Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Komplex számok a geometriában

Szakdolgozat

Készítette:
Varga Bettina
Matematika Bsc
Matematika tanári szakirány

Témavezető:
Ágoston István
egyetemi docens

Budapest
2014

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A középkori matematikusok már ismerték a valós számokat. Probléma merült fel a harmadfokú egyenletek megoldásánál, mivel ott a valós számok halmaza nem mindig bizonyult elegendőnek. Szükségük volt olyan számokra, amelyeket négyzetre emelve negatív számot kapnak, ezért bevezették a komplex számokat, ahol $i^2 = -1$.

Szakdolgozatomban a komplex számok használatának olyan módszereit szeretném bemutatni, amely sokszor megkönnyíti egyes geometriai feladatok megoldását és már egy középiskolai szakkörön is megtaníthatók.

A feladatok többsége az irodalom [2.]-es tételéből való. A feladatokat igyekeztem magam megoldani, de ahol szükség volt rá, megoldási ötleteket, megoldásokat az irodalom [2.]-es, [3.]-as és [5.]-ös tételeiből vettem.

Dolgozatomban kisbetűkkel (z) a komplex számokat, nagybetűkkel (A) pedig a sík pontjait jelöltem.

Műveletek komplex számokkal

A komplex számok a $z = a + bi$ alakú formális kifejezések, ahol a és b valós számok. Ekkor a-t nevezzük a komplex szám valós részének, b-t pedig a képzetes részének. Ez a komplex számok úgynevezett algebrai alakja.

Az algebrai alakban az összeadást, a kivonást és a szorzást kissé leegyszerűsítve úgy végezhetjük el, hogy a fönti kifejezésben i-vel, mint ismeretlennel számolunk, és ha a műveletek során i^2-et kapunk, átírjuk -1-re.

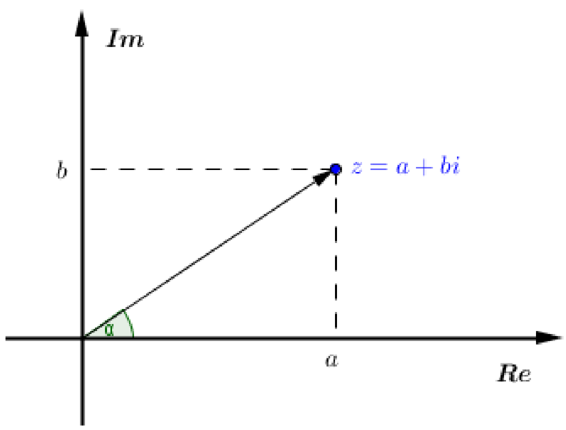
Összeadás, kivonás: $(a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i$

Szorzás: $(a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac - bd + (ad + bc)i$

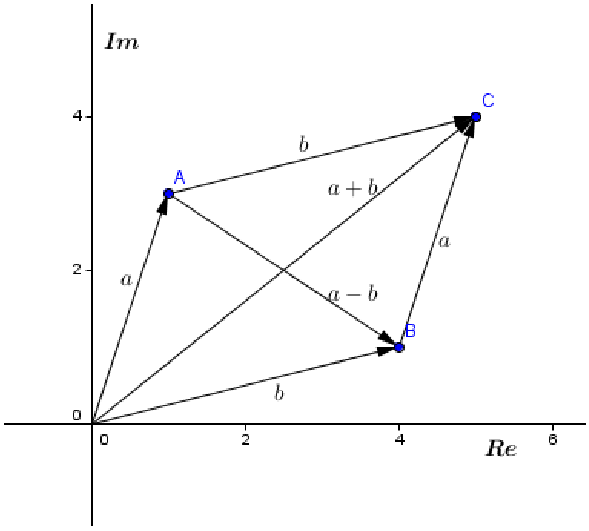
Ekkor a szokásos tulajdonságok az asszociativitás, a kommutativitás és a disztributivitás érvényesek.

A komplex számokat felfoghatjuk vektorokként is, ami geometriai feladatok megoldásánál sokszor hasznos. A valós számokat egy számegyenes segítségével jól tudjuk ábrázolni, ilyenkor a számegyenes minden pontja, a szokásos módon egy valós számnak felel meg. A számegyesen így már nincs több hely újabb számok ábrázolásához, ezért a komplex számok ábrázolásához ki kell lépnünk a síkba. Ekkor a $z = a + bi$ komplex számot a $Z(a, b)$ pont és az origóból az (a, b) koordinátájú pontba mutató vektor jelenti. A Descartes-féle koordináta rendszer x-tengelye fogja jelenteni az úgynevezett valós tengelyt (jelölés: Re – real), az y-tengelye pedig a képzetes tengely lesz (jelölés: Im – imaginárius). Azt a szöget, melyet a z komplex szám bezár a valós tengellyel z irányszögének nevezzük.

(jelölés: $\arg z = \alpha$)



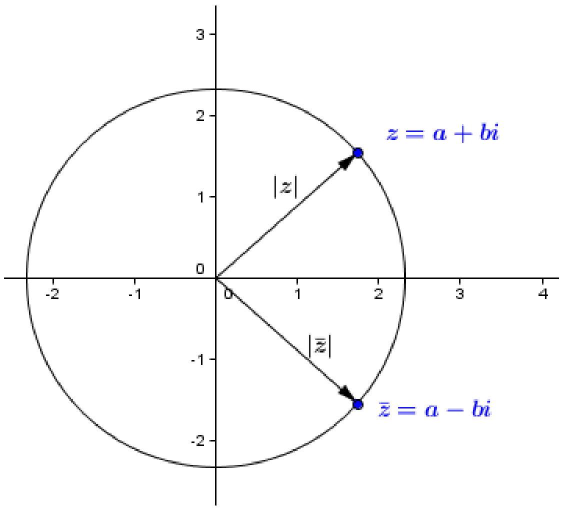
Ekkor a komplex számok összeadását és kivonását értelmezhetjük vektorműveletekként, és használhatjuk hozzá a fizikából már jól ismert paralelogramma szabályt.



Egy $z = a + bi$ komplex szám abszolút értéke, az origóból a komplex számot jelentő pontba mutató vektor hosszát értjük.

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Több olyan komplex szám van, melyek hossza megegyezik. Ha ábrázoljuk ezeket a számokat, akkor egy origó középpontú körön vannak, vagyis a körvonalon lévő összes komplex számnak ugyanaz az abszolút értéke.



A z komplex szám konjugáltján a $\bar{z} = a - bi$ komplex számot értjük. $\bar{z}$-t a z komplex szám valós tengelyre való tükrözésével kapjuk. Egy komplex szám és a konjugáltja egyenlő hosszúságú, tehát:

$$|\bar{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|.$$

Egy z komplex számnak és konjugáltjának szorzata, megegyezik z hosszának négyzetével, mert:

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2 = |\bar{z}|^2$$

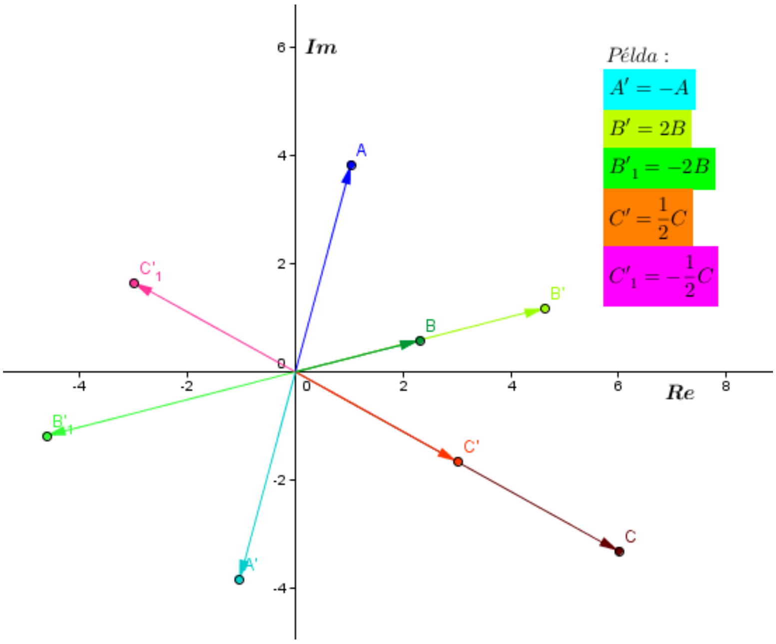
Vannak úgynevezett egység komplex számok. Azokat a komplex számokat nevezzük így, amelyeknek abszolút értéke 1. Az egység komplex számok konjugáltja megegyezik a reciprokukkal.

$$\bar{z} = \frac{|z|^2}{z} = \frac{1}{z}$$

Már láttuk, hogy algebrai alakban hogyan tudunk szorozni komplex számokat, most nézzük meg, hogy mit jelent a szorzás, ha a komplex számokat vektorokként fogjuk fel.

Ha egy z komplex számot egy tetszőleges k valós számmal szorzunk, akkor a szorzás ugyanúgy működik, mint a vektorgeometriában, tehát a komplex számot jelölő vektort

- nyújtjuk, ha $k > 1$
- zsugorítjuk, ha $0 < k < 1$
- nem változik, ha $k = 1$
- nyújtjuk és 180°-kal elforgatjuk, ha $k < -1$
- zsugorítjuk és 180°-kal elforgatjuk, ha $-1 < k < 0$
- 180°-kal elforgatjuk, ha $k = -1$



Nézzük meg, mi történik akkor, ha egy komplex számot komplex számmal szorzunk. Először vegyük az i-vel való szorzást. A $z = a + bi$ komplex számot addig szorozzuk i-vel, amíg vissza nem kapjuk z-t.

$$zi = (a + bi)i = ai - b = -b + ai$$

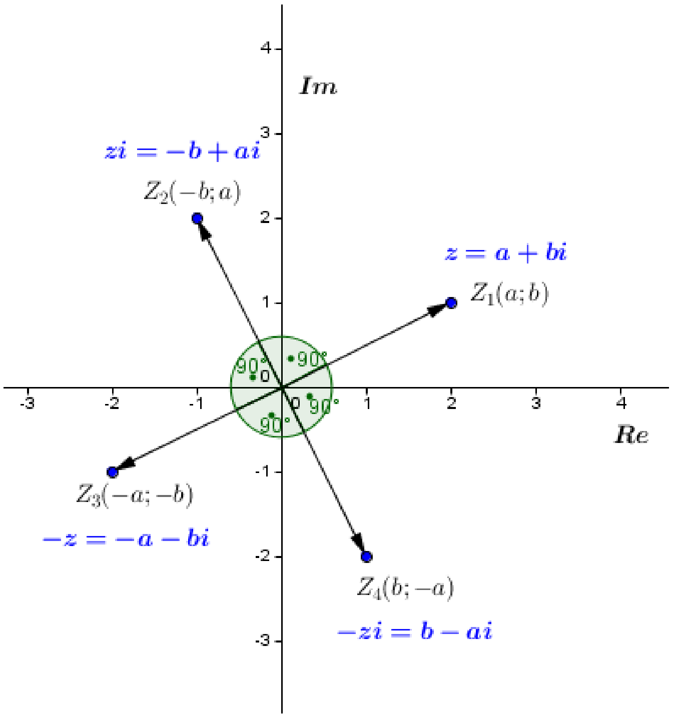
$$zi \cdot i = -z = -(a + bi) = -a - bi$$

$$-zi = (-a - bi)i = -ai + b = b - ai$$

$$-zi \cdot i = z = a + bi$$

Tehát ezek a számok pontokként felírva: $Z_1(a; b)$, $Z_2(-b; a)$, $Z_3(-a;\ -b)$, $Z_4\ (b;\ -a)$

Ebből már következtethetünk arra, hogy az i-vel való szorzás 90°-os forgatást jelent.



Két tetszőleges nem nulla komplex szám szorzata:

$z = a + bi$ és $w = c + di$

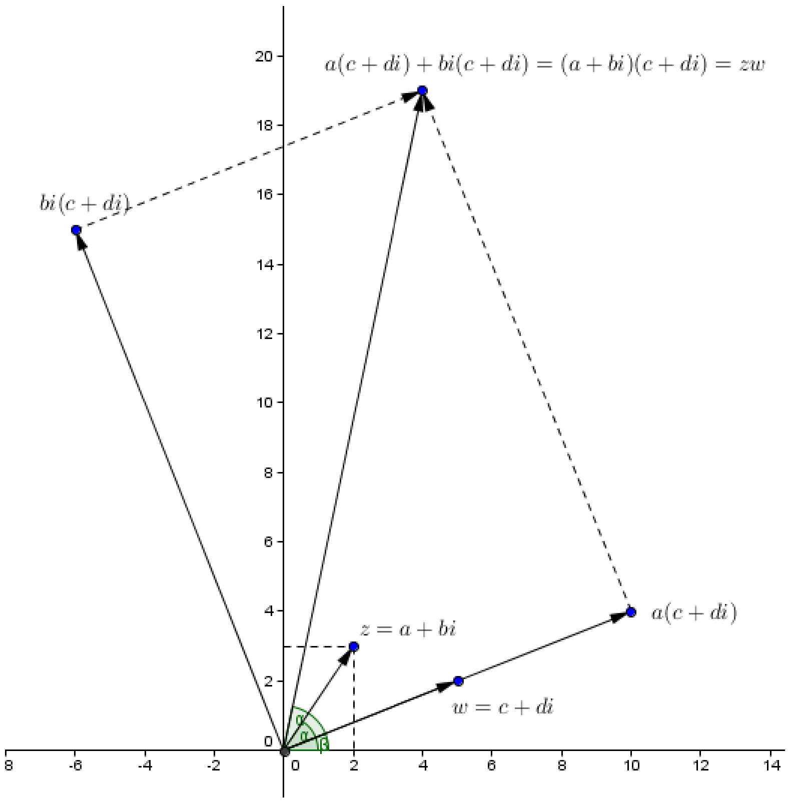
Mivel a komplex szorzás disztributív ezért:

$zw = (a + bi)(c + di) =$

$= a(c + di) + bi(c + d)$

Tehát zw-t úgy kapjuk, hogy w-t megszorozzuk a-val és bi-vel, majd az így kapott két számot összeadjuk.

A z komplex szám irányszöge α. Mivel az ábrán látható két téglalap hasonló egymáshoz, ezért a zw komplex szám irányszöge $\alpha + \beta$ lesz.



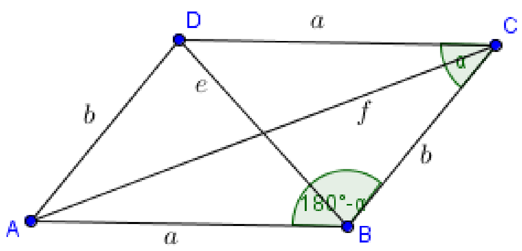
Speciális eset: Ha egy z komplex számot egy w egység komplex számmal szorzunk, akkor z hossza nem változik, csak w irányszögével forgatjuk el. Tehát ekkor a forgatva nyújtás helyett forgatás történt, mert w hossza 1.

Bevezető feladat

Egy gimnáziumi szakkörön bevezetésként olyan feladatot mutatnék be a diákoknak, melyet elemi geometriai módszerekkel is meg tudnak oldani, és a komplex számokkal való megoldás sem okozhat nekik nagy nehézséget.

1. Feladat: *Mutassuk meg komplex számok felhasználásával, hogy egy paralelogramma oldalai hosszának négyzetösszege ugyanaz, mint az átlói hosszának négyzetösszege.*

1. Megoldás: elemi geometriai módszerekkel



Bizonyítanunk kell: $2a^2 + 2b^2 = e^2 + f^2$

A koszinusztétel felhasználásával e^2-et és f^2-et is ki tudjuk fejezni a-val és b-vel.

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\alpha$$

$$f^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(180° - \alpha)$$

Ekkor:

$$e^2 + f^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\alpha + a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(180° - \alpha)$$

$$e^2 + f^2 = 2a^2 + 2b^2 - 2ab \cdot \cos\alpha - 2ab \cdot \cos(180° - \alpha)$$

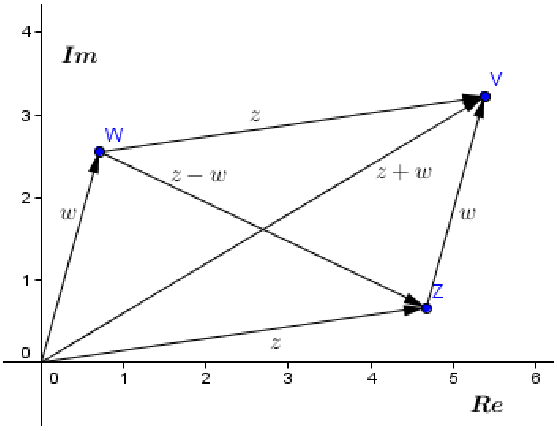
$$e^2 + f^2 = 2a^2 + 2b^2 - 2ab \cdot [\cos\alpha + \cos(180° - \alpha)]$$

Mivel $\cos\alpha$ és $\cos(180° - \alpha)$ egymás ellentettjei így az összegük 0 lesz, tehát:

$$e^2 + f^2 = 2a^2 + 2b^2$$

Láttuk, hogy a már gimnáziumban tanult módszerekkel hogyan lehet megoldani ezt a feladatot, most nézzük meg a megoldást komplex számokkal is.

2. Megoldás: komplex számokkal



Ennél a megoldásnál a paralelogramma oldalait komplex számokat jelentő vektorokként értelmezzük, tehát a z és w komplex szám hosszai lesznek a paralelogramma oldalhosszai, az átlói pedig $|z+w|$ és $|z-w|$ abszolút értékek lesznek.

Ekkor bizonyítanunk kell, hogy

$$2|z|^2 + 2|w|^2 = |z+w|^2 + |z-w|^2$$

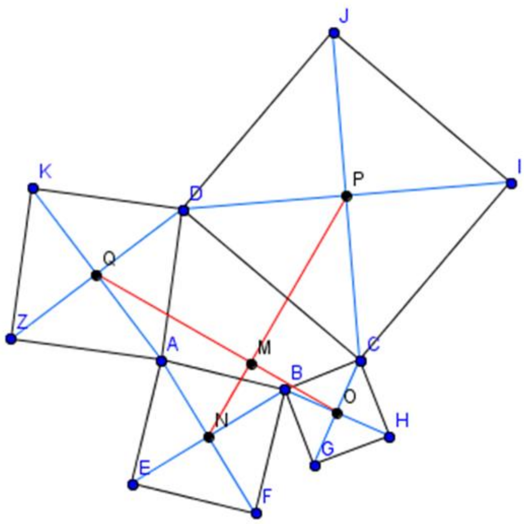
$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = (z+w)(\overline{z+w}) + (z-w)(\overline{z-w}) =$$

$$= z\bar{z} + z\bar{w} + \bar{z}w + w\bar{w} + z\bar{z} - z\bar{w} - \bar{z}w + w\bar{w} = 2z\bar{z} + 2w\bar{w} = 2|z|^2 + 2|w|^2$$

A következő feladatoknál már a komplex számokkal való bizonyítás kényelmesebb, mint ha elemi geometriai módszerekkel próbálkoznánk.

Forgatásos feladatok

2. Feladat: *Egy négyszög oldalaira kifelé négyzeteket rajzolunk. Kössük össze az átellenes négyzetek középpontjait. Igazoljuk, hogy e két szakasz merőleges, és egyenlő hosszú.*



A négyszög csúcsait, a négyzetek csúcsait és középpontjait jelölje az origóból az adott pontba mutató komplex számot jelentő vektor. Tehát az A pontba mutató vektort az a komplex szám jelöli, a B-be mutatót b stb.

Először írjuk fel a négyzetek középpontjait jelentő komplex számot a négyszög csúcsaival kifejezve. A négyzetek átlói derékszöget zárnak be egymással, tehát N, O, P, Q középpontú, 90°-os forgatással a megfelelő négyzet átlói egymásba vihetőek. Mivel komplex számokkal számolunk, a 90°-os forgatást az i-vel való szorzás jelenti, tehát:

$$a - n = (b - n)i$$

$$a = (b - n)i + n$$

$$a = bi - ni + n$$

$$a - bi = n - ni$$

$$a - bi = n(1 - i)$$

$$n = \frac{a - bi}{1 - i}$$

Ugyanígy:

$$o = \frac{b - ci}{1 - i} \qquad p = \frac{c - di}{1 - i} \qquad q = \frac{d - ai}{1 - i}$$

Miután kifejeztük a négyzetek középpontjait jelentő komplex számot az eredeti négyszögünk csúcsaiba mutató, komplex számot jelentő vektorral, már csak azt kell bizonyítanunk, hogy a $\overrightarrow{PN}$ és $\overrightarrow{QO}$ vektorok egymás 90°-os elforgattottjai.

$$\overrightarrow{PN} = n - p = \frac{a - bi}{1 - i} - \frac{c - di}{1 - i} = \frac{1}{1 - i}(a - bi - c + di)$$

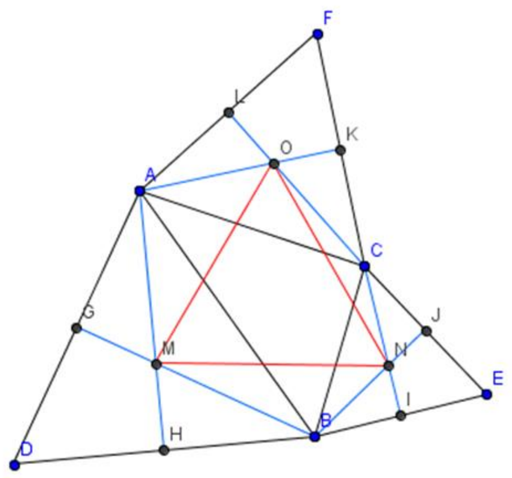
$$\overrightarrow{QO} = o - q = \frac{b - ci}{1 - i} - \frac{d - ai}{1 - i} = \frac{1}{1 - i}(b - ci - d + ai)$$

Kell: $(a - bi - c + di)i = (b - ci - d + ai)$

$(a - bi - c + di)i = ai - bi^2 - ci + di^2 = ai + b - ci - d$

Tehát ekkor a $\overrightarrow{PN}$ és a $\overrightarrow{QO}$ vektorok egymás 90°-os elforgatottjai lesznek, és a hosszuk is megegyezik.

3. Feladat: *Rajzoljunk egy háromszög mindegyik oldalára kifelé egy-egy szabályos háromszöget. Igazoljuk, hogy ezek középpontjai szabályos háromszöget alkotnak.*



Az előző feladatban használt ötlet szerint ez a feladat is megoldható, csak itt most a 90°-os forgatás helyett 120°-os és 60°-os forgatást kell végeznünk.

A 60°-os forgatás legyen az ε komplex számmal való szorzás, ahol

$$\varepsilon = \cos 60° + i \sin 60°$$

Ekkor a 120°-os forgatást az ε^2-tel való szorzás adja.

Először itt is fejezzük ki a szabályos háromszögek középpontjait jelölő komplex számokat az ABC háromszög csúcsait meghatározó komplex számokkal. Mivel szabályos háromszögeket rajzoltunk, a háromszögek középpontjai, az oldalfelező pontot a szemközti csúccsal összekötő szakaszok metszéspontjai lesznek. Ezek lesznek az M, N és O pontok.

Nézzük először az ADB háromszöget. Mivel szabályos háromszögről van szó, ha az $\overrightarrow{MB}$ vektort 120°-kal elforgatjuk, az $\overrightarrow{MA}$ vektort kapjuk. A számolást ugyanúgy végezzük, mint az előző feladatban, csak i helyett ε^2-tel szorzunk.

$$m = \frac{a - b\varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2}$$

Ugyanígy az n és o komplex számok:

$$n = \frac{b - c\varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2} \qquad o = \frac{c - a\varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2}$$

Ekkor elég azt bebizonyítanunk, hogy az $\overrightarrow{MO}$ vektort az $\overrightarrow{MN}$ vektor 60°-os elforgatásával kapjuk.

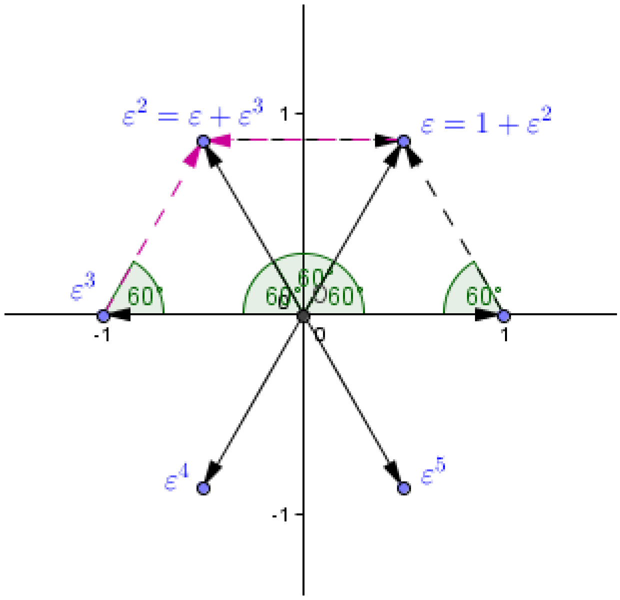
$$\overrightarrow{MN} = n - m = \frac{1}{1 - \varepsilon^2}(b - c\varepsilon^2 - a + b\varepsilon^2)$$

$$\overrightarrow{MO} = o - m = \frac{1}{1-\varepsilon^2}(c - a\varepsilon^2 - a + b\varepsilon^2)$$

Kell: $(n-m)\varepsilon = o - m$

$(b - c\varepsilon^2 - a + b\varepsilon^2)\varepsilon = b\varepsilon - c\varepsilon^3 - a\varepsilon + b\varepsilon^3$

A fönti kifejezésnél az ε egységgyök alábbi tulajdonságait használtuk, melyek az ábráról könnyen leolvashatók.



$$1 + \varepsilon^2 = \varepsilon$$

$$\varepsilon + \varepsilon^3 = \varepsilon^2$$

Tehát:

$$b\varepsilon - c\varepsilon^3 - a\varepsilon + b\varepsilon^3 = b\varepsilon + b\varepsilon^3 + c - a\varepsilon$$
$$= b\varepsilon^2 + c - a\varepsilon$$

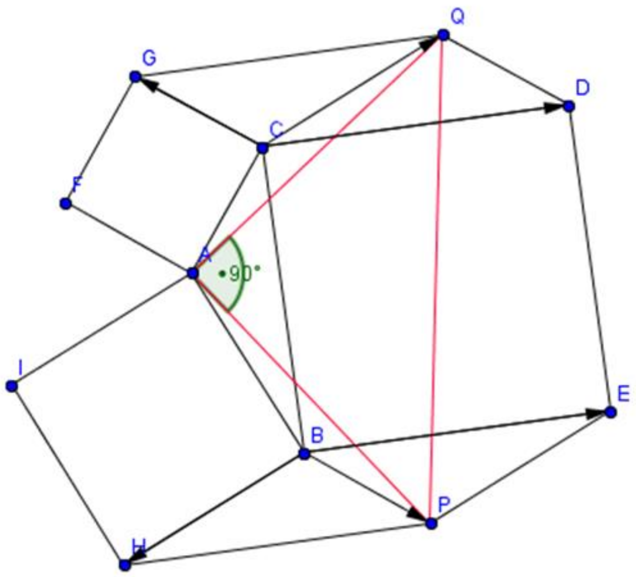
és

$$(c - a\varepsilon^2 - a + b\varepsilon^2) = c - a\varepsilon + b\varepsilon^2$$

Tehát az MNO háromszög szabályos háromszög.

Ez után a feladat után a diákoknak önálló feldolgozásra adnám föl a következő feladatot.

4. Feladat: *Az ABC háromszög oldalaira négyzeteket rajzoltunk, ezek az $ABHI$, $BCDE$ és $CAFG$ négyzetek. A $GCDQ$ és $EBHP$ négyszögek pedig paralelogrammák. Bizonyítsuk be, hogy az APQ háromszög $QAP\measuredangle$-e derékszög és a háromszög egyenlő szárú.*



Fejezzük ki a P és Q pontokba mutató p és q komplex számokat, az a, b és c komplex számok segítségével.

$$\overrightarrow{CG} = g - c = -i(a - c)$$

$$\overrightarrow{CD} = d - c = i(b - c)$$

A paralelogramma szabály felhasználásával:

$$\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CQ} = q - c = -i(a-c) + i(b-c) = -ia + ic + ib - ic = -ia + ib$$

$$q = -ia + ib + c$$

Ugyanígy p-re:

$$\overrightarrow{BE} = -i(c-b)$$

$$\overrightarrow{BH} = i(a-b)$$

$$\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BP} = p - b = -i(c-b) + i(a-b) = ia - ic$$

$$p = b + ia - ic$$

Az APQ háromszög derékszögű és egyenlő szárú, mert az $\overrightarrow{AP}$ vektort 90°-kal elforgatva, az $\overrightarrow{AQ}$ vektort kapjuk.

$$\overrightarrow{AP} = p - a = b - ic + ia - a$$

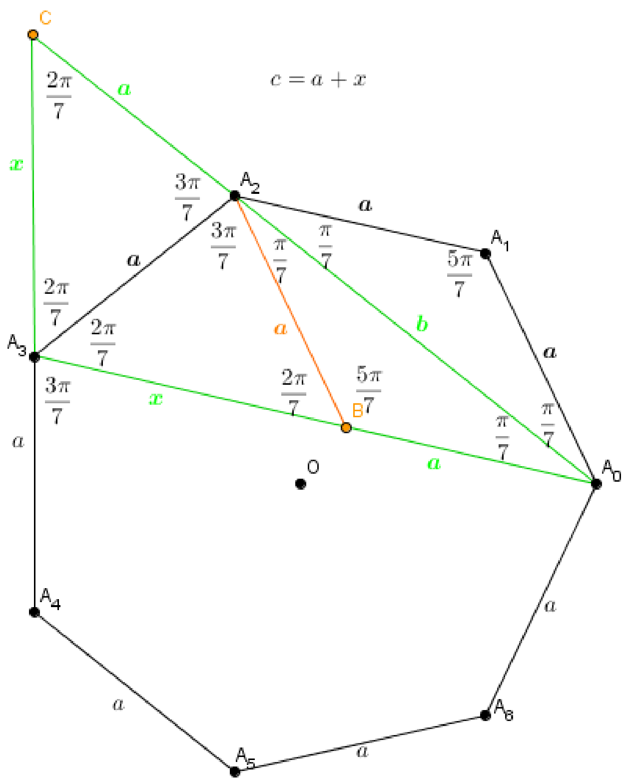
$$\overrightarrow{AQ} = q - a = c + ib - ia - a$$

$$i\left(\overrightarrow{AP}\right) = i(b - ic + ia - a) = ib + c - a - ia = \overrightarrow{AQ}$$

Végül két nehezebb forgatást alkalmazó feladat:

5. Feladat: $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ *egy szabályos hétszög hét csúcsa. Bizonyítsuk be, hogy*

$$\frac{1}{A_0A_1} = \frac{1}{A_0A_2} + \frac{1}{A_0A_3}$$



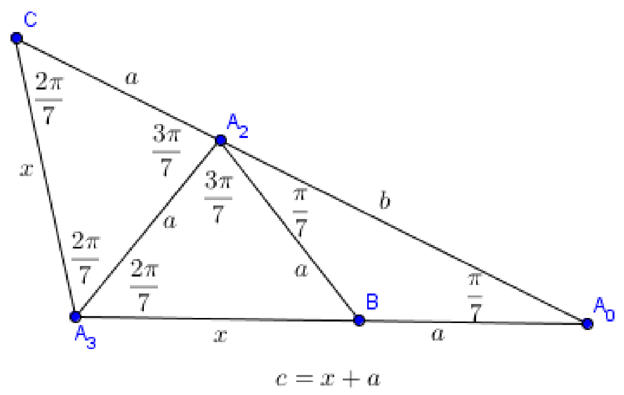
Megoldás 1: Először nézzük meg az elemi geometriai megoldást.

A szabályos hétszög oldalait jelöljük a-val. Egy hétszög belső szögeinek összege 5π, tehát mivel szabályos hétszögünk van, mind a hét szöge $\frac{5\pi}{7}$ lesz. Mivel a háromszög szögeinek összege π, így az $A_0A_1A_2$ egyenlőszárú háromszög szögei: $A_1A_2A_0\sphericalangle = A_1A_0A_2\sphericalangle = \frac{\pi}{7}$, $A_0A_1A_2\sphericalangle = \frac{5\pi}{7}$. Az A_2 csúcsból húzzunk párhuzamost az A_0A_1 szakasszal, azt a pontot, ahol elmetszi az A_0A_3 szakaszt, jelöljük B-vel. Ekkor az

$A_0A_1A_2B$ négyszög rombusz lesz, mivel szemközti oldalai párhuzamosak és mind a négy oldal hossza a, az A_0A_2 átlót pedig jelöljük b-vel. Tehát az A_0A_2B háromszög szögei: $A_2BA_0\measuredangle = \frac{5\pi}{7}$, $A_0A_2B\measuredangle = \frac{\pi}{7}$ és $BA_0A_2\measuredangle = \frac{\pi}{7}$. Az $A_1A_2A_3\measuredangle = \frac{5\pi}{7}$, tehát az $A_3A_2B\measuredangle = \frac{3\pi}{7}$. Mivel az A_3A_2B háromszög egyenlőszárú (az A_2A_3 oldal és az A_2B oldal hossza a) az $A_3BA_2\measuredangle = A_2A_3B\measuredangle = \frac{2\pi}{7}$.

Hosszabbítsuk meg az A_0A_2 és az A_4A_3 oldalakat, jelöljük a metszéspontjukat C-vel. A $CA_3A_2\measuredangle = \frac{2\pi}{7}$, mivel az $A_4A_3A_2\measuredangle$ kiegészítő szöge. A $CA_2A_3\measuredangle = \frac{3\pi}{7}$, mivel ez a szög az $A_3A_2A_0\measuredangle$ kiegészítő szöge. Mivel a háromszög szögeinek összege π, a CA_3A_2 háromszög C csúcsánál lévő szöge $\frac{2\pi}{7}$, tehát ez a háromszög egyenlő szárú és $\overline{CA_2} = \overline{A_3A_2} = a$.

Ekkor az A_0CA_3 háromszög kirajzolva a fenti ábrából:



Vegyük észre, hogy az A_0CA_3 és az $A_0A_3A_2$ háromszögek hasonlók. Ekkor:

$$\frac{x+a}{b} = \frac{x}{a}$$

$$\frac{c}{b} = \frac{x}{a}$$

$$\frac{1}{b} = \frac{x}{ac}$$

$$\frac{1}{b} = \frac{x+a-a}{ac}$$

$$\frac{1}{b} = \frac{c}{ac} - \frac{a}{ac}$$

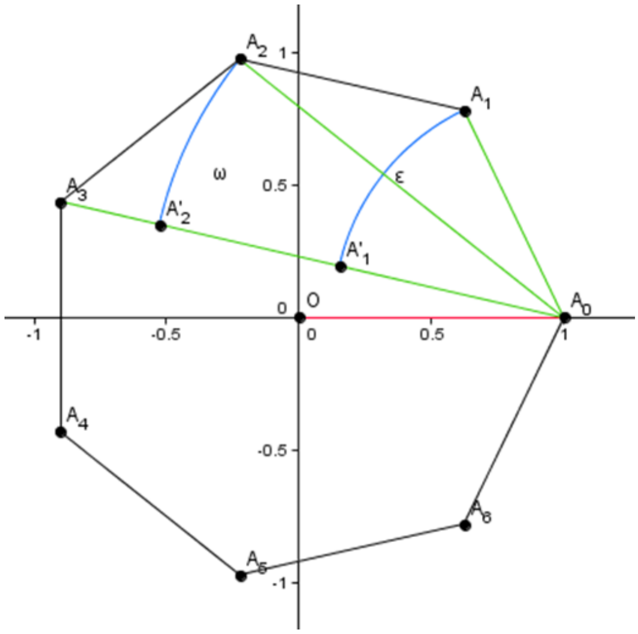
$$\frac{1}{b} = \frac{1}{a} - \frac{1}{c}$$

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a}$$

Megoldás 2: Az elemi geometriai megoldás után nézzük meg, hogy komplex számok használatával hogyan bizonyíthatjuk az állítást.

Legyen a hétszög középpontja az origó, és föltehető, hogy az A_0 csúcs épp az 1 valós számra esik.

Forgassuk el az A_1 és A_2 pontokat úgy, hogy kollineárisak legyenek az A_0 és A_3 pontokkal. Ekkor nem szakaszokkal, hanem arányokkal kell számolnunk.



Az origóból a hétszög csúcsaiba mutató vektorok az a_0, a_1,…a_6 komplex számok, ahol $a_0 = 1$. Ekkor $\overrightarrow{A_0A_1} = a_1 - 1$ és $\overrightarrow{A_0A_2} = a_2 - 1$ és $\overrightarrow{A_0A_3} = a_3 - 1$.

Legyenek $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{7} + i \cdot \sin\frac{2\pi}{7}$ és $\omega = \cos\frac{\pi}{7} + i \cdot \sin\frac{\pi}{7}$ komplex számok, ekkor $\varepsilon = \omega^2$ és

$$a_0 = \varepsilon^0 = \omega^0 = 1 \qquad a_4 = \varepsilon^4 = \omega^8$$

$$a_1 = \varepsilon^1 = \omega^2 \qquad a_5 = \varepsilon^5 = \omega^{10}$$

$$a_2 = \varepsilon^2 = \omega^4 \qquad a_6 = \varepsilon^6 = \omega^{12}$$

$$a_3 = \varepsilon^3 = \omega^6$$

Az előző megoldásnál láttuk, hogy az $\overline{A_0A_1}$ szakaszt A_0 középpontú, $\frac{2\pi}{7}$ szögű forgatás viszi az $\overline{A_0A_3}$ szakaszra, az $\overline{A_0A_2}$ szakaszt pedig $\frac{\pi}{7}$ szögű. A forgatással kapott pontok legyenek az A'_1 és A'_2 pontok.

Ez komplex számokkal felírva:

$$a'_1 - 1 = \varepsilon(a_1 - 1) = \omega^2(\omega^2 - 1)$$

$$a'_2 - 1 = \omega(a_2 - 1) = \omega(\omega^4 - 1)$$

$$a_3 - 1 = \omega^6 - 1$$

Mivel $|a_1 - 1| = |a'_1 - 1|$ és $|a_2 - 1| = |a'_2 - 1|$, és $a'_1 - 1$, $a'_2 - 1$ és $a_3 - 1$ egyállásúak, tehát hányadosuk pozitív valós szám, ezért elég a következőt bizonyítanunk:

$$\frac{1}{a'_1 - 1} = \frac{1}{a'_2 - 1} + \frac{1}{a_3 - 1}$$

$$\frac{1}{a'_1 - 1} - \frac{1}{a'_2 - 1} - \frac{1}{a_3 - 1} = 0$$

$$\frac{1}{\omega^2(\omega^2 - 1)} - \frac{1}{\omega(\omega^4 - 1)} - \frac{1}{\omega^6 - 1} =$$

$$= \frac{\omega(\omega^4 - 1)(\omega^6 - 1) - \omega^2(\omega^2 - 1)(\omega^6 - 1) - \omega^3(\omega^2 - 1)(\omega^4 - 1)}{\omega^3(\omega^2 - 1)(\omega^4 - 1)(\omega^6 - 1)} =$$

$$= \frac{(\omega^{11} - \omega^7 - \omega^5 + \omega) - (\omega^{10} - \omega^8 - \omega^4 + \omega^2) - (\omega^9 - \omega^7 - \omega^5 + \omega^3)}{\omega^3(\omega^2 - 1)(\omega^4 - 1)(\omega^6 - 1)} =$$

$$= \frac{\omega^{11} - \omega^7 - \omega^5 + \omega - \omega^{10} + \omega^8 + \omega^4 - \omega^2 - \omega^9 + \omega^7 + \omega^5 - \omega^3}{\omega^3(\omega^2 - 1)(\omega^4 - 1)(\omega^6 - 1)} =$$

$$= \frac{\omega^{11} - \omega^{10} - \omega^9 + \omega^8 + \omega^4 - \omega^3 - \omega^2 + \omega}{\omega^3(\omega^2 - 1)(\omega^4 - 1)(\omega^6 - 1)} =$$

$$= \frac{\omega^8(\omega^3 - \omega^2 - \omega + 1) + \omega(\omega^3 - \omega^2 - \omega + 1)}{\omega^3(\omega^2 - 1)(\omega^4 - 1)(\omega^6 - 1)} = \frac{(\omega^8 + \omega)(\omega^3 - \omega^2 - \omega + 1)}{\omega^3(\omega^2 - 1)(\omega^4 - 1)(\omega^6 - 1)} =$$

$$= \frac{(-\omega + \omega)(\omega^3 - \omega^2 - \omega + 1)}{\omega^3(\omega^2 - 1)(\omega^4 - 1)(\omega^6 - 1)} = \frac{0}{\omega^3(\omega^2 - 1)(\omega^4 - 1)(\omega^6 - 1)} = 0$$

A következő feladat a diákoknak önálló megoldásra is kiadható ez után a feladat után.

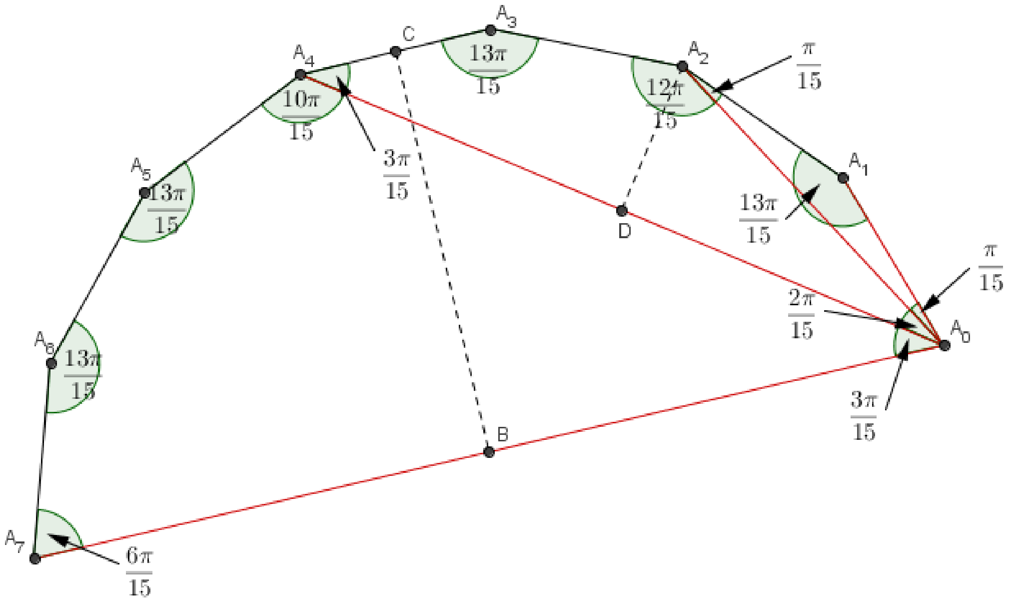
6. Feladat: *A_0, A_1, A_2, ... A_{14} egy szabályos tizenötszög csúcsai. Bizonyítsuk be, hogy*

$$\frac{1}{\overline{A_0A_1}} = \frac{1}{\overline{A_0A_2}} + \frac{1}{\overline{A_0A_4}} + \frac{1}{\overline{A_0A_7}}$$

Ezt a feladatot már csak komplex számokkal oldjuk meg, az előző feladat menetét követve.

A tizenötszög A_0 csúcsa itt is az 1 valós számra esik. Először az $a_1 - 1$, $a_2 - 1$ és $a_4 - 1$ komplex számokat jelentő vektorokat forgassuk el úgy, hogy kollineárisak legyenek az a_0, a_7 komplex számokkal, ezek lesznek az $a'_1 - 1$, $a'_2 - 1$ és $a'_4 - 1$ komplex számok.

Határozzuk meg elemi geometriai módszerekkel a forgatások szögét.



A tizenöt szög belső szögeinek összege 13π, mivel szabályos tizenötszögünk van, ezért mindegyik belső szöge $\frac{13\pi}{15}$. Az $A_0A_1A_2$ háromszög egyenlő szárú, tehát $A_0A_2A_1\measuredangle = A_1A_0A_2\measuredangle = \frac{\pi}{15}$

Az $A_0A_1A_2A_3A_4$ ötszög tengelyesen szimmetrikus az A_2D tengelyre, tehát $A_3A_4A_0\measuredangle = A_1A_0A_4\measuredangle$. Az ötszög belső szögeinek összege 3π, tehát

$$3\pi - 3 \cdot \frac{13\pi}{15} = A_3A_4A_0\measuredangle + A_1A_0A_4\measuredangle$$

$$\frac{45\pi - 39\pi}{15} = \frac{6\pi}{15} = A_3A_4A_0\measuredangle + A_1A_0A_4\measuredangle$$

Tehát $A_3A_4A_0\measuredangle = A_1A_0A_4\measuredangle = \frac{3\pi}{15}$. Ebből következik, hogy $A_2A_0A_4\measuredangle = \frac{2\pi}{15}$.

Ugyanígy az $A_0A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ nyolcszög is tengelyesen szimmetrikus a BC szakaszra, tehát az előző számolásokat ismét elvégezve $A_6A_7A_0\measuredangle = A_1A_0A_7\measuredangle = \frac{6\pi}{15}$, ebből következik, hogy $A_4A_0A_7\measuredangle = \frac{3\pi}{15}$.

Ekkor legyen

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{15} + i \cdot \sin\frac{2\pi}{15},$$

$$\omega = \cos\frac{\pi}{15} + i \cdot \sin\frac{\pi}{15}.$$

$$\text{Ekkor } \varepsilon = \omega^2$$

Legyen a tizenötszög középpontja az origó és legyen

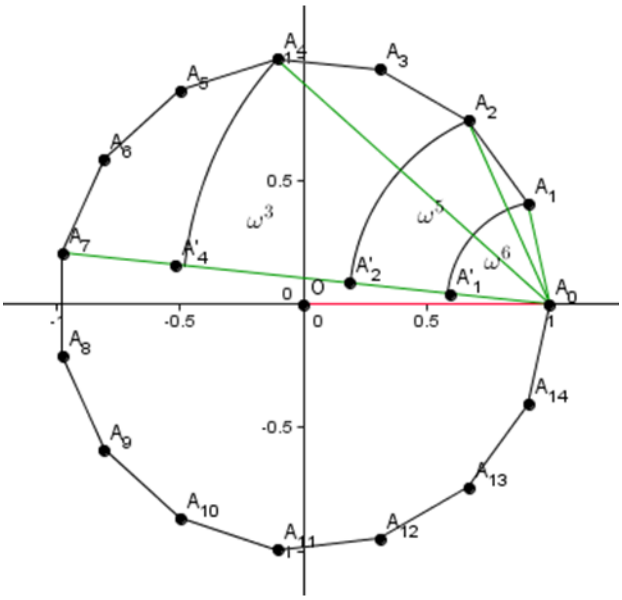
$$a_0 = 1 = \varepsilon^0 = \omega^0$$

Ekkor

$$a_1 = \varepsilon^1 = \omega^2$$

$$\vdots$$

$$a_{14} = \varepsilon^{14} = \omega^{28}$$



Tehát az $\overline{A_0A_1}$ szakaszt A_0 középpontú $\frac{6\pi}{15}$ szögű forgatás viszi az $\overline{A_0A_7}$ szakaszra, az $\overline{A_0A_2}$ szakaszt, $\frac{5\pi}{15}$ szögű, az $\overline{A_0A_4}$ szakaszt pedig $\frac{3\pi}{15}$ szögű forgatás. A forgatással kapott pontok legyenek az A'_1, A'_2 és A'_4 pontok.

Ez komplex számokkal felírva a következő:

$$\overrightarrow{A_0A_1} = a_1 - a_0 = \varepsilon - 1 = \omega^2 - 1 \qquad \overrightarrow{A_0A'_1} = a'_1 - a_0 = \omega^6(\omega^2 - 1)$$

$$\overrightarrow{A_0A_2} = a_2 - a_0 = \varepsilon^2 - 1 = \omega^4 - 1 \qquad \overrightarrow{A_0A'_2} = a'_2 - a_0 = \omega^5(\omega^4 - 1)$$

$$\overrightarrow{A_0A_4} = a_4 - a_0 = \varepsilon^4 - 1 = \omega^8 - 1 \qquad \overrightarrow{A_0A'_4} = a'_4 - a_0 = \omega^3(\omega^8 - 1)$$

$$\overrightarrow{A_0A_7} = a_7 - a_0 = \varepsilon^7 - 1 = \omega^{14} - 1$$

Mivel $|a_1 - a_0| = |a'_1 - a_0|$ és $|a_2 - a_0| = |a'_2 - a_0|$ és $|a_4 - a_0| = |a'_4 - a_0|$ ezért most is, mint az előző feladatnál elegendő a következőt bizonyítanunk:

$$\frac{1}{a'_1 - 1} = \frac{1}{a'_2 - 1} + \frac{1}{a'_4 - 1} + \frac{1}{a_7 - 1}$$

$$\frac{1}{\omega^6(\omega^2 - 1)} = \frac{1}{\omega^5(\omega^4 - 1)} + \frac{1}{\omega^3(\omega^8 - 1)} + \frac{1}{\omega^{14} - 1}$$

$$\frac{1}{\omega^6(\omega^2 - 1)} - \frac{1}{\omega^5(\omega^4 - 1)} - \frac{1}{\omega^3(\omega^8 - 1)} - \frac{1}{\omega^{14} - 1} = 0$$

Ha ezt a törtet közös nevezőre hozzuk, a számlálóban minden számnak megtaláljuk az ellentettjét, tehát a számlálóban nulla áll, vagyis igaz az eredeti állítás.

Körbe írható sokszögek

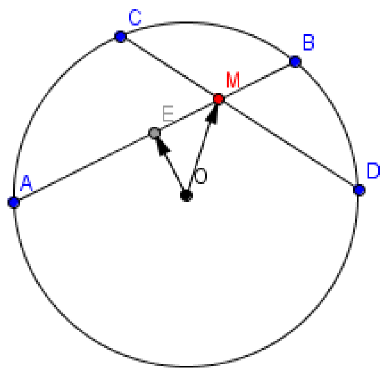
Ebben a fejezetben a már középiskolában tanult, általában konkrét adatokkal megadott feladatok általános megoldását szeretném bemutatni, melyekhez érdemes komplex számokat használni. A feladatok előtt nézzük meg pár felhasználandó tétel bizonyítását.

1. Tétel: *Az AB és CD húrok metszéspontja origó középpontú egység sugarú körben:*

$$\frac{ab(c+d)-cd(a+b)}{ab-cd}$$

Bizonyítás:

Az AB és a CD húr az egységkör két húrja, ezek metszéspontját szeretnénk meghatározni az a, b, c és d komplex számok segítségével.



Föltehető, hogy $ab-cd\neq 0$, mert az egyenlőség pontosan abban az esetben fordul elő, amikor az AB és CD húrok párhuzamosak, tehát nincs metszéspontjuk.

A továbbiakban először föltesszük, hogy az AB és CD húrok egyike sem átmérője a körnek, azaz $a+b\neq 0$ és $c+d\neq 0$

Az e komplex szám legyen az AB húr felezőpontja, vagyis $2e=a+b$.

Ekkor a Pitagorasz-tétel felhasználásával:

$$|m|^2=|m-e|^2+|e|^2$$

Egy komplex szám abszolút értékének négyzete megegyezik a számnak és a konjugáltjának szorzatával, vagyis

$$m\overline{m}=(m-e)(\overline{m}-\overline{e})+e\overline{e}$$

$$m\overline{m}=\ m\overline{m}-e\overline{m}-\overline{e}m+e\overline{e}+e\overline{e}$$

$$e\overline{m}+\overline{e}m=2e\overline{e}$$

Ekkor a $2e=a+b$ összefüggést felhasználva kapjuk, hogy

$$\frac{a+b}{2}\cdot\overline{m}+\frac{\overline{a}+\overline{b}}{2}\cdot m=2\cdot\frac{a+b}{2}\cdot\frac{\overline{a}+\overline{b}}{2}$$

$$\overline{m}(a+b)+m\left(\overline{a}+\overline{b}\right)=(a+b)(\overline{a}+\overline{b})$$

$$\overline{m}a+\overline{m}b+m\overline{a}+m\overline{b}=a\overline{a}+a\overline{b}+\overline{a}b+b\overline{b}$$

Mivel a és b is egység komplex számok, konjugáltjuk a reciprokjukkal helyettesíthető.

$$\overline{m}a+\overline{m}b+\frac{m}{a}+\frac{m}{b}=\frac{a}{a}+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{b}$$

$$\overline{m}a^2b+\overline{m}ab^2+mb+ma=ab+a^2+b^2+ab$$

$$\overline{m}ab(a+b)+m(a+b)=(a+b)^2$$

Mivel föltettük, hogy $a+b\neq 0$, ezért oszthatunk $a+b$-vel

$$\overline{m}ab+m=a+b$$

$$\overline{m}=\frac{a+b-m}{ab}$$

Írjuk fel ugyanígy a c és d komplex számokkal is a metszéspont konjugáltját

$$\overline{m}=\frac{c+d-m}{cd}$$

Ekkor:

$$\frac{a+b-m}{ab}=\frac{c+d-m}{cd}$$

$$(a+b)cd-mcd=(c+d)ab-mab$$

$$mab-mcd=ab(c+d)-cd(a+b)$$

$$m(ab-cd)=ab(c+d)-cd(a+b)$$

$$m=\frac{ab(c+d)-cd(a+b)}{ab-cd}$$

Ezzel beláttuk a tételt arra az esetre, amikor $a+b\neq 0$ és $c+d\neq 0$

Most nézzük meg azt az esetet, amikor $a+b=0$ és $c+d=0$, azaz mindkét húr átmérője a körnek. Ilyenkor a húrok metszéspontja az origó, azaz a kör középpontja és a képlet is épp ezt mutatja.

Végezetül tehát csak az az eset maradt, amikor pl. $a+b=0$ de $c+d\neq 0$. Azt nyugodtan föltehetjük, hogy $a=-1$ és $b=1$, mert egy $\varepsilon\in\mathbb{C}$, $|\varepsilon|=1$ komplex számmal való szorzással az egész ábrát elforgatjuk, és ilyenkor a képlet által adott metszéspont is ε-szorosára változik. Ebben az esetben tehát a képlet szerint

$$m = \frac{-1(c+d)}{-1-cd} = \frac{c+d}{1+cd}$$

hiszen $ab = -1$.

Ekkor két dolgot kell megtudnunk erről az m-ről:

1.) rajta van a valós tengelyen, tehát a képzetes része 0 (vagyis rajta van az AB átmérőn)

$$Im\,(m) = Im\,\left(\frac{c+d}{1+cd}\right) = Im(c+d)\left(1+\overline{cd}\right) = 0$$

$$(c+d)\left(1+\overline{cd}\right) = c + d + c\bar{c}\bar{d} + d\bar{d}\bar{c}$$

Mivel c és d egység komplex számok $c\bar{c} = d\bar{d} = 1$, tehát

$$(c+d)\left(1+\overline{cd}\right) = c + d + \bar{d} + \bar{c}$$

A $c + d + \bar{d} + \bar{c}$ kifejezés valós, hiszen $c + \bar{c} = 2\,Re(c)$ és $d + \bar{d} = 2\,Re(d)$, tehát

$$Im\,(m) = 0$$

2.) rajta van a CD húron

Azt kell bizonyítanunk, hogy $\frac{m-c}{d-c}$ valós, tehát a képzetes része 0.

$$Im\frac{\frac{c+d}{1+cd} - c}{d-c} = Im\frac{c+d-c-c^2d}{(d-c)(1+cd)} = Im\,d(1-c^2)\left(\bar{d}-\bar{c}\right)\left(1+\overline{cd}\right) = 0$$

Ekkor

$$d(1-c^2)\left(\bar{d}-\bar{c}\right)\left(1+\overline{cd}\right) = \left(d\bar{d}-d\bar{c}\right)\left(1+\overline{cd}-c^2-c\bar{d}\right) =$$

$$= (1-d\bar{c})\left(1-c\bar{d}\right) + (1-d\bar{c})(-c^2+\overline{cd})$$

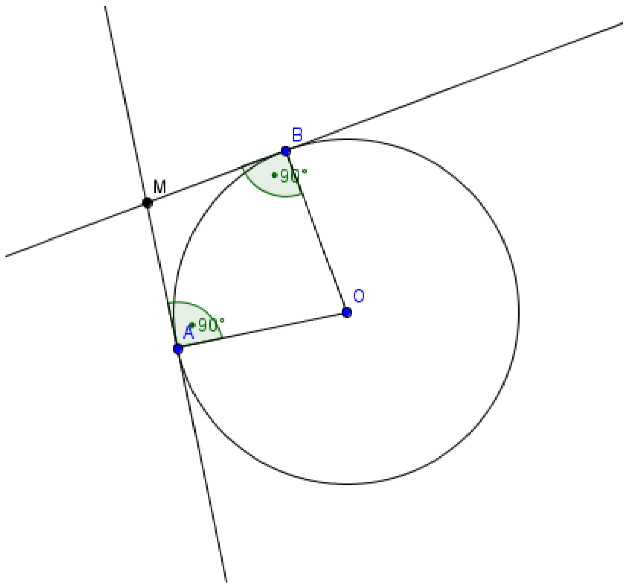
Az első tag valós, mert $(1-d\bar{c})\left(1-c\bar{d}\right) = |1-d\bar{c}|^2$ valós szám.

A második tag $(1-d\bar{c})\left(-c^2+\overline{cd}\right) = -c^2 + \overline{cd} + dc - \bar{c}^2$ szintén valós szám.

2. Tétel: *Az origó középpontú kör A és B pontokból húzott érintők metszéspontja*

$$\frac{2ab}{a+b}$$

Bizonyítás:



Tegyük fel, hogy $a \neq -b$, mert ekkor a két komplex szám egymás ellentettjei lennének, és ekkor az A és B pontokból húzott érintők párhuzamosak lennének, tehát ebben az esetben az érintőknek nincs metszéspontja.

$|m-b| = |m-a|$, mivel a körhöz egy külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlő hosszúságúak. A kör érintési pontba húzott sugara merőleges az érintőre, tehát

$$m - a = -\lambda ia$$

$$m - b = \lambda ib$$

Elosztva egymással a két egyenletet, kapjuk:

$$\frac{m-a}{m-b} = \frac{-\lambda ia}{\lambda ib}$$

$$(m-a)b = -a(m-b)$$

$$mb - ab = -am + ab$$

$$mb + am = 2ab$$

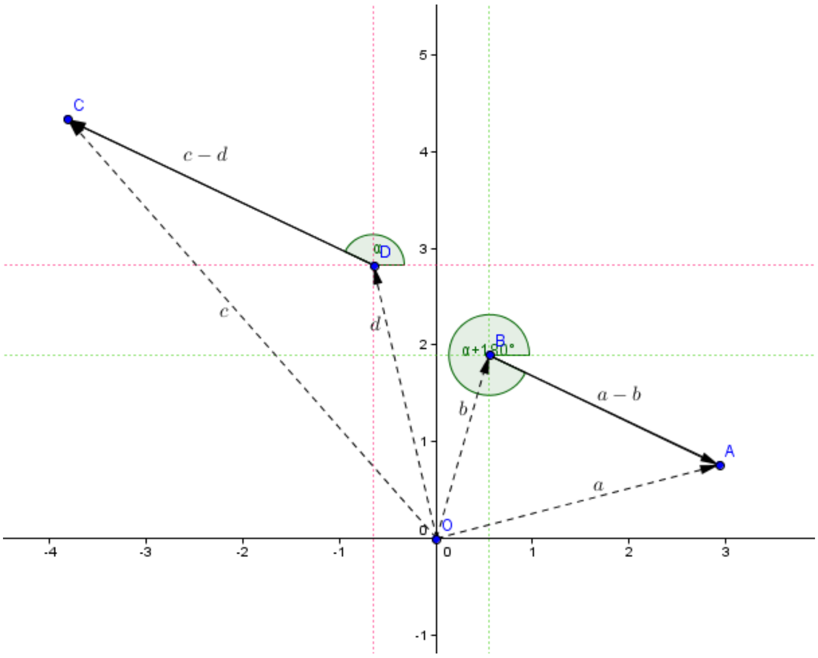
$$m(a+b) = 2ab$$

$$m = \frac{2ab}{a+b}$$

3. Tétel: *Az AB és CD szakaszok akkor és csak akkor párhuzamosak, ha*

$$\frac{a-b}{\bar{a}-\bar{b}}=\frac{c-d}{\bar{c}-\bar{d}}$$

Bizonyítás:



Nyilván feltehető, hogy $A \neq B$ és $C \neq D$. Két komplex számot jelenő vektor akkor lesz párhuzamos, ha helyvektoraik irányszöge megegyezik, vagy 180°-kal eltér egymástól. Ekkor $a-b=\lambda(c-d)$, ahol λ egy pozitív valós szám, ha a helyvektorok irányszöge megegyezik, és negatív, ha 180°-kal eltér egymástól.

Tehát:

$$\frac{a-b}{c-d}=\lambda \in \mathbb{R}$$

Mivel egy valós szám konjugáltja megegyezik önmagával, ezért

$$\frac{\bar{a}-\bar{b}}{\bar{c}-\bar{d}}=\bar{\lambda}=\lambda \in \mathbb{R}$$

Tehát:

$$\frac{a-b}{c-d}=\frac{\bar{a}-\bar{b}}{\bar{c}-\bar{d}}$$

$$\frac{a-b}{\bar{a}-\bar{b}}=\frac{c-d}{\bar{c}-\bar{d}}$$

Ellenkező irány:

Áll:

$$\frac{a-b}{\bar{a}-\bar{b}}=\frac{c-d}{\bar{c}-\bar{d}}$$

Írjuk fel trigonometrikus alakban:

$$\frac{a-b}{\bar{a}-\bar{b}}=\frac{r(\cos\alpha+i\cdot\sin\alpha)}{r[\cos(-\alpha)+i\cdot\sin(-\alpha)]}=\cos 2\alpha+i\cdot\sin 2\alpha$$

$$\frac{c-d}{\bar{c}-\bar{d}}=\frac{s(\cos\beta+i\cdot\sin\beta)}{s[\cos(-\beta)+i\cdot\sin(-\beta)]}=\cos 2\beta+i\cdot\sin 2\beta$$

$$\cos 2\alpha+i\cdot\sin 2\alpha=\cos 2\beta+i\cdot\sin 2\beta$$

Ez csak akkor igaz, ha

$$2\alpha\equiv 2\beta\ (mod\ 360°)$$

$$\alpha\equiv\beta\ (mod\ 180°)$$

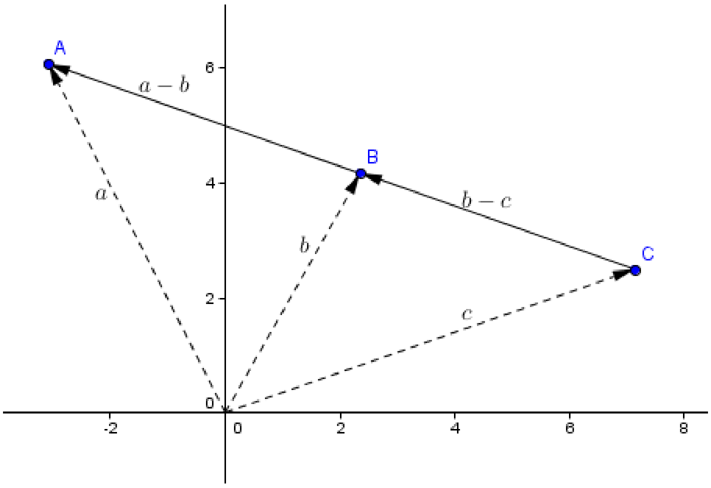
Tehát az AB és CD szakaszok párhuzamosak.

4. Tétel: *Az A, B és C pontok akkor és csak akkor kollineárisak, ha*

$$\frac{a-b}{\bar{a}-\bar{b}}=\frac{b-c}{\bar{b}-\bar{c}}$$

Bizonyítás:

Az a, b és c komplex számok pontosan akkor kollineárisak, ha az $a-b$ és $b-c$ vektorok párhuzamosak (bármelyik két különbségvektort választhatnánk, amit ez a három pont meghatároz).



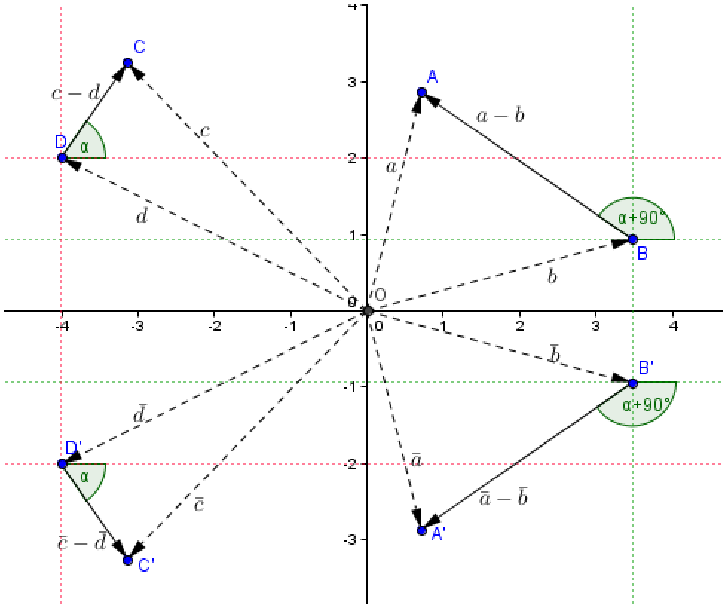
Tehát az előző tételt alkalmazva:

$$\frac{a-b}{\bar{a}-\bar{b}} = \frac{b-c}{\bar{b}-\bar{c}}$$

5. Tétel: *az AB és CD szakaszok akkor és csak akkor merőlegesek egymásra, ha*

$$\frac{a-b}{\bar{a}-\bar{b}} = -\frac{c-d}{\bar{c}-\bar{d}}$$

Bizonyítás:



Két komplex szám akkor merőleges egymásra, ha az egyik helyvektorát a másik helyvektorának $\pm 90°$-os elforgatásával, és ha szükséges, λ-szoros nyújtásával kapjuk, vagyis $\pm i\lambda$-val szorozzuk. Tehát az $a-b$ és $c-d$ komplex számok akkor merőlegesek egymásra, ha

$$a-b = \pm i\lambda(c-d)$$

$$\frac{a-b}{c-d} = \pm i\lambda$$

és $\lambda \in \mathbb{R}_0^+$.

Ezt az egyenletet megkonjugálva kapjuk

$$\bar{a}-\bar{b} = \mp i\lambda(\bar{c}-\bar{d})$$

$$\frac{\bar{a}-\bar{b}}{\bar{c}-\bar{d}} = \mp i\lambda$$

és $\lambda \in \mathbb{R}_0^+$.

Tehát:

$$\pm i\frac{a-b}{c-d}=\mp i\frac{\bar{a}-\bar{b}}{\bar{c}-\bar{d}}$$

$$\frac{a-b}{\bar{a}-\bar{b}}=-\frac{c-d}{\bar{c}-\bar{d}}$$

Ellenkező irány:

Áll:

$$\frac{a-b}{\bar{a}-\bar{b}}=-\frac{c-d}{\bar{c}-\bar{d}}$$

Írjuk fel trigonometrikus alakban:

$$\frac{a-b}{\bar{a}-\bar{b}}=\frac{r(\cos\alpha+i\cdot\sin\alpha)}{r[\cos(-\alpha)+i\cdot\sin(-\alpha)]}=\cos 2\alpha+i\cdot\sin 2\alpha$$

$$-\frac{c-d}{\bar{c}-\bar{d}}=-\frac{s(\cos\beta+i\cdot\sin\beta)}{s[\cos(-\beta)+i\cdot\sin(-\beta)]}=\cos 2\beta-i\cdot\sin 2\beta$$

$$\cos 2\alpha+i\cdot\sin 2\alpha=\cos 2\beta-i\cdot\sin 2\beta$$

Ez csak akkor lesz igaz, ha

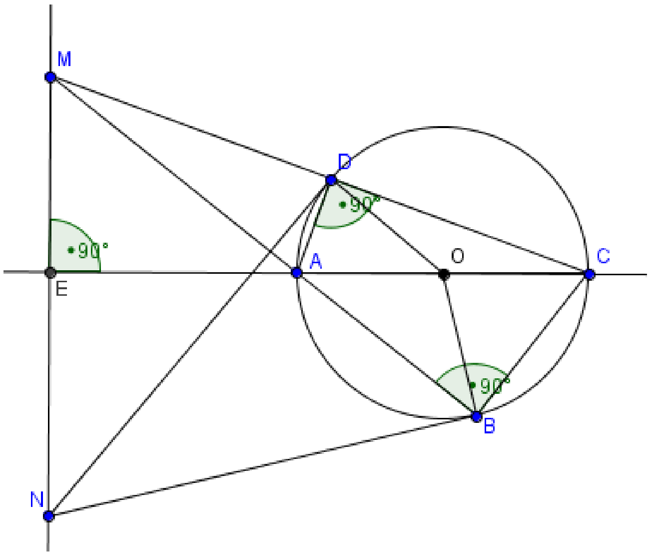
$$2\alpha\equiv 2\beta\ (mod\ 180°)$$

$$\alpha\equiv\beta\ (mod\ 90°)$$

Tehát AB és CD szakaszok merőlegesek egymásra.

Most következzen néhány feladat melyeket az előbb bebizonyított tételek felhasználásával célszerű bebizonyítani.

7. Feladat: *Az $ABCD$ húrnégyszög átmérője AC. Az AB és CD oldalak az M pontban metszik egymást, a kört a B és D pontban érintő érintők pedig az N pontban. Bizonyítsuk be, hogy $MN \perp AC$.*



Legyen a kör az origó középpontú egységkör. Írjuk fel az AB és a CD húrok metszéspontját az a, b, c és d komplex számokba mutató vektorok segítségével. Mivel a és c egymás ellentettei $c = -a$.

$$m = \frac{ab(c+d) - cd(a+b)}{ab - cd} = \frac{ab(-a+d) + ad(a+b)}{ab + ad} =$$

$$= \frac{a(-ab + bd + ad + bd)}{a(b+d)} = \frac{2bd + ad - ab}{b+d}$$

A B és D pontból húzott érintők metszéspontja komplex számokkal kifejezve:

$$n = \frac{2bd}{b+d}$$

Tehát:

$$\overrightarrow{NM} = m - n = \frac{2bd + ad - ab}{b+d} - \frac{2bd}{b+d} = \frac{a(d-b)}{b+d}$$

Már csak azt kell bizonyítanunk, hogy a $\overrightarrow{CA}$ és az $\overrightarrow{NM}$ vektorok merőlegesek egymásra, vagyis

$$\frac{m-n}{\overline{m} - \overline{n}} = -\frac{a-c}{\overline{a} - \overline{c}}$$

Először számoljuk ki $m - n$ konjugáltját:

$$\overline{m}-\overline{n}=\frac{\overline{a(d-b)}}{\overline{b+d}}=\frac{\overline{d-b}}{a\left(\overline{b+d}\right)}=\frac{1}{a}\cdot\left(\frac{\overline{d}}{\overline{b+d}}-\frac{\overline{b}}{\overline{b+d}}\right)=\frac{1}{a}\cdot\left(\frac{1}{d\left(\overline{b+d}\right)}-\frac{1}{b\left(\overline{b+d}\right)}\right)=$$

$$=\frac{1}{a}\cdot\frac{b-d}{db\left(\overline{b+d}\right)}=\frac{1}{a}\cdot\frac{b-d}{db\overline{b}+bd\overline{d}}=\frac{1}{a}\cdot\frac{b-d}{d|b|^2+b|d|^2}=\frac{b-d}{a(d+b)}$$

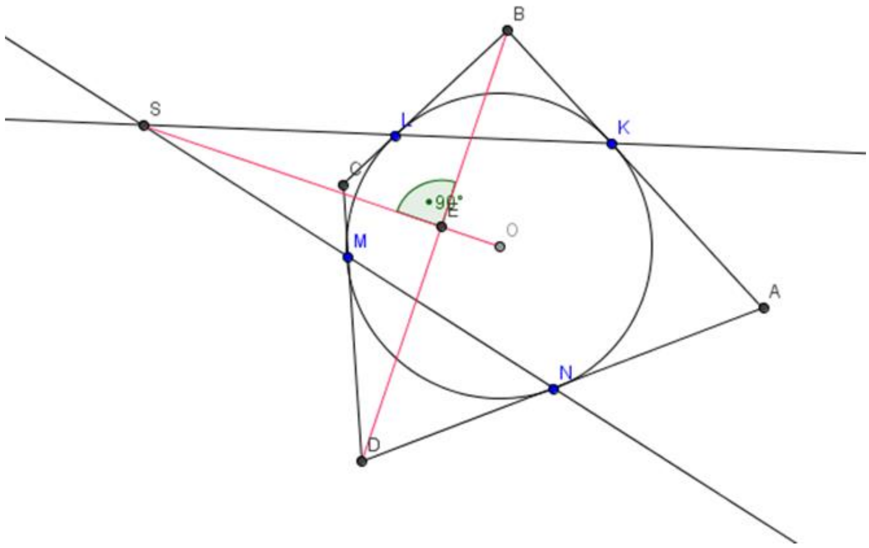
A kapott értékeket behelyettesítve:

$$\frac{m-n}{\overline{m}-\overline{n}}=\frac{\frac{a(d-b)}{b+d}}{\frac{b-d}{a(d+b)}}=\frac{a(d-b)}{b+d}\cdot\frac{a(d+b)}{b-d}=-\frac{a^2(b-d)}{b-d}=-a^2$$

$$-\frac{a-c}{\overline{a}-\overline{c}}=-\frac{a-(-a)}{\overline{a}-(-\overline{a})}=-\frac{2a}{2\overline{a}}=-a\cdot a=-a^2$$

Tehát az MN és AC szakaszok merőlegesek egymásra.

8. Feladat: *Az $ABCD$ érintőnégyszögbe írt O középpontú kör, az AB, BC, CD és DA oldalakat a K, L, M és N pontokban érinti. A KL és MN húrok az S pontban metszik egymást. Bizonyítsuk be, hogy $OS \perp BD$.*



Legyenek AB, BC, CD és DA szakaszok az origó középpontú, egység sugarú kör érintői, ahol az érintési pontok K, L, M és N, az érintési pontokat jelölő komplex számok pedig k, l, m és n.

Az a, b, c és d komplex számokat felírhatjuk, mint a kör érintőinek metszéspontjai:

$$a = \frac{2kn}{k+n} \qquad c = \frac{2lm}{l+m}$$

$$b = \frac{2kl}{k+l} \qquad d = \frac{2nm}{n+m}$$

Az s komplex számot pedig a KL és MN húrok metszéspontjaként kapjuk:

$$s = \frac{kl(n+m) - nm(k+l)}{kl - nm}$$

$OS \perp BD$ bizonyításához használjuk fel az 5. tételt:

$$\frac{s-o}{\bar{s}-\bar{o}} = -\frac{d-b}{\bar{d}-\bar{b}}$$

Először számítsuk ki $\bar{s}$-at:

$$\bar{s} = \frac{\overline{kl}(\bar{n}+\bar{m}) - \overline{nm}(\bar{k}+\bar{l})}{\overline{kl}-\overline{nm}} = \frac{\overline{kln}}{\overline{kl}-\overline{nm}} + \frac{\overline{klm}}{\overline{kl}-\overline{nm}} - \frac{\overline{knm}}{\overline{kl}-\overline{nm}} - \frac{\overline{lnm}}{\overline{kl}-\overline{nm}} =$$

$$= \frac{1}{kln(\overline{kl}-\overline{nm})} + \frac{1}{klm(\overline{kl}-\overline{nm})} - \frac{1}{knm(\overline{kl}-\overline{nm})} - \frac{1}{lnm(\overline{kl}-\overline{nm})} =$$

$$= \frac{1}{k\bar{k}l\bar{l}n - kln\bar{n}\bar{m}} + \frac{1}{k\bar{k}l\bar{l}m - klm\bar{m}\bar{n}} - \frac{1}{k\bar{k}nm\bar{l} - kn\bar{n}m\bar{m}} - \frac{1}{l\bar{l}nm\bar{k} - ln\bar{n}m\bar{m}}$$

Mivel k, l, m és n is egység komplex számok:

$$k\bar{k} = |k|^2 = l\bar{l} = |l|^2 = n\bar{n} = |n|^2 = m\bar{m} = |m|^2 = 1$$

$$\bar{s} = \frac{1}{n - kl\bar{m}} + \frac{1}{m - kl\bar{n}} - \frac{1}{nm\bar{l} - k} - \frac{1}{nm\bar{k} - l} =$$

$$= \frac{m}{mn - kl} + \frac{n}{mn - kl} - \frac{l}{mn - kl} - \frac{k}{mn - kl}$$

Tehát:

$$\bar{s} = \frac{m+n-l-k}{mn-kl}$$

Szükségünk van még $(\bar{d} - \bar{b})$-ra:

$$\bar{d} = \frac{2\overline{nm}}{\bar{n}+\bar{m}} = \frac{2}{nm(\bar{n}+\bar{m})} = \frac{2}{m+n}$$

Ugyanígy:

$$\bar{b} = \frac{2}{l+k}$$

Tehát:

$$\bar{d} - \bar{b} = \frac{2}{m+n} - \frac{2}{l+k} = \frac{2(l+k-m-n)}{(n+m)(k+l)}$$

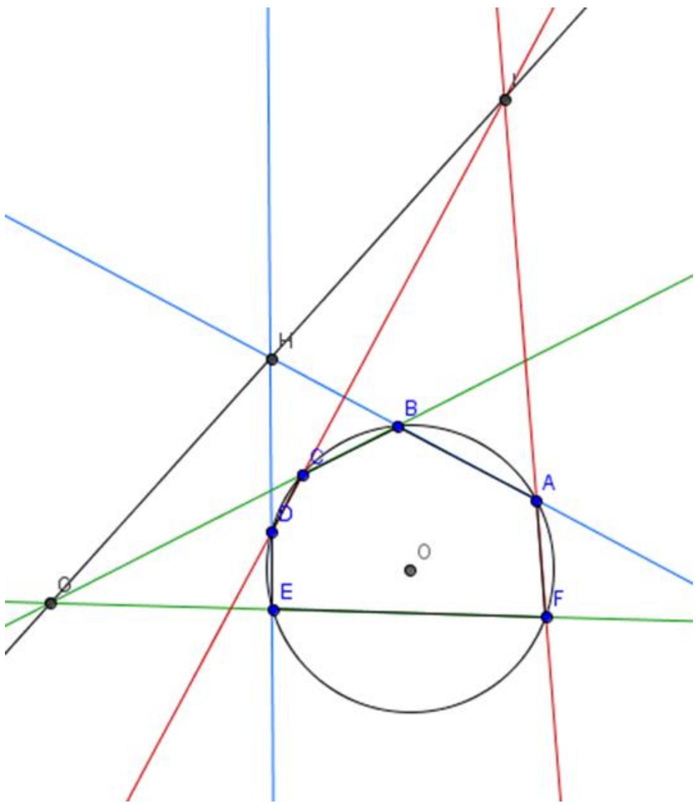
$$\frac{s-o}{\bar{s}-\bar{o}} = \frac{s}{\bar{s}} = \frac{\frac{kl(n+m)-nm(k+l)}{kl-nm}}{\frac{m+n-k-l}{nm-kl}} = \frac{kl(n+m)-nm(k+l)}{m+n-k-l}$$

$$-\frac{d-b}{\bar{d}-\bar{b}} = -\frac{\frac{2[nm(k+l)-kl(n+m)]}{(n+m)(k+l)}}{\frac{2(m+n-k-l)}{(n+m)(k+l)}} = \frac{kl(n+m)-nm(k+l)}{m+n-k-l}$$

Tehát $OS \perp BD$.

Az előző feladatok alapján a következő feladatot önálló feldolgozásra adnám föl a diákoknak:

9. Feladat: *Pascal tétele: Bizonyítsuk be, ha egy $ABCDEF$ hatszög köré kör írható, akkor $AB \cap DE$, $BC \cap EF$ és $CD \cap FA$ kollineárisak.*



Rajzoljuk a hatszöget egy origó középpontú egységkörbe.

Határozzuk meg a megfelelő húrok metszéspontjait jelentő komplex számokat: $h = AB \cap DE$, $g = BC \cap EF$ és $i = CD \cap FA$.

A metszéspontok:

$$h = \frac{ab(d+e) - de(a+b)}{ab - de}$$

$$g = \frac{bc(e+f) - ef(b+c)}{bc - ef}$$

$$i = \frac{cd(f+a) - fa(c+d)}{cd - fa}$$

A metszéspontok meghatározása után ellenőrizzük, hogy kollineárisak-e.

Akkor és csak akkor kollineárisak, ha:

$$\frac{h-i}{\bar{h}-\bar{i}}=\frac{g-i}{\bar{g}-\bar{i}}$$

Az előző feladat alapján írjuk fel $\bar{h}$, $\bar{i}$ és $\bar{g}$ számokat a megfelelő kifejezésekkel:

$$\bar{h}=\frac{a+b-d-e}{ab-de}$$

$$\bar{g}=\frac{b+c-e-f}{bc-ef}$$

$$\bar{i}=\frac{c+d-f-a}{cd-fa}$$

$$h-i=\frac{ab(d+e)-de(a+b)}{ab-de}-\frac{cd(f+a)-fa(c+d)}{cd-fa}=$$

$$=\frac{(abd+abe-ade-bde)(cd-fa)-(cdf+acd-acf-adf)(ab-de)}{(ab-de)(cd-fa)}=$$

$$=\frac{(a-d)(bcde-cdef+abcf+adef-abcd-abef)}{(ab-de)(cd-fa)}$$

$$\bar{h}-\bar{i}=\frac{a+b-d-e}{ab-de}-\frac{c+d-f-a}{cd-fa}=$$

$$=\frac{(a+b-d-e)(cd-fa)-(c+d-f-a)(ab-de)}{(ab-de)(cd-fa)}=$$

$$=\frac{(a-d)(ab+cd-af-de-bc+ef)}{(ab-de)(cd-fa)}$$

Tehát:

$$\frac{h-i}{\bar{h}-\bar{i}}=\frac{\dfrac{(a-d)(bcde-cdef+abcf+adef-abcd-abef)}{(ab-de)(cd-fa)}}{\dfrac{(a-d)(ab+cd-af-de-bc+ef)}{(ab-de)(cd-fa)}}$$

$$\frac{h-i}{\bar{h}-\bar{i}}=\frac{bcde-cdef+abcf+adef-abcd-abef}{ab+cd-af-de-bc+ef}$$

Ha ez a három komplex szám kollineáris, akkor az előbb kapott eredményt kell $\frac{g-i}{\bar{g}-\bar{i}}$-re is kapnunk. Az előző számolások alapján:

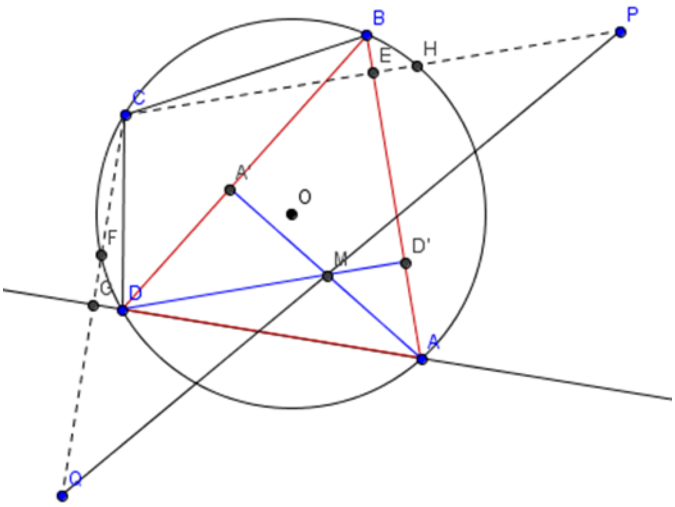
$$g - i = \frac{(c-f)(bcde - cdef + abcf + adef - abcd - abef)}{(bc - ef)(cd - fa)}$$

$$\bar{g} - \bar{\imath} = \frac{(c-f)(ab + cd - af - de - bc + ef)}{(bc - ef)(cd - fa)}$$

$$\frac{g - i}{\bar{g} - \bar{\imath}} = \frac{bcde - cdef + abcf + adef - abcd - abef}{ab + cd - af - de - bc + ef} = \frac{h - i}{\bar{h} - \bar{\imath}}$$

Tehát az I, H és G pontok kollineárisak lesznek.

10. Feladat: *Adott egy $ABCD$ húrnégyszög. A C csúcsot tükrözzük az AB és AD oldalakra, így kapjuk a P és Q pontokat. Bizonyítsuk be, hogy a PQ szakaszon rajta van Az ABD háromszög magasságpontja.*



Ismét vegyük fel az alapkört origó körüli egységkörként. Tükrözzük a C pontot az AB oldalra, így kapjuk a P pontot. A CP szakasz felezőpontja legyen E. A C pontot az AD oldalra is tükrözzük, ekkor kaptuk a Q pontot, a CQ szakasz felezőpontja pedig legyen G. Az F pont a CQ szakasz, a H pont pedig a CP szakasz egységkörrel vett metszéspontja.

Először írjuk fel a p, q és m komplex számokat az a, b, c és d komplex számokkal kifejezve, majd ellenőrizzük, hogy a három pont kollineáris-e.

Mivel E felezőpontja a CP szakasznak:

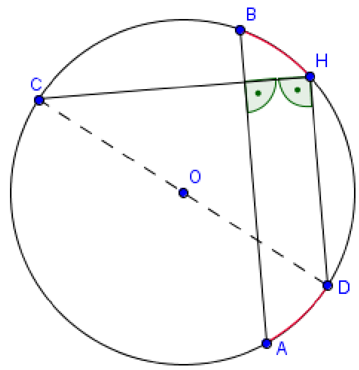
$$2(e - c) = p - c$$

$$p = 2e - c$$

Határozzuk meg az e komplex számot, mint a CH és AB húrok metszéspontja. Mutassuk meg, hogy ez a két húr merőleges egymásra, ezért

$$ab = -ch$$

Tükrözzük ugyanis a C pontot az origóra, így kapjuk a D pontot, melynek helyvektora $-c$ lesz. Ekkor az AB és $-CH$ húrok párhuzamosak. Mivel a HB és AD körívek egyenlők



$$\frac{h}{b} = \frac{a}{-c}$$

$$-ch = ab$$

Térjünk vissza az eredeti feladatra

$$ab = -ch$$

$$h = -\frac{ab}{c}$$

$$e = \frac{ab(c+h) - ch(a+b)}{ab - ch}$$

h helyére $-\frac{ab}{c}$-t beírva:

$$e = \frac{ab\left(c - \frac{ab}{c}\right) + c\frac{ab}{c}(a+b)}{ab + c\frac{ab}{c}} = \frac{ab\left(c - \frac{ab}{c} + a + b\right)}{2ab} = \frac{1}{2}\left(c - \frac{ab}{c} + a + b\right)$$

Ha ezt átalakítjuk:

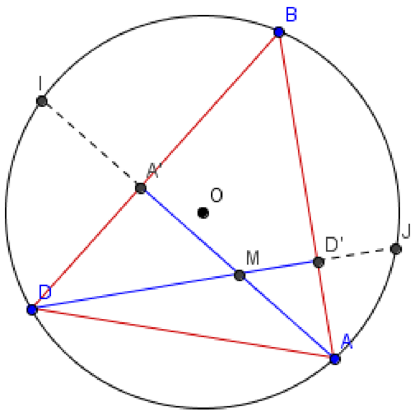
$$2e = a + b + c - \frac{ab}{c}$$

$$2e - c = a + b - \frac{ab}{c} = p$$

Ugyanígy kapjuk meg a q komplex számot is az f és g komplex számok segítségével:

$$q = 2g - c = a + d - \frac{ad}{c}$$

Az ABD háromszög magasságpontja, az a, b és d komplex számokkal kifejezve:



Írjuk fel az m komplex számot a DJ és AI húrok metszéspontjaként.

Mint az előbb:

$$j = -\frac{ab}{d}$$

és

$$i = -\frac{bd}{a}$$

Ekkor a DJ és AI húrok metszéspontja:

$$m = \frac{-a\frac{bd}{a}\left(d - \frac{ab}{d}\right) + d\frac{ab}{d}\left(a - \frac{bd}{a}\right)}{-a\frac{bd}{a} + d\frac{ab}{d}} = \frac{-bd\left(d - \frac{ab}{d}\right) + ab\left(a - \frac{bd}{a}\right)}{-bd + ab} =$$

$$= \frac{-bd^2 + ab^2 + a^2b - b^2d}{ab - bd} = \frac{b(a^2 - d^2 + ab - bd)}{ab - bd} = \frac{b[(a-d)(a+d) + b(a-d)]}{b(a-d)} =$$

$$= \frac{b(a-d)(a+d+b)}{b(a-d)}$$

$$m = a + b + d$$

Már csak azt kell ellenőriznünk, hogy a p, q és m komplex számok kollineárisak-e.

Kell:

$$\frac{q - p}{\bar{q} - \bar{p}} = \frac{m - p}{\bar{m} - \bar{p}}$$

$$q - p = a + d - \frac{ad}{c} - a - b + \frac{ab}{c} = \frac{dc - ad - bc + ab}{c} = \frac{d(c-a) - b(c-a)}{c}$$

$$q - p = \frac{(d-b)(c-a)}{c}$$

$$\bar{q} - \bar{p} = \frac{\overline{dc} - \overline{ad} - \overline{bc} + \overline{ab}}{\bar{c}} = \frac{1}{d} - \frac{c}{ad} - \frac{1}{b} + \frac{c}{ab} = \frac{ab - cb - ad + cd}{abd} =$$

$$= \frac{b(a-c) - d(a-c)}{abd} = \frac{(b-d)(a-c)}{abd}$$

Ekkor:

$$\frac{q-p}{\bar{q}-\bar{p}}=\frac{\frac{(d-b)(c-a)}{c}}{\frac{(b-d)(a-c)}{abd}}=\frac{abd}{c}$$

Az egyenlet jobb oldala:

$$m-p=a+b+d-a-b+\frac{ab}{c}=d+\frac{ab}{c}=\frac{dc+ab}{c}$$

$$\bar{m}-\bar{p}=\bar{d}+\frac{\overline{ab}}{\bar{c}}=\frac{1}{d}+\frac{c}{ab}=\frac{ab+cd}{abd}$$

$$\frac{m-p}{\bar{m}-\bar{p}}=\frac{\frac{dc+ab}{c}}{\frac{ab+cd}{abd}}=\frac{abd}{c}$$

Tehát a magasságpont valamint a P és Q pontok kollineárisak.

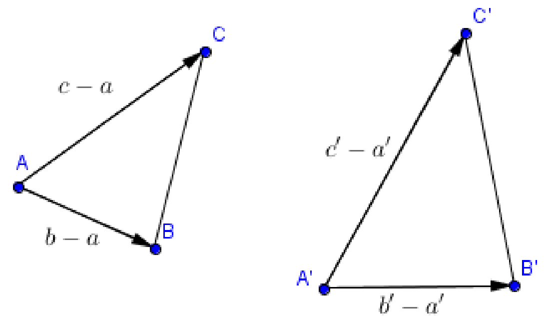
Hasonlóság

A hasonlóságot a diákok már általános iskolában is tanulják, nézzük meg ezt a témakört komplex számok alkalmazásával. A komplex számok segítségével a hasonlóságot kifejezhetjük komplex számok hányadosaként, így nem kell aránypárokat felírnunk.

6. Tétel: *Az ABC és $A'B'C'$ háromszögek pontosan akkor hasonlók, ha*

$$\frac{b' - a}{c' - a'} = \frac{b - a}{c - a}$$

Bizonyítás:



A két háromszög pontosan akkor lesz hasonló, ha $(c - a)$-t ugyanaz a forgatva nyújtás viszi $(b - a)$-ba, mint $(c' - a')$-t $(b' - a')$-be. A forgatva nyújtás egy z komplex számmal való szorzás.

$$z(c - a) = b - a$$

$$z = \frac{b - a}{c - a}$$

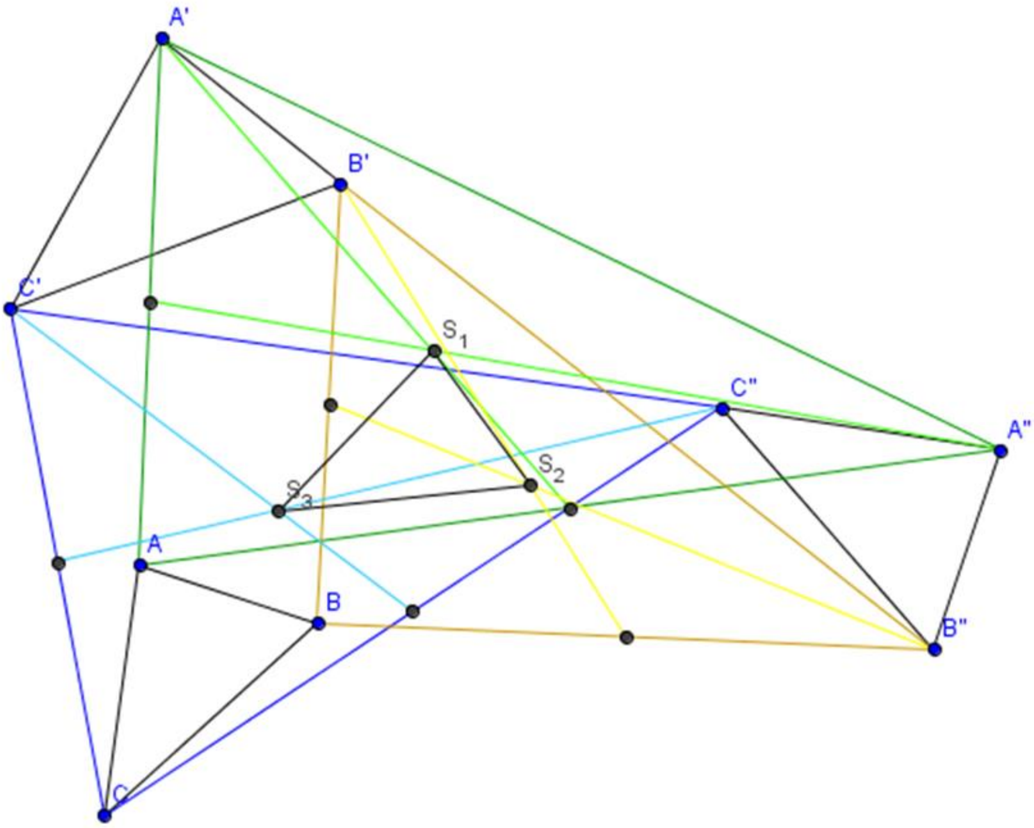
$$z(c' - a') = b' - a'$$

$$z = \frac{b' - a'}{c' - a'}$$

Ekkor:

$$z = \frac{b - a}{c - a} = \frac{b' - a'}{c' - a'}$$

11. Feladat: *Legyenek az ABC, $A'B'C'$, $A''B''C''$ egyező körüljárású hasonló háromszögek. Bizonyítsuk be, hogy az $AA'A''$, $BB'B''$, $CC'C''$ háromszögek S_1, S_2, S_3 súlypontjai az eredetiekhez hasonló háromszög csúcsai.*



Az ABC, $A'B'C'$ és $A''B''C''$ háromszögek hasonlóak, tehát

$$z(c-a)=b-a$$

$$z(c'-a')=b'-a'$$

$$z(c''-a'')=b''-a''$$

Az $AA'A''$ háromszög súlypontja:

$$s_1=\frac{a+a'+a''}{3}$$

A $BB'B''$ háromszög súlypontja:

$$s_2=\frac{b+b'+b''}{3}$$

A $CC'C''$ háromszög súlypontja:

$$s_3 = \frac{c + c' + c''}{3}$$

Az $S_1S_2S_3$ háromszög pontosan akkor hasonló az eredeti háromszögekhez, ha

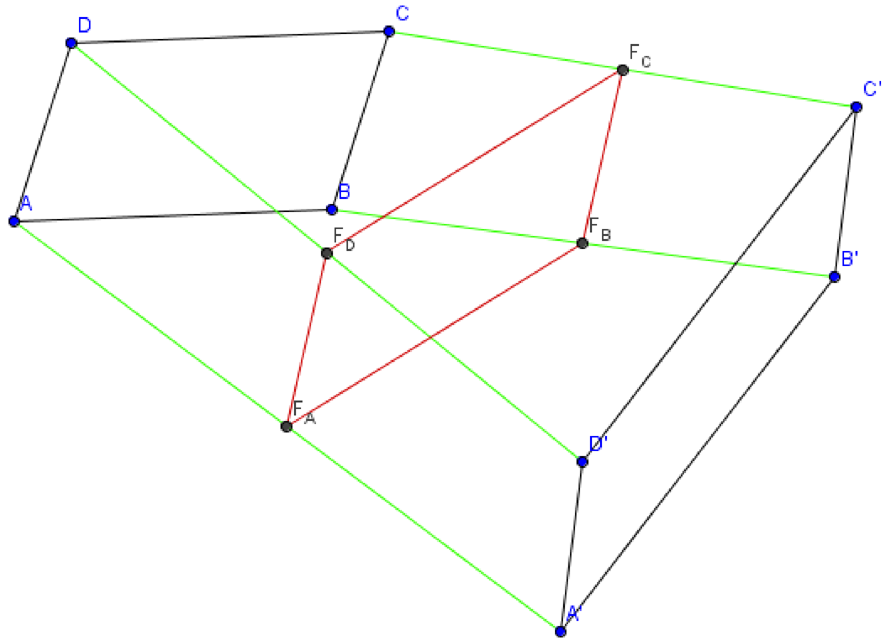
$$z(s_3 - s_1) = s_2 - s_1$$

Ez számolással ellenőrizhető.

$$z(s_3 - s_1) = z\left(\frac{c + c' + c''}{3} - \frac{a + a' + a''}{3}\right) = \frac{z(c - a) + z(c' - a') + z(c'' - a'')}{3} =$$

$$= \frac{b - a + b' - a' + b'' - a''}{3} = \frac{b + b' + b''}{3} - \frac{a + a' + a''}{3} = s_2 - s_1$$

12. Feladat: *Az $ABCD$ és $A'B'C'D'$ két tetszőleges paralelogramma. Bizonyítsuk be, hogy az AA', BB', CC', DD' szakaszok felezőpontjai szintén paralelogramma csúcsai.*



Írjuk fel az AA', BB', CC', DD' szakaszok felezőpontjait az a, a', b, b', c, c', d, d' komplex számokkal kifejezve:

$$f_A = \frac{a + a'}{2} \qquad f_C = \frac{c + c'}{2}$$

$$f_B = \frac{b + b'}{2} \qquad f_D = \frac{d + d'}{2}$$

Mivel $ABCD$ és $A'B'C'D'$ paralelogramma $b - a = c - d$ és $b' - a' = c' - d'$.

Az $F_A F_B F_C F_D$ pontosan akkor paralelogramma, ha $f_B - f_A = f_C - f_D$.

$$f_B - f_A = \frac{b + b'}{2} - \frac{a + a'}{2} = \frac{b - a + b' - a'}{2} = \frac{c - d + c' - d'}{2} = \frac{c + c'}{2} - \frac{d + d'}{2} = f_C - f_D$$

Tehát a AA', BB', CC', DD' szakaszok felezőpontjai tényleg egy paralelogramma csúcsai.

Irodalomjegyzék

[1.] Kiss Emil: Bevezetés az algebrába, Typotex, 2007

[2.] Marko Radovanović: Complex numbers in geometry http://hoaxung.files.wordpress.com/2010/04/marko-radovanovic-complex-numbers-in-geometry.pdf

[3.] Reiman István: A geometria és határterületei, Gondolat Könyvkiadó, 1986

[4.] Reiman István: Fejezetek az elemi geometriából, Typotex, 2009

[5.] Reiman István: Geometriai feladatok megoldása a komplex számsíkon, Tankönyvkiadó Vállalat, 1957

[6.] Yi Sun: Complex numbers in geometry http://web.mit.edu/yisun/www/notes/complex.pdf

[7.] Szele Tibor: Bevezetés az algebrába, Tankönyvkiadó Vállalat, 1977