

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Irányított gráfokon való bolyongás és alkalmazásai

SZAKDOLGOZAT

Készítette: **Soós Zoltán Ferenc**
Matematika BSc - tanári szakirány

Témavezető: **dr. Bognár Jánosné** adjunktus
Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék



Budapest
2014

Tartalomjegyzék

Bevezetés	2
1. A feltételes valószínűség	3
1.1. Kapcsolódó tételek	3
1.2. Márta aggodalma	7
2. Bolyongás irányított gráfokon	10
2.1. Végtelen valószínűségi mező	10
2.2. Markov-folyamatok	11
2.3. Káin és Ábel játéka	14
2.4. Egy érdekes paradoxon	18
2.5. Kockán bolyongó szkarabeusz	22
2.6. Kockajáték	24
2.7. Eszter és Anna fejtadós játéka	26
2.8. Egy szemléletes módszer	29
3. Genetikai alkalmazások	36
3.1. Mendel törvényei	37
3.1.1. Egy tulajdonság öröklése	37
3.1.2. Két tulajdonság öröklése	38
3.1.3. Nemhez kötött öröklődés	40
3.2. Hardy–Weinberg-törvények	40
3.2.1. Biológiai kitérő	40
3.2.2. A törvény matematikai megfontolása	41
Hivatkozások	45

Bevezetés

Középiskolában nem sok idő jutott arra, hogy elmélyülhessünk a valószínűségi számítás témakörében. Az emelt szintű matematika érettségien egyedül a binomiális eloszlásra épülő feladatban vesztettem pontokat. Ennek ellenére, amikor a Matematika BSc 5. félévében belecsöppentem a Valószínűségi számítás című tantárgyba, nagyon megtetszett, különösen a feltételes valószínűséget felhasználó megoldások, amelyek összetett kérdésekre adtak igencsak meglepő eredményeket. Később tanultunk a Markov-folyamatokról, ahol egy irányított gráf fölrajzolásával az első olvasatra iszonyatosan bonyolultnak tűnő feladatok egy csapásra megszélidültek és könnyen adták megoldásukat. Sokáig gondolkodtam szakdolgozatom témáján. A matematika számos területével több féléven keresztül tartó kurzussorozatok keretében foglalkoztunk, ez azonban valami új volt, így végül ezt a területet választottam és nagy örömmre előadónk el is vállalta a témavezetésemet.

Szakdolgozatom gerincét és alapját Arthur Engel könyve [1] adta. Német és francia nyelven volt meg témavezetőmnek a kötet. Németül nem beszélek, viszont tanári minor szakom a francia nyelv, így nagyon örültem, mikor kezembe kaptam ezt az emelt szintű matematikát tanuló középiskolás diákok számára írt régi tankönyv franciára fordított változatát.

Dolgozatom első fejezete feleleveníti a feltételes valószínűséghez kapcsolódó tételeket és egy öröklődő betegség problémáját dolgozza fel. A második fejezetben bevezetem a Markov-láncok fogalmát, majd különféle, irányított gráfok segítségével megoldható példát mutatok be. A fejezet végén ismertetem Arthur Engel egy szemléltetési módszerét, amellyel a középiskolás diákok is meg tudják oldani ezeket a feladatokat, a feltételes valószínűség fogalmának ismerete nélkül is, hiszen ez már nem képezi a tananyag részét szinte sehol. Az utolsó fejezet egy biológiai kitekintő, mely nagyon egyszerű példákon keresztül igyekszik rámutatni a Markov-láncok, irányított gráfok, egyáltalán a valószínűségi számítás alkalmazási lehetőségeire a genetikában.

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Bognár Jánosnének a konzultációk alkalmával rám áldozott időért és a sok érdekes feladatötletért, amelyet felvetett és bele is kerültek dolgozatomba.

1. A feltételes valószínűség

Jól ismerjük azokat a valószínűségszámítást felhasználó problémákat, amikor adottak a kísérlet lehetséges kimenetelei (Ω halmaz), és vizsgáljuk, hogy ezek közül egy konkrét $A \in \Omega$ esemény hányszor következik be n kísérlet során. Az A eseményhez vagy a relatív gyakoriság alapján vagy esetleg szimmetriai alapon hozzárendelhetünk egy $P(A)$ valószínűséget (ügyelve az axiómák teljesülésére).

1.1. Példa. Egy szabályos dobókockával dobunk n -szer. Ekkor $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Vizsgáljuk azt, hogy mekkora valószínűséggel kapunk 6-ost, azaz $A = \{6\}$. Keressük a $P(A)$ valószínűséget a jól ismert, középiskolában is tanított klasszikus kiszámítási formulával! Egy szabályos dobókockával egyféleképpen tudok 6-ost dobni, összesen pedig 6 oldala van a kockának, így hatféle kimenetele lehet egy dobásnak, ezért

$$P(A) = \frac{\text{kedvező eset}}{\text{összes eset}} = \frac{1}{6}.$$

Találkozhatunk azonban ennél bonyolultabb, összetett problémákkal is. Ilyenkor általában több lépcsőn keresztül jutunk el egy kívánt eseményhez. Több feltétel szükséges a bekövetkezéséhez, nem csak egy egyszeri kísérletet kell elvégeznünk, hanem egymással összefüggő kísérleteket, amelyeknél különbözőek a lehetséges kimenetek halmazai.

Most példán keresztül bemutatjuk, hogyan jutunk el a feltételes valószínűség fogalmához.

1.1. Kapcsolódó tételek

1.2. Példa. Legyen adott egy szabályos dobótetraéder (tehát a lehetséges dobások: 1, 2, 3, 4) és két urna. Az elsőben 2 piros és 1 fehér, a másodikban 2 piros és 5 fehér golyó van. Ha 2-est dobunk, akkor az első urnából húzunk csukott szemmel egy golyót, egyébként pedig a másodikból (1-es, 3-as és 4-es dobása esetén). Mekkora a valószínűsége annak, hogy a kihúzott golyó piros lesz? Érezzük, hogy a golyó színe most attól is függ, hogy melyik urnából húzzuk, hiszen az elsőből sokkal nagyobb valószínűséggel húzhatunk pirosat, mint a másodikból. Az elsőben 3 golyó közül 2 piros, tehát $\frac{2}{3}$ valószínűséggel húzunk pirosat, míg a másodikban 7 golyóból mindössze 2 a piros, így itt $\frac{2}{7}$ a megfelelő valószínűség. 4-félét dobhatunk, de csak a 2-es kidobása esetén,

tehát $\frac{1}{4}$ valószínűséggel húzhatunk a nagyobb eséllyel kecsegtető első urnából, a többi esetben, azaz $\frac{3}{4}$ valószínűséggel a másodikból kell húznunk, ahol nem nagy az esélye egy piros golyó kihúzásának. Ezeket az információkat kellene megfelelően összekombinálnunk, hogy megkapjuk a keresett valószínűséget. Ehhez előbb be kell vezetnünk a *feltételes valószínűség* fogalmát, majd meg kell ismernünk a *teljes valószínűség tételét*.

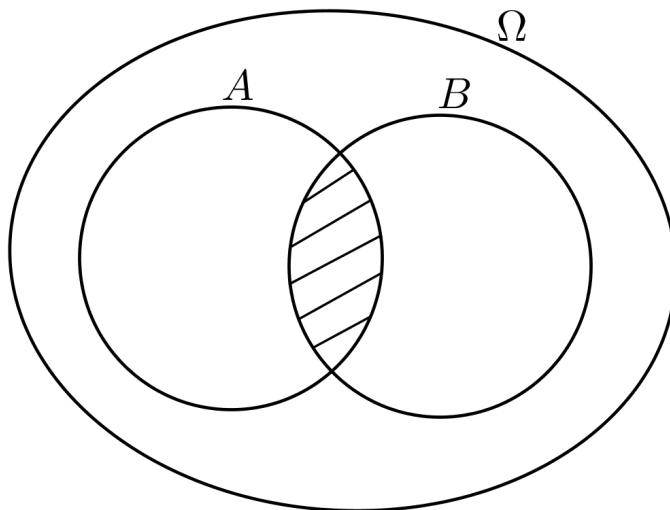
1.3. Definíció. A B eseménynek az A eseményre vonatkozó *feltételes valószínűsége* megadja a B esemény bekövetkezésének a valószínűségét, feltéve hogy az A esemény már bekövetkezett, vagy bekövetkezik. Jelölése $P(B | A)$, szóban: B feltéve A .

A B esemény valószínűsége az A feltétel mellett, megkövetelve, hogy $P(A) > 0$ legyen:

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

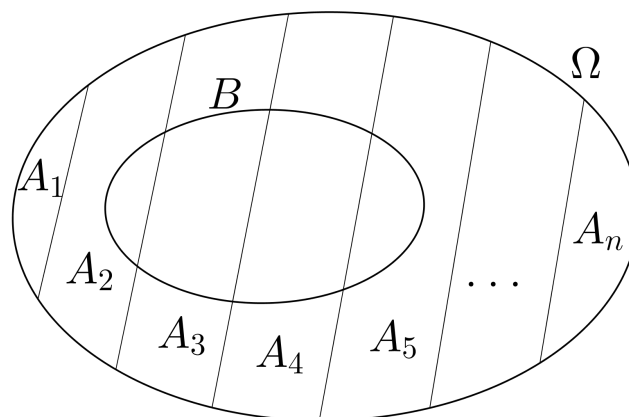
[5]

Tehát nem elég, hogy A bekövetkezett, az érdekel minket, amikor még B is bekövetkezik ezen kívül.



1. ábra.

1.4. Tétel. (Teljes valószínűség tétele) Legyen A_1, A_2, \dots, A_n egy teljes eseményrendszer, B pedig egy tetszőleges esemény.



2. ábra.

$$\text{Ekkor } P(B) = \sum_{i=1}^n P(B | A_i)P(A_i).$$

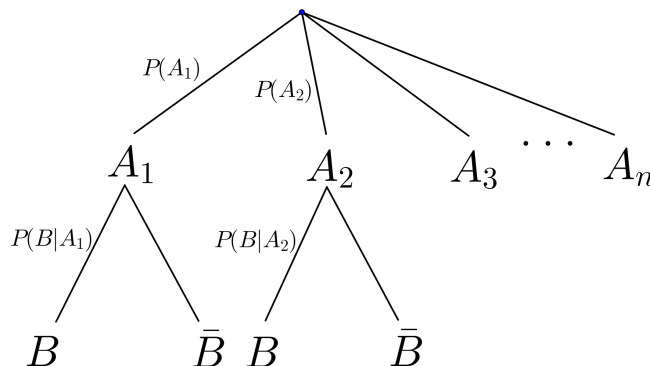
[5]

A tételt a 3. ábra gráfja szemlélteti. A kiindulási pontból B -be például az A_1 eseményen keresztül a $P(B | A_1)P(A_1)$ valószínűséggel jutunk. (Ezt a későbbiekben, irányított gráfok esetén is sokszor fogjuk használni.)

1.5. Tétel. (Szorzás-tétel)

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \underbrace{P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1)}_{P(A_1 \cap A_2)} \cdot P(A_3 | A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

Evidens, hogy a különböző utakon B -be jutások valószínűsége összeadódik. (\bar{B} jelentése: a B esemény nem következik be.)



3. ábra.

Így már meg tudjuk oldani a 1.2. Példát is. Legyen $A_1 = \{2\}$, $A_2 = \{1, 3, 4\}$, B pedig amikor pirosat húzunk valamelyik urnából. Ha már 2-est dobtunk, tehát bekövetkezett az A_1 esemény, akkor innen a B esemény bekövetkezése pontosan a $P(B | A_1) = \frac{2}{3}$. Hasonlóan, ha A_2 halmaz valamely elemét dobtuk, akkor a B esemény bekövetkezése pontosan a $P(B | A_2) = \frac{2}{7}$. A 1.4. Tétel alapján a

$$\begin{aligned}
 P(\text{pirosat húzunk}) = P(B) &= \sum_{i=1}^n P(B | A_i)P(A_i) = P(B | A_1)P(A_1) + \\
 &+ P(B | A_2)P(A_2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{6} + \frac{3}{14} = \frac{8}{21}
 \end{aligned}$$

valószínűséget kapjuk. Tehát hiába $\frac{2}{3}$ valószínűséggel húznánk pirosat az első urnából, mivel csak 2-es dobás esetén húzhatunk belőle, összességében 50 százaléknál is kisebb az esélye annak, hogy pirosat húzunk.

A 1.4. Tételnek egy kissé "megfordított" rokona a *Bayes¹-tétel*. Az előbbi feladatnál azt is kérdezhetnénk, hogy tegyük fel húztam már, és piros golyót tartok a kezemben. Mi az esélye annak, hogy az első, illetve a második urnából húztam? Erre ad választ a Bayes-tétel.

¹ Thomas Bayes (1701?-1761) angol matematikus, presbitériánus lelkész. Nevéhez kötődik egy speciális matematikai formula, a Bayes-tétel, amelyet ő maga sosem publikált, csak halála után, jegyzeteiből szerkesztette és adta ki Richard Price.

1.6. Tétel. (Bayes-tétel) *Az eddigi jelölésekkel összhangban.*

$$P(A_i | B) = \frac{P(B | A_i) P(A_i)}{\sum_{i=1}^n P(B | A_i) P(A_i)} \quad [5]$$

Bizonyítás. A tétel közvetlenül levezethető a feltételes valószínűség definíciójából:

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

alapján

$$P(A | B)P(B) = P(A \cap B) = P(B | A)P(A)$$

amiből $P(B)$ -vel leosztva adódik a tétel. \square

[8]

E tétel ismeretében válaszoljunk a következő kérdésre: Pirosat húztam. Mekkora valószínűséggel származik ez a golyó az első urnából, azaz mekkora valószínűséggel dobtam kettest a tetraéderrel?

A korábban már meghatározott valószínűségeket behelyettesítve a képletbe a

$$P(A_1 | B) = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{4}} = \frac{7}{16}$$

eredményt kapjuk. Várható is volt, hiszen az első urnából elég nagy eséllyel húzható piros, viszont csak egyféle dobás esetén (kettes) húzhatunk belőle.

1.2. Márta aggodalma

1.7. Feladat. Márta aggódik, hogy ha egyszer fiai lesznek, egy ritka a recesszív gént átörökíthet rájuk, ezért elmondta egy genetikai tanácsadónak, hogy nagyanyjának Aa génpárja volt, vagyis hordozta az a gént. Ez a nemhez kötődő gén olyan, hogy minden férfinak egyetlen génje van. Ha ez a gén az a , akkor a férfi rendellenességeket fog mutatni, például vérzékenységet. Márta anyai nagyapja, apja és férje mindnyájan egészségesek, tehát A génjük van. Az örökléstan szerint minden fiúgyermek az anyjától örökli a génpár egyik génjét $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ valószínűséggel. Egy leánygyermek egy gént örököl az anya génpárjából $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ valószínűséggel, és mellé örökli az apa egyetlen génjét. Továbbá

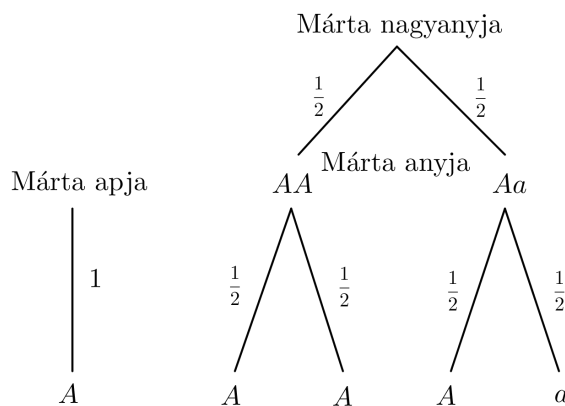
az egyes utódokra vonatkozó eredmények egymástól függetlenek. Ennélfogva Márta anyja vagy Aa , vagy AA génpárral rendelkezik, mégpedig $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ valószínűséggel.

- (i) Mutassuk meg, hogy maga Márta $\frac{1}{4}$ valószínűséggel Aa , és átörökítheti gyermekeire az a gént!
- (ii) Tegyük fel azonban, hogy a tanácsadó azt a kiegészítő információt is megkapja, hogy Márta anyjának volt négy egészséges fia A -val. Hogyan kaphatjuk meg annak a módosított valószínűségét, hogy Márta anyja Aa ?
- (iii) Határozzuk meg annak a módosított valószínűségét, hogy Márta Aa !

[3]

1.8. Megoldás. A megoldás során az öröklődéstani ismereteinken kívül a feltételes valószínűséget, valamint a *Bayes-tételt* fogjuk használni.

- (i) Márta génállománya a kérdés. Biztosan megkapja apja A génjét, a másik génről a 4. ábra gráfja ad információt. Ez a gén függ attól is, hogy Márta édesanyja milyen gént örökölt Márta anyai nagyanyjától. Az ábrázolt valószínűségek alapján jól látszik hogy négy eset adódik, ebből háromban egyformán A gént, egyben pedig a recesszív, betegséget hordozó a gént kapja Márta a fix A gén mellé. Tehát a kérdéses valószínűség, az 1.5. Tételt alkalmazva, $P(\text{Márta } Aa) = \frac{1}{4}$.

Márta : A —

4. ábra.

- (ii) Annak a valószínűsége, hogy Márta anyjának fia (tehát Márta testvére) A génnel rendelkezik, feltéve, hogy Márta anyja Aa , $\frac{1}{2}$. Ha ugyanis Márta anyjáról tudjuk, hogy Aa , akkor az ő fia $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ valószínűséggel lehet A vagy a . Tehát $P(\text{egy fiú } A \mid \text{Márta anyja } Aa) = \frac{1}{2}$. Mivel azt az információt kaptuk, hogy négy fia (négy testvére Mártának) is született Márta anyjának A génnel, ezért felírhatjuk, hogy $P(\text{négy fiú } A \mid \text{Márta anyja } Aa) = (\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{16}$. Evidens, hogy ha Márta anyja AA -val rendelkezik, akkor a fia, sőt akár mind a négy fia biztosan egészséges, A génnel születik, tehát $P(\text{négy fiú } A \mid \text{Márta anyja } AA) = 1$. A Bayes-tétel alkalmazásához vezessük be a következő jelöléseket:

A_1 : Márta anyja Aa

A_2 : Márta anyja AA

B : négy fiú A

$$P(B \mid A_1) = P(\text{négy fiú } A \mid \text{Márta anyja } Aa) = \frac{1}{16}$$

$$P(B \mid A_2) = P(\text{négy fiú } A \mid \text{Márta anyja } AA) = 1$$

Ekkor megkaphatjuk, hogy mi a valószínűsége annak, hogy Márta anyja Aa , azaz betegséghordozó, feltéve, hogy van már négy fia A génnel:

$$\begin{aligned} P(A_1 \mid B) &= \frac{P(B \mid A_1)P(A_1)}{P(B \mid A_1)P(A_1) + P(B \mid A_2)P(A_2)} = \\ &= \frac{\frac{1}{16} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{16} \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{32}}{\frac{1}{32} + \frac{16}{32}} = \frac{1}{17} \end{aligned}$$

Tehát $\frac{1}{17}$ a módosított valószínűsége annak, hogy Márta anyja Aa .

- (iii) Beugratós a kérdés. Öröklődéstanból is tudhatjuk, de a feladat külön ki is emeli, hogy az egyes utódokra vonatkozó eredmények egymástól függetlenek. Mártának négy egészséges fiútestvére van. Ez nagy szerencse, azonban nincs hatással Márta génállományára. Ugyanazt mondhatjuk tehát, amit az első feladatban is igazoltunk, hogy maga Márta $\frac{1}{4}$ valószínűséggel Aa , azaz betegséghordozó.

2. Bolyongás irányított gráfokon

2.1. Végtelen valószínűségi mező

Egy szabályos dobókocka feldobásánál összesen hatféle lehetséges kimenetele van a kísérletnek. Most végtelen valószínűségi mezőket tanulmányozunk, amikor egy kísérlet kimenetele végtelen sokféle lehet. Ω legyen a lehetséges kimenetek halmaza.

$$\Omega = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \quad (1)$$

Az i eseményhez ($i \in \Omega$) rendeljük hozzá a p_i valószínűséget ($p_i \geq 0$), ekkor fennáll:

$$\sum_{i \geq 0} p_i = 1 \quad (2)$$

Ω minden A részhalmazához hozzárendelhetjük a $P(A)$ valószínűséget

$$\begin{aligned} P(\emptyset) &= 0 \\ P(A) &= \sum_{i \in A} p_i, \text{ ha } A \neq \emptyset \end{aligned} \quad (3)$$

(3)-ban az összeg általában valamilyen számsorozat formájában áll elő. Az alábbi három axiómát használhatjuk a végtelen valószínűségi mezők jellemzésére:

1. P egy pozitív függvény, azaz $\forall A \subset \Omega$ esetén $P(A) \geq 0$
2. P normált, azaz $P(\Omega) = 1$
3. P additív, azaz ha $A \cap B = \emptyset$, akkor $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

[1, 33-34. oldal]

2.1. Definíció. Az (Ω, \mathcal{A}, P) valószínűségi mező Ω eseményterén értelmezett valós értékű $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor valószínűségi változó, ha $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

[10]

2.2. Markov-folyamatok

Az imént bevezetett definíciókból látszik, hogy inentől kezdve nem egy-egy véletlen kísérlettel foglalkozunk, hanem véletlen *folyamatokkal*. Érdeklődésünk középpontjába a különféle állapotok és az ezek közötti átmenetek kerülnek. Ezek a folyamatok időben történnek, állapotváltozások sorozatát eredményezik.

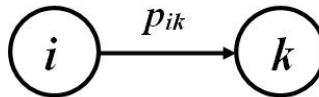
2.2. Definíció. Legyen adva egy (Ω, \mathcal{A}, P) valószínűségi mező és egy tetszőleges I (index)halmaz. Valószínűségi változóknak az (Ω, \mathcal{A}, P) valószínűségi mezőn definiált X_i ($i \in I$) rendszerét *sztochasztikus folyamatnak* nevezzük. [6] Az alkalmazások többségében az I halmazz a (nem-negatív) valós vagy egész számok halmazának választjuk.

Például gondolhatunk egy nagy forgalmú üzletre. Az emberek a nyitvatartás idejében véletlenszerű időpontban és számban térnek be ez üzletbe (nyilván a valóságban ez nem így van). Egy nap feljegyezzük minden percen, hogy hány ember ment be az ajtón abban a percen. Ha tehát x ember ment be a t . percen, akkor $X_t = x$.

Képzeljünk el egy legyet, amint repked egy szobában. Tekintsük mozgását véletlenszerűnek, őt magát pedig pontszerűnek. Tanulmányozzuk a mozgását a jelenlegi helyzetétől. Az összes lehetséges állapot halmaza legyen az S *állapotter*. Példánkban S a szoba légtere. A légy állapotát folytonos változóval fejezhetnénk ki, minden időpillanatban vizsgálhatnánk a helyzetét, de most diszkrét halmazzá tesszük az S állapotteret a következőképpen: a szobát egységkockákra osztjuk fel, ezeket pedig beszámozzuk 1-től n -ig.

$$S = \{1, 2, 3, \dots, n\}$$

Most ezek a kockák reprezentálják a különböző állapotokat. Így egy véges halmazz kaptunk. Az időt, mint folytonos változót is diszkrétté kellene alakítanunk, tehát figyeljük a legyet csak minden másodpercben, és jegyezzük fel, melyik egységkockában tartózkodik éppen. Ezeket a véletlen folyamatokat gráfokon fogjuk szemléltetni. Egy nyíllal fogjuk jelölni azt, amikor a légy (általánosan: részecske) az i . egységkockából (általánosan: állapotból) átmegy a k . egységkockába. A nyílra általában odaírjuk az i -ből k -ba jutás valószínűségét, p_{ik} -t.



Ezekre a p_{ik} valószínűségekre fennáll a következő két feltétel:

1. $0 \leq p_{ik} \leq 1$
2. $\sum_{k \geq i} p_{ik} = 1$

A 2. egyenlőség azt fejezi ki, hogy a részecske mindenképpen (1 valószínűséggel) átjut a következő állapotba az i állapot után.

A kiindulási állapot, az összes lehetséges állapot és az összes p_{ik} valószínűség ismerete egyértelműen meghatároz egy véletlen folyamatot. Az ilyen véletlen folyamatokat *Markov-láncnak* nevezzük.

[1, 34-36. oldal]

Precízebb definíció:

2.3. Definíció. Legyen adott egy S diszkrét halmaz. Leggyakrabban az S az egész számok egy halmaza, például $S = \{0, 1, 2, \dots, N\}$. S értékű valószínűségi változók egy X_0, X_1, X_2, \dots végtelen sorozatát *Markov²-láncnak* hívjuk, ha a valószínűségi változók között fennáll a

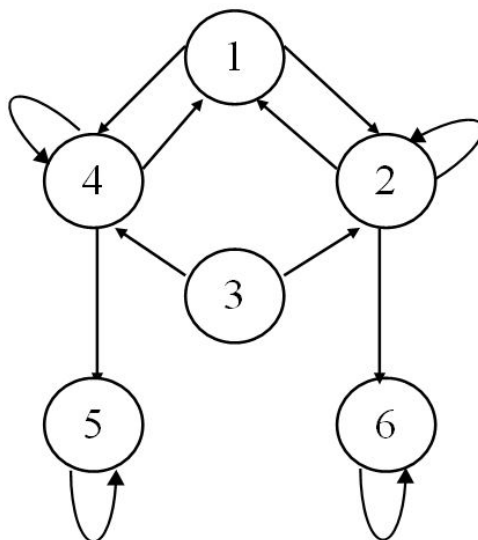
$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1) = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$$

egyenlőség, minden $n \geq 0$ egész szám és $i_0, i_1, \dots, i_{n-1}, i, j \in S$ állapotok esetén.

Leggyakrabban az indexre úgy gondolhatunk, mint az idő paraméterére. A fenti tulajdonságot úgy is szokták mondani, hogy a folyamatnak "nincsen memóriája". A folyamat múltjától nem függ a jövője. [7, 12. oldal]

Feladatok megoldásához célszerű egy gráffal szemléltetni a problémát.

² Andrej Andrejevics Markov, orosz matematikus a matematika számos területén, számelméletben és analízisben is dolgozott, de legfontosabb eredményeit a valószínűségszámítás területén érte el. Bebizonyította a centrális határeloszlástételt. 1906-ban bevezette a Markov-láncok fogalmát, amely alapvető jelentőségre tett szert a sztochasztikus folyamatok elméletében.



5. ábra.

Az 5. ábra egy Markov-lánc gráfja. Az állapotok halmaza az $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Az 5, 6 végállapotokat *nyelőknak* hívjuk.

2.4. Definíció. Egy i állapot nyelő, ha nem vezet ki belőle él vagy ha $p_{ii} = 1$. Az $R = \{5, 6\}$ halmazt az S halmaz peremének nevezzük. Az S halmaz azon elemei, amelyek R -nek nem elemei, a *belső állapotok*.

Példánkban $S \setminus R = \{1, 2, 3, 4\}$.

2.5. Megjegyzés. Az R halmaz lehet az üreshalmaz is.

2.6. Definíció. Egy Markov-láncot elnyelődőnek nevezünk, ha

1. $R \neq \emptyset$ és
2. minden belső állapotból el lehet érni R egy elemébe, azaz egy nyelőbe.

Sok egyszerűbb probléma – mint például a genetikai alkalmazásnál látható feladatok – megoldható az alábbi három ágszabály segítségével:

1. Egy kijelölt úton végighaladás valószínűsége megegyezik a nyilakon lévő p_{ik} valószínűségek szorzatával. (Lásd az 1.5. Tételt.)

2. Az i állapotból az R halmaz egy T részhalmazának valamely állapotába eljutás p_i valószínűsége megegyezik az i állapotból T -be jutó útvonalak valószínűségeinek összegével.
3. Az i állapotból a k számosságú R halmaz valamely pontjába eljutó út átlagos lépésszáma (nevezhetjük várakozásnak, hosszának vagy felfoghatjuk időtartamként is) megegyezik az i -ből R -be vezető összes út súlyozott lépésszámátlagával. Ezt úgy kapjuk, hogy az x_k lépéses utat súlyozzuk a rajta való végighaladás q_k valószínűségével (ld. 1. pont).
Azaz

$$m_i = \sum_k x_k q_k$$

[1, 36-38. oldal]

2.7. Megjegyzés. Ezek a szabályok a teljes valószínűség tételének (1.4. Tétel) következményei, de a tételt nem ismerő diákok számára is evidenssé tehetők.

De vajon mi történik akkor, ha a kapott gráfunkban keletkezik egy vagy több kör? Ki tudja meddig bolyongunk egy ilyen ciklusban, mire végül elérünk egy nyelőhöz?...

A következő szakaszokban ilyen a problémákra látunk példákat.

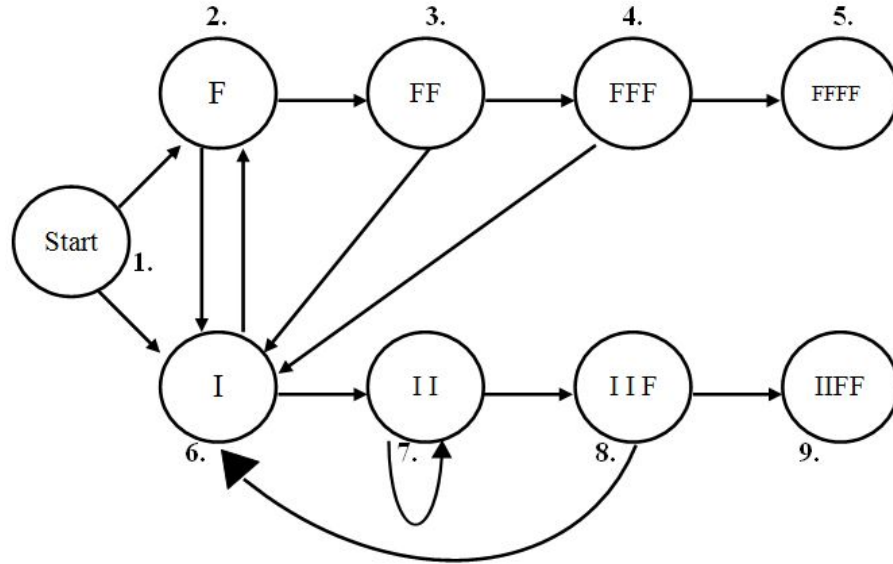
2.3. Káin és Ábel játéka

2.8. Feladat. Káin és Ábel egy szabályos érmét (mindkét felére $\frac{1}{2}$ valószínűséggel esik) dob fel sokszor egymás után. Egyik oldal a fej (F), a másik az írás (I). Ábel a következőt javasolja Káinnak:

„Ha előbb jön ki négy fej egymás után (FFFF), akkor te nyersz, ha előbb jön ki egy IFFF sorozat akkor pedig én. Ez a játék így teljesen igazságos, hiszen mindkét sorozat valószínűsége $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$.”

Igaza van Ábelnek? Meddig tart a játék? [1, 40. oldal]

2.9. Megoldás. Az alábbi ábrán láthatóak a lehetséges utak. Vannak állapotok, ahonnan visszakerülünk egy korábbiba. Ez azért van, mert például az IIF után ha írást dobunk, ez egyiküknek sem felel meg, olyan, mintha újrakezdjük volna az egészet, és írással nyitottunk a sort, ezért vissza is vezet a nyíl ebbe az (I) állapotba.



6. ábra.

Mekkora valószínűséggel nyer Ábel?

Látható, hogy mindkét játékosnak van közvetlen út a győzelemhez, de eközben több végtelen ciklusba is belekeveredhetnek. Például dobálhatnak egymás után a végtelenségig a következőképpen: FFF I FFF I FFF I FFF I... Erre persze kicsi az esély, de elméletileg „bentragadhatnak” ebben a körben.

A három korábban említett ágszabállyal innen nem jutunk messzire, az eddigieket nem elvetve valami újabbra, erősebbre van szükség.

Jelölje p_i annak a valószínűségét, hogy az i állapotból (a 6. ábrán a számozott körök jelzik az állapotokat) milyen eséllyel nyerhet Ábel (IIF). A p_i értéket úgy kapjuk meg, ha vesszük az i állapotból elérhető szomszédos (1 lépésben elérhető) k állapotokhoz rendelhető p_k valószínűségek megfelelő p_{ik} -kal súlyozott átlagát. Azaz

$$p_i = \sum_{k, \exists \text{ út } i \rightarrow k} p_{ik} p_k. \quad (4)$$

[5]

Gondoljuk meg ezt az állítást és képletet! Ott állunk az i állapotban. Keressük p_i -t, azaz, hogy mekkora valószínűséggel nyerhetünk innen. Különböző

utak vezetnek ki i -ből, van amelyik "visszadob", van amelyik egyenesen visz a győzelem felé. Minden ilyen ik -úthoz tartozik egy p_{ik} áthaladási valószínűség. Ez a képlet független attól, hogy honnan jutottunk magába az i állapotba, és csak annyira "gondolkodik előre", hogy egyet lépünk valamerre. Felhasználjuk tehát ennek a következő lépésnek a valószínűségét, lépünk egyet, majd a k állapotban vizsgálódunk, ahova érkeztünk. Ehhez is tartozik egy megfelelő p_k nyeresi esély, elég ezt felírunk. (4)-ben a szorzást az indokolja, hogy tudjuk, az egy adott útvonalon végighaladás valószínűsége megegyezik a nyilakon lévő p_{ik} -k szorzatával (1.5. Tétel). Ugyanezt felírhatjuk ezek után p_k -ra is. Így lépkedünk tovább. Minden i -re felírjuk ezt az összefüggést, így egy egyenletrendszerhez jutunk, ahol az ismeretlenek a p_i -k. Megkaphatjuk p_1 -et is, amely a START-ból nyeresi valószínűségét adja meg Ábelnek. Világos, hogy $p_9 = 1$ (9), hiszen ebben az állapotban Ábel már nyert is biztosan, nem kell semerre sem továbblépni. Az is könnyen látható, hogy $p_5 = 0$ (6), mert ebben az állapotban Káin nyert, lehetetlen, azaz 0 a valószínűsége, hogy innen Ábel nyerni tudjon. A további p_i -kre az alábbi összefüggéseket kapjuk (4) alapján:

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{2}p_2 + \frac{1}{2}p_6 \\ p_2 &= \frac{1}{2}p_3 + \frac{1}{2}p_6 \\ p_3 &= \frac{1}{2}p_4 + \frac{1}{2}p_6 \\ p_4 &= \frac{1}{2}p_5 + \frac{1}{2}p_6 \end{aligned} \tag{5}$$

$$p_5 = 0 \tag{6}$$

$$\begin{aligned} p_6 &= \frac{1}{2}p_2 + \frac{1}{2}p_7 \\ p_7 &= \frac{1}{2}p_7 + \frac{1}{2}p_8 \end{aligned} \tag{7}$$

$$p_8 = \frac{1}{2}p_6 + \frac{1}{2}p_9 \tag{8}$$

$$p_9 = 1 \tag{9}$$

A kérdés az, hogy a START-ból mekkora eséllyel nyer Ábel (ekkor természetesen már adódik Káin esélye is). A lineáris egyenletrendszert megoldva tehát meg kell kapnunk p_1 -et!

Néhány fontos összefüggést észre kell venni a gyors megoldáshoz a fenti egyenletekben.

$$p_4 = \frac{1}{2}p_6 \text{ adódik (5)-ből, mivel } p_5 = 0$$

$$p_8 = \frac{1}{2}p_6 + \frac{1}{2} \text{ adódik (8)-ből, mivel } p_9 = 1$$

$$p_7 = p_8 \text{ rendezéssel adódik (7)-ből}$$

Így már rögtön csak hat ismeretlenünk van. Megoldás után a $p_1 = \frac{3}{4}$ eredményt kapjuk, tehát csöppet sem igazságos a játék, Ábel ravaszul adta meg a feladatot, sokkal nagyobb esélye van nyerni, mint testvérének.

2.10. Megjegyzés. Ha kijelentjük, hogy $P(\text{Káin nyer}) = 1 - P(\text{Ábel nyer})$, ebben benne van az az állítás, hogy a játék 1 valószínűséggel véget ér. Erre azonban nincsen szükség (ez ugyanis egy mélyebb, bizonyításra szoruló állítás), hiszen az Ábeléhez hasonló módon kiszámíthatjuk Káin nyerésének valószínűségét is.

Meddig tart a játék?

Felmerülhet bennünk az a kérdés is, hogy meddig kell dobálgatniuk az érmét, azaz mi a *várható lépésszám* addig, míg valamelyikük végül nyer. Itt is célravezető, ha felírjuk minden állapotra, hogy onnan mekkora a játék várható lépésszáma. Az i állapotból a várható lépésszámot jelölje m_i . Az előző problémához hasonlóan, rekurzióval okoskodhatunk. Hacsak nem egy nyelő állapotban vagyunk (ahol Ábel vagy Káin már nyert), mindenképpen kell egyet lépnünk valamerre. Felhasználhatjuk itt is, hogy az i állapotból p_{ik} valószínűséggel lépünk k állapotba, innen pedig m_k a várható lépésszám. Általánosan tehát felírhatjuk:

$$m_i = 1 + \sum_{k, \exists \text{ út } i \rightarrow k} p_{ik} m_k. \quad (10)$$

[5]

Mint említettük, a nyelőkben már nem lépünk sehova, így – a 6. ábra számozását követve – $m_5 = 0$ (11) és $m_9 = 0$ (12). Az m_i várható lépésszámokra tehát a következő összefüggéseket kapjuk:

$$\begin{aligned} m_1 &= 1 + \frac{1}{2}m_2 + \frac{1}{2}m_6 \\ m_2 &= 1 + \frac{1}{2}m_3 + \frac{1}{2}m_6 \\ m_3 &= 1 + \frac{1}{2}m_4 + \frac{1}{2}m_6 \\ m_4 &= 1 + \frac{1}{2}m_5 + \frac{1}{2}m_6 \\ m_5 &= 0 \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} m_6 &= 1 + \frac{1}{2}m_2 + \frac{1}{2}m_7 \\ m_7 &= 1 + \frac{1}{2}m_7 + \frac{1}{2}m_8 \\ m_8 &= 1 + \frac{1}{2}m_6 + \frac{1}{2}m_9 \\ m_9 &= 0 \end{aligned} \tag{12}$$

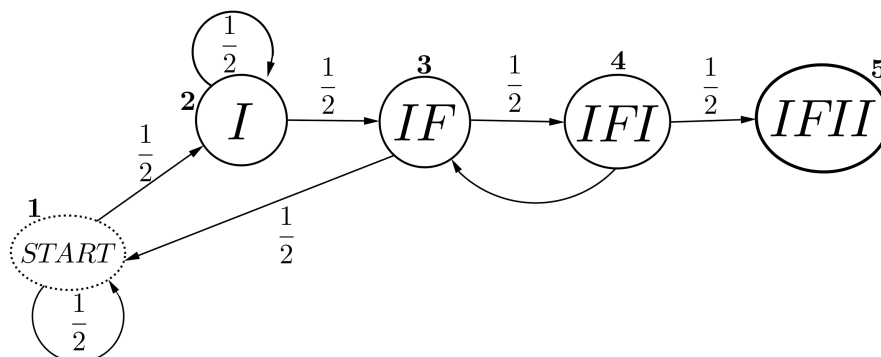
Arra vagyunk kíváncsiak, hogy a játék kezdetétől, tehát a START állapotból kiindulva hányszor kell dobnunk, míg valaki nyer. Ez az érték pont m_1 . A lineáris egyenletrendszer megoldásával $m_1 = 12$ -t kapunk. Tehát átlagosan 12 pénzfeldobás után vagy Káin vagy Ábel győz, azaz vége a játéknak.

2.4. Egy érdekes paradoxon

Egy másik játékban Káin azt javasolja játszanak a *FIFI* és az *IFII* sorozatokkal. Felajánlja Ábelnek, hogy válasszon melyikre fogad. Ábel számolgat, de furcsa ellentmondásra jut ...

Mennyit kell várni IFII-re?

Ábel arra gondolt, kiszámolja, átlagosan hányszor kell feldobni az érmét, hogy kijöjjön *IFII*.



7. ábra.

A 7. ábra alapján a következő összefüggéseket írta fel:

$$m_1 = 1 + \frac{1}{2}m_1 + \frac{1}{2}m_2$$

$$m_2 = 1 + \frac{1}{2}m_2 + \frac{1}{2}m_3$$

$$m_3 = 1 + \frac{1}{2}m_1 + \frac{1}{2}m_4$$

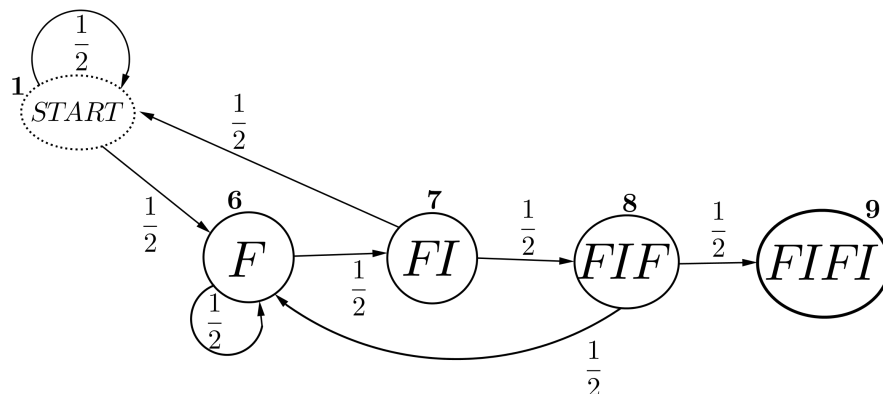
$$m_4 = 1 + \frac{1}{2}m_3$$

$$m_5 = 0$$

Ebből az $m_1 = 18$ megoldást kapta, tehát átlagosan ennyi dobás után megvan *IFII*.

Mennyit kell várni FIFI-re?

Azt is külön kiszámolta, átlagosan hányszor kell feldobni az érmét, hogy kijöjjön *FIFI*.



8. ábra.

A 8. ábra alapján a következő összefüggéseket írta fel:

$$m'_1 = 1 + \frac{1}{2}m'_1 + \frac{1}{2}m_6$$

$$m_6 = 1 + \frac{1}{2}m_6 + \frac{1}{2}m_7$$

$$m_7 = 1 + \frac{1}{2}m'_1 + \frac{1}{2}m_8$$

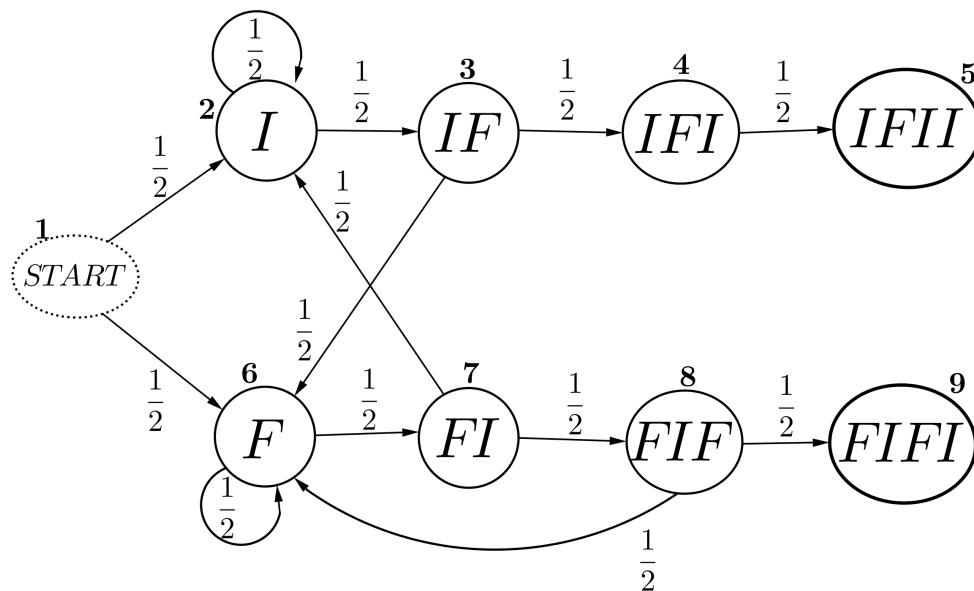
$$m_8 = 1 + \frac{1}{2}m_6$$

$$m_9 = 0$$

Ebből az $m'_1 = 20$ megoldást kapta, tehát átlagosan ennyi dobás után megvan *FIFI*. Mindezek alapján úgy tűnik, érdekesebb *IFII*-re fogadni, hiszen kevesebbet kell várni rá.

Egy versenyben mekkora eséllyel nyer FIFI?

A biztonság kedvéért Ábel azt is kiszámolja, hogy egy verseny esetén melyik sorozat nyer nagyobb valószínűséggel. Megnézi, mekkora eséllyel jön ki *FIFI* (amire egyébként önmagában többet kell várni) előbb, mint *IFII*.



9. ábra.

A 9. ábra alapján a következő összefüggéseket írta fel a p_i valószínűségekkel:

$$p_1 = \frac{1}{2}p_2 + \frac{1}{2}p_6$$

$$p_2 = \frac{1}{2}p_2 + \frac{1}{2}p_3$$

$$p_3 = \frac{1}{2}p_4 + \frac{1}{2}p_6$$

$$p_4 = \frac{1}{2}p_5 + \frac{1}{2}p_8$$

$$p_5 = 0$$

$$p_6 = \frac{1}{2}p_6 + \frac{1}{2}p_7$$

$$p_7 = \frac{1}{2}p_2 + \frac{1}{2}p_8$$

$$p_8 = \frac{1}{2}p_6 + \frac{1}{2}p_9$$

$$p_9 = 1$$

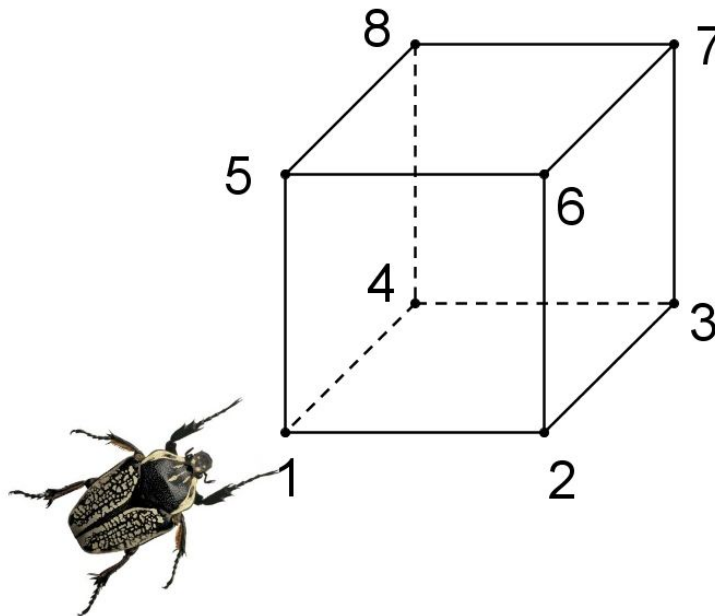
A lineáris egyenletrendszert megoldva a $p_1 = \frac{9}{14}$ megoldást kapta, tehát ekkora valószínűséggel nyer *FIFI*. Ezek szerint *IFII* csak $1 - \frac{9}{14} = \frac{5}{14}$ eséllyel nyer, tehát nem érdemes rá fogadni, inkább *FIFI*-re kellene.

Magyarázat

Az eseteket szétválasztottuk, szétvágtuk a gráfot, így amikor a várakozási időket számoltuk, a másik sorozat nem "rondított bele" a gráfba, nem vettük figyelembe, hogy közben akár már nyerhetett a másik sorozat vagy legalábbis a másik sorozatnak is kedvező lépéseket tehattünk. A 9. ábrán látszik is, hogy az *IFII*-re végződő ág még a nyereség előtti lépésnél is $(IFI) \frac{1}{2}$ valószínűséggel átcsaphat a *FIFI*-ágba, innen pedig nagy eséllyel nyer *FIFI*.

2.5. Kockán bolyongó szkarabeusz

Nézzünk egy más, de szintén a Markov-láncok tulajdonságait felhasználó példát. A 10. ábrán látható kocka élein bolyong egy szkarabeuszbogár. Az 1-es számú csúcsból indul. Ha a bogár előbb éri el a 2-es csúcsot, mint a 8-ast, akkor Ábel nyer, ha nem, akkor Káin.



10. ábra.

Mekkora valószínűséggel nyer Ábel?

Az előző feladat ötletét és jelölésrendszerét használjuk, de ügyes jelölésekkel sokat egyszerűsíthetünk az egyenletrendszeren. Nyilvánvaló, hogy $p_2 = 1$ (itt Ábel nyert) és $p_8 = 0$ (itt Káin nyert, tehát lehetetlen már, hogy Ábel nyerjen). A kocka szimmetrikussága miatt azt mondhatjuk, hogy

$$p_1 = p_3 = p_6 = a \quad (13)$$

A 4-es, 5-ös és 7-es csúcs – szintén szimmetriai okokból – ugyanolyan fontosak Káinnak, mint az 1-es, 3-as és 6-os Ábelnek. Ezekből a csúcsokból Káin a valószínűséggel, Ábel pedig $1 - a$ -val nyer. Megjegyezzük továbbá, hogy egy csúcsba érve mindig három él közül választhat a bogár, hogy merre menjen, mindhárom irányba $\frac{1}{3}$ valószínűséggel indul.

Vizsgáljuk meg az 5-ös csúcsból Ábel esélyeit. Ekkor

$$p_5 = \frac{1}{3} p_1 + \frac{1}{3} p_6 + \frac{1}{3} p_8,$$

azaz

$$1 - a = \frac{1}{3} a + \frac{1}{3} a + \frac{1}{3} 0,$$

innen

$$a = \frac{3}{5}$$

adódik.

Hány lépésben ér véget a játék?

Kérdésünk, hogy hányszor változtatja meg a helyét a szkarabeusz bogár. (Egy helyváltoztatás alatt egyetlen élen való végighaladást értünk.) Megint m_i -vel jelöljük, hogy az i . csúcsból várhatóan hány lépés alatt ér véget a játék. Evidens, hogy $m_2 = m_8 = 0$, hiszen itt már vége a játéknak, nem kell lépni sehová sem. Szimmetrikai okokból adódik, hogy

$$m_1 = m_3 = m_4 = m_5 = m_6 = m_7 = m$$

Válasszunk egy csúcsot és írjuk fel rá a várható lépésszámra vonatkozó összefüggést. Nézzük például az 1-es számú csúcsot!

$$m_1 = 1 + \frac{1}{3} m_2 + \frac{1}{3} m_4 + \frac{1}{3} m_5,$$

azaz

$$m = 1 + \frac{1}{3}(0 + m + m),$$

innen pedig

$$m = 3$$

adódik. Tehát átlagosan háromszor kell megindulnia egyik csúcsból egy másikba a szkarabeusz bogárnak, míg valamelyik játékos nem nyer (azaz elére a 2-es vagy a 8-as csúcsot a bolyongás során). [1, 45-46. oldal]

2.6. Kockajáték

2.11. Feladat. Egy szabályos dobókockával addig dobunk, amíg két szomszédos dobás különbsége legalább 3 nem lesz. Mennyi az átlagos szükséges dobásszám?

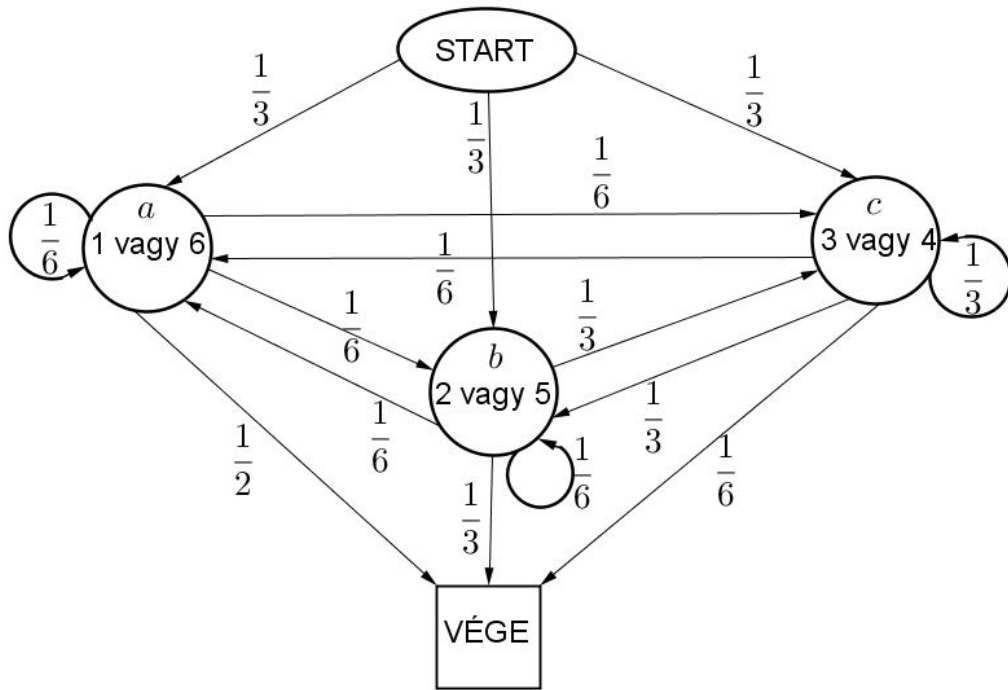
2.12. Megoldás. A feladat sokat egyszerűsödik, ha ügyesen rajzoljuk fel a gráfot, és összevonunk eseteket. Együtt kezeljük ha 1-est vagy 6-ost dobunk, ha 2-est vagy 5-öst és ha 3-ast vagy 4-est. Ez látható a 11. ábrán. Az egyik állapotot gondoljuk végig, milyen nyilakat és hozzájuk tartozó áthaladási valószínűségeket kell felrajzolnunk belőle kiindulva. Nézzük meg a b állapotot, tehát 2-est vagy 5-öst dobtunk ...

- Ha 3-ast vagy 4-est dobunk, egyikkel sincs vége a játéknak, tehát egyszerűen csak átlépünk a c állapotba. $\frac{1}{3}$ valószínűséggel dobjuk e kettő közül valamelyiket.
- $\frac{1}{6}$ eséllyel visszatérünk ugyanide. Miért nem $\frac{1}{3}$ -dal, hiszen megint kétféle számot dobhatunk a hat közül? Igen, de ha tegyük fel 2-est dobtunk előzőleg és így kerültünk b -be, akkor 5-ös dobása esetén vége a játéknak, ha 5-öst dobtunk előzőleg, akkor a 2-essel van vége a játéknak (3 a különbség), és a VÉGE állapotba kell lépnünk. Tehát mindkét számhoz csak egy felel meg úgy, hogy megint b -be kerülhessünk.
- Ha 2-est dobtunk b -be érkezésünkkor, akkor ezután 5-ös (előző pontban említettük is) és 6-os dobásával is vége a játéknak. Ha 5-ösünk volt, akkor a 2-es (előbb láttuk szintén) és az 1-es is véget vet a játéknak. Tehát akár 2-essel, akár 5-össel jutottunk b -be, mindkettő után kétfélét dobhatunk úgy, hogy vége legyen a játéknak, ezért $\frac{1}{3}$ valószínűséggel a VÉGE állapotban kötünk ki.

- Mekkora eséllyel jutunk a -ba? 2-es után 1-essel vagy 5-ös után 6-ossal. Mindegy melyikkel érkeztünk b -be, mindkettőhöz csak az egyik a -beli számot dobhatjuk anélkül, hogy véget érne a játék, hiszen 2-es után 6-ossal vagy 5-ös után 1-essel véget érne (4 a különbség). Így b -ből a -ba $\frac{1}{6}$ valószínűséggel lépünk.

A c állapotba visszakanyarodó nyíl $\frac{1}{3}$ szerepel, eltérően a másik kettő visszakanyarodó nyíltól. Ez azért van, mert itt a 3-as után 3-ast vagy 4-est dobva sem ér véget a játék, azaz újra c -be kerülünk, nem a VÉGE állapotba. Hasonlóan 4-es után is dobhatjuk mindkettőt, maradunk c -ben. Magyarázzuk még meg, hogy miért ér véget a játék olyan nagy eséllyel ($\frac{1}{2}$) a -ból! Azért, mert 1-es után 4-est, 5-öst vagy 6-ost dobva is legalább 3 lesz a különbség, 6-os után pedig 1-est, 2-est vagy 3-ast dobva.

Ezzel a gondolkodással már nem nehéz kitölteni a gráf többi részét sem.



11. ábra.

Ezek után a Markov-láncok tulajdonságait alkalmazhatjuk a feladat megoldására. Természetesen itt csak várható lépésszámot érdemes számolnunk,

hiszen egyetlen nyelő állapot van, a játék 1 valószínűséggel véget ér egyszer (persze ezt ki is számolhatnánk). Felírhatjuk a következő összefüggéseket:

$$\begin{aligned}
 m_{\text{VÉGE}} &= 0 \\
 m_a &= 1 + \frac{1}{6}m_a + \frac{1}{6}m_b + \frac{1}{6}m_c + \frac{1}{2}m_{\text{VÉGE}} \\
 m_b &= 1 + \frac{1}{6}m_a + \frac{1}{6}m_b + \frac{1}{3}m_c + \frac{1}{3}m_{\text{VÉGE}} \\
 m_c &= 1 + \frac{1}{6}m_a + \frac{1}{3}m_b + \frac{1}{3}m_c + \frac{1}{6}m_{\text{VÉGE}} \\
 m_{\text{START}} &= 1 + \frac{1}{3}m_a + \frac{1}{3}m_b + \frac{1}{3}m_c
 \end{aligned} \tag{14}$$

A lineáris egyenletrendszert megoldva az

$$m_{\text{START}} = \frac{281}{67} \approx 4,19$$

megoldást kapjuk, tehát általában 4-5 dobásig tart a játék.

2.7. Eszter és Anna fejátadós játéka

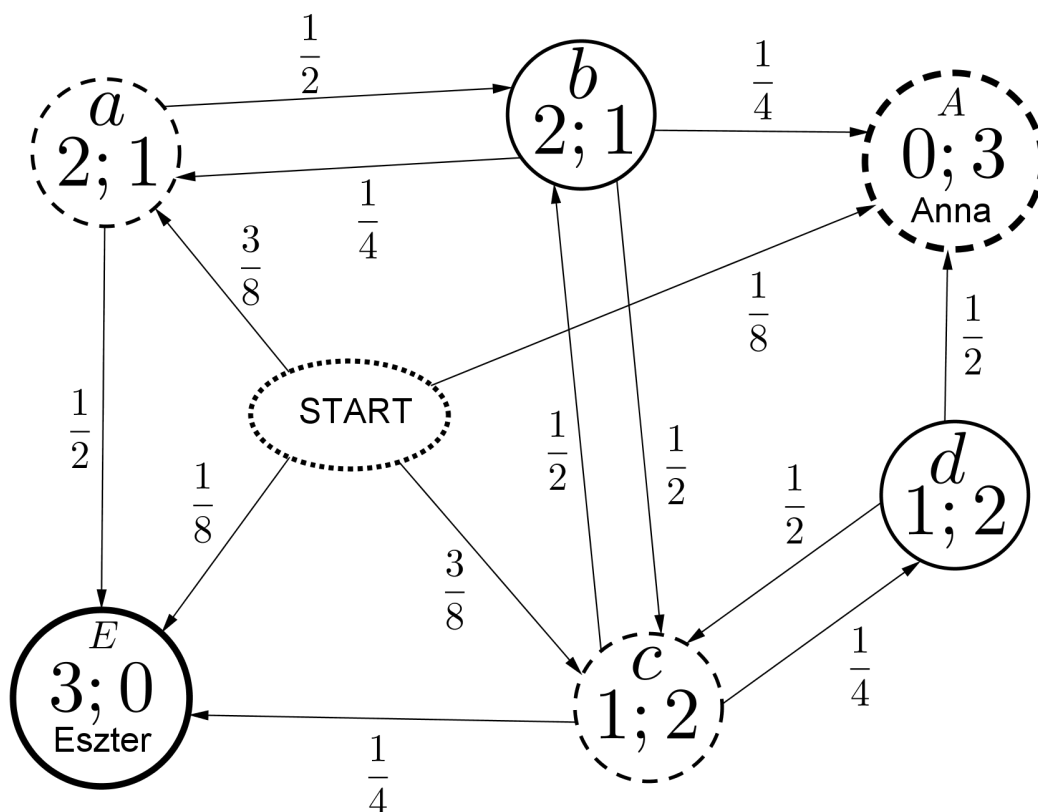
2.13. Feladat. Eszter és Anna 3 érmével játszik. A játék során felváltva dobják fel a birtokukban lévő összes érmét, s a fejre esett értéket átadják társuknak. A játék addig tart, amíg valamelyik dobás után az összes érme egyik játékoshoz kerül. Kezdetben Eszternél van mind a 3 érme és ő dob először. Mekkora valószínűséggel nyer Eszter? Átlagosan meddig tart a játék?

2.14. Megoldás. Az első olvasatra bonyolult feladat szemléltetéséhez ismét használjunk egy irányított gráfot. A 12. ábrán a két nagyobb kör a játék két lehetséges kimenetele, ahol Eszter vagy Anna nyer, azaz megszerzi mind a három érmét. A szaggatott körvonalú körök azok az állapotok, amikor Anna következik a dobással, a többiben és a START-ban Eszter dob. A körökbe írt számok közül az első mindig azt mutatja, hány érme van Eszternél, a második pedig, hogy mennyi van Annánál. A nyilakon feltüntettük az átmenet valószínűségét. Ez nagyon sokféle, hiszen változik a feldobott érme száma. Nézzük meg például a c állapotot. Itt Anna következik (szaggatott körvonal), akinek 2 érméje van (Eszternek 1). Feldobja őket egyszerre...

- Eshet mindkettő fejre. Ekkor sajnos át kell adnia őket Eszternek, és azonnal elveszíti a játékot. Ez $\frac{1}{4}$ valószínűséggel következik be, tehát ezzel az eséllyel jutunk az E állapotba, ahol Eszter nyer.

- Lehet egy fej, egy írás. Ekkor csak egyet kell átadnia Eszternek és marad neki egy, tehát a b állapotba jut. Két érméből $\frac{1}{2}$ valószínűséggel lesz az egyik fej, így erre a nyílra ez az áthaladási valószínűség kerül.
- Az is előfordulhat, hogy nem dob fejet, azaz mindkét érme írásra esik. Ez megint csak az esetek $\frac{1}{4}$ -ében fordul elő. A d állapotba jut, tehát nem változik az érmék eloszlása, viszont Eszter következik.

Hasonló megfontolással tölthetjük ki az egész gráfot. Ezek után a Markov-láncok tulajdonságait alkalmazhatjuk a feladat megoldására.



12. ábra.

Ezután a gráf alapján fel tudjuk már írni a megoldáshoz szükséges két lineáris egyenletrendszer (ahogy az előző feladatoknál is tettük).

Milyen valószínűséggel nyer Eszter?

Eszter nyerési esélyére a következő egyenletrendszert kapjuk (a 12. ábra jelöléseit használva az indexekben):

$$\begin{aligned} p_E &= 1 \\ p_A &= 0 \\ p_{START} &= \frac{1}{8}p_A + \frac{1}{8}p_E + \frac{3}{8}p_a + \frac{3}{8}p_c \\ p_a &= \frac{1}{2}p_E + \frac{1}{2}p_b \\ p_b &= \frac{1}{4}p_A + \frac{1}{4}p_a + \frac{1}{2}p_c \\ p_c &= \frac{1}{4}p_E + \frac{1}{2}p_b + \frac{1}{4}p_d \\ p_d &= \frac{1}{2}p_A + \frac{1}{2}p_c \end{aligned}$$

Innen $p_{START} = \frac{53}{88} \approx 60\%$ adódik, azaz a START-ból ekkora valószínűséggel fog Eszter nyerni, tehát ez a játék a kezdő játékosnak kedvez, neki van több esélye a győzelemre.

Hány lépésben ér véget a játék?

$$\begin{aligned} m_E &= 0 \\ m_A &= 0 \\ m_{START} &= 1 + \frac{1}{8}m_A + \frac{1}{8}m_E + \frac{3}{8}m_a + \frac{3}{8}m_c \\ m_a &= 1 + \frac{1}{2}m_E + \frac{1}{2}m_b \\ p_b &= 1 + \frac{1}{4}m_A + \frac{1}{4}m_a + \frac{1}{2}m_c \\ p_c &= 1 + \frac{1}{4}m_E + \frac{1}{2}m_b + \frac{1}{4}m_d \\ p_d &= 1 + \frac{1}{2}m_A + \frac{1}{2}m_c \end{aligned}$$

Innen $m_{START} = 3,25$ adódik, azaz átlagosan összesen 3-4-szer kell a magasba repülniük az érméknek, amíg valaki meg nem szerzi mindet és nem győz.

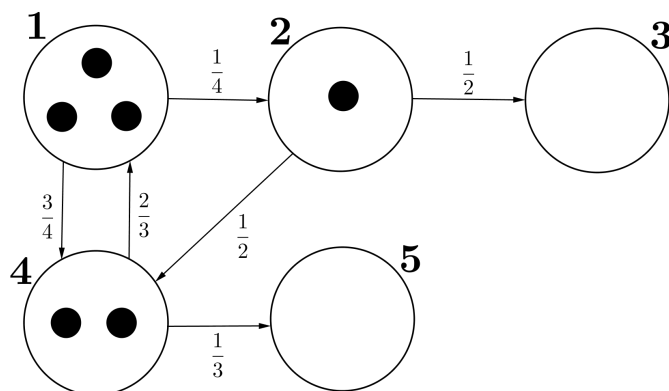
2.8. Egy szemléletes módszer

A Markov-folyamatokra úgy is tekinthetünk, mintha egy részecske bolyongana a gráfon. Ebből a szemléletmódból születhetett Arthur Engel modellező ötlete [1, 337-339. oldal], [2]. Tízéves gyermekekkel foglalkozott, nekik próbálta meg bemutatni a Markov-lánccokat ezzel a szemléletes és egyszerű módszerrel. Lerajzolta a gráfot és kavicsokkal töltötte fel, majd megadott algoritmus szerint húzogatva azokat, megkapta az egyes nyelőállapotok elérésének valószínűségét, illetve a várható lépésszámot is. A húzásoknál természetesen megjelent az egyes állapotok közötti átmenetek valószínűsége is. Vettünk egy gráfot belső állapotokkal, áthaladási valószínűségekkel, nyelőkkel. Határozzuk meg a módszer segítségével, mekkora eséllyel nyelődik el a részecske az egyes nyelőkben, illetve mennyi idő alatt!

Az eljárás bemutatása egy példán

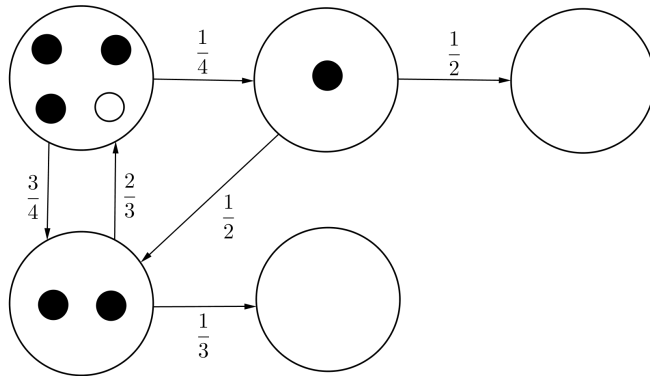
Húzásnak nevezzük, amikor egy állapotból a belőle kivezető nyilak mentén a szomszédos állapotokba húzunk bizonyos kavicsokat, a nyilakra írt áthaladási valószínűségek aránya szerint. Azt mondjuk, egy állapot *kritikusan van feltöltve*, ha pont eggyel kevesebb kavics van rajta, mint amennyivel a húzást végre tudnánk hajtani.

Töltsük fel a gráfot kritikusan! Ezt mutatja a 13. ábra. 1-ből nem tudjuk elvégezni a húzást, mert ahhoz 4 kavicsra lenne szükségünk, hasonlóan 2-ből és 4-ből sem.

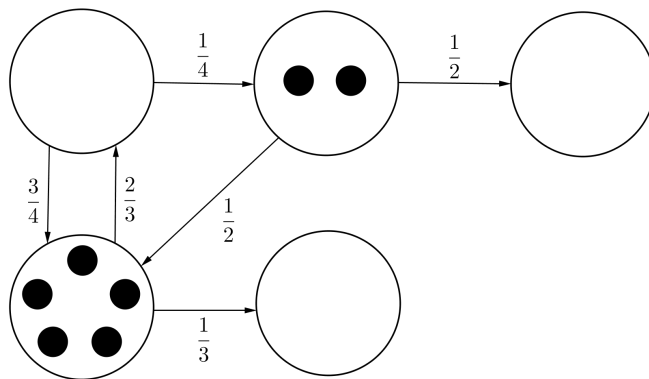


13. ábra. Kritikus állapot

Ha 1-be (válasszuk ezt kiindulásnak) beviszünk egy kavicsot (14. ábra, fehér), már el tudjuk végezni a húzást, tehát 1 kavics átmegy 2-be, 3 pedig 4-be (15. ábra).

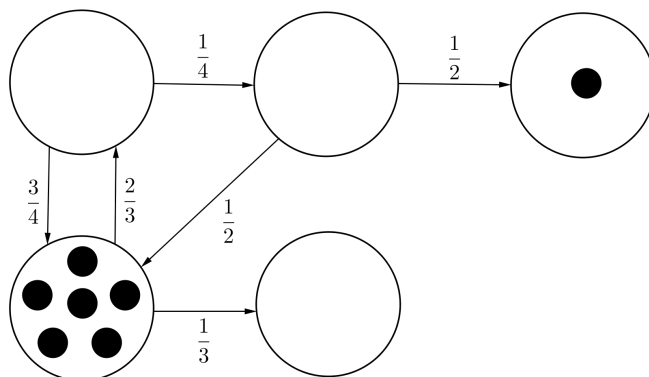


14. ábra.



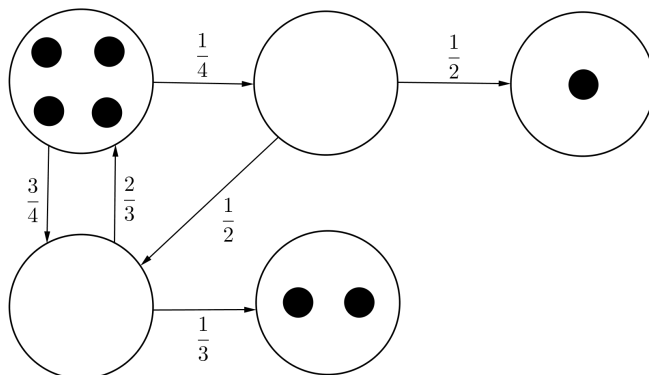
15. ábra.

Most már 2-ből is elvégezhető a húzás. A nyilaknak megfelelően 1 kavics megy a 3-as nyelőbe, 1 pedig 4-be (16. ábra).



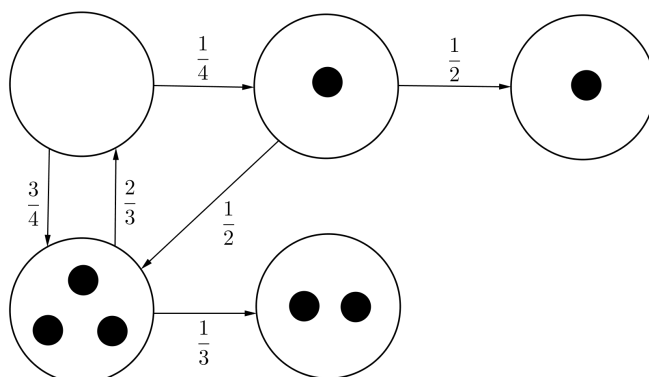
16. ábra.

4-ben már 6 kavics van, így a nyilakon feltüntetett valószínűségeknek megfelelően 2 megy az 5-ös nyelőbe, 4 pedig 1-be (17. ábra).

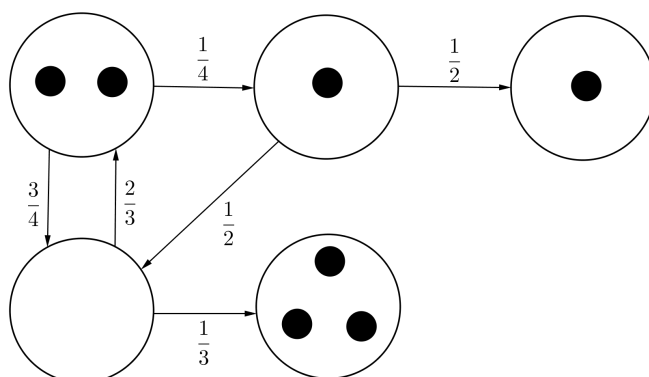


17. ábra.

Ekkor 1-ből megint húzhatunk (18. ábra), ezután 4-ből is tudunk (19. ábra), de aztán megtorpanunk. Sehol sincs a húzáshoz elegendő kavics.

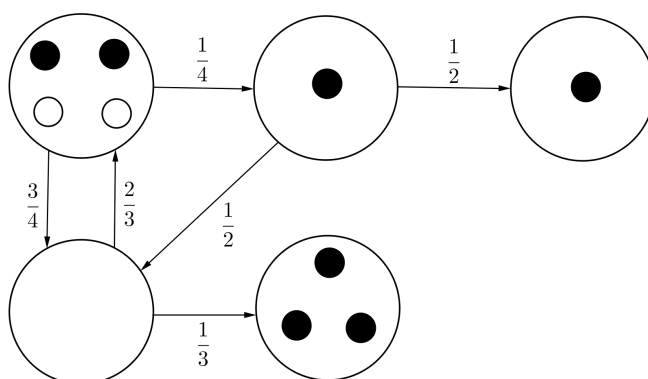


18. ábra.



19. ábra.

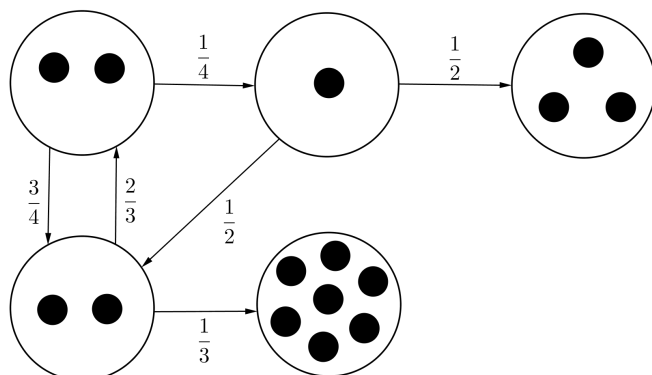
1-hez hozzáadunk két kavicsot (mindig annyit, hogy már tudjunk húzni, 20. ábra) és már húzzuk is.



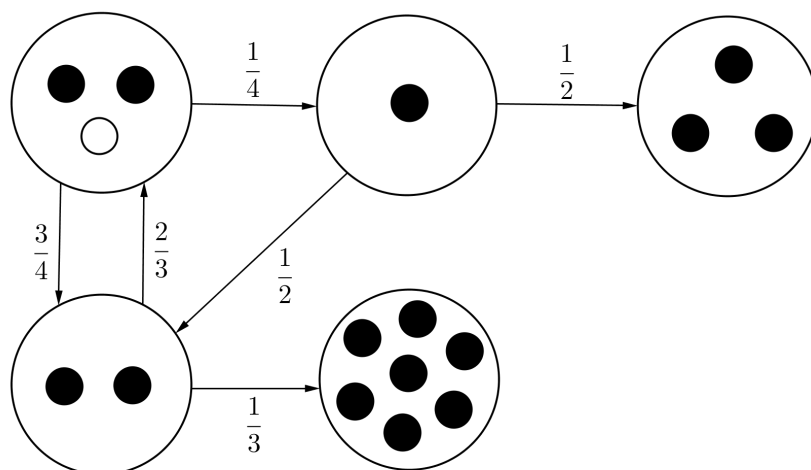
20. ábra.

Addig húzogatunk, amíg van olyan állapot, amelyben a kritikusnál legalább eggyel több kavics van, azaz végezhetünk húzást. Ha a kavicsok nem oszthatók szét a nyilak szerint, akkor csak annyit húzogatunk szét, amennyit a nyilakhoz tartozó áthaladási valószínűségek aránya szerint tudunk, a felesleget pedig otthagyjuk az adott állapotban. Ha elakadtunk, 1-be újabb kavicsokat töltünk be.

Mindaddig folytatjuk az eljárást, amíg a belső állapotok vissza nem állnak az eredeti, kritikus töltöttségükre (22. ábra). Véges sok állapot lévén, ez előbb-utóbb megtörténik. Látjuk, hogy a 21. ábra által reprezentált helyzetben (a 20. ábra és a 21. ábra között sok lépést nem ábrázoltunk) már elég csak egyetlen kavicsot bevinni 1-esbe és megérkezünk a kritikus feltöltöttséghez (22. ábra).



21. ábra.



22. ábra. Végző állapot

Ekkor levonhatjuk a következtetéseket:

Összesen 10 kavicsot sikerült átvinnünk a gráfon. Ebből 3 került a 3-as nyelőbe, 7 az 5-ösbe, tehát a bolyongó részecske $\frac{3}{10}$ valószínűséggel 3-ban, $\frac{7}{10}$ -del 5-ösben nyelődik el.

Az eljárás folyamán összeszámoljuk minden kavics összes lépését és elosztjuk az elnyelődött kavicsok számával. Mivel 51 lépésre volt szükségünk 10 kavics átjuttatásához, így az átlagos várható lépésszámra $\frac{51}{10} = 5,1$ -et kapunk. Ezeket a számokat megkaphatjuk a megelőző feladatoknál bemutatott lineáris egyenletrendszer felírásával is, de fiatalabb diákok számára sokkal szemléletesebb ez a módszer.

3. Genetikai alkalmazások

Az irányított gráfokon való bolyongás egyik alkalmazási területe a genetika. Képzeljünk el egy hatalmas gráfot egyedekkel, génekkel, elágazásokkal, ahol eldől melyik gén öröklődik tovább, meghatározva ezzel az utód egy külső tulajdonságát vagy éppen "csak" betegséghordozóvá téve azt. Ezután az utódok is szaporodnak, ismét elágazásokhoz jutunk a gének térképén. Az, hogy mi magunk milyen tulajdonságokat örököltünk, sokszorosan múltott a véletlenen. Attól függ, felmenőink milyen ágakról, mely géneket örökölték. Erre mutat rá az 1.2. szakasz 1.7. példja. Tulajdonképpen a saját családfánk genetikai alakulása ennek a hatalmas, képzeletbeli gráfnak egy részgráfja.

Tekintsünk vissza egy népszerű biológia érettségi témára! „A DNS molekulában tárolt információk egyik nemzedékről a másikra a szaporodás folyamatában öröklődnek. Az örökítő anyag tehát a DNS, és benne azon egységek, amelyek meghatározzák egy-egy tulajdonság természetét, vagyis a gének. Valójában tehát nem a tulajdonságok öröklődnek, hanem azok a gének, amelyek meghatározzák őket. Az egyedeknek a gének működése következtében kialakult külső megjelenését, megfigyelhető tulajdonságainak összességét *fenotípusnak* nevezzük. A mögötte található genetikai háttér, vagyis az egyed össze génje alkotja az egyed *genotípusát*.

Ha figyelembe vesszük, hogy a gének száma például egy gerinces faj esetében több tízezer is lehet, és ezek számtalan allélja fordulhat elő az illető faj populációiban, akkor nyilvánvaló, hogy a természetben két egészen egyforma génkészlettel rendelkező egyed előfordulási valószínűsége rendkívül csekély. Így lényegében minden egyed teljesen egyéni génkészlettel rendelkezik. A genotípusnak ez az óriási változatossága hozza létre az egy fajhoz tartozó egyedek külső megjelenésében megfigyelhető fenotípusos változatosságot.” [4]

Ismerkedjünk meg Mendel³ néhány kísérletével, melyeket borsókeresztezéssel végzett!

³ Johann Gregor Mendel (1822-1884), osztrák szerzetes állapította meg az ivaros szaporodó populációkban a gének természetes átörökítésének törvényszerűségeit. Gyakran nevezik őt „a genetika atyjának” is, mert a munkásságának újrafelfedezése alapozta meg az örökléstant.

3.1. Mendel törvényei

3.1.1. Egy tulajdonság öröklése

Megjegyezzük, hogy egy génhez két *allél* tartozik (ebben az egyszerű esetben): a *domináns* A és a *recesszív* a . Ezekből a következő genotípusok állnak elő: AA , Aa , aa . Ezek között a genotípusok között hat féle kereszteződés jöhet létre:

$$AA \times AA, AA \times Aa, AA \times aa, Aa \times Aa, Aa \times aa, aa \times aa$$

„A kerti borsó egyik jellegzetes öröklődő tulajdonsága a borsómagvak sima vagy ráncos felszíne. Induljunk ki e tulajdonságokra nézve homozigóta szülőkből (azaz a genotípus két allélja ugyanaz). Az allélok jelölésére általában különböző betűket használunk. Ebben az esetben a sima tulajdonságokkal rendelkező allélpár jele: AA , míg a ráncos tulajdonságú anyai allélpár jele aa . Két homozigóta szülő (AA és aa) ivarsejtjeinek keresztezése után az első nemzedék mindegyik tagja hibrid lesz, vagyis mind az apai, mind az anyai tulajdonságot hordozó allél megtalálható bennük. Az első nemzedék tagjai tehát genotípusukra nézve Aa allélpárral rendelkező heterozigóták. Fenotípusukban, az uralkodó, vagy más néven domináns jelleg mutatkozik meg láthatóan, szemben a másik, rejtve maradó, lappangó, recesszív tulajdonsággal. Ezeket a jelenségeket Mendel az *uniformitás törvényében* foglalta össze, amely azt fejezi ki, hogy *a homozigóta szülői formák keresztezéséből származó első hibrid nemzedék valamennyi egyede mind genotípusát, mind fenotípusát tekintve azonos.*”

[4]

Mendel tovább folytatta a keresztezéseket, most már a hibrid nemzedék tagjai között. A 23. gráf alapján látható, hogy ezúttal az utódok $\frac{1}{4}$ valószínűséggel lesznek AA domináns vagy aa recesszív homozigóták és $\frac{1}{2}$ -el Aa heterozigóták (Aa és aA ugyanaz, ezért ez a két útvonal eredménye összeadódik). Fenotípusra (külsőre) azonban csak annyi látszi, hogy az utódok $\frac{1}{4}$ része ráncos (genotípus: aa), a maradék $\frac{3}{4}$ részük pedig sima borsó (genotípus: AA , Aa) lett.

várható volt, az első nemzedék mindegyik tagja egyforma lett. A hibrideket egymással keresztezve a második nemzedékben kilenc különböző genotípus és négy különböző fenotípus jelent meg. Ezt szemlélteti a 2. táblázat. A genotípusokat megvizsgálva az tapasztalható, hogy mindkét tulajdonság arányai külön-külön pontosan megfelelnek az egy allélpár öröklődésénél tapasztaltakkal.”

[4]

♀ egyed	♂ egyed			
	<i>AB</i>	<i>Ab</i>	<i>aB</i>	<i>ab</i>
<i>AB</i>	<i>AABB</i>	<i>AABb</i>	<i>AaBB</i>	<i>AaBb</i>
<i>Ab</i>	<i>AABb</i>	<i>AAbb</i>	<i>AaBb</i>	<i>Aabb</i>
<i>aB</i>	<i>AaBB</i>	<i>AaBb</i>	<i>aaBB</i>	<i>aaBb</i>
<i>ab</i>	<i>AaBb</i>	<i>Aabb</i>	<i>aaBb</i>	<i>aabb</i>

2. táblázat.

A 3. táblázat a kapcsolódó valószínűségeket mutatja, amelyeket az egy tulajdonságnál felrajzolt gráfhoz hasonlóan kaphatunk meg.

genotípus	<i>AABB</i>	<i>AABb</i>	<i>AaBB</i>	<i>AaBb</i>	<i>AAbb</i>	<i>Aabb</i>	<i>aaBB</i>	<i>aaBb</i>	<i>aabb</i>
valószínűség	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

3. táblázat.

„Azt találjuk, hogy két olyan tulajdonságpár is egymás mellé került az utódokban, amelyek az eredeti szülői kromoszómákban együtt nem találhatók meg. A ráncos-sárga és sima-zöld tulajdonságpárok Mendelt arra a következtetésre juttatta, hogy a két tulajdonság négy ivarsejtbe kerülő allélja egymástól teljesen függetlenül és véletlenszerűen kombinálódhat, esetenként teljesen új kombinációkat hozva létre. Számos hasonló vizsgálatának eredményét foglalta össze a *független öröklődés törvényében*, amely lényegében azt mondja ki, hogy *az egyes tulajdonságpárok független öröklődésekor, a második nemzedékben az eredeti szülői formáktól eltérő kombinációk is megjelennek*. Természetesen ez csakis olyan keresztezésekre vonatkozik, amelyekben a szülői jellegek egynél több tulajdonságpárban különböznek egymástól. Mendel további kutatásai során három különböző tulajdonságpár öröklődésének a vizsgálatát is elvégezte, és ott 27 különböző genotípust kapott. A függetlenül

kombinálódó allélpárok esetén a második nemzedékben egy tulajdonságpár 3, két tulajdonságpár 9, három tulajdonságpár 27, míg n tulajdonságpár $3n$ genotípust eredményezhet.

3.1.3. Nemhez kötött öröklődés

Nemhez kötött például az emberi vérzékenység vagy más néven a hemofília betegségének az öröklődése. E betegségben elsősorban a fiúk szenvednek. Mivel vérük levegőn nem alvad meg, viszonylag kis sebeik is nagy vérvesztéssel járnak. A hemofiliás fiúk szülei egészséges fenotípusúak, de a betegséget okozó recesszív gént az anya hordozza az ivari kromoszómájához kötötten, és adja tovább a fiú utódokba. Ha egy hemofiliás fiú eléri a felnőtt kort és házasságot köt egy hemofiliát nem hordozó nővel, akkor fiaik nem lesznek vérzékenyek, mivel az X kromoszómáikat anyjuktól öröklik. A lányok viszont apjuk X kromoszómáját kapva, egészséges fenotípussal a betegség hordozóivá válnak. Így Márta kérdése az 1.7. példában a genetikushoz, nagyon is jogos volt.”

[4]

3.2. Hardy–Weinberg-törvények

3.2.1. Biológiai kitérő

A Hardy–Weinberg-törvény⁴ a genetika egyik törvénye. Kimondja, hogy egy populáción belül nemzedékről nemzedékre a relatív allélgyakoriság változatlan marad. Ez a törvény azonban csak bizonyos feltételek mellett igaz. Feltételezzük, hogy:

- a populáció elszigetelt, kizárva ezzel a migráció lehetőségét
- a populációban minden egyed minden egyeddel párosodik, de csupán egyszer
- a környezet változatlan
- nincs mutáció

⁴ Godfrey Harold Hardy, angol matematikus és Wilhelm Weinberg, német orvos szinte egy időben (1908), egymástól függetlenül ismerte fel a biológiából ismert törvényszerűséget.

Ezek a feltételek azonban a való életben nem teljesülnek, ezért a Hardy-Weinberg-törvény csak ideális populáció esetében érvényes. A valóságban reális populációról beszélünk, ahol minden esetben számolni kell a populációk érintkezésével, az ún. mutációs rátával, és azzal, hogy nem teljesülnek a szigorú szabályok a párosodásra vonatkozóan sem.

[9]

3.2.2. A törvény matematikai megfontolása

Egy populáció 0. generációjának genetikai összetételét a 4. táblázat mutatja be.

genotípus	AA	Aa	aa	
eloszlás	u	v	w	$u + v + w = 1$

4. táblázat.

Az A és a gének p illetve q relatív gyakoriságát fejezzük ki a genotípusok gyakoriságával:

$$\begin{aligned}
 p &= u + \frac{v}{2} \\
 q &= \frac{v}{2} + w \\
 p + q &= 1
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

Kíváncsiak vagyunk, hogyan változik u, v, w, p , és q egyik generációról a másikra. Jelölje n a generáció sorszámát. Legyen u_n, v_n, w_n, p_n , és q_n , rendre az AA, Aa, aa, A , és a relatív gyakorisága. Figyeljük az (u_n, v_n, w_n) hármas változását, amint n növekszik. Itt kell megjegyeznünk, hogy a párválasztás véletlenszerűen történik a populációban. Például az $AA \times AA$ pár u^2 valószínűséggel jöhet létre.

	♀ egyed	♂ egyed		
		AA	Aa	aa
		u	v	w
AA	u	u^2	uv	uw
Aa	v	uv	v^2	vw
aa	w	uw	vw	w^2

5. táblázat.

A 5. táblázat bemutatja az összes lehetséges párosodást, az előfordulásuk relatív gyakoriságával, valószínűségével.

A 6. táblázat összesíti a leszármazottaknál előforduló allélpárok relatív gyakoriságát.

Pár típusa	Típus gyakorisága	Utódok genotípusának gyakorisága		
		AA	Aa	aa
AA × AA	u^2	u^2	0	0
AA × Aa, Aa × AA	$2uv$	uv	uv	0
AA × aa, aa × AA	$2uw$	0	$2uw$	0
Aa × Aa	v^2	$\frac{v^2}{4}$	$\frac{v^2}{2}$	$\frac{v^2}{4}$
Aa × aa, aa × Aa	$2vw$	0	vw	vw
aa × aa	w^2	0	0	w^2

6. táblázat.

Az (15) összefüggéseket is felhasználva kapjuk:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= u^2 + uv + \frac{v^2}{4} = \left(u + \frac{v}{2}\right)^2 = p^2 \\
 v_1 &= uv + 2uw + \frac{v^2}{2} + vw = 2\left(u + \frac{v}{2}\right)\left(\frac{v}{2} + w\right) = 2pq \\
 w_1 &= \frac{v^2}{4} + vw + w^2 = \left(\frac{v}{2} + w\right)^2 = q^2 \\
 p_1 &= u_1 + \frac{v_1}{2} = p^2 + pq = p(p + q) = p \\
 q_1 &= \frac{v_1}{2} + w_1 = pq + q^2 = q(p + q) = q
 \end{aligned} \tag{16}$$

A (16) egyenletek alapján biztonsággal feltételezhetjük, hogy a gének relatív gyakorisága teljesen invariáns, azaz változatlan. A 2. generációra így

kaphatjuk a következőket:

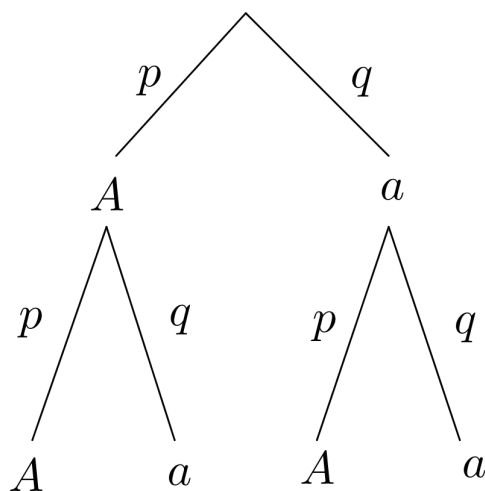
$$\begin{aligned} u_2 &= p_1^2 = p^2 = u_1 \\ v_2 &= 2p_1q_1 = 2pq = v_1 \\ w_2 &= q_1^2 = q^2 = w_1 \end{aligned} \quad (17)$$

Evidens, hogy ugyanez igaz lesz az n . generációra is, azaz

$$\begin{aligned} p_n &= p, q_n = q && \text{minden } n = 0, 1, 2, 3, \dots \\ u_n &= p^2, v_n = 2pq, w_n = q^2 && \text{minden } n = 1, 2, 3, \dots \quad [1, 201-203. \text{ oldal}] \end{aligned}$$

Másik megfontolás

Úgyis gondolkodhatunk, hogy veszünk egy urnát, amelyben a szülők A és a gamétáinak eloszlása rendre p és q ($p + q = 1$). Visszatevéssel húzunk, így konstruáljuk meg az utódok állélpárját, azaz tulajdonképpen bolyongunk a 24. gráfon, ezért került elő ez atöbb állél esetén is működő biológiai törvény.



24. ábra.

Ekkor az utódok genotípusainak eloszlása:

genotípus	AA	Aa	aA	aa
eloszlás	$p \cdot p = p^2$	pq	qp	$q \cdot q = q^2$

Innen A gaméta eloszlása az utódoknál: $p_1 = p^2 + pq = p(p+q) = p \cdot 1 = p$,
 a esetében pedig: $q_1 = pq + q^2 = q(p+q) = q \cdot 1 = q$. Tehát nem változott az eloszlásuk.

Hivatkozások

- [1] Arthur Engel (németről franciára fordította: Élyane Zaibak), *L'enseignement des probabilités et de la statistique*. vol. 2. CEDIC, Paris, 1997. (eredeti mű: *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik*. Bd. 2. Stuttgart: Klett, 1976.)
- [2] Arthur Engel, *Der Wahrscheinlichkeitsabakus*. Der Mathematikunterricht, H.2. Klett. Stuttgart, 1975. S. 70-93.
- [3] G. K. Bhattacharyya, R. A. Johnson, *Statistical Concepts and Methods*. John Wiley & Sons, New York, 1997. p.105/46.
- [4] <http://erettsegizz.com/biologia/mendeli-genetika/>
- [5] Bognár Jánosné (témavezető) *Valószínűségszámítás* előadásán készült saját jegyzetem (ELTE Matematika BSc tanári szakirány, 2013/14 ősz)
- [6] <http://www.renyi.hu/~major/debrecen/sztoch.pdf>
- [7] http://www.math.u-szeged.hu/~szucsg/oktatas/sztochfoly_jegyzet.pdf
- [8] <http://hu.wikipedia.org/wiki/Bayes-tétel>
- [9] <http://hu.wikipedia.org/wiki/Hardy-Weinberg-törvény>
- [10] http://hu.wikipedia.org/wiki/Valószínűségi_változó