nem szerkeszthető. Egyértelműen adódik, hogy nagyobb oldalszámú lapokra kicserélve sem adódik test, hiszen ott a szögösszeg még nagyobb lesz, mint $360°$.

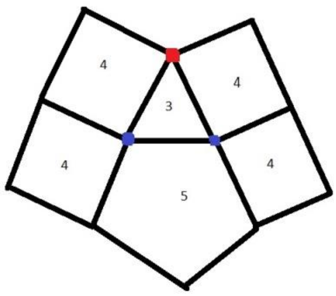
e) 3, k, 3, l oldalú lapok, ahol $k > 3,\ l > 4,\ k, l \in \mathbb{N}$

Ez nem lehetséges, hiszen ha a fentiekhez hasonlóan lerajzoljuk (1, 2-es csúcs) látható, hogy ha folytatnánk ezt az elrendezést két k oldalú szabályos alakzat egymással szembe kerülne (3-as csúcs), ami nem lehetséges.



f) 3, i, j, k oldalú lapok, ahol $i, j, k > 3,\ i, j, k \in \mathbb{N}$

- (3, 4, 4, 4): ilyen létezik, ez a kis rombokockaoktaéder
- (3, 4, 5, 4): ilyen létezik, ez a kis romboikozidodekaéder
- (3, 4, 6, 4): ez nem lehetséges, mert a szögösszegek elérték a $360°$-ot, hiszen $60° + 90° + 120° + 90° = 360°$, ezért tovább - (3, 4, 7, 4) - nem kell már vizsgálni
- (3, 4, 4, 5): ilyen nem adódhat, hiszen ha lerajzolunk ciklikusan egy (3, 4, 4, 5) szöget, majd folytatva a 3- és 5-szög másik találkozási csúcsánál a két darab négyzetet berajzolva, a háromszög még nem kiegészített csúcsánál két négyzet egymással szembe kerül



- (3, 4, 5, 5): ez nem lehetséges, mert a szögösszegek elérték a $360°$-ot, hiszen $60° + 90° + 108° + 108° = 366°$.
- 3, i, j, k oldalú lapok, ahol valamelyik legalább 4 oldalú, a másik kettő legalább 5 oldalú nem valósítható meg, mivel az előzőben is - (3, 4, 5, 5) - már meghaladta a teljes szöget, ezért nagyobb oldalszámú lapok esetén is eléri ezt, azaz $360°$-ot.

  Ezzel az összes olyan poliéderrel végeztünk, ahol minden csúcsban 4 lap találkozik, amik közül az egyik egy háromszög.

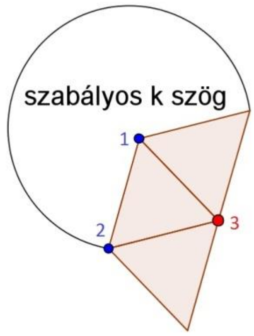
g) i, j, k, l oldalú lapok, ahol $i, j, k, l > 3$, valamint $i, j, k, l \in \mathbb{N}$

Ez az eset nem lehetséges, mert itt is meghaladják a $360°$-ot, hiszen minden lap legalább négyzet, azaz legalább $90° + 90° + 90° + 90° = 360°$

C. 3 lap találkozik

a) 3, 3, 3 oldalú lapok

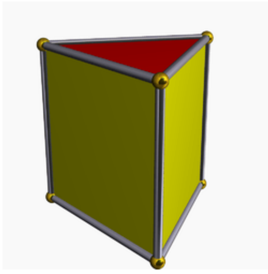
Ilyen létezik, ez a tetraéder.



b) 3, 3, k oldalú lapok, ahol $k > 3$ és $k \in \mathbb{N}$

Ez a kombináció nem lehetséges, mert ha lerajzolnánk két háromszöget és egy k oldalú sokszöget (1-es csúcs), folytatva a csúcsoknál lévő lapok elhelyezkedésének szemléltetését (2-es csúcs) látható, hogy 3 háromszög egymás mellé kerül úgy, hogy lesz egy közös csúcsuk (3-as csúcs), ami a (3, 3, 3) -as Schäfli számot adná.

c) 3, 4, k oldalú lapok, ahol $k > 3$ és $k \in \mathbb{N}$



- 3, 4, 4 ilyen létezik, ez egy prizma. A prizmák szabályos sokszög alapú egyenes hasábok. Tehát olyan félig szabályos testek, amelyeknek alaplapjai szabályos sokszögek, oldallapjai pedig négyzetek.
- 3, 4, k oldalú lapok, ahol $k > 4$ és $k \in \mathbb{N}$

  Ez nem lehetséges, mert ismert Euler tétele, miszerint az élek száma éppen kettővel több, mint a csúcsok és lapok száma összesen

  $$V + F = E + 2$$

  Tudjuk, hogy ebben az esetben 3 lap találkozik egymással, ezért ha a csúcsokra összegezzük az élszámot, akkor minden csúcsba pontosan 3 él fut. Ezzel az összeszámolási módszerrel viszont minden élt kétszer számoltunk, mivel egy él pontosan 2 csúcsot köt össze, ezért valójában az élek kétszeresét kapjuk meg, azaz

  $$3V = 2E$$

  Ebből az élszámot kifejezve, majd Euler-tételébe behelyettesítve, azt kapjuk, hogy

  $$V + F = \frac{3}{2}V + 2$$

  $$F = \frac{1}{2}V + 2$$

  A lapok száma felírható a háromszöglapok, négyszöglapok, k-szöglapok számával, amit $F_3,\ F_4,\ F_k$-val jelöltünk, azaz

  $$F_3 + F_4 + F_k = \frac{1}{2}V + 2 \qquad (1)$$

  A 3, 4, k oldalú lapok találkozásának esetében egy csúcsnál csupán egy háromszög található. Ezért a csúcsok számát kifejezhetjük úgy is, hogy a háromszöglapok számának háromszorosa, mivel ugyanazt a háromszöget, mind a három csúcsánál számoljuk. Ugyanez igaz a négyzetekre, illetve a szabályos k-szögre is, ezért az alábbi összefüggés felírható

  $$C = 3F_3 = 4F_4 = kF_k \qquad (2)$$

Az (1) egyenlet háromszorosát véve

$$3F_3 + 3F_4 + 3F_k = \frac{3}{2}C + 6$$

A (2) egyenletet felhasználva adódik, hogy

$$V + 3F_4 + 3F_k = \frac{3}{2}V + 6$$

$$3F_4 + 3F_k = \tfrac{1}{2}V + 6 \qquad /\cdot \tfrac{4}{3}$$

$$4F_4 + 4F_k = \frac{2}{3}V + 8$$

$$V + 4F_k = \frac{2}{3}C + 8$$

$$4F_k = -\frac{1}{3}V + 8$$

$$0 < 4F_k = -\frac{1}{3}V + 8$$

$$8 - \frac{1}{3}V > 0$$

$$8 > \frac{1}{3}V$$

$$24 > V$$

A (2) egyenletből következik, hogy a csúcsok száma osztható 3-mal, 4-el és k-val, valamint ez kisebb, mint 24, ezért a csúcsok száma csak 12 lehet. Ez viszont azt jelenti, hogy $F_3 = 4$ illetve $F_4 = 3$. De ez nem lehetséges, mert az (1) egyenlet így nem teljesül, hiszen

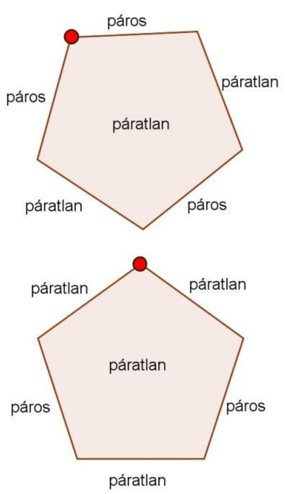
$$4 + 3 + F_k = \frac{1}{2} \cdot 12 + 2$$

$$7 + F_k = 8$$

$$F_k = 1$$

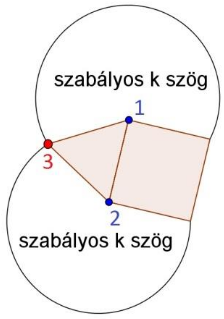
De $F_k \geq 2$ kell legyen. □

3.1. Lemma: Paritás szempontjából is megállapítható, hogy nem létezik olyan test, ahol két páratlan és egy páros élszámú lap találkozik. Ez abból adódik, ha megvizsgálunk egy páratlan élszámú lapot. Ennek a lapnak az éleinél páros illetve páratlan lapok szerepelnek felváltva, hiszen így lesz a megvizsgált páratlan élszámú lap csúcsainál egy páros, és két páratlan élszámú lap. Ez viszont nem vihető végbe, hiszen vagy 3 páratlan élszámú vagy két páros és egy páratlan élszámú lap fog találkozni. Mindezek miatt a továbbiakban csak a páros, páros, páratlan (ami ciklikus) típusú Schäfli számokkal fogok foglalkozni.



De ezek közül is csupán azokkal, ahol a két páros szám egyenlő, hiszen a fenti állításból hasonlóan adódik, hogy egy páratlan elszámú laphoz páros1 és páros2 lapokat rendelve, lesz olyan csúcsa a páratlan élszámú lapnak, ahol két azonos (páros) élszámú lap találkozik.

Egy másik, az előzőekhez hasonló bizonyítás a 3, 4, k oldalú lapok nem létezésére, ahol $k > 4$ és $k \in \mathbb{N}$:



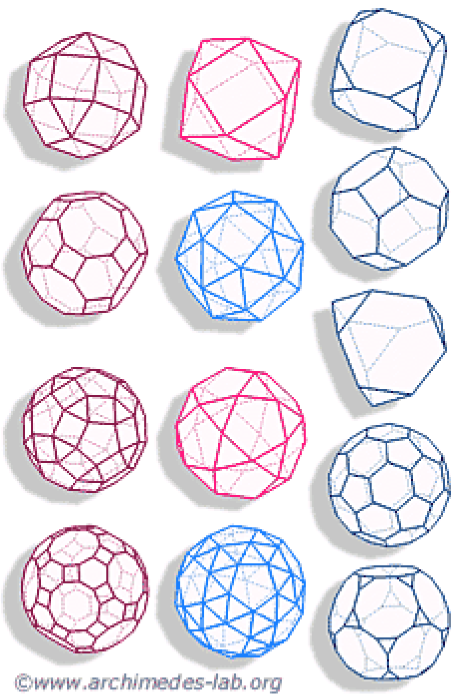
- 3, 4, k oldalú lapok, ahol $k > 4$ és $k \in \mathbb{N}$
  Ez nem lehetséges, mert ha egy csúcsban a fent megadott lapok találkoznak (1-es csúcs), akkor a háromszögnek és a négyzetnek a másik közös csúcsához egy szabályos k-szögnek kell csatlakoznia (2-es csúcs), ekkor viszont a háromszög harmadik csúcsánál már önmaga mellett két k-szöglap is találkozik (3-as csúcs), ami nem megfelelő.
- 3, j, k oldalú lapok, ahol j, $k \geq 3$ és $j, k \in \mathbb{N}$ valamint j ≠ k
  A 3, 4, k-s állítás miatt ez sem valósítható meg.
- 3, 6, 6 oldalú lapok
  Ilyen létezik ez a csonkolt tetraéder.
- 3, 8, 8 oldalú lapok
  Ilyen létezik, ez a csonkolt kocka.
- 3, 10, 10 oldalú lapok
  Ilyen létezik, ez a csonkolt dedokaéder.
- 3, 11, 11 oldalú lapok
  Ez nem lehetséges, mert ha megnézzük, hogy egy 11 élű laphoz, élenként felváltva csatlakozik a háromszög és a tizenegyszög, akkor belátható, hogy körbeérve az utolsó csúcsnál (3, 3, 11) vagy (11, 11, 11) Schäfli szám adódna.
- 3, 12, 12 oldalú lapok
  Ez nem lehetséges, hiszen itt az egy csúcsnál lévő szögek összege éppen $360°$-ot, hiszen $60° + 150° + 150° = 360°$.
- 4, 4, 4 oldalú lapok
  Ilyen létezik, ez a kocka.
- 4, 4, k oldalú lapok, ahol $k > 4$ és $k \in \mathbb{N}$
  Ezek léteznek, hiszen ezek a prizmák.
- 4, 6, 6 oldalú lapok
  Ilyen létezik, ez a csonkolt oktaéder.
- 4, 6, 8 oldalú lapok
  Ilyen létezik, ez a csonkolt kockaoktaéder.
- 4, 6, 10 oldalú lapok
  Ilyen létezik, ez a csonkolt ikozidodekaéder.

- 4, 6, 12 oldalú lapok
  Ez nem lehetséges, mert ebben az esetben az egy csúcsnál lévő szögek összege éppen $360°$, hiszen $90° + 120° + 150° = 360°$, ezért a 12-nél nagyobb élszámú oldalakat sem kell már vizsgálni.
- 4, 8, 8 oldalú lapok
  Ez nem létezik, mert az egy csúcsnál lévő szögek összege $360°$, így a (4, k, k) Schäfli szám, ahol $k \geq 8$ már nem létezik.
- 5, 5, 5 oldalú lapok
  Ez létezik, ez a dodekaéder.
- 5, 5, k oldalú lapok, ahol $k > 5$, $k \in \mathbb{N}$ és páros
  Ez nem lehetséges, mert páratlan, páratlan, páros alakú.
- 5, 5, l oldalú lapok, ahol $l > 5$, $l \in \mathbb{N}$ és páratlan
  Ez nem lehetséges, mert páratlan, páratlan, páratlan alakú.
- 5, 6, 6 oldalú lapok
  Ez megvalósítható, ez a csonkolt izokaéder.
- 5, 8, 8 oldalú lapok
  Ez nem lehetséges, hiszen itt az egy csúcsnál lévő szögek összege meghaladja $360°$-ot, hiszen $108° + 135° + 135° = 378° > 360°$.
- 6, 6, 6 oldalú lapok
  Ez nem lehetséges, hiszen itt az egy csúcsnál lévő szögek összege éppen $360°$, hiszen $120° + 120° + 120° = 360°$.

A prizmákat és antiprizmákat leszámítva – amikből végtelen sok van - 26 félig szabályos test létezik. Ezek egyik csoportját az Archimédeszi testek, másikat az Archimédeszi testek duálisai alkotják. Így nyilvánvaló, hogy 13-13 poliéder tartozik mindkét csoportba.

Archimédeszi testek

1. Csonkolt tetraéder (3,6,6)
2. Kocka oktaéder (3,4,3,4)
3. Csonkolt kocka (3,8,8)
4. Csonkolt oktaéder (4,6,6)
5. Kis rombokockaoktaéder (3,4,4,4)
6. Ikozidodekaéder (3,5,3,5)
7. Csavarcsonkított kocka (3,3,3,3,4)
8. Csonkolt kockaoktaéder (4,6,8)
9. Csonkolt izokaéder (5,6,6)
10. Csonkolt dodekaéder (3,10,10)
11. Kis romboikozidodekaéder (3,4,5,4)
12. Csavarcsonkított dodekaéder (3,3,3,3,5)
13. Csonkolt ikozidodekaéder (4,6,10)



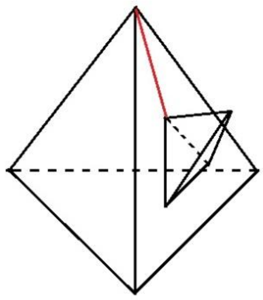
4. fejezet

A poliéderek általánosítása

Az eddigiekben láthattuk, hogy 5 szabályos, és – a prizmákat és antiprizmákat leszámítva – 26 félig szabályos test létezik. Nézzük most meg, hogy a nem ezen osztályokba tartozó poliéderekről is elmondható-e egy olyan általánosítás, mint Euler tétele (2.1). Ennek megvizsgálásához szükségünk lesz az Euler-tétel teljesülése feltételének pontosabb megfogalmazására.

4.1. Definíció: Ha f folytonos bijekció, és f^{-1} is folytonos, akkor f-et **homeomorfizmus**nak nevezzük. [3]

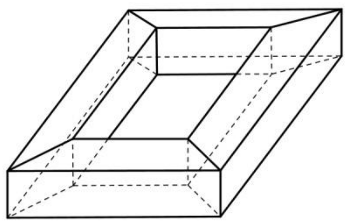
A tétel – miszerint a konvex poliéder csúcsai és lapjai száma éppen 2-vel több élei számánál – olyan testekre teljesül, ahol minden lap homeomorf a körlappal. Például az alábbi test adatai az $E = 12$, $V = 8$, $F = 7$ ezért, erre nem teljesül az Euler-tétel, viszont 1 élt (piros) behúzva, már igaz az összefüggés



$$V + F = E + 2$$

$$8 + 7 = 13 + 2$$

Ezen kívül nem csak a lapok mindegyike homeomorf a körlappal, hanem maga a poliéder is homeomorf a gömbbel. Ezért nem elég a lapok gömbbel vett homeomorfizmusa, szükséges az egész poliéder gömbre való vetítésének lehetősége. Következésképp azokra a poliéderekre, amelyek nem gömbbel, hanem például tórusszal homeomorfak, nem igaz a 2.1.-es összefüggés.



4. ábra

A fenti állításokból eredően azokra a testekre, amely lapjai körlappal, maga a test pedig a gömbfelülettel homeomorf, teljesül az Euler-tétel. A korábban leírt bizonyítás alapján[11], a poliédert megfeleltethetjük egy bolygónak, vagyis egy gömbnek, amit itt nem részletezünk. Ekkor az általánosabb megfogalmazása a tételnek:

4.1. Tétel: *Legyen a gömbfelületen (vagy valamely vele homeomorf felületen) megadva egy olyan gráf, amely e felületet a körrel homeomorf darabokra „vágja szét”. Jelöljük továbbra is e darabok számát F-el, a megadott gráf éleinek és csúcsainak számát E-vel, ill. V-vel. Akkor érvényes az* $F + V = E + 2$ *összefüggés, melyet Euler-tételnek nevezünk.* [4]

[11] 7. oldal

4.2. Az Euler-féle karakterisztika

4.2.1. Definíció: Az $V + F - E$ számot az alakzat felbontása Euler-féle **karakterisztikájá**nak nevezzük. [4]

A következőkben a karakterisztikának egy fontos tulajdonságára derül fény. Ám ehhez szükségünk lesz a felület, és a felbontás fogalmára. Nálunk, a felület jelentse a következőt:

4.2.2. Definíció: Adott egy H halmaz, melynek minden $p \in H$ pontjának van olyan $O_p \subseteq H$ környezete (azaz olyan $O_p \subseteq H$ nyílt halmaza, melyre $p \in O_p$), és egy olyan φ leképezés, amelyre O_p homeomorf a nyílt egység körlemezzel. Ekkor H egy **felület**.

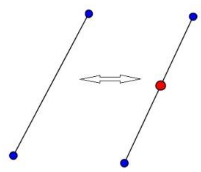
4.2.3. Definíció: Legyen adva egy tetszőleges felület. Vegyünk ezen a felületen csúcsokat, majd ezeket összekötő éleket, melyeket úgy választunk meg, hogy tartományokra bontsa fel a felületet. Ezen tartományok homeomorfak a körlemezzel, és minden tartomány közös része pontosan egy csúcs, vagy pontosan egy él, vagy esetleg az üres halmaz. Ezen kívül a tartományoknak nincsen önszomszédos éle, azaz bármely él két különböző „oldala” két különböző tartományhoz tartozik. Az élek csúcsokban találkoznak, ezen kívül nincs más metszéspontjuk, és egy él két különböző csúcsot köt össze. A felületen végezett ezen eljárást **felosztás**nak nevezzük.

A felület és felbontás fogalmát sokféleképpen lehet definiálni, de mi most ezt használjuk, mert ez hasonlít leginkább a poliéder szerkezetére. Annyi módosítást teszünk, hogy a lapok nem csak élekben, hanem élláncokban is találkozhatnak. Ez a későbbi állítás bizonyításához lesz szükséges.

4.2.1. Állítás: *Adott egy felület és egy A felbontás. A karakterisztika független a felosztástól, azaz egy új, B felbontást nézve*

$$F_A + V_A - E_A = F_B + V_B - E_B \qquad [4]$$

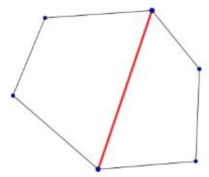
A bizonyításhoz két finomítási lépést kell megvizsgálnunk. Az egyik élen, míg a másik lapon fog történni

1. Él finomítása:
   Legyen adva egy tetszőleges él a két különböző végpontjával. Ekkor ezen az élen egy a végpontoktól különböző csúcsot felvéve, s ezzel két részre bontva az eredeti élt, mind a csúcsok, mind az élek száma eggyel növekedett, ami a karakterisztikán nem változtat. Ha a kezdeti adatok F, V, E voltak, akkor az újak
   $F' = F$
   $V' = V + 1$ Þ $\boldsymbol{F' + V' - E'} = F + (V + 1) - (E + 1) = \boldsymbol{F + V - E}$
   $E' = E + 1$
   
   Adódik, hogy a megfordítás is igaz: ha létezik csúcs, ami pontosan két élt köt össze, azaz másodfokú, akkor ezt a

csúcsot eltávolítva úgy, hogy az élek két másik végpontjai között egyetlen él fusson, a karakterisztika ismét nem változik.

2. Lap finomítása:

   Legyen adva egy tetszőleges, konvex lap, melyet olyan élek határolnak, amik csúcsokban találkoznak. Kössünk össze két nem szomszédos csúcsot egy éllel, azaz „vágjuk” ketté a lapot. Belátható, hogy ez az él két összefüggő részre bontja a lapot, ami szintén homeomorf a körlappal és ezek a lapok teljesítik a definíció feltételeit. Ez a művelet a karakterisztikán ismét nem változtat, hiszen eggyel növeltük a lapok és élek számát, így az új adatok

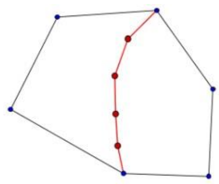
   

   $F' = F + 1$
   $V' = V$ Þ $\boldsymbol{F' + V' - E'} = (F+1) + V - (E+1) = \boldsymbol{F + V - E}$
   $E' = E{+}1$

   Nyilvánvaló, hogy ebben az esetben is a fordítottan végzett művelet hasonlóan nem befolyásolja a karakterisztikát.

3. Felosztás finomítása:

   Összegezzük a fenti két esetet. Legyen adott a poliéder egy tetszőleges lapja. Ezt a lapot kettévágva (2. módon), majd a kettészelő élt új csúcsokkal finomítva (1. módon) a karakterisztika nem változik.

A bizonyítás vázlatos gondolatmenete a következő:

Bizonyítás: Mindezek ismeretében vegyünk egy poliédert és azon két különböző A, B felosztást. Azt szeretnénk belátni, hogy található egy olyan közös felosztás, ami mindkettő finomítása, így az eredeti két felosztás karakterisztikájának meg kell egyeznie.

$F_A + V_A - E_A = F_{A'B'} + V_{A'B'} - E_{A'B'}$

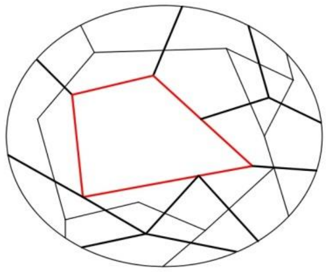
$F_B + V_B - E_B = F_{A'B'} + V_{A'B'} - E_{A'B'}$ Þ $F_A + V_A - E_A = F_B + V_B - E_B$

Ezzel igazolnánk, hogy a karakterisztika nem függ a felosztástól. De hogyan is kapható meg ezt a közös felosztást?

Legyen adva egy felület és azon két különböző felosztás, melyek eleget tesznek a fenti definíció feltételeinek.

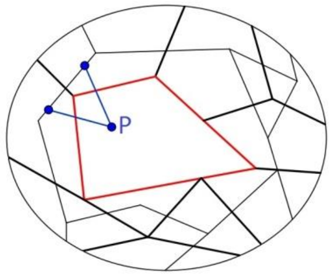
1. lépés: A közös felosztás vételéhez elengedhetetlen feltétel, hogy A minden lapja tartalmazzon B-beli csúcsot, és viszont. Ezért, ha ez nem teljesül, akkor szükséges A és B felosztás olyan finomítása, mely esetén már A’ minden lapja tartalmaz B’-beli csúcsot, és B’ minden lapja is tartalmaz A’-beli csúcsot.

a.) Tegyük fel, hogy van olyan B lap, ami nem tartalmaz A-beli csúcsot (6. ábra), akkor finomítsuk az A felosztást, a következő módon. Vegyünk az A felosztáshoz ezen B lap egyik csúcsát levágó új élt (ezt tehetjük két A két csúcsán keresztül, vagy két új csúcsot felvéve, mint a 7. ábrán). Mivel ez élfinomítás, ezért a karakterisztika nem változik.



5. ábra

Ekkor A új felosztásban (A'-ben) keletkezett egy új él, és a lapok száma[12] eggyel nőtt, ami a karakterisztikán nem változtat. Ahhoz, hogy ez a B lap tartalmazzon egy A'-beli csúcsot, az előbb felvett új él B-be eső részén vegyünk fel egy új csúcsot (P), ezzel két részre bontva az élt. Mivel ez egy élfinomítás, ezért A' karakterisztikáján ismét nem változtattunk, de elértük, hogy ebben a B-beli lapban legyen A'-beli csúcs. Ezt a lépést az összes olyan B-beli lapra végezzük el, ami nem tartalmaz A-beli csúcsot. Mivel a B felosztás véges, ezért ez véges sok lépésben elvégezhető. Így most már B minden lapja tartalmaz A'-beli csúcsot. (Ezen kijelentést jelölje D)

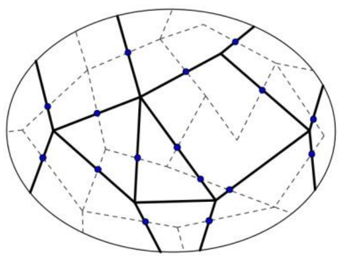


6. ábra

b.) Az előzőkben elvégzett műveletek után vetődik fel a kérdés, miszerint a finomítással nyert A' felosztás új lapjai tartalmaznak B-beli csúcsokat? Természetesen igen, hiszen A' új éleit éppen úgy vettük fel, hogy B-ből egy csúcsot vágjon le, ezért az új él által meghatározott lapok belsejében lesz B-beli csúcs. (Ezen kijelentést jelölje E) Ettől még ugyan lehetséges, hogy az eredeti A felosztás lapjai között van olyan, ami nem tartalmaz B-beli csúcsot, ezért - az a.) pontban leírtak szerint - B-t is finomítanunk[13] kell. Ezzel megkaptunk az új B' felosztást, s így már az eredeti A felosztás minden lapja tartalmaz B'-beli csúcsot (Ezen kijelentést jelölje F), valamint B' új lapjai is tartalmaznak A'-beli csúcsot, hiszen B-t megfelelően finomítottuk. (Ezen kijelentést jelölje G)

Összegezve a fenti lépéseket, D és G alapján B' minden lapja tartalmaz A'-beli csúcsot, valamint E és F alapján A' minden lapja tartalmaz B'-beli csúcsot.

2. lépés: Most már vehetem a közös felosztást, ami a következőképpen fog kinézni. Legyen az alap az A' felosztás, és ezt egészítsük ki B' csúcsaival és éleivel. Finomítsuk A' éleit csúcsokkal, melyeket A' és B'-beli élek metszéspontjai határoznak meg (7. ábra). Vegyük fel az összes ilyen új csúcsot. Mivel ez egy élfinomítási lépés, ezért

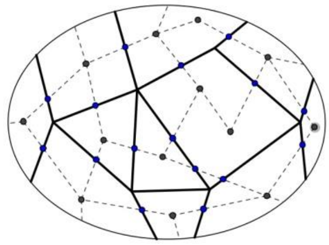


7. ábra

[12] Egy lapot kettévágva két új lap keletkezett, de mindkettő tartalmaz B-beli csúcsot.
[13] B-hez olyan új él felvétele, ami levág egy A-beli csúcsot, majd ezen élen egy új A lapbeli csúcs felvétele.

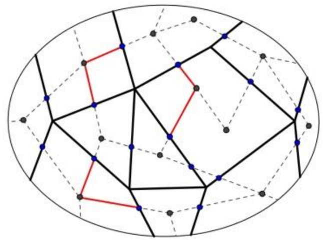
A’ karakterisztikáján nem változtattunk.

A következőkben vegyük hozzá azon B’ csúcsokat is, melyek egy A’-beli lap belsejébe esnek (8. ábra), majd ezeken a csúcsokon keresztül - a felosztás finomítási módszerrel - a B’-beli élek mentén, kössünk össze az egy laphoz tartozó éleken előbb felvett új csúcsokat (9. ábra).



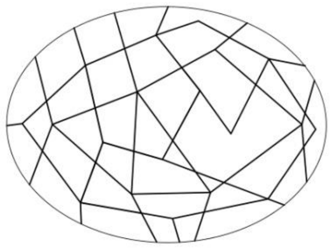
8. ábra

Ez egy felosztásbeli finomítás, hiszen az új éllel növeltük a lapok, és élek számát, majd az ezen lévő új csúcs felvételével kettészeltük ezt, ami az élek és csúcsok számát növelte eggyel, így nem változtatva a karakterisztikán. A közös felosztás eléréséhez fel kell vennünk minden B’-beli csúcsot, valamint élt. Ez véges sok lépésben megtehető lap illetve él finomításával.



9. ábra

Mivel mindig csak finomítottunk, ezért sem A, sem B karakterisztikája nem változott, azaz A’ karakterisztikája megegyezik A-éval, B’ karakterisztikája pedig az eredeti B-ével. A közös A’B’ felosztást nézve, a fentiek miatt ugyancsak nem változik a karakterisztika sem A-hoz, sem B-hez képest, ezért az eredeti két felosztás karakterisztikája is egyenlő volt. Ebből adódik a bizonyítása annak, hogy a karakterisztika független a felület felosztásától.



□

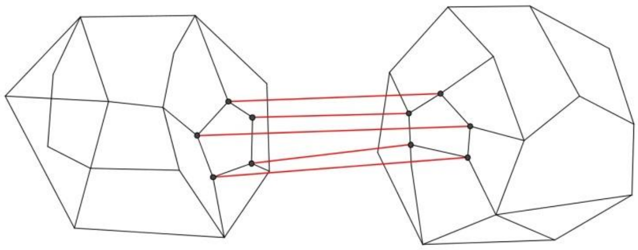
4.3. Alakzatok összeragasztása

Az eddigiekben megvizsgáltuk a poliéderek karakterisztikáját. Most nézzük meg, hogy adható-e a karakterisztikára egy olyan szabályosság, amely több test összeragasztása esetén is érvényes.

4.3.1. A karakterisztika változása: Ennek a megvizsgálására szükségünk lesz legalább két alakzatra, valamint ezek valamilyen módon való összeragasztására. Az alábbiakban ismertetek két féle összeragasztást:

1. Vegyük most azt az műveletet, melyben két konvex poliéder azon körlappal homeomorf lapjait kötjük össze egy hasábbal, melyeknek élszáma egyenlő. A korábban leírtak alapján tudjuk, hogy bármely két poliéder esetén kialakítható ez egy lapon lévő élek finomításával úgy, hogy azonos csúcsszámmal rendelkezzenek. Az összeragasztás előtt a határlapokat kivágjuk. Hasábbal való összekötés alatt azt értjük, hogy az egyik poliéder kivágott lapjának csúcsait rendre összekötjük a másik

poliéder kivágott lapjának csúcsaival úgy, hogy az élek ne messék el egymást (10. ábra). Ekkor a keletkezett alakzat karakterisztikára igaz az alábbi állítás. [4]



10. ábra

4.3.1.1. Állítás: *Poliéderek összeragasztása után nyert test karakterisztikája 2-vel csökken az eredeti poliéderek karakterisztikájának összegéhez képest.* [5]

Bizonyítás: Legyen az eredeti két alakzatnak $v_1,\ v_2$ csúcsa, $f_1,\ f_1$ lapja, továbbá $e_1,\ e_2$ éle, az összeragasztott lapok csúcsát (és élszámát) pedig jelölje m. A két felbontás karakterisztikája ebben az esetben rendre $v_1 + f_1 - e_1$, valamint $v_2 + f_2 - e_2$.

Habár a két poliédert összekötő hasábbal m új él és m új lap keletkezett, ezek karakterisztika szempontjából nem befolyásolóak. Az új poliéder csúcsainak száma $v_1 + v_2 - m$, éleinek száma $e_1 + e_2 - m$, lapjainak száma pedig a kivágásokból adódóan $f_1 + f_2 - 2$, ezért a karakterisztikája az alábbi módon adódik

$$(v_1 + v_2 - m) + (f_1 + f_2 - 2) - (e_1 + e_2 - m) = (v_1 + f_1 - e_1) + (v_2 + f_2 - e_2) - 2$$

azaz valóban kettővel kevesebb, mint a két alakzat karakterisztikájának összege. □

2. A másik összeillesztési módszer a fent említett hasáb nélkül történik. Ismét két olyan határlapot veszünk, amely homeomorf a körlappal, valamint csúcsszámaik egyenlők. Ekkor ezeket a lapokat kivágva, majd csúcsukat rendre összeillesztve adódik egy új felület, melyre a fenti 4.3.1.1 állítás ugyancsak igaz.

Bizonyítás Az eredeti két alakzatnak legyen ismét v_1, v_2 csúcsa, $f_1,\ f_1$ lapja, valamint e_1, e_2 éle, a határlapok csúcsát pedig jelölje m. A fentiekhez hasonlóan két felbontás karakterisztikája ebben az esetben is $v_1 + f_1 - e_1$, valamint $v_2 + f_2 - e_2$. Az összeragasztott poliéder csúcsainak száma $v_1 + v_2 - m$, éleinek száma $e_1 + e_2 - m$, lapjainak száma $f_1 + f_2 - 2$, ezért a karakterisztikája

$$(v_1 + v_2 - m) - (e_1 + e_2 - m) + (f_1 + f_2 - 2) = (v_1 + f_1 - e_1) + (v_2 + f_2 - e_2) - 2$$

□

<u>Megjegyzés:</u> Valójában a fent említett két féle ragasztás egyenrangú, és topológiailag ugyanazt a felületet adja.

4.3.2. Lyukak, fogantyúk

A következőkben nézzük meg, mi történik a karakterisztikával, ha némileg változtatjuk a poliéderünket például lyukasztással, vagy toldással.

Legyen adva egy alakzat a karakterisztikájával. Vágjunk ki a felületéből néhány kör alakú lyukat. A kör karakterisztikája 1, hiszen ha x csúcsa van, akkor nyílván ugyanennyi x éle is, valamint egy lapja, így adódik az $x - x + 1$ karakterisztika. Tehát minden lyukasztással, eggyel csökken az alakzat karakterisztikája. Következésképp egy lyuknak körlappal való beragasztása eggyel növeli ezt az értéket.

11. ábra

Egy tóruszon történő lyukasztás a karakterisztikát (-1)-re csökkenti, mivel az eredeti alakzat 0 karakterisztikájú. (lásd 4. ábra: ahol $V = 16$, $F = 16$, $E = 32$). Ezen eljárás után keletkezett poliédert fogantyúnak hívjuk (11. ábra), aminek tehát a karakterisztikája (-1). Adódik a megjegyzés, miszerint egy alakzat fogantyúval való bővítése eggyel csökkenti a karakterisztikát (fogantyúnként). [4]

Mindent összevetve vegyünk most egy olyan gömbfelületet, amelyen k lyuk van, és ragasszuk be mindet egy fogantyúval. Ekkor a keletkezett test karakterisztikája

$$2 - 2k$$

hiszen mind a k számú lyukasztás, mind a k darab fogantyúval való toldás k-val csökkentette az eredeti karakterisztikát, így összesen $2k$-vel. [4]

<u>Megjegyzés:</u> g fogantyúval és h lyukkal rendelkező gömbfelület karakterisztikája $2 - 2g - h$. [4]

Összefoglalás

Szakdolgozatom tartalmi célja a poliéderek élei, lapjai, csúcsai közötti összefüggések feltárása, megvalósíthatóságaiknak vizsgálata, valamint a karakterisztika érdekességeinek rövid ismertetése. Az utolsó fejezet, mint egy kitekintés az általánosítás felé, ez jóval túlmutat a tárgyalt témakörön.

A poliéderek tulajdonságainak megismerése, számos izgalmas összefüggést engedett következtetni. Többek között a szabályos illetve félig szabályos testek létezésének végessége, az Euler-tételnek egy magasabb szintű megfogalmazása, de idesorolható még a lyukasztással, illetve toldással gyártott újabb alakzatok legyártása.

Elképzelhetőnek tartom dolgozatom tartalmának a középiskolába való beépítését, akár szakköri kereteken belül. Természetesen a precizitás igénye nélkül, de érezzék, vannak alaktól függő mennyiségek is.

Irodalomjegyzék

[1] http://www.cs.elte.hu/geometry/kissgy/geobsc1-11.pdf

[2] Peter R. Cromwell – Polyhedra

[3] Szűcs András: Topológia

[4] V. G. Boltyanszkij – V. A. Jefremovics: Szemléletes topológia

[5] Hoffmann Miklós: Topológia és differenciálgeometria

[6] http://szentimre-nyh.hu/regiweblap/diakoknak/polyhedron/elmelet.html

[7] http://www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tkt/matematikai-mozaik/ar14s03.html

[8] http://www.model.u-szeged.hu/cd/content/szilassi/Euler3d-kurzus/01%20%20%20Szab%25a0lyos%20poli%2582derek/Szab%25a0lyos%20poli%2582derek.doc.

A képek forrásai

[1] http://nuclearmorphology.hu/morfologia-2/modellezes/bevezetes-a-morfologiai-modellezesbe/attachment/szabalyos-testek/

[2] http://en.wikipedia.org/wiki/File:Pentagonal_antiprism.png

[3] http://en.academic.ru/pictures/enwiki/84/Triangular_prism.png

[4] http://www.archimedes-lab.org/numbers/Num13_23.html

[5] http://www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tkt/matematikai-mozaik/ar14s03.html

Az ábrákat, valamint az illusztrációk legtöbb részét GeoGebrával, illetve Painttel készítettem.

NYILATKOZAT

Név: Sipos Evelin

ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematika Bsc

NEPTUN azonosító: AN28A1

Szakdolgozat címe: A poliéderek szerkezeti tulajdonságai

A szakdolgozat szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló munkám eredménye, saját szellemi termékem, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2014. június 2.

a hallgató aláírása