Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Ádám Réka
Matematika BSc
Matematika tanári szakirány

Lineáris algebra néhány alkalmazása
kombinatorikai, geometriai problémák

Szakdolgozat

Témavezető: Hermann Péter
Algebra és Számelmélet Tanszék

Budapest, 2015.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném kifejezni hálámat témavezetőmnek, Hermann Péternek a sok segítségért, melyet e szakdolgozatban szereplő feladatok megoldásához adott, valamint az egyes problémák körüljárásába fektetett időt és energiát, melyek nélkül e szakdolgozat nem jöhetett volna létre.

Tartalomjegyzék

List of Figures

Bevezetés

Szakdolgozatom témája különböző lineáris algebrai módszerek alkalmazása néhány kombinatorikai és geometriai problémában. Olyan feladatokat, problémákat tárgyal, melyek megoldása pusztán kombinatorikai vagy geometriai eszközökkel igencsak nehézkes lenne, ám néhány lineáris algebrai ismeretre alapozva szép és elegáns megoldások adódhatnak.

A dolgozat Babai László és Frankl Péter ebben a témában írt könyve [1] alapján készült, ennek bizonyos fejezeteit dolgozza fel és értelmezi. Az itt ismertetett feladatok és megoldásaik, az egyes állítások, tételek és bizonyításaik nagy többségében e könyv fejezeteiben fellelhetőek. Néhány feladat megoldása a könyv által ismertetett bizonyítások mintájára született, vagy ahhoz fűzött javaslatok alapján készült. Munkám során nagy segítségemre voltak az egyes feladatokhoz tett útmutatások, segítségek, valamint a könyv végén található megoldások.

Így hát köszönettel tartozom az [1] könyv szerzőinek is, munkájukban az egyes témakörök izgalmas felvezetése, a problémák frappáns és olykor humoros megfogalmazása nagyban hozzájárult témaválasztásomhoz és segítette munkámat.

A felhasznált irodalomban szereplő elnevezések magyyar megfelelői sok esetben [2] forrásban megjelölt helyről származnak.

Szakdolgozatomban három fő részből áll, amelyek három témában elmélyedve mutatják be egy-egy probléma lineáris algebrai úton való megközelítését.

1. Klubalapítás városokban, véges lakosszámra, különböző szabályrendszerek mellett

Ebben a fejezetben olyan városok klubalapításaival foglalkozom, melyek véges számú lakossal bírnak.

A különböző városokban különböző szabályrendszereket hoztak a klubalapításokra, melyekkel korlátozni kívánták a klubok elszaporodását.

A klubok különböző méretűek lehetnek, a szabályok azonban bizonyos feltételeket szabnak a megalapított klubok közös tagjainak számára, valamint az egyes klubok tagjainak számára is.

Vajon egy adott szabályrendszer mellett akárhány klub alapítható, vagy sikerül ily módon korlátozni a bejegyezhető klubok számát?

Maximálisan hány klubból állhat egy, a szabályoknak eleget tevő klubrendszer?

A fejezet fő témája e kérdés megválaszolása az egyes esetekben, valamint további észrevételek a feltételeknek megfelelő klubrendszerekről, azok lehetséges méretéről.

A klubok a városlakók halmazának részhalmazai. A megalapított klubok összessége, vagyis egy klubrendszer tehát egy véges részhalmazokból álló halmazrendszer. Így tulajdonképpen olyan véges halmazrendszereket vizsgálok, melyeknek a metszeteire és az egyes halmazok méretére vonatkoznak a feltételek.

A klubalapításokra vonatkozó feltételek algebrai nyelven történő megfogalmazása, vektorterekben való gondolkodás és vizsgálódás segít a kérdés megválaszolásában, melyben kulcsszerepet játszik a lineáris függetlenség fogalma, ez vezet a felső korlát meghatározásához.

1.1. Klubok maximális száma Páratlanvárosban, Páratlanváros általánosítása és módosításai

1.1.1. Páratlanváros

Páratlanváros egy olyan város, amelyben a klubalapításra vonatkozó szabályok a klubok tagszámának paritására, valamint a közös tagok számának paritására adott feltételeket a városi tanács a következőképpen:

(PT1) Minden klubnak páratlan sok tagja van.

(PT2) Bármely két klubnak páros sok közös tagja van.

Páratlanváros e két szabályából már következik, hogy nincs két olyan klub, melynek minden tagja azonos.

Ez a szabályrendszer kizárja az üres klubot, vagyis olyan klub alapítását, melynek egyetlenegy tagja sincs, kivéve abban az egy esetben, ha csak egy üres klub létezik, hiszen minden más esetben ennek a klubnak bármely másikkal 0, azaz páros sok közös taja lenne.

Elsőként Páratlanváros szabályrendszerével foglalkozom, majd e szabályrendszer lehetséges általánosabb formáival, illetve módosításaival.

A következő feladatokban tulajdonképpen egy felsőkorlátot adok a klubok maximális számára. Az, hogy ez a korlát mikor biztosan éles, tehát mikor adja meg a tényleges maximális számot, egy későbbi alfejezet témája.

1. Feladat. *Legfeljebb hány klubot alakíthatnak Páratlanváros lakói?*

Megoldás. Páratlanváros feltételei mellett legfeljebb annyi klub alakítható, amennyi a lakosok száma.

Erre négyféle bizonyítás fogok bemutatni, alapvetően két különböző lineáris algebrai módszer segítségével.

1.1. Bizonyítás. Jelölje n Páratlanváros lakóinak számát, m pedig a klubok számát. Számozzuk meg a lakókat illetve a klubokat is. Jelölöm az embereket a sorszámukkal $1, \dots, n$-ig, a klubokra, mint a lakók részhalmazait pedig az $A_1, \dots A_m$ jelölést használom.

Legyen a_i vektor az A_i klub karakterisztikus vektora, $\mathbb{F}_2^n$-beli vektor. Ez a következőt jelenti az a_i vektor j-edik koordinátájára nézve:

$$a_i^j = \begin{cases} 1 & ha\ j \in A_i \\ 0 & ha\ j \notin A_i \end{cases} \tag{1.1.1}$$

Állítás: Ezek a vektorok lineárisan függetlenek $\mathbb{F}_2$ felett.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{F}_2$, amelyekre:

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i = \underline{0} \tag{1.1.2}$$

Ha az $a_i \cdot a_j$ skalárszorzatot vizsgáljuk $\mathbb{F}_2$ felett, akkor (PT1) és (PT2) feltételek pontosan a következőt jelentik:

$$a_i \cdot a_j = \begin{cases} 1 & ha\ i = j \\ 0 & ha\ i \neq j, \end{cases} \tag{1.1.3}$$

ezért ha az (1.1.2) egyenlet mindkét oldalát megszorozzuk skalárisan egy tetszőleges a_i vektorra, akkor a

$$\lambda_i \cdot 1 = 0$$

egyenletet kapjuk. Mivel ezt minden $1 \leq i \leq n$ indexre megtehetjük, ezért minden i indexre $\lambda_i = 0$ elmondható. Vagyis az (1.1.2) egyenletben a triviális lineáris kombinációból indultunk ki. Tehát a_i vektorok függetlenek $\mathbb{F}_2$ felett, mert csak a triviális lineáris kombináció ad 0-t. [1]

□

Mivel az m darab klubhoz tartozó m darab karakterisztikus vektor független $\mathbb{F}_2$ felett, ezért kevesebb van belőlük, mint $\dim \mathbb{F}_2^n$, vagyis $m \leq n$.

1.2. Bizonyítás. A feladat megoldásához meglepő módon kevesebbet is elég belátnunk, mégpedig azt, hogy a_i vektorok lineráisan függetlenek $\mathbb{Q}$ felett.

Ez ekvivalens azzal, hogy a vektorok lineárisan függetlenek $\mathbb{Z}$ felett. Tehát most legyen $\forall i$-re $\lambda_i \in \mathbb{Z}$. Ezekre az új együtthatókkal írjuk most fel a kiinduló az (1.1.2) egyenletet:

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i = \underline{0}$$

Az $a_i \cdot a_j$ szorzatot most $\mathbb{Q}$ vagy $\mathbb{Z}$ felett tekintve csak annyit mondhatunk, hogy:

$$a_i \cdot a_j = \begin{cases} \textit{páratlan}, & \textit{ha } i = j \\ \textit{páros}, & \textit{ha } i \neq j, \end{cases} \tag{1.1.4}$$

ahol $a_i \cdot a_j \in \mathbb{N}$.

Ezért ha az (1.1.2) egyenlet mindkét oldalát megszorozzuk egy tetszőleges a_i vektorral, akkor azt az egyenletet kapjuk, hogy:

$$\lambda_i \underbrace{a_i \cdot a_i}_{\text{páratlan}} + \underbrace{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \lambda_j \underbrace{a_j \cdot a_i}_{\text{páros}}}_{\text{páros}} = 0 \tag{1.1.5}$$

Mivel a 0 páros, ezért a fenti egyenletből kapjuk, hogy λ_i mindenképp páros kell, hogy legyen.

[1] A triviális lineáris kombináció, lineáris függetlenség definíciója, és más lineáris algebrai definíciók, melyeket később használok megtalálhatók: [1] [2.1.,2.2.] fejezetekben, vagy [4]-ben is.

A fenti gondolatmenet minden i-re végigvihető, tehát minden $1 \leq i \leq n$ indexre λ_i páros. Viszont ekkor az (1.1.2) egyenlet bal oldalán álló lineáris kombinációból, amiben most egészek az együtthatók, kiemelhetjük 2 legnagyobb hatványát (ezt a legnagyobb hatványkitevőt k_{max} jelöli), ami még osztója minden λ_i-nek. Ez a k_{max} hatványkitevő létezik és pozitív, ha nem minden együttható 0:

$$2^{k_{max}} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \hat{\lambda}_i a_i \right)}_{U} = \underline{0} \text{ ahol } \hat{\lambda}_i = \frac{\lambda_i}{2^{k_{max}}} \tag{1.1.6}$$

Ekkor $U = \underline{0}$. U egy új lineáris kombináció, és: $\exists i$, hogy $\hat{\lambda}_i$ nem osztható 2-vel, hiszen a lehető legnagyobb hatványon kiemeltük a 2-t. Erről viszont már beláttuk, hogy ez nem lehet, hiszen minden együttható páros. Tehát csak akkor nem jutunk ellentmondásra, ha nem létezik a maximális hatványkitevő. Ez csak a triviális kombináció esetén történhet meg.

1.3. Bizonyítás. A harmadik bizonyítás egy másik módszer alkalmazásával történik. Alkossunk egy olyan A mátrixot, melynek sorvektorai a már előbb bevezetett a_i vektorok.

Vizsgáljuk az $M = A \cdot A^T$ mátrixszorzatot $\mathbb{F}_2$ felett.

$$M_{ij}{}^2 = a_i \cdot a_j$$

Az 1.1 bizonyításban kimondott az (1.1.3) feltételből adódik Páratlanvárosban, hogy $M = I_m$.

Egy M mátrix rangját $r(M)$-mel jelölöm. A továbbiakban a mátrix $\mathbb{F}_2$ feletti rangját vizsgálom.

$$m = r(I_m) = r(M) = r(A \cdot A^T) \leq \min\{r(A), r(A^T)\} \leq n \tag{1.1.7}$$

$$r(A) = r(A^T) \leq n \tag{1.1.8}$$

$\big(r(A \cdot A^T) \leq \min\{r(A), r(A^T)$ teljesül, mert $r(AB) \leq \min r(A), r(B)\big)$ [1]. 46.o.

Az (1.1.8) egyenlőtlenség onnan adódik, hogy n az oszlopok száma A-ban, ezért $r(A) \leq n$.

Tehát tényleg legfeljebb annyi klub alakítható, ahány lakosa van Páratlanvárosnak.

Észrevétel: Az előbbi okoskodással azt kaptam, hogy $r(A) = m$, hiszen $r(A) \leq m$ teljesül, mert A mátrixnak m sora van, és $r(A) \geq m$ is teljesül az (1.1.7) egyenletből adódóan. Tehát A sorai, vagyis az a_i vektorok lineárisan függetlenek $\mathbb{F}_2$ felett.

[2] M mátrix i. sorának j. eleme

1.4. Bizonyítás. A negyedik bizonyításban a harmadik bizonyítás módszerével, tehát a szorzatmátrix vizsgálatával igazolom a_i vektorok $\mathbb{Q}$ függetlenségét, egyben megkapjuk vele az $\mathbb{R}$ feletti függetlenségüket is.

Most az $M = A \cdot A^T$ mátrixról, csak annyit tudunk, hogy a főátlójában páratlan, a többi helyen pedig páros elemek állnak. (Ez (PT1) és (PT2) feltételek átfogalmazása.) Azt fogom bebizonyítani, hogy ebben az esetben is m a mátrix rangja. Ez ekvivalens azzal az állítással, hogy $\det M \neq 0$. [6]

Mivel az M mátrix $\mathbb{Q}$ és $\mathbb{R}$ felett tekintve elemenként is megegyezik, a determinánskritérium pedig mindkét esetben érvényes, ezért a bizonyítás mindkét test felett ugyanúgy szól.

$$\det M = \sum_{\sigma \in S_n} m_{1,\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot m_{n,\sigma(n)} \neq 0. \tag{1.1.9}$$

A fenti összeg minden tagja egy szorzat. Ha ennek a szorzatnak van legalább egy tagja, mely nem $m_{i,i}$, vagyis nem a főátlóbeli elem, akkor már maga a szorzat páros. Tehát az összeg minden tagja páros, kivéve a főátlóbeli elemek szorzatát. Erről azonban tudjuk, hogy páratlan, hiszen a főátlóban csak páratlan elemek állnak, tehát M determinánsa egy páratlan és még valahány páros szorzatnak az összege, ez viszont nem lehet páros, vagyis nem lehet 0 sem.

$$\begin{aligned}\det M &= \underbrace{m_{11} \cdot \ldots \cdot m_{nn}}_{\text{páratlan}} + \underbrace{\sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma \neq id}} m_{1,\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot m_{n,\sigma(n)}}_{\text{páros}} \\ &\neq \underbrace{0}_{\text{páros}}.\end{aligned} \tag{1.1.10}$$

1.1.2. Mod p^k város

Még általánosabb $R(S)$ szabályrendszert vezettek be **Mod S** városban, az előzőek mintájára. A klubokat A_i-vel jelölöm. A klubalakítás szabályai a következők:

(M1) $|A_i \cap A_i| \neq 0 \bmod S$

(M2) $|A_i \cap A_j| = 0 \bmod S$ ha $i \neq j$

Ez a szabályrendszer Páratlanváros szabályrendszerének általánosítása, hiszen $S = 2$ esetben pontosan Páratlanváros feltételeit kapjuk.

A célom az, hogy tetszőleges S-re felső korlátot adjak az egyszerre bejegyezhető klubok számára. Ehhez az első lépésben annyit teszek, hogy speciálisan prímhatvány lakosszám esetén megállapítom a felső korlátot.

Legyen $S = p^k$ alakú, ahol p valamilyen prímet jelöl, k egész kitevő.

2. Feladat. *Hány klub alakítható* ***Mod*** *p^k városban?*

Megoldás. Hiába nevezték át a várost, és alakították át a szabályokat, továbbra is csak legfeljebb n klub alakítható, ahol n a lakosok számát jelöli.

Legyenek a_i vektorok ismét a klubok karakterisztikus vektorai, A mátrix a szokásos módon készül.

Speciálisan $k = 1$-re elegendő az 1. feladatnak az 1.1 bizonyításában $\mathbb{F}_2$ helyett $\mathbb{F}_p$ felett tekinteni a_i vektorokat, és efelett a test felett vizsgálni lineáris függetlenségüket, illetve és az 1.3. bizonyításban pedig a $\mathbb{F}_p$ felett tekinteni a szorzatmátrix determinánsát.

Mivel a számok modulo p^k nem alkotnak testet, ezért **Mod** p^k város esetében az állítás belátásához a_i vektorok $\mathbb{Q}$ feletti függetlensének vizsgálata lesz célravezető.

Tehát a bizonyítandó állítás: a_i vektorok függetlenek $\mathbb{Q}$ felett.

2.1. Bizonyítás. A bizonyítás hasonlóan megy az 1.2 bizonyításhoz, de most a feltételek a következőképpen módosultak:

$$a_i \cdot a_j = \begin{cases} \textit{nem osztható } p^k\textit{-nal}, & \textit{ha } i = j \\ \textit{osztható } p^k\textit{-nal}, & \textit{ha } i \neq j, \end{cases} \tag{1.1.11}$$

Ezért az (1.1.5) egyenletet felírva most az alábbiakat tudjuk:

$$\lambda_i \underbrace{a_i \cdot a_i}_{\text{nem osztható } p^k\text{-nal}} + \underbrace{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \lambda_j \underbrace{a_j \cdot a_i}_{\text{osztható } p^k\text{-nal}}}_{\text{osztható } p^k\text{-nal}} = \underbrace{0}_{\text{osztható } p^k\text{-nal}} \tag{1.1.12}$$

Tehát $\lambda_i a_i \cdot a_i$-nek kell oszthatónak lennie p^k-nal, miközben tudjuk, hogy $a_i \cdot a_i$ nem osztható p^k-nal, ami másképpen azt jelenti, hogy $a_i \cdot a_i$ legfeljebb a $(k-1)$-dik hatványával osztható p-nek.

Ebből következik, hogy λ_i osztható p-vel $\forall i$-re.

Vagyis hasonlóan járhatunk el, mint az 1. feladatban, csak most p-nek azt a legnagyobb hatványát emeljük ki a lineáris kombinációból„ amit még ki tudunk, így kapunk egy új lineáris kombinációt, melynek új együtthatói közül az egyik már biztosan nem osztható p-vel, viszont a lineáris kombináció egyenlő 0-val, tehát a nemtriviális esetet kivéve ellentmondásra jutunk.

$$p^{k_{max}} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \tilde{\lambda}_i a_i \right)}_{\tilde{U}} = \underline{0} \text{ ahol } \tilde{\lambda}_i = \frac{\lambda_i}{p^{k_{max}}} \tag{1.1.13}$$

$\tilde{U}$-ban $\exists\ \tilde{\lambda}_i$, amely nem osztható p-vel, de erről már beláttuk, hogy ez nem lehet.

A triviális lineáris kombinációból nem tudjuk kiemelni $p^{k_{max}}$-ot mert nincs ilyen maximális index, ezért ilyenkor nem jutunk ellentmondásra. Ezért csak a triviális lineáris kombináció ad 0-t.

2.2. Bizonyítás. A szorzatmátrix vizsgálatának módszerével is belátható a_i vektorok $\mathbb{Q}$ feletti függetlensége, mégpedig úgy, hogy belátjuk $r(M) = m$, vagyis $det(M) \neq = 0$, de most $\mathbb{Q}$ felett kell vizsgálva a rangot és a determinánst.

Megint $k = 1$-re $\mathbb{F}_p$ felett tekintve a 3. Bizonyítás egy az egyben átvehető.

Az a_i vektorok függetlenségéhez **Mod** p^k városban azonban az M mátrixot mindenképpen $\mathbb{Q}$ (vagy $\mathbb{R}$) felett kell tekintenünk, és így kell belátni, hogy $detM \neq 0$.

Nézzük meg, p-nek hanyadik hatványa osztja biztosan a determinánst!

Jelöljük $l(i)$-vel azt a legnagyobb pozitív egészet, melyre $p^{l(i)}$ osztja m_{ii}-t (Ha ez nem 0.). A város feltételeiből tudjuk, hogy $l(i) \leq k - 1$. Ha valamelyik m_{ii}=0, akkor legyen $l(i)$=0.

Azt is tudjuk, hogy $i \neq j$-re p^k osztja m_{ij}-t.

Legyen $\sum\limits_{i=1}^{n} l(i) = L$.

Tekintsük egy adott σ permutációra az

$$m_{1,\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot m_{n,\sigma(n)} = \prod_{i=1}^{n} m_{i,\sigma(i)}$$

szorzatot. Ez M determinánsának, mint összegnek egy tagja. Ebben minden olyan i indexre, melyre $\sigma(i) = i$, $m_{i,\sigma(i)}$ osztható $p^{l(i)} - nel$, de ha $\sigma(i) \neq i$, akkor $m_{i,\sigma(i)}$ osztható p^k-nal is, ahol $k > l(i)$.

Tehát ha a szorzatnak van legalább egy eleme, legyen ez $m_{u,\sigma(u)}$, melyre $u \neq = \sigma(u)$, akkor ezt az elemet osztja p^k, ami szigorúan nagyobb $p^{l(u)}$-nál. A többi $m_{i,\sigma(i)}$ elemről most csak annyit használunk, hogy $p^{l(i)}$ őket is biztosan osztja. Ekkor tehát magát a $\prod\limits_{i=1}^{n} m_{i,\sigma(i)}$ szorzatot biztosan osztja a $p^k \cdot \prod\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq u}}^{n} p^{l(i)} = p^{L+1}$ szám.

Bár pontosan egy ilyen eleme nem lehet a szorzatnak, ha egy van, akkor kettő is, mert σ permutáció, ezért azt is mondhatnánk, hogy p^{L+2} is osztja, de erre nem feltétlenül van szükségünk a bizonyításhoz.

Ha mindegyik i indexre $\sigma(i) = i$, akkor a szorzatot $= p^L$ osztja, de p^{L+1} már nem. Ilyen permutáció csak egy van, az identitás.

Tehát a (4) egyenlet a következőképpen módosul:

$$\det M = \underbrace{m_{11} \cdot \ldots \cdot m_{nn}}_{\text{osztható } p^L\text{-nel, de } p^{L+1}\text{-nel már nem}} \quad \underbrace{+ \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma \neq id}} m_{1,\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot m_{n,\sigma(n)}}_{\text{osztható } p^{L+1}\text{-nel}}$$
$$\neq \underbrace{0}_{\text{osztható } p^{L+1}\text{-nel}} . \tag{1.1.14}$$

A fenti egyenlet mutatja, a determináns tényleg nem lehet 0, mert két szám összege, melyek közül az egyik osztható p^{L+1}-nel, a másik pedig nem.

1.1.3. Mod S város

Visszatérek eredeti célomhoz, tetszőleges S-re keresem a felső korlátot a klubok számára, felhasználva a már megtett lépést prímhatványra.

3. Feladat. *Legfeljebb hány klub alakítható **Mod S** városban $R(S)$ szabályrendszer alatt?*

Megoldás. Tekintsük S prímtényezős felbontását: $S = \prod_{i=1}^{d} p_i^{k_i}$, amelyben p_i különböző prímeket jelöl, k_i hatványok pedig egészek.

Ekkor

$$m \leq d \cdot n,$$

ahol m szokásos módon a klubok számát, n a lakosok számát jelöli, d pedig S prímtényezős felbontásában a különböző prímosztók száma.

Bizonyítás. Vizsgáljuk megint az $M = A \cdot A^T$ szorzatmátrixot, ahol A a megszokott módon a klubok karakterisztikus vektoraiból készül.

M főtálóbeli elemeit nem osztja S, míg a főátlón kívüli elemeit igen.

M-ben a sor, illetve oszlopcserék A-ban, illetve A^T-ban való sor-, illetve oszlopcseréknek felelnek meg. Mivel az csak a klubok karakterisztikus vektorainak illetve az embereknek a sorrendjétől függ, Ezért feltehetjük, hogy M olyan, hogy $m_{11}, \ldots, m_{k_1 k_1}$ az összes olyan főátlóbeli elem, aminek $p_1^{k_1}$ nem osztója,
$m_{k_1+1}, \ldots, m_{k_2}$ a többi főátlóelem közül olyanok, hogy p_2^{k2} nem osztja, és így tovább.

Így képződnek minden i indexre a $p_i^{k_i}$-hez tartozó blokkok. A főátlóbeli elemeket az előbb ismertetett módon rendezem. így d blokk képződik.

Megjegyzés: Fontos, hogy lehet olyan elem, m_{ii}, amire több olyan $p_j^{k_j}$ is létezik, mely nem osztja. Ekkor a legelső olyan blokkba beválasztjuk, ahova beleillik. Ha j_{min} a legkisebb olyan j indexre, melyre $p_j^{k_j}$ nem osztja m_{ii} elemett, akkor m_{ii}-t beleveszem a j_{min} sorszámú blokkba.

Ekkor egy-egy $p_i^{k_i}$-hez tartozó blokk így néz ki M-ben:

$$\mathbf{M_{ii}} = \begin{pmatrix} m_{(k_{i-1}+1),(k_{i-1}+1)} & \dots & m_{1,k_i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{k_{i-1}+1,1} & \dots & m_{k_i,k_i} \end{pmatrix}$$

Az M mátrix pedig a következőképpen néz ki:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & \dots & M_{1d} \\ M_{21} & M_{22} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{d1} & \dots & \dots & M_{dd} \end{bmatrix}$$

Az M_{ij} blokkok $i \neq j$ esetén csupa S-sel osztható elemből állnak.

Ráadásul az M_{ii} blokkokban is az m_{ij} elem $i \neq j$ esetén osztható S-sel.

Mivel legfeljebb d blokk tartalmazza a főátlóbeli elemeket (azért csak legfeljebb, mert ha az említett módon készítjük el ezeket a blokkokat, lehet, hogy valamelyik üres lesz), valamint M egy $m \times m$-es mátrix, ahol m a klubok száma, ezért biztosan lesz egy olyan blokk, ami legalább $\lceil \frac{m}{d} \rceil \times \lceil \frac{m}{d} \rceil$ méretű. Feltehetjük, hogy ez a blokk M_{11}.

Mivel ez a blokk az A mátrix első k_1 sorából alkotott $\hat{A}$ részmátrixnak és $\hat{A}^T$-nak a szorzata, ezek együtt pont a **Mod** p_1^k város szabályait elégítik ki. (Ha egy városban **Mod** S szabályrendszere teljesül, akkor **Mod** p_1^k szabályrendszere is.)

Mint már láttuk, itt az a_i vektorok, mint a klubok karakterisztikus vektorai **Mod** p_1^k városban lineárisan függetlenek, ezért

$$\left\lceil \frac{m}{d} \right\rceil \leq k_1 \leq n \Rightarrow m \leq d \cdot n. \tag{1.1.15}$$

□

1.1.4. Színes és Ferde város

Színes Mod p^k városban a klubok két színűek lehetnek: pirosak vagy kékek.
A városban m piros és m kék klub van. Jelöljük őket P_i-vel, illetve K_i-vel. Viszont gyengítünk a feltételeken, és csak a különböző színhez tartozó klubok közös tagjaira adunk korlátozásokat:

(α) $|P_i \cap K_i| \neq 0 \bmod p^k$

(β) $|P_i \cap K_j| = 0 \bmod p^k$ ha $i \neq j$

Így kapjuk a **Színes Mod** p^k városban a klubalapításra vonatkozó szabályrendszert.

Nagy riválisuk a szomszéd város, **Ferde Mod** p^k város, ahol a második szabálynak egy gengébb formája van érvényben.

(α) $|P_i \cap K_i| \neq 0 \bmod p^k$

(γ) $|P_i \cap K_j| = 0 \bmod p^k$ ha $i < j$

4. Feladat. *Legfeljebb hány piros klub alakítható ebben a két városban?*

Megjegyzés: A kék és piros szín szerepe szimmetrikus **Színes Mod** p^k városban, tehát a kérdést felhetnénk a kék klubok számára vonatkozóan is. **Ferde Mod** p^k városban bár nem szimmetrikus a szerepük, de a megoldás kis módosítással ugyanúgy belátható lenne a kék klubokra is.

Megoldás. Míg **Színes Mod** p^k város szabályrendszere alatt továbbra is legfeljebb n klub alakítható, addig **Ferde Mod** p^k városban már annyira elferdítették az eredeti szabályokat, hogy nem tudjuk, fennmaradt-e ez a korlát. Csak annyit fogok belátni, hogy speciálisan $k = 1$ esetben, **Ferde Mod** p város szabályrendszerre még garantálja, hogy legfeljebb n klubot alakíthassanak lakói.

Legyenek p_i a piros klubok karakterisztikus vektorai, k_i pedig a kék kluboké. Azt fogom belátni, hogy **Színes Mod** p^k város szabályrendszerével dolgozva p_i vektorok lineárisan függetlenek $\mathbb{Q}$ felett.

Bizonyítás. Elsőként a **Színes Mod** p^k-ra vonatkozó korlátot igazolom. Tegyük fel, hogy $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{Q}$ együtthatókkal véve a p_i vektorok lineáris kombinációja a $\underline{0}$ vektor.

Hasonlóan járunk el, mint amikor az eredetei szabályrendszerben, **Mod** p^k városban bizonyítottuk a klubok karakterisztikus vektorainak függetlenségét, csak most egy tetszőleges indexű k_i vektorral szorozzuk meg az (1.1.16) egyenlet mindkét oldalát:

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i p_i = \underline{0} \tag{1.1.16}$$

A **Színes Mod** p^k város klubalakítási szabályai most a következőket garantálják:

$$p_i \cdot k_j = \begin{cases} \textit{nem osztható } p^k\textit{-nal} & \textit{ha } i = j \\ \textit{osztható } p^k\textit{-nal} & \textit{ha } i \neq j, \end{cases} \tag{1.1.17}$$

Tehát:

$$\lambda_i \underbrace{p_i \cdot k_i}_{\text{nem osztható } p^k\text{-nal}} + \underbrace{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} \lambda_j \underbrace{p_j \cdot k_i}_{\text{osztható } p^k\text{-nal}}}_{\text{osztható } p^k\text{-nal}} = \underbrace{0}_{\text{osztható } p^k\text{-nal}} \tag{1.1.18}$$

A fenti egyenletből látszik, hogy minden i indexre λ_i osztható kell legyen p-vel.

Most is elmondható, hogy ha p-nek a legnagyobb hatványát emeljük ki a lineáris kombinációból, amit ki tudunk, úgy kapunk egy új lineáris kombinációt, melynek új együtthatói közül az egyik már biztosan nem osztható p-vel, viszont a lineáris kombináció egyenlő 0-val, tehát a nemtriviális esetet kivéve ellentmondásra jutunk. A nemtriviális lineáris kombinációban minden együttható 0, ezért p-nek akárhanyadik hatványát ki tudjuk emelni az együtthatókból. Vagyis nem létezik maximális kitevő, ezért nem jutunk ellentmondásra. □

Ez az indoklás azonban nem alkalmazható ***Ferde Mod*** p^k *városban. Hol akad el ez a bizonyítás?*

Azt, hogy $p_i \cdot k_j = |P_i \cap K_j|$ osztható p^k-nal, csak $i \leq j$ esetben tudjuk, vagyis ha az (1.1.16) egyenletet k_m-mel szorozzuk meg, akkor még megkapjuk, hogy λ_m-nek oszthatónak kell lennie p-vel, mert $\forall i$re $p_i \cdot k_m$ osztható p^knal, de például k_{i-1}-re történő beszorzás után már $p_m \cdot k_{m-1}$ szorzatról nem mondhatunk semmi p^k-nal való oszthatóság szempontjából. Annyit tudunk, hogy λ_m osztható p-vel, ez még a későbbiekben fontos lesz.

Érdemes azonban megemlíteni, mint azt már a megoldásban is előrevetítettem, hogy $k = 1$-re, **Ferde Mod** p városban még igazolni tudjuk ugyanezt a korlátot, vagyis a klubok száma nem haladhatja meg a lakosok számát.

Ugyanis ekkor be tudom látni az erősebb, $\mathbb{F}_p$ feletti függetlenségét a p_i vektoroknak.

A különbség abból adódik, hogy ha $i = m$, $i = m-1$, $\ldots$ sorrendben teszem meg az (1.1.16) egyenlet k_i vektorral való beszorzását, akkor bár egy rögzített i indexre $p_j \cdot ki$ szorzatról nem tuduk semmit, ha $j > i$, de a λ_j együtthatóról már tudom, hogy p-vel osztható, mert minden i-nél nagyobb indexű együtthatóról előzőleg belátom (tulajdonképpen teljes indukcióval), hogy p-vel osztható, ugyanúgy, mint **Színes Mod** p^k város esetében. Így az (1.1.18) egyenlet a következőképpen módosul:

$$\lambda_i \underbrace{p_i \cdot k_i}_{\text{nem osztható } p\text{-vel}} + \underbrace{\sum_{\substack{j=1\\j<i}}^{m} \lambda_j \underbrace{p_j \cdot k_i}_{\text{osztható } p\text{-vel}}}_{\text{osztható } p\text{-vel}} + \underbrace{\sum_{\substack{j=1\\j>i}}^{m} \underbrace{\lambda_j}_{\text{osztható } p\text{-vel}} p_j \cdot k_i}_{\text{osztható } p\text{-vel}} = \underbrace{0}_{\text{osztható } p\text{-vel}} \tag{1.1.19}$$

Ez azt jelenti, hogy ha λ_i együtthatókat $\mathbb{F}_p$ testből választom, akkor midnegyik együttható 0 lesz. Vagyis p_n vektoroknak csak a triviális kombinációja les $\underline{0}$.

A szorzatmátrixok módszerével a fenti eredmény még látványosabb:

Legyen P a p_i, K pedig a k_i vektorokból, mint sorvektorokból képzett mátrix, ekkor a $P \cdot K^T = M$ szorzatmátrix vizsgálata az 1. feladatban szereplő szorzatmátrixhoz hasonlóan viselkedik. A szorzatmátrixot most $\mathbb{F}_p$ felett vizsgálom, tehát $M \in \mathbb{F}_p^{m\times m}$.

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{m,1} & \dots & m_{m,m} \end{pmatrix}$$

$$m_{ij} = p_i \cdot k_j = \begin{cases} \neq 0 & ha\ i = j \\ 0 & ha\ i < j, \\ nem\ tudunk\ róla\ semmit & ha\ i > j \end{cases} \tag{1.1.20}$$

M felső háromszögmátrix, ezért a determinánsa $\mathbb{F}_p$ felett sem 0, vagyis a rangja szintén $\mathbb{F}_p$ felett m.

Ez kisebb kell, hogy legyen, mint P és K rangja közül a kisebb. Ezek $m \times n$-es mátrixok, vagyis M rangja kisebb n számnál is. Tehát $m \leq n$.

Ez a feladat egy szép példát mutat arra, hogy némely esetben szükségünk van a vektorok erősebb, vagyis $\mathbb{F}_p$ feletti függetlenségének belátására.

1.1.5. Fordított Páratlanváros

5. Feladat. *Az egyhangúság vádját elkerülendő,* ***Fordított Páratlanvárosban*** *felcserélték a szabályozásokat. Szokásosan $A_1, \dots, A_m$-mel jelölöm a klubokat, mint a lakosok részhalmazait, n-nel a lakosok számát.*

Az új szabályok:

(F1) $|A_i|$ páros $\forall i$-re

(F2) $|A_i \cap A_j|$ páratlan $\forall i \neq j$-re

Az új szabályok betartásával hány klub alakítható?

Megoldás. Páratlan n esetén legfeljebb n klub alakítható, páros n esetén viszont $n-1$-re módosul a felső korlát a klubok maximális számára.

Bizonyítás. Jelöljük szokásosan a_i-vel a klubok karakterisztikus vektorait.

Állítás: (a) $\dim < a_1, a_2, \ldots, a_n > \quad \leq n-1$

Bizonyítás: Az a_i vektorok által generált altér nem lehet az egész n dimenziós tér, hiszen a $\forall \underline{v} = \sum \lambda_i a_i$-re $\sum v_i = 0$, ahol v_i a $\underline{v}$ vektor i-edik koordinátáját jelöli. Ez egy legfeljebb $n-1$ dimenziós teret jelöl ki $\mathbb{F}_2^n$-ben, hiszen például a páratlan hosszú vektorokat nem tartalmazza, ebből következik az állítás. □

Tekintsük szokásos módon A karakterisztikus vektorokból, mint sorvektorokból képzett mátrixot, és M szorzatmátrixot, mely a klubok közös elemeinek számát mutatja meg:

$$\mathbf{M} = A \cdot A^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \ldots & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

A fenti, $m \times m$-es mátrix determinánsát vizsgálom $\mathbb{F}_2$ felett.

$$\det M = [0 + (m-1) \cdot 1](0-1)^{m-1} = (m-1)(-1)^{m-1} \tag{1.1.21}$$

[5]

Ha m páros, akkor $r(M) = m$, mivel $\det M \neq 0$ $\mathbf{F}^2$ felett.

Állítás: (b) Ha m páratlan, akkor $r(M) = m - 1$.

Másképpen megfogalmazva: Ha M sorai közül az egyiket elhagyjuk, a többi $m-1$ sorvektor már lineárisan független $\mathbb{F}_2$ felett.

Bizonyítás: Indirekt. Legyenek m_i vektorok M mátrix sorvektorai, és hagyjuk el az utolsó sorvektort, m_m-et. Tegyük fel, hogy ezek összefüggőek, tehát létezik egy olyan nemtriviális lineáris kombinációja $m_1 \ldots m_{m-1}$ vektoroknak $\mathbb{F}_2$ felett, mely egyenlő a $\underline{0}$ vektorral. A nemtriviális lineáris kombináció $\mathbb{F}_2$ felett azt jelenti, hogy van legalább egy olyan i index, melyre $\lambda_i \neq 0 \pmod 2$.

$$\sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i \cdot m_i = \underline{0} \tag{1.1.22}$$

$\mathbb{F}_2$ *felett:*

$$m_i \cdot m_j = \begin{cases} m-1=0 \pmod 2, \; ha \; i=j \\ m-2=1 \pmod 2, \; ha \; i \neq j \end{cases} \tag{1.1.23}$$

hiszen az állítsban feltettük, hogy m páratlan.

Ha az 1.1.22 egyenlet mindkét oldalát megszorozzuk egy tetszőleges $1 \leq i \leq m-1$ indexű m_i-vel, akkor a következőket kapjuk:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m-1} \lambda_j \cdot m_j \cdot m_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m-1} \lambda_j = 0. \tag{1.1.24}$$

$$(\forall i) \text{ -re } 1.1.24. teljesl \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{m-1}.$$

Mivel van köztük legalább nem 0 együttható, ezért tehát egyik sem 0 (mod 2).

Ugyanakkor például $i = 1$-re:

$$\sum_{k=2}^{m-1} \lambda_i = (m-2) \cdot \lambda_1 = m-2 = 0 \bmod 2 \Rightarrow m \; páros \tag{1.1.25}$$

Kiinduló feltevésünk szerint m páratlan, tehát ellentmondásra jutottunk az összefüggőségből.

Tehát $m_1, \ldots, m_{k-1}$ sorvektorok tényleg lineárisan függetlenek $\Rightarrow r(M) = m-1$ páratlan m esetén. (A megoldásban a továbbiakban $\mathbb{F}_2$ feletti rangot értek $r(M)$ alatt.) $\square$

Térjük vissza most az eredeti feladathoz.

Összefoglalva az eddigieket:

$$(a) \Rightarrow r(A) \leq n-1, (b) \Rightarrow \begin{cases} r(M) = m, & ha \; m \; páros, \\ r(M) = m-1, & ha \; m \; páratlan \end{cases}$$

Azt is tudjuk, hogy $r(M) \leq \min(r(A), r(A^T)) = r(A)$

Tehát:

$r(M) \leq r(A) \leq n-1$

$m \leq n-1, ha \; m \; páros$

$m-1 \leq n-1 \Rightarrow m \leq n, ha \; m \; páratlan$

A fentieket összevetve $m \leq n$ mindenképpen, és $m = n$ csak akkor fordulhat elő, ha m páratlan (és ekkor n is páratlan), hiszen ha n páros és $m = n$ lenne, akkor m is páros, de akkor $m \leq n-1$ kell, hogy teljesüljön. $\square$

1.2. Klubok maximális száma Párosvárosban, maximális rendszerek

Párosváros szabályrendszere nagyon hasonló Páratlanvároséhoz, de meglepően más eredményre vezet a klubalapítások tekintetében.

Párosváros klubalapítási szabályai:

(PS1) Minden klubnak páros sok tagja van.

(PS2) Bármely két klubnak páros sok közös tagja van.

(PS3) Nincs két olyan klub, melynek minden tagja azonos.

Két fontos különbség már a szabályrendszerekből leolvasható Páratlanvároshoz képest; az egyik, hogy itt szükség van a harmadik szabályra, valamint az, hogy Párosváros szabályrendszere nem zárja ki egy üres klub bejegyzését, vagyis egy olyan klubét, aminek egyetlen egy tagja sincs.

A vizsgálódásom szempontjából a legjelentősebb különbség azonban az, hogy Párosvárosban a lakosok számától, n-től exponenciálisan függ a klubok maximális száma.

6. Feladat. *Legfeljebb hány klub alapítható párosvárosban?*

Megoldás. Párosvárosban legfeljebb $2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ klub alapítható. **(Párosváros Tétel)**

Emögött a feladat mögött meghúzódó lineáris algebrai összefüggések, állítások és bizonyítások [1] [2.3.] fejezete részletesen tárgyalja. Az itt szereplő definíciók, állítások közül fogom ismertetni a megoldáshoz feltétlenül szükségeseket.

Először szükséges, hogy kitérjek az önmerőleges altér fogalmára.

1.2.1. Definíció. *Általában egy $U \leq W$ alteret akkor hívunk önmerőlegesnek, ha van benne egy $\underline{u}$ vektor, amely önmagára merőleges.*

Egy S altér merőleges egy U altérre, ha S minden eleme merőleges U minden elemére. Jelölése: $S \perp U$

U teljesen önmerőleges, ha $U \perp U$. Ez tehát azt jelenti, hogy U-ban minden vektor merőleges minden más vektorra, és önmagára is.

Vegyünk Párosvárosban egy a szabályokat nem sértő klubrendszert. A megalakított kluboknak a karakterisztikus vektorait, mint $\mathbb{F}_2^n$-beli vektorokat! (A továbbiakban k-val jelölöm a klubok számát.)

$$S = \{a_1, \ldots, a_k\}$$

Párosváros ($PS1$) és ($PS2$) feltételeiből adódik, hogy S minden eleme merőleges S minden elemére (vagyis önmagukra is merőlegesek az elemek). Tehát: $S \perp S$. Ez azt eredményezi, hogy $S \subset S^{\perp}$, ahol $S^{\perp}$ definíció szerint: $S^{\perp} = \{x | x \perp s \ \ (\forall s \in S)\}$.

Állítás: $U = \langle S \rangle$, $S \in U \leq W$, $\dim W = n \Rightarrow U^{\perp} = S^{\perp}$

Bizonyítás: Azt tudjuk, hogy $U^{\perp} \subseteq S^{\perp}$, mert $S \subseteq U$, vagyis ha egy bővebb halmazhoz vesszük az összes rá merőleges vektort, azzal csak erősítjük a feltételeket a merőleges kiegészítő altérre, tehát egy szűkebb halmazt kapunk. Az így kapott halmaz midnen eleme biztosan merőleges volt már S minden elemére is.

Tehát már csak a következőt kell belátnunk:

$$\underline{w} \in S^{\perp} \Rightarrow \underline{w} \in U^{\perp} \tag{1.2.1}$$

Feltehetjük, hogy S véges dimenziós, hiszen a feladatokban mindig véges sok lakosú városról beszélünk, melyekben csak véges sok klubok alakíthatóak, tehát ez mindig teljesülni fog.

Legyen S egy bázisa: $s_1, \ldots, s_l$.

Ekkor tehát minden $u \in U^{\perp}$ elem felírható ezek lineáris kombinációjaként.

Azt kell belátnunk, hogy minden $u \in U^{\perp}$ vektorra w merőleges. Legyen $u = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i s_i$.

Tudjuk, hogy $w \in S^{\perp}$. Ez azt jelenti, hogy $w \cdot s = 0$ ($\forall s \in S$), vagyis speciálisan ez a báziselemekre is igaz: $w \cdot s_i = 0 (\forall s_i \in S)$

$$w \cdot \sum_{i=1}^{l} \lambda_i s_i = \sum \lambda_i \underbrace{w \cdot s_i}_{0} = \sum \lambda_i \cdot 0 = 0. \tag{1.2.2}$$

□

Állítás: Tekintsük most S által generált U alteret. ($U = \langle S \rangle$)

Ekkor $U \leq S^{\perp} = U^{\perp}$ is teljesül.

Bizonyítás:

Mivel U egy teljesen önmerőleges altér, ezért $U \leq U^{\perp}$ teljesül, hiszen $U \subseteq U^{\perp}$ és U egy altér.

□

1.2.2. Definíció. *Egy V altér nemszinguláris W vektortérben, ha $W \cap W^{\perp} \neq \underline{0}$. W tekinthető altérként, így alkalmazható rá ez a definíció.*

Állítás: Azt is tudjuk, hogy

$$\dim U + \dim U^{\perp} = n \tag{1.2.3}$$

ha U altér egy nemszinguláris térben.

A bizonyítás megtalálható: [1], Proposition: 2.30. 53-54. oldal.

Itt fontos kitérnem arra, hogy $\mathbb{F}_2^n$ egy nemszinguláris tér a szokásos skaláris szorzással, mint bilineáris függvénnyel.

Ez azt jelenti, hogy a teljes $\mathbb{F}_2^n$ térben csak a nullvektor az a vektor, ami a tér összes elemére merőleges, beleértve önmagát is. Ezt könnyen láthatjuk például úgy, hogy ömagukra csak a páros sok egyes koordinátát tartalmazó vektorok merőlegesek. Viszont ez utóbbiaknak a szokásos $e_1 = (1,0,\dots,0), e_2, \dots, e_n$ bázis valamelyik tagjával vett skaláris szorzatuk 1, kivéve a nullvektornak.

Az eddig vizsgált $U = \langle S \rangle$-re $U \leq \mathbb{F}_2^n$, ezért jogosan használjuk az (1.2.3) egyenlőséget U-ra.

Mivel az (1.2.3) és $U \leq U^{\perp}$ is teljesül, ebből pedig az következik, hogy $\dim U \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

Vagyis ez Párosvárosban azt jelenti, hogy $S \subseteq U \Rightarrow |S| \leq |U| \leq 2^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}$

7. Feladat. *Párosvárosban minden maximális (tehát nem bővíthető) klubrendszer maximális számú klubból áll.*

Megoldás. Azt fogom belátni, hogy ha Párosvárosban a klubok száma nem éri el az előbb felállított maximális korlátot, akkor még alapítható egy újabb klub, úgy, hogy továbbra sem sértjük meg Párosváros szabályait. Ez ekvivalens a feladat állításával.

Bizonyítás. Ez annak a következménye, hogy ha egy nemszinguláris térben egy teljesen önmerőleges U altér maximális, azaz nem vehető hozzá több vektor úgy, hogy továbbra is teljesen önmerőleges legyen, akkor a dimenziója szükségképpen $2^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}$.

([1] 2.3. fejezet 55. oldal)

Tegyük fel, hogy U dimenziója szigorúan kisebb, mint $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Ez másképpen úgy is felírható, hogy

$$\dim U \leq \frac{n-2}{2}$$

. Ebből az következik, hogy

$$\dim U^{\perp} \geq 2 + \dim U$$

.

Azt szeretném belátni, hogy ekkor U biztosan nem maximális, vagyis létezik egy olyan w vektor, mely hozzávehető U-hoz,úgy hogy $\langle w, U \rangle$ egy teljesen önmerőleges altér legyen. Tehát egy olyan w vektort kell találnom, melyre $w \perp U$, vagyis $w \in U^{\perp}$ és $w \perp w$ is teljesül.

Mivel $\dim U \geq \frac{n-2}{2}$, létezik két független, u és v vektor, melyeknek lineáris kombinációi nincsenek U-ban. , Ha u, vagy v önmerőleges vektor, akkor őket választom w-nek. Ha egyikük sem az, akkor $u+v$ merőleges önmagára, hiszen

$$(u+v)\cdot(u+v) = u\cdot u + v\cdot v + 2u\cdot v = 1+1+0 = 0,$$

szem előtt tartva, hogy $\mathbb{F}_2$ felett dolgozom. Tehát ekkor $w = u+v$ megfelelő lesz.

Ahhoz, hogy ebből az következzen, hogy minden olyan maximális klubrendszer karakterisztikus vektorai, melyek kielégítik Párosváros feltételeit, szükségképpen $2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ elemű halmaz (S), még be kell látnom, hogy minden maximális S egy altere $\mathbb{F}_2$-nek.

Másképpen megfogalmazva:

Állítás: Ha S egy Párosváros szabályrendszerének eleget tevő klubrendszerhez tartozó klubok karakterisztikus vektorainak halmaza, akkor $U = \langle S \rangle$ is.

Bizonyítás: Ha $U = S$, akkor természetesen teljesül az állítás. Ezért feltehető, hogy $U \neq S$.

Vegyük U egy S-beli elemekből álló bázisát, a báiselemeket jelölje sorra: $s_1, \ldots, s_l$. (Ilyen biztosan van, hiszen $U = \langle S \rangle$.

Egyrészt, ha veszünk egy $s = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i s_i$ vektort, mely U-beli, de nem S-beli, akkor ez a vektor minden S-beli vektorra merőleges lesz.

Ehhez elég belátni, hogy a báziselemekre merőleges, hiszen akkor a skaláris szorzat linearitása miatt minden S-beli elemre merőleges.

Vegyünk egy tetszőleges s_j báziselemet.

$$\left(\sum_{i=1}^{l} \lambda_i s_i\right) \cdot s_j = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \cdot \underbrace{s_i \cdot s_j}_{\substack{0 \\ \forall i,j\text{-re} \\ \text{Párosváros} \\ \text{feltételei miatt}}} = 0 \tag{1.2.4}$$

Másrészt, ez az s vektor merőleges lesz önmagára is, hiszen ő maga is a báziselemek lineáris kombinációja, ha ezekre merőleges, akkor önmagára is merőleges.

Tehát beláttam az állítást. $\square$

Így tehát ha adott egy klubrendszer, mely eleget tesz Párosváros szabályainak, és több klub már nem alapítható az eddig bejegyzett klubok megőrzésével, akkor szükségképpen $2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ klubból áll a rendszer. $\square$

Észrevétel: Ebből tulajdonképpen azt is megkaptam, hogy ha létezik Párosvárosban, n lakosra egy, a szabályoknak eleget tevő klubrendszer, akkor a klubok számára felső korlát egyben a maximális szám is, hiszen ezt a rendszert kibővítve megkapom a korlát élességére vonatkozó példát.

A következő alfejezet konstrukciója azt is igazolni fogja, hogy midnig létezik ilyen rendszer.

Ezzel ellentétben Páratlanvárosban ugyanez nem igaz. Páratlanvárosban a maximálisan bejegyezhető klubok száma n, megadható azonban olyan n-nél kevesebb klubból álló rendszer, melyhez már nem vehető hozzá még több klub. ♦

8. Feladat. *Minden* $0 \leq t \leq \frac{n-1}{2}$ *egészhez megadható* $n - 2t$ *klubból álló maximális rendszer Páratlanvárosban.*

Bizonyítás.

Rögzítsük t egész számot a feladatban meghatározott kereteken belül.

Páratlanváros n lakosát fogjuk beosztani $n-2t$ klubba úgy, hogy mindegyik klubnak páratlan sok tagja legyen. Ekkor mivel diszjunktak a klubok, páros, azaz 0 sok közös tagja van bármely kettőnek, egy adott klubhoz pedig páratlan sok tag tartozik, hiszen $n-2t$ páratlan. Tehát ez egy jó klubrendszer lesz n lakosú Páratlanvárosban.

Ezt a beosztást úgy készítjük el, hogy vesszük azt az alaphelyzetet, amikor n klub van, mindegyikben $1-1$ különböző ember. Ezután párosával megszüntetjük a klubokat és a klub nélkül maradt lakosokat (így szintén párosával) az első klubba osztjuk be. Így az első klubnak $2t+1$ lakosa lesz és $n-2t$ klub marad. Ez egészen addig működik, ameddig még nem szüntettük meg az első klubot, ez indokolja a felső korlátot t-re.

Mivel így minden klubnak továbbra is 1 tagja maradt, kivéve az első klubnak, melynek $2t+1$, és továbbra is diszjunktak ezek a klubok, tehát Páratlanváros szabályainak megfelelő klubrendszert alkotnak.

A klubrendszer maximális is, azaz nem vehetünk hozzá már több klubot. Ha egy új klubot alapítanának a lakók, annak páros sok közös tagja lenne minden klubbal, ezért az egyszemélyes klubokból nem vehetünk bele embereket. Tehát az új klub tagjai csak az első klub tagjai közül kerülhetnének ki, hiszen már minden ember tagja már egy klubnak. Az új klubnak Páratlanváros szabályainak értelmében azonban páratlan sok tagot kell bejegyeznie, tehát az első klubból páratlan sok tagot kéne belevennünk, ekkor azonban páratlan sok közös tagja kéne, hogy legyen az első klubbal.

□

9. Feladat. ***Erős Párosváros Tétel*** *(E.R. Berlekamp, 1969; J.E.Graver, 1975) Párosvárosban úgy döntött a városi tanács, hogy az első szabályt, (PS1) feltétel elhagyják a klubalakításokra vonatkozóan.*

Mint kiderült ezzel nem kockáztatták jelentős mértékben a klubok elszaporodását, mert nagyságrendileg nem növekedett a megalakítható klubok maximális száma. Bizonyítsuk be, hogy így legfeljebb $2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + \epsilon$ *klub alakítható, ahol* $\epsilon = \begin{cases} 0 & \text{ha } n \text{ páros} \\ 1 & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases}$

Megjegyzés: Az így kapott egyetlen szabállyal bíró várost elnevezem **Félig Párosvárosnak**.

Bizonyítás. Mondhatnánk azt is, hogy az adott feltétel elhagyásával nem köteleztük el magunkat, hogy Páros, vagy Páratlanváros szabályait szeretnénk bevezetni. A klubok lehetnek páratlan vagy páros sok tagúak is. Kézenfekvőnek tűnik hát az az ötlet, hogy osszuk a klubokat, és ennek megfelelően azok karakterisztikus vektorait két halmazba, az egyikbe a páros tagúakat, másikba a páratlan tagúakat.

Legyen S_0 a páros tagot számláló klubok karakterisztikus vektorainak halmaza, S_1 pedig a páratlanoké . Ezek diszjunktak, és $S_0 \cup S_1 = S$, ahol S egy a feltételeket kielégítő klubrendszer összes klubjának karakterisztikus vektorát tartalmazza. S maximális méretét keressük.

S_0-on belüli vektorokhoz tartozó klubokra teljesülnek Párosváros feltételei, S_1 klubjaira pedig Páratlanváros feltételei (utóbbi esetben a harmadik feltétel elhagyható, mert már következik abból, hogy minden klub páratlan tagot számlál, közös tagjaiknak a száma viszont páros).

Legyen $U_0 = \langle S_0 \rangle$ és $U_1 = \langle S_1 \rangle$, továbbá $\dim U_0 = n_0$, valamint $\dim U_1 = n_1$.

Tehát:

$$|S_0| \leq 2^{\lfloor \frac{n_0}{2} \rfloor}$$

$$|S_1| \leq n_1$$

Állítás: U_1 nemszinguláris.

Bizonyítás:

$$U_1 \text{ nemszinguláris} \overset{def}{\Leftrightarrow} U_1 \cap U_1^{\perp} = \underline{0}$$

Indirekt.

Tegyük fel, hogy $\exists\ s \neq \underline{0}$ vektor, hogy $s \in U_1 \cap U_1^{\perp}$, vagyis $s \in U_1$ és $s \in U_1^{\perp}$.

Vegyük U_1 egy S_1-beli elemekből álló bázisát, a báziselemeket jelölje sorra: $s_1, \ldots, s_d$. (Ilyen biztosan van, hiszen $U_1 = \langle S_1 \rangle$.

Ekkor

$$s = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i s_i \ \ (\forall i\ \lambda_i \in \mathbb{F}_2^n)$$

alakban írható fel s, mert egy $\mathbb{F}_2^n$ vektortérben dolgozunk.

Biztosan létezik legalább egy olyan s_i, melynek az együtthatója, $\lambda_i \neq 0$, szintén $\mathbb{F}_2^n$ felett értelmezve. Feltehetjük, hogy ez s_1 vektor, tehát $\lambda_1 \neq 0$.

$$s \in U_1 \Rightarrow s = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i s_i$$

$$s \in U_1^{\perp} \Rightarrow s \perp s_1 \Leftrightarrow s \cdot s_1 = 0$$

Mivel s_1 egy S_1-beli vektor, ahol teljesülnek Páratlanváros feltételei, ezért:

$$s_1 \cdot s_j = \begin{cases} 1 & ha\ j = 1 \\ 0 & ha\ j \neq 1. \end{cases} \tag{1.2.5}$$

$$0 = s \cdot s_1 = \left(\sum_{i=1}^{d} \lambda_i s_i \right) \cdot s_1 = \lambda_1 \underbrace{s_1 \cdot s_1}_{1} + \sum_{i=2}^{d} \lambda_i \underbrace{s_i \cdot s_1}_{0} = 1. \tag{1.2.6}$$

Ellentmondásra jutottunk, hiszen $\lambda_1 \neq 0$. $\square$

Mivel S_0 minden vektora merőleges S_1 minden vektorára, hiszen a különböző vektorok merőlegességét, mint feltételt nem hagytuk el,

$$S_0 \perp S_1 \Rightarrow U_0 \perp S_1 \Rightarrow U_0 \subseteq U_1^{\perp} = S_1^{\perp}$$

.

Ezt összevetve az előző állítással, arra a következtetésre jutottunk, hogy $U_0 \cap U_1 = \underline{0}$.

Megállapíthatjuk tehát, hogy:

$$\dim(U_1 + U_0) = n_1 + n_0$$

. $U_0 \perp U_0, U_0 \perp U_1 \Rightarrow$

$$U_0 + U_1 \leq U_0^{\perp} \tag{1.2.7}$$

$$\Downarrow \tag{1.2.8}$$

$$n_0 + n_1 \leq n - n_0 \tag{1.2.9}$$

$$n_0 \leq \left\lfloor \frac{n - n_1}{2} \right\rfloor \tag{1.2.10}$$

$$|S| = |S_1| + |S_0| \leq n_1 + 2^{n_0} \leq n_1 + 2^{\left\lfloor \frac{n-n_1}{2} \right\rfloor} \leq 2^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} + \epsilon. \tag{1.2.11}$$

Megjegyzés: S_1 Páratlanváros szabályait kelégíti, azt pedig már beláttuk, hogy ekkor a karakterisztikus vektorok lineárisan függyetlenek. Mivel $S_1 \subseteq U_1$ és $\dim U_1 = n_1$, ezért $|S_1| \leq n_1$.

$|S_0| \leq n_0$ pedig azért teljesül, mert $S_0 \subseteq U_0$ és $\dim U_0 = n_0$. $\square$

1.3. Konstrukciók a klubok maximális számának elérésére Párosvárosban és Páratlanvárosban

Eddig csak a fenti városokban alakítható klubok maximális számára adott felső korlátról esett szó. Az, hogy ezek a felső korlátok tényleg a klubok maximális számát adják, vagyis az, hogy ez a korlát éles, még igazolásra szorul.

Láttuk, hogy Párosvárosban legfeljebb $2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ klub alapítható. Ez a felső korlát könnyen elérhető a házastárs-konstrukcióval. Képzeljük el, hogy az n lakosú városban ha n páros, mindenki házas, ha pedig n páratlan, akkor majdnem mindenki házas, kivéve egyetlen egy embert, akinek nincs házastársa. Természetesen mindenkinek csak egyetlenegy házastársa van. A házastársi kapcsolat nyilvánvalóan kölcsönös. Ez a konstrukció $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ házaspárt jelent. Ők pontosan ugyanazokhoz a klubokhoz tartoznak, akkor az üres klubot is megengedve $2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ számú klub alakítható, hiszen minden házaspár vagy tagja, vagy nem tagja a klubnak. Mivel párba vannak állítva a tagok, akiknek azonos a tagságuk vagyis, minden klubnak páros sok eleme és páros sok közös eleme is lesz. Ha van olyan ember, akinek nincs házastársa, akkor ő nem tagja egy klubnak se.

Térjünk vissza most Páratlanvárosba. Azt már láttuk, hogy n lakos esetén n-nél több klub itt nem alapítható. De vajon n klubot mindig tudunk alakítani?

Egy egyszerű konstrukció erre, ha minden lakos önmaga egy egyszemélyes klub tagja. Ekkor minden klub potnosan 1 tagot számlál, és mivel ezek diszjunkt klubok, bármely kettő közös tagjainak száma 0, ami páros. Az azonban nem túl izgalmas eset, ha mindenki egymaga alakít egy egyszemélyes klubot.

Ha ezeket a magányos klubokat nem engedjük meg, páros n esetén akkor is könnyedén alapíthatunk páratlan tagszámú, például $n-1$ fős klubokat úgy, hogy minden klubnak pontosan 1 lakos nem tagja, és vesszük az összes így alapítható klubot. Ekkor bármely kettő klubnak $n-2$ közös tagja van, ami páros, mert n páros.

Egy másik, kreatívabb konstrukciót adhatunk projektív síkokkal, de csak bizonyos n-ek esetén.

10. Feladat. *Adjunk meg* 32 *lakosra egy Páratlanváros feltételeinek megfelelő, maximális számú, tehát 32 klubból álló klubrendszert úgy, hogy legyen egy nagy, 31 fős klub, a többi kisebb kklub pedig mind* $7-7$ *tagú. Bármely két* 7 *fős klubnak pontosan két közös tagja legyen, és minden* 7 *fős kisebb klubnak* $6-6$ *tagja a nagy,* 31 *fős klubnak is tagja. Használjunk projektív síkokat!*

Megoldás. Tudjuk, hogy bármely $n = p^2+p+1$ számhoz létezik ennyi elemű véges projektív sík, ha p prím. Vegyük észre, hogy $31 = 5^2+5+1$! Vegyük tehát egy(?) 31

pontú véges projektív síkot. Ekkor azt is tudjuk, hogy minden egyenesre $5 + 1 = 6$ pont és minden pontra $5 + 1 = 6$ egyenes illeszkedik!

A pontoknak felelnek meg a városlakók, az egyenesekből lesznek némi módosítással a klubok.

Ha az egyenesek lennének ezen 31 lakos között a klubok, akkor minden klubnak pontosan egy közös eleme lenne, mert a véges projektív síkon midnen egyenesnek pontosan egy közös pontja van. Legyen hát a kimaradó, 32. lakos minden eddigi klubnak (vagyis 6 pontú egyenesnek) a tagja!

Így minden klub 7 fős lett, és minden klubnak pontosan 2 közös tagja lett! (Tehát páratlan tagszámú klubok nak páros sok közös tagja van.) Mivel azt is tudjuk, hogy a véges projektív síkoknak ugyanannyi pontjuk van, mint ahány egyenesük, így a 31 egyenesből 31 klubot alkottunk, ami megfelel Páratlanváros szabályrendszerének. Szeretnénk még egy klubot alapítani, mely nem rontja a feltételeket!

Vegyük az eredeti, projektív síkbeli egyenesek pontjait (vagyis a 31 pontú véges projektív sík összes pontját)! Alkossanak ők egy új, nagyobb klubot!

Ekkor ennek az új, nagyobb klubnak minden 7 fős klubbal pontosan 6 közös eleme van, hiszen csak az utólag a kis klubokba bevett, 32. lakos nem közös tag. Tehát páros sok közös tagja van a kisebb klubokkal, ő maga viszont 31 fős, vagyis páratlan sok tagja van. Az eddigi 7 fős klubok nem változtak, tehát továbbra is kielégítik a feltételeket.

Tehát megalkottuk a 32 klubot, melyek megfelelnek Páratlanváros feltételeinek.

Megjegyzés: Ez a kreatív konstrukció csak bizonyos n-ekre működik. Csak p prímek esetén tudjuk, hogy $n = p^2 + p + 1$ pontú projektív sík létezik, ezért csak $n + 1$ lakosú városban tudjuk ezt a konstrukciót használni.

2. Átdarabolások

A síkbeli és térbeli átdarabolásokkal kapcsolatos problémákkal már a sokak által kedvelt kirakós játékokban is találkozhatunk. Ezek a játékok sok fejtörést okozhatnak. A cél bennük általában az, hogy egy síkbeli vagy térbeli alakzatból összerakjon az ember egy másik alakzatot. A darabok azonban többnyire adottak.

Sok próbálkozás után felmerülhet az emberben, hogy milyen jó lenne, ha tovább darabolhatná a megadott részeket. Vajon akkor könnyebb dolga lenne?

Az alábbi feladatokban mi határozhatjuk meg a vágásokat, melyeket egy kiinduló alakzaton ejthetünk, tehát mi alakíthatjuk ki a keletkező kisebb darabokat, és arra keressük a választ, miként rakható belőlük össze egy másik alakzat, illetve mindig összerakható-e.

Meglepő módon azonban, ha valaki arra buzdítana minket, hogy egy kocka alakú tárgyat egy éles késsel, egyenes, határozott vágásokkal, vágjunk fel és rakjunk össze a darabokból egy szabályos tetraédert, bizony komoly kihívás elé állítana benünket. Olyannyira, hogy nem tudnánk teljesíteni a feladatot, mert az lehetetlen. Ami talán ennél is meglepőbb, hogy ennek belátásához nagy segítséget nyújtanak a lineáris algebra bizonyos állításai.

2.1. Síkbeli átdarabolások

Ebben az alfejezetben síkbeli alakzatok az átdarabolásáról lesz szó. Ez a téma bár nem használ lineáris algebrai eszközöket szükséges bevezetője a következő fejeztnek, azért kapott itt helyet.

2.1.1. Definíció. *Egy A síkidom átdarabolható egy B síkidommá, ha létezik véges sok egyenes (ezek a sík elvágásainak felelnek meg), melyek A-t és B-t olyan kisebb síkidomokra osztják fel, melyek páronként mozgással egymásbavihetőek. (Páronként, vagyis egy A-beli síkidom egy B-beli síkidommal párba állítva.)*

Másképpen megfogalmazva ha A és B síkidomokat ezen véges sok egyenes mentén történő vágással feldaraboljuk, akkor a keletkezett kisebb síkidomok páronként egybevágóak.

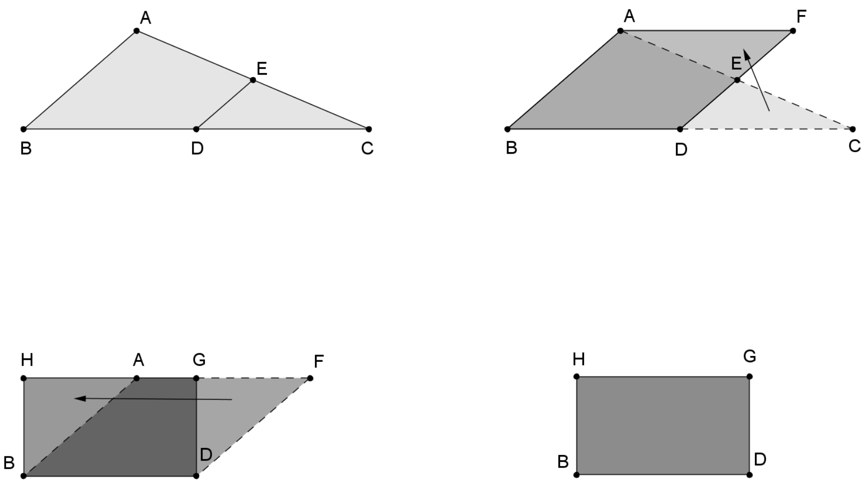
Ez tulajdonképpen azt jelenti, hogy az A síkidom feldarabolása után keletkezett kisebb síkidomokból össze tudom rakni B-t.

Az így definiált reláció reflexív, szimmetrikus, és tranzitív, vagyis egy *ekvivalenciareláció*. Ezért az egymásba átdarabolható síkidomokra az *átdarabolás-ekvivalens* kifejezést is használni fogom.

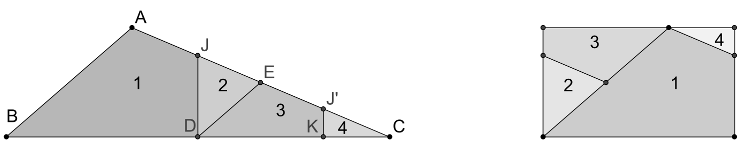
11. Feladat (**Bolyai-Gerwien tétel**). *A síkban bármely két egyenlő területű sokszög egymásba átdarabolható.*

Megoldás.

Minden sokszög feldarabolható háromszögekké egyenesek mentén történő vágásokkal.



1. ábra. Háromszögből téglalap



2. ábra. Vágások a háromszögön

Minden háromszög átdarabolható egy téglalappá az 1. ábrán látható lépéssorozat eredményeképp, csak figyelni kell arra, hogy a harmadik lépésben hosszabb oldalára „fektessük" a paralelogrammát, és úgy daraboljuk át tégalalappá.

Ez az eredeti háromszögön a 2. ábrán látható vágásokat jelenti.

A következő cél, hogy a háromszögekből keletkezett téglalapokat egy téglalappá egyesítsük, kizárólag átdarabolások és összeillesztések segítségével.

Tekintsünk első lépésben két téglalapot. Ezeket egy-egy olyan téglalappá fogom átdarabolni, melyeknek lesz egy azonos hosszúságú oldala. Legyen ez az azonos hosszúság k. Ezt az eljárást úgy hívom, hogy a két téglalapot „közös nevezőre” hozom.

Egy téglalapot úgy tudok „megnyújtani” n-szeresére, hogy a hosszabb oldalával párhuzamosan vágom n egyenlő részre a téglalapot (így a rövidebb oldal n egyenlő részre osztódik, majd a kapott darabokat egymás mellé illesztem, a rövidebb oldalból kapott kisebb, egyenlő oldalak mentén. Ekkor a rövidebb oldala az n-ed részére csökken. Itt fontos szerepet játszik, hogy n csak egész szám lehet.

Ennek ellentéte is elvégezhető, a „tömzsíesítés”, melynek során a hosszabb egyik oldalt m részre osztom, a rövideb oldallal párhuzamosan vágok, és a kapott részeket „egymásra pakolom”.

Ha a két téglalap valamely két oldala, a és c összemérhető, vagyis a hányadosuk egy racionális szám, jelölje ezt a hányadost $\frac{n}{m} = \frac{a}{c}$. A téglalapok másik két oldala rendre b és d. Ekkor az egyik téglalapot n-szeresére, a másikat m-szeresére nyújtva $c \cdot n = a \cdot m$ lesz a közös oldal.

Ha azonban $\frac{a}{c} = i$ irracionális, akkor is bármilyen jól megközelíthető egy r racionális számmal. Ekkor a c oldallal rendelkező téglalapot egy $r \cdot c$ oldalú téglalappá tudom átdarabolni, ez tulajdonképpen a nyújtásokból és tömzsíesítésekből következik. Az új téglalap másik oldala $\frac{i}{r} \cdot b$ hosszú lesz. Ekkor elég közel választom r-et i-hez, akkor ebbe a téglalapba át tudom darabolni az a és b oldalakkal rendelkező téglalapot. Az új téglalap oldala pedig már összemérhető c és d oldalú téglalappal, tehát őket már egymásba tudom darabolni egy-egy c oldalú téglalappá a már ismertetett módon.

Tehát két téglalapból kaptam két c oldalhosszúságú téglalapot. A két k oldallal bíró téglalapot egyesíteni tudom, összeillesztem őket az azonos, k hosszú oldaluk mentén. Így kapok a két téglalapból egy téglalapot, melynek egyik oldala k.

Két téglalapból tehát mindig kapható átdarabolások és összeillesztések segítségével egyetlen téglalap. Indukcióval belátható, hogy ekkor véges sok lépésben az összes téglalapot egy téglalappá tudom egyesíteni.

Ha két egyenlő területű sokszöget ily módon egy-egy téglalappá darabolok, akkor erre a két téglalapra megismételve a „közös nevezőre hozást”, mindkettőt át tudom darabolni egy-egy azonos oldalhosszúságú téglalappá.

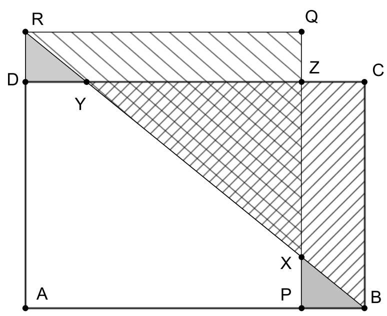
Mivel a két sokszög egyenlő területű, a belőlük kapott téglalapok területe is megegyezik. Ha ezeknek az egyik oldala azonos hosszúságú, akkor nyilván a másik is. Tehát két egybevágó téglalapot kaptam.

Mivel az átdarabolás ekvivalenciareláció, és mindkét sokszög átdarabolás-ekvivalens egy-egy egybevágó téglalappal, két egybevágó téglalap pedig mindig egymásba mozgatható, tehát ők is átdarabolás-ekvivalensek, ezért ekkor a két sokszöget is egymásba tudjuk darabolni.

Ez a tétel lehetőséget nyújt arra, hogy két sokszög átdarabolását keressük. Azt már tudjuk, hogy bármely két sokszög átdarabolás-ekvivalens, de az átdarabolás módját továbbra is kereshetjük.

Ezekből akár általános- és középiskolások számára is izgalmas feladatokat adhatunk fel, főleg, ha kitűzzük célul, hogy a lehető legkevesebb vágást kell ejteni az sokszögeken.

12. Feladat. *Hogyan darabolhatunk át egy téglalapot egy vele egyenlő területű négyzetté?*



3. ábra. Téglalapból négyzet

Minden téglalap átdarabolható egy olyan téglalappá, mely két oldalának aránya kisebb 2-nél.

Minden így kapott téglalap átdarabolható egy vele egyenlő területű négyzetté a 3. ábrán látható módon.

Az $APQR$ négyszög egy négyzet, melynek egy-egy oldala $\sqrt{ab}$ hosszú kell, hogy legyen, hogy a területe az $ABCD$ téglalap területével megegyezzen, ahol $\overline{AD} = a$, $\overline{AB} = b$.

A PBX és DYR háromszögek egybevágóak, mert PBX hasonló ABR háromszöghöz és $\overline{PB} = b - \sqrt{ab}$, ezért

$$\overline{PX} = \frac{\overline{PB}}{\overline{AB}} \cdot \overline{AR} = \frac{b - \sqrt{ab}}{b} \cdot \sqrt{ab} = \frac{b \cdot \sqrt{ab} - ab}{b} = \sqrt{ab} - a.$$

Mivel $\overline{DR} = \overline{AR} - \overline{AD} = \sqrt{ab}$, ezért a két háromszög, mely hasonló is, hiszen szögeik ugyanakkorák, egybevágó is, hiszen egy-egy oldaluk egyenlő hosszú.

Ebből viszont az is következik, hogy az YBC és az RXQ háromszögek is egybevágók, hiszen $\overline{CB} = \overline{AR} - \overline{DR} = \overline{AR} - \overline{PX} = \overline{QX}$, megfelelő szögeik pedig megegyeznek. Tehát a téglalap 3 darabjából össze lehet rakni a négyzetet.

13. Feladat (A szétszórt cukrász problémája). *A szétszórt cukrász süteményt sütött, és a tetejét ki is kidíszítette. Háromszög alakú szeletekre akarta felvágni, ehhez szép, háromszög alakú dobozokat is vásárolt. Miután végzett a torta felszeletelésével észrevette, hogy rosszul háromszögelte fel a süteményt. A szeleteknek pont a tükörképe volt a doboz alapja! Segítsünk a séfnek beleilleszteni a tortaszeleteket a dobozokba! Figyeljünk arra, hogy csak egyenes vágásokat tudunk ejteni a süteményen, és nem fordíthatjuk fejjel lefelé őket, mert akkor tönkremegy a díszítés. (Moszkvai Matematika Olimpia)*

Megoldás. A Bolyai-Gerwien tételnek a bizonyítását alapul véve eljárhatunk úgy, hogy a háromszöget egy vágással átdaraboljuk egy paralelogrammává. Ezt kell a tükörképébe átdarabolni, amit megtehetünk, ha a hosszabb oldalát vesszük alapul, egy egyenlőszárú háromszög-darabot áthelyezünk az ellenkező oldalra, majd a tükörkép paralelogrammából össze tudjuk rakni a tükörkép háromszöget. Ez a módszer azonban az eredeti háromszögön igen sok vágást eredményezne, így a süteményünk túlságosan elaprózódna.

Ennél elegánsabb felszeletelési mód, ha a háromszöget 3 darab deltoidra vágjuk fel, mégpedig úgy, hogy berajzoljuk a beírható kört, és annak az oldalakra merőleges sugarait. Ha ezt a háromszög tükörképén is megtennénk, akkor az ott keletkező deltoidok nem csak hogy egybevágóak lesznek az eredeti háromszögből kapott deltoidokkal, hanem egymásba is forgathatók páronként, vagyis ez egy jó szeletelés lesz a süteményen, a darabokat be tudjuk rakni a tükörkép-háromszög alakú dobozba. A megoldás azon múlott, hogy a háromszögünket tengelyesen szimmetrikus alakzatokra vágtuk fel, ezek tehát a háromszög tükrözése után is egymásbaforgathatók a tükörképükkel.

A 13. feladat világít rá arra a lényeges pontra, miszerint nem elég, hogy két sokszöget kisebb egybevágó sokszögekre darabolok fel, hiszen akkor az egyik feldarabolásából még nem tudom összerakni a másik sokszöget. A páronként egybevágó sokszögeknek síkbeli mozgással egymásba átvihetőknek is kell lenniük. Ezt a különbséget azonban lényegében feloldja a szétszórt cukrász problémája, mely szerint egy háromszög és tükörképe egymásba átdarabolható. Ha tehát két sokszöget fel tudunk darabolni egybevágó kisebb sokszögekre, de ezek kötött esetleg vannak olyan párok, melyek nem mozgathatók egymásba, hanem „csak” egymás tükörképei, akkor további vágások eredményeképp át őket egymásba darabolni. A két sokszöget ugyanis fel tudjuk úgy háromszögelni, hogy olyan háromszögeket kapjunk, melyek egymás tükörképei. (A két sokszöget „ugyanúgy” kell felháromszögelni, a vágásoknak egymás tükörképeinek kell lenniük.) Mivel ezekről már tudjuk A 13. feladatból, hogy egymásba átdarabolhatóak, ezért elég a kisebb szokszögek páronkénti egybevágóságát kikötni az átdarabolhatóság feltételeként.

2.2. Hilbert harmadik problémája

2.2.1. Definíció. *Térbeli átdarabolások alatt a következőt értjük:*

P_1 és P_2 poliéderek átdarabolhatóak egymásba, ha léteznek olyan sík mentén történő vágások mind a két testen, melyek által a két poliédert páronként egybevágó kisebb poliéderekre daraboljuk fel.

Csakúgy, mint a síkbeli esetben, ez a reláció is *ekvivalenciareláció*, tehát alkalmazható az *átdarabolás-ekvivalens* kifejezés poiléderek esetében is.

Vajon igaz-e a Bolyai-Gerwien tétel megfelelője a térben? Bármely két poliéder átdarabolható egymásba?

Ez a kérdés volt az alapja David Hilbert (1862-1943) német matematikus által a párizsi világkiállításon ismertetett problémának, melyet Hilbert 3. problémájaként szokás emlegetni. A kérdést az 1900. augusztusában tartott Második Nemzetközi Matematikai kongresszuson tárta a nyilvánosság elé. A találkozó a párizsi világkiállítás keretében zajlott, melyre a kor embereit foglalkoztató legfontosabb, addig még megválaszolatlan matematikai kérdéseket gyűjtötték össze.

Hilbert eredetileg az alábbi formában vezette fel az átdarabolhatóság problémáját:

14. Feladat (Hilbert harmadik problémája). *Mutassunk két tetraédert, melyeknek az alapja egy-egy egyenlő területű háromszög, és azonos a magasságuk is, de nem darabolhatók át egymásba.*

Megoldás. Az a talán meglepő eredmény született, hogy tudunk két ilyen tetraédert mutatni. Tehát a térben két azonos térfogatú poliéder nem mindig átdarabolás-ekvivalens.

Hilbert harmadik problémájára az első megoldást, tanítványa, Max Dehn adta, egy kicsit más formában. Azt mutatta meg, hogy egy reguláris tetraéder nem darabolható át síkok mentén történő vágásokkal egy vele azonos térfogatú kockává. Az ő bizonyításának egy leegyszerűsített változatát Hadwiger és Boltyanski alkották meg, ezt ismereteti [1] könyv .[1.3.] fejezet [Theorem1.3.4.]. Ez a bizonyítás lényegében átvihető Hilbert eredeti kérdésének megválaszolására is, ezt fogom most megtenni.

Bizonyítás. A megoldáshoz az alábbi két állításra lesz szükségünk a lineáris algebra témaköréből:

(A) Ha egy $\mathbb{Q}$ feletti V vektortér két lineárisan független eleme v és w, akkor létezik egy olyan $f : V \longrightarrow \mathbb{Q}$ lineáris függvény, melyre $f(v) = 0$ és $f(w) = 1$. [1] [1.3]. 19.o.

(B) $\alpha = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$-re $\frac{\alpha}{\pi}$ irracionális.

Bizonyítás: Indirekt. Tegyük fel, hogy $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{l}{k}$.

Ekkor $l \cdot \alpha = k \cdot \pi$, de azt is mondhatjuk, hogy $2 \cdot l \cdot \alpha = 2 \cdot k \cdot \pi$.

Vagyis léteznek olyan $m(= 2l), k$ egészek, melyekre $m\alpha = 2l\pi$.

Azt fogom belátni, hogy
$$\cos(m\alpha) = \frac{s}{\sqrt{3}^m}$$
alakú, ahol s egy 3-mal nem osztható egész, következésképpen

$\cos(m\alpha) \neq \cos(2k\pi) = 0$, semmilyen m egészre.

A bizonyítás m-re vonatkozó indukcióval történik.

$$\begin{cases} m = 0 & \cos(0 \cdot \alpha) = 1 = \frac{1}{\sqrt{3}^0} \\ m = 1 & \cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

Tegyük fel, hogy $m = (t-1)$-re és $m = (t-2)$-re $\cos(m\alpha) = \frac{s_m}{\sqrt{3}^m}$, ahol s_m nem osztható 3-mal.

$$\begin{aligned} \cos(t\alpha) &= 2\cos\left((t-1)\alpha\right)\cos(\alpha) - \cos(\underbrace{(t-1)\alpha - \alpha}_{(t-2)\alpha}) \\ &= \frac{2s_{t-1}}{\left(\sqrt{3}\right)^{t-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{s_{t-2}}{\left(\sqrt{3}\right)^{t-2}} = \frac{2s_{t-1} - 3s_{t-2}}{\left(\sqrt{3}\right)^t} = \frac{s_t}{\left(\sqrt{3}\right)^t} \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Mivel s_{t-1}, s_{t-2} az indukciós feltevés miatt nem oszthatóak 3-mal, ezért $2s_{t-1} - 3s_{t-2} = s_t$ sem osztható 3-mal.

Ebből következik, hogy $\frac{s_t}{\sqrt{3}^t}$ semmilyen t-re nem lesz 0.

Tehát $m\alpha \neq 2k\pi$.

□

Megjegyzés: $(B) \Leftrightarrow \alpha$ és π függetlenek $\mathbb{Q}$ felett.

Mivel tehát π és α valós számok függetlenek $\mathbb{Q}$ felett, ezért tudjuk alkalmazni az (A) állítást. Legyen $V = \langle \pi, \alpha \rangle$, mely egy altere R-nek, mint $\mathbb{Q}$ felett vektortérnek. Ekkor az (A) állítás értelmében létezik egy olyan $f : V \longrightarrow \mathbb{Q}$ függvény, melyre $f(\pi) = 0$ és $f(\alpha) = 1$.

A megoldás lényegét a probléma megoldójáról elnevezett invariáns adja.

2.2.2. Definíció. *Egy P poliéder Dehn invariánsa egy f lineáris függvényre nézve az alábbi*

$$\phi(P) = \sum |e_i| \cdot f(\gamma_i)$$

mennyiség, ahol az összegzés P összes élén végigfut, $|e_i|$ az adott él hossza, γ_i pedig a poliédernek az e_i élnél levő hajlásszöge.

2.2.3. Definíció. *Egy n-dimenziós politópokon értelmezett ϕ függvény additív, ha*

$$\sum \phi(P_i) = \phi(P),$$

ahol az összegzés P hipersíkokkal történő feldarabolása során keletkező összes kisebb, n-dimenziós polióprra vonatkozik.

Az előbbi két definíció segítségével a következő állítást fogom belátni:

Állítás: A Dehn invariáns, mint poliédereken értelmezett ϕ függvény, additív.

Bizonyítás: Elég a fenti állítást egyetlen egy vágásra bebizonyítani, ebből indukcióval belátható, hogy véges sok vágásra ϕ additív. Legyen P az eredeti poliéder, P_1 és P_2 pedig a vágás után keletkező poliéderek.

$$\phi(P) = \phi(P_1) + \phi(P_2) \tag{2.2.2}$$

Nevezzük S-nek az a síkot, amely mentén elvágjuk P poliédert. Vizsgáljuk meg először, mi történik P éleivel, ha elvágjuk a poliédert az S sík mentén. Egy adott e_i élre három esetet különböztetünk meg:

1. S-nek és e_i-nek nincsen közös pontja, vagy csak az él valamelyik végpontján halad át S:

   Ekkor az adott e_i él hozzájárulása a (2.2.2) egyenlet jobb és baloldalához ugyanannyi, mert e_i éle P-nek és éle P_1-nek vagy P_2-nek is, a hozzátartozó szöget pedig a vágás nem változtatja meg.

2. S elmetszi e_i élt pontosan egy belső pontjában:

   Ekkor e_i él két kisebb szakaszra bomlik fel: e_{i_1} és e_{i_2} élekre, melyek a két kisebb poliédernek az élei lesznek, a rajtuk fekvő szög viszont nem változik a vágás során. Tehát a baloldalhoz a kiválasztott él $|e_i| \cdot f(\gamma_i)$-vel járul hozzá, a jobboldalhoz pedig $|e_{i_1}| \cdot f(\gamma_i) + |e_{i_2}| \cdot f(\gamma_i)$-vel. Ez a két mennyiség megegyezik, mert $|e_{i_1}| + |e_{i_2}| = |e_i|$. Tehát e_i hozzájárulása a baloldalhoz ugyanannyi, mint e_{i_1} és e_{i_2} hozzájárulása a jobboldalhoz.

3. S-nek és e_i-nek végtelen sok közös pontja van:

   Ekkor e_i a P_1 és P_2 poliéderek közül mindkettőnek az éle lesz. Viszont a rajta fekvő szögek megváltoznak, ha P_1-ben e_i-nél γ_{i_1} a hajlásszög, P_2-ben pedig γ_{i_2}, akkor $\gamma_{i_1}+\gamma_{i_2}=\gamma_i$, vagyis a kettő összege kiadja a P poliéderben aze_i-nél levő hajlásszöget. Tehát a (2.2.2) egyenlet baloldalán $|e_i|\cdot f(\gamma_i)$ áll, a másik oldalon pedig $|e_i|\cdot f(\gamma_{i_1})+|e_i|\cdot f(\gamma_{i_2})$. Ez a két mennyiség megegyezik, mert f-et lineáris függvénynek választottuk, így $|e_i|\cdot f(\gamma_{i_1})+|e_i|\cdot f(\gamma_{i_2}) = |e_i|\cdot f(\gamma_{i_1})+f(\gamma_{i_2}) =$ $= |e_i|\cdot f(\gamma_{i_1}+\gamma_{i_2}) = |e_i|\cdot f(\gamma_i)$.

Meg kell még vizsgálnunk, hogy a vágás során keletkező új élek, melyek élei lesznek P_1 és P_2 poliédereknek, mivel járulnak hozzá $\phi(P_1)$ és $\phi(P_2)$ mennyiségekhez. $\phi(P)$-ben ezek az élek nyilván egyáltalán nem szerepelnek. Ha e_j egy új él, akkor e_j a P poliéder egy lapjának és S-nek a közös része. Ebből viszont az következik, hogy ha P_1-ben a rajta fekvő szög γ_{j_1}, akkor P_2-ben a rajta fekvő szög $\gamma_{j_2}=\pi-\gamma_{j_1}$.

Vagyis a $\phi(P_1)+\phi(P_2)$ mennyiségben e_j a következőképpen jelenik meg:

$$|e_j|\cdot f(\gamma_{j_1})+|e_j|\cdot f(\pi-\gamma_{j_1}) = |e_j|\cdot(f(\gamma_{j_1})+f(\pi-\gamma_{j_1})) \tag{2.2.3}$$
$$= |e_j|\, f(\gamma_{j_1}+\pi-\gamma_{j_1}) \tag{2.2.4}$$
$$= |e_j|\, f(\pi) = 0. \tag{2.2.5}$$

Itt fontos kiemelni, hogy (2.2.3)-ból (2.2.4)-et f linearitása miatt kapjuk, (2.2.5) pedig azért teljesül, mert f-et így választottuk.

Vagyis a vágás után keletkező új élek a $\phi(P_1)+\phi(P_2)$ összegben szerepelnek ugyan, de a hozzájuk tartozó értékek kiejtik egymást.

□

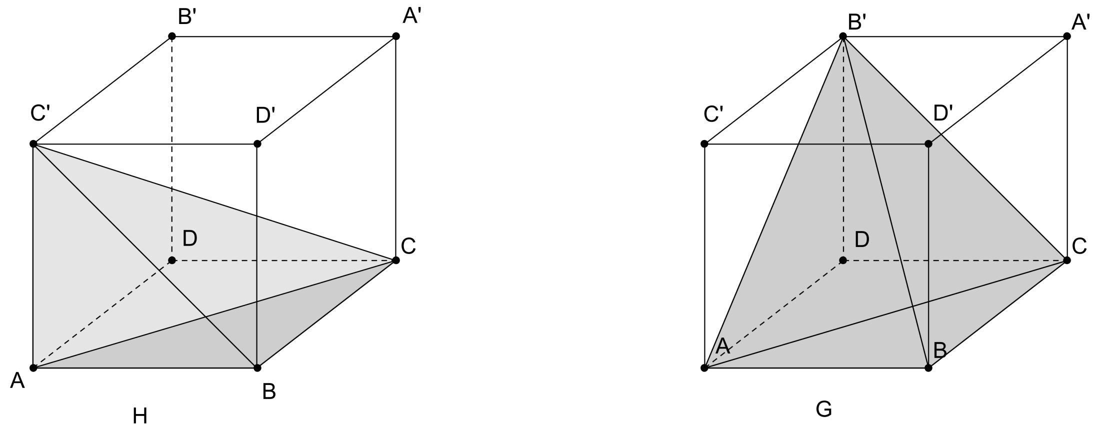
Mindebből következik, hogy a vágások során a Dehn invariánsok összege a vágások során állandó marad. Vagyis ha egy P és egy Q poliédert feldarabolunk kisebb poliéderekre, legyenek ezek $P_1,\dots P_n$ és $Q_1,\dots,Q_n$ úgy, hogy ezek páronként egybevágók, akkor

$$\phi(P)=\sum\phi(P_i)=\sum\phi(Q_i)=\phi(Q) \tag{2.2.6}$$

Vagyis az egymásba átdarabolható poliéderek Dehn invariánsa megegyezik.

Tehát ha megadunk két tetraédert, melyeknek különbözik a Dehn invariánsa, akkor ez a két tetraéder biztos, hogy nem darabolható át egymásba síkok mentén történő vágásokkal. Így választ adhatunk Hilbert 3. problémájára.

Az alapötlet a következő: vegyük az egységkockát, és betűzzük a csúcsait a 4. ábrán látható módon.



4. ábra. Két nem egymásba átdarabolható tetraéder

Legyen G az $ABCB'$ és H az $ABCC'$ tetraéder.

H -ban a ABC lapra merőlegesek az BCC' és ABC' lapok, valamint az ABC' lap síkjával vett hajlásszöge $\frac{\pi}{4}$. Ezek az ABC háromszög élein fekvő szögek.

Az ACC' lap és a BCC' lapok síkjának hajlásszöge szintén $\frac{\pi}{4}$.

Az ABC' lap merőleges a BCC' lapra.

ABC' és ACC' lapok síkjainak hajlásszöge pedig $\frac{\pi}{3}$. Ez igazolható például, ha a kockát belehelyezzük egy Descartes-féle jobbsodrású koordinátarendszerbe, és felírjuk a két lap síkjának egyenletét.

$S_{ACC'}: -x+y=0$, ennek a síknak a normálvektora $n_1 = (-1,1,0)$.

$S_{ABC'}: -y+z=0$, az ehhez tartozó normálvektora $n_2 = (0,-1,1)$.

A két sík hajlásszöge normálvektorai hajlásszögével egyenlő, ami a skalárszorzatból számolható ki.

$$\cos\varphi = \frac{n_1 \cdot n_2}{|n_1|\,|n_2|} = -\frac{1}{2}$$

.

Mivel a hajlásszög a $\frac{\pi}{2}$-nél kisebb szög kell, hogy legyen, ezért a két sík hajlásszöge $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

Az f függvény lineáris tulajdonsága miatt bármely $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ skalár kiemelhető belőle, $f\left(\frac{p}{q}\cdot\pi\right) = \frac{p}{q}\cdot f(\pi) = 0$.

Vagyis f minden olyan helyen 0 értéket vesz föl, mely a π-nek racionális skalárszorosa. Így $f\left(\frac{1}{2}\pi\right) = f\left(\frac{1}{3}\pi\right) = f\left(\frac{1}{4}\pi\right) = 0$.

$$\begin{aligned}\phi(H) &= \left(\left|\overline{BC'}\right| + \left|\overline{BC}\right| + \left|\overline{AC}\right|\right) \cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right) + \\ &+ \left(\left|\overline{CC'}\right| + \left|\overline{AB}\right|\right) \cdot f\left(\frac{\pi}{4}\right) + \left|\overline{AC'}\right| \cdot f\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= 0\end{aligned} \tag{2.2.7}$$

Tekintsük most a G tetraédert. $ABC, ABB', BB'C$ háromszöglapok egymásra páronként merőlegesek.

Ebből következik, hogy $\phi(G)$-ben BB', AB, BC élek hossza $f(\frac{\pi}{2}) = 0$ együtthatóval szerepel.

Az előbb említett három lap külön-külön ACB'-vel ugyanakkora szöget zár be. Ez a szög $\alpha = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$, mely az $AB', B'C, CA$ éleken fekszik a G tetraéderben. $\left|\overline{AB'}\right| = \left|\overline{B'C}\right| = \left|\overline{CA}\right| = \sqrt{2}$.

$$\phi(G) = 0 + 3 \cdot \sqrt{2} \cdot f(\alpha) \neq 0 \tag{2.2.8}$$

Itt használtuk ki, hogy a bizonyítás kezdetén f függvényt úgy választottuk, hogy $f(\alpha) = 1$ legyen.

Tehát beláttuk, hogy $\phi(G) \neq \phi(H)$, vagyis nem átdarabolás-ekvivalens a két tetraéder.

□

2.3. További síkbeli átdarabolások, eltolással

A Dehn invariáns bevezetésének ötlete jó alapul szolgálhat a sík speciális feldarabolásai esetében feltett kérdések egválaszolására. Az alábbiakban erre mutatok néhány példát.

2.3.1. Definíció. *Két sokszöget akkor nevezünk eltolással egymásbadarabolhatónak, ha egyenes vágásokkal fel tudjuk darabolni őket olyan egybevágó részekre, melyek egymás eltoltjai.*

15. Feladat. *Egy háromszög soha nem eltolással átdarabolható egy négyzetté.*

Megoldás. Egy olyan invariáns mennyiséget keresünk az eltolásokra nézve, mely sokszögek additív függvénye. Az additivitás *a* 2.2.3. definíció értelmében kell, hogy teljesüljön $n = 2$ esetre vonatkoztatva, mivel 2-dimenziós politópokon értelmezett függvényt keresünk.

Vegyünk fel egy olyan e egyenest, mely párhuzamos a háromszögnek az egyik oldalával. (Ekkor a másik két oldallal biztosan nem lesz párhuzamos.)

Legyen $\phi(P) = \sum \pm |e_i|$ a vizsgálandó mennyiség, ahol az összegzés P sokszögnek a felvett e egyenessel párhuzamos éleire vonatkozik. $|e_i|$ pozitív előjellel szerepel, ha P felülről érinti e_i-t, és negatív előjellel, ha alulról. (Ezt úgy értem, hogy a kijelölt egyenes által keletkező két félsík közül az egyiket elnevezzük fenti félsíknak, a másikat pedig alsónak. Az e_i élek egyeneseire is megtesszük ugyanezt úgy, hogy a fenti félsíkokba mutató e-re, illetve e_i-re merőleges vektorok mindig ugyabba az irányba mutassanak.)

Két dolgot kell megmutatnunk:ϕ függvény additív és egy adott P sokszögre $\phi(P)$ értéke nem változik egy eltolás során.

Először ϕ additivitását fogom belátni.

Hasonlóan a Dehn invariáns vizsgalatához, tekintsük egy vágást, ellenőrizzük erre az additivitást, ebből véges sok vágásra indukcióval belátható az additvitás.

P élei közül azokat, amelyek nem párhuzamosak e-vel, figyelmen kívül hagyhatjuk, hiszen akár elvágtuk őket, akár nem, nem szerepelnek egyik sokszög ϕ értékében sem.

P élei közül azokat, melyek párhuzamosak e-vel, vagy érintetlenül hagyta a vágás; ekkor ez az él P_1 vagy P_2 éle, és ugyanabból az irányból érinti azt, mint eredetileg P-t.

Lehet, hogy két szakaszra vágtunk egy e-vel párhuzamos élt, ekkor külön-külön a két darab továbbra is párhuzamos lesz e-vel, $|e_{i1}| + |e_{i1}| = |e_i|$ teljesül, és P_1 és P_2 ugyanabból az irányból érinti az egyes rövidebb éldarabokat, mint P e_i-t.

Ha egy adott vágás egy olyan egyenes mentén történik, ami nem párhuzamos e-vel, akkor az új élek nem lesznek párhuzamosak e_i-vel, tehát nem szerepelnek $\phi(P_1)$-ben, se $\phi(P_2)$-ben, mint ahogy nem szerepeltek természetesen $\phi(P)$-ben sem.

Ha a vágás egy e-vel párhuzamos egyenes mentén történik, akkor keletkezik egy új, e-vel párhuzamos él, mely P_1-nek és P_2-nek is éle. Ezt az élet azonban ha P_1 alulról érinti, akkor P_2 biztosan felülről érinti, vagy a fordított eset áll fenn, P_1 érinti felülről és P_2 alulról. Mindenképpen $|e_i|$ ellentétes előjellel szerepel $\phi(P_1)$-ben és $\phi(P_2)$-ben, tehát $\phi(P_1) + \phi(P_2)$-ben összesen 0 együtthatóval szerepel, csakúgy mint $\phi(P)$-ben, ahol egyáltalán nem is szerepel.

A fentieket összegezve tehát $\phi(P) = \phi(P_1) + \phi(P_2)$.

Ha egy eltolás P sokszöget P' sokszögbe visz, akkor $\phi(P) = \phi(P')$.

Nyilvánvalóan a darabok eltolása már e-vel párhuzamos éleket e-vel párhuzamos élekbe visz, nem párhuzamos éleket, pedig nem párhuzamos élekbe, tehát a mennyiség invariáns az eltolásra nézve.

ϕ függvény ezen két tulajdonságából hasnoló következtetést vonhatunk le, mint a Dehn invariáns esetében: az eltolással egymásba átdarabolható sokszögek ϕ értéke meg kell, hogy egyezzen.

A H háromszögnek az e-vel párhuzamos éle legyen d hosszú.
Ekkor $\phi(H) = \pm d \neq 0$, míg az N négyzetre $\phi(N) = 0$, hiszen vagy egyik oldala sem párhuzamos e-vel, vagy két szembenlevő oldala igen, de akkor N őket ellentétes oldalról érinti, egyiket felülről, másikat pedig alulról, vagyis $\phi(N) = n - n = 0$, ahol n a négyzet oldalának hossza.

16. Feladat. *(Hadwiger-Glur, 1951) Pontosan azok a konvex sokszögek darabolhatók át eltolással egy négyzetté, melyek középpontosan szimmetrikusak.*

$$P \textit{ konvex, eltolással egy négyzetbe} \;\Leftrightarrow P \quad \textit{középpontosan szimmetrikus}$$

Megoldás.

(1) P eltolással átdarabolható egy négyzetbe $\Rightarrow$ P középpontosan szimmetrikus.

Bizonyítás: Az állítás ekvivalens a következővel: P nem középpontosan szimmetrikus $\Rightarrow$ P nem eltolással átdarabolható egy négyzetbe.

Ha P nem középpontosan szimmetkrikus konvex sokszög, akkor egészen biztosan fel tudjuk úgy venni az e egyenest, hogy az egyik oldalával párhuzamos legyen, a többivel viszont ne, ennek eredményeképpen az előbbi feladatban bevezetett ϕ invariáns nem 0. A négyzet ϕ értéke viszont bármilyen e egyenes esetén 0, így biztos nem eltolással átdarabolható egymásba a két sokszög. $\square$

(2) P középpontosan szimmetrikus. $\Rightarrow$ P eltolással átdarabolható egy négyzetbe.

Ha P középpontosan szimmetrikus, akkor létezik egy olyan O pont, melyet ha minden csúcssal összekötünk, akkor a sokszögünknek egy olyan felháromszögelését kapjuk, melyeket csak eltolással össze tudunk illeszteni úgy, hogy egy paralelogrammát kapunk.

Állítás: Bármely paralelogramma eltolással átdarabolható egy négyzetté.

Bizonyítás: Ehhez először azt kell meggondolni, hogy a paralelogramma téglalappá való átdarabolása (1. ábra), illetve a téglalap négyzetté darabolása során (3. ábra) tulajdonképpen csak eltolással mozgattuk a vágások után keletkező kisebb sokszögeket, hogy az új alakzatot megkapjuk.

Ez persze csak akkor igaz, ha a kapott négyzet egyik oldalpárja a paralelogramma egyik oldalpárjával volt párhuzamos. (Sőt egyes paralelogrammáknál az átdarabolás során még azt is meg kell határoznunk, hogy a hosszabbik oldalpárral párhuzamosak.)

Ezt azonban mindig el tudjuk érni eltolással való átdarabolások segítségével.

Egy paralelogrammát mindig át tudunk darabolni egy olyan paralelogrammává, melynek az egyik párhuzamos oldalpárja meghatározott állású. (Esetünkben ez az állás a négyzet egyik szembenlevő oldalpárjának az iránya.

Ha a paralelogrammának az egyik párhuzamos oldalpárja helyben marad, a másik párhuzamos oldalpárt tetszőleges „irányúvá” tehetjük bizonyos keretek között. Ha a kijelölt irány azokon kívülre esik, akkor a paralelogrammának a másik oldalpárját kell helybenhagyni.

Ezen átdarabolások során is csak eltolással mozgatjuk a keletkező kisebb sokszögeket. Ezért lényegében bármilyen paralelogrammából is indulunk ki, eltolással átdarabolhatjuk egy olyan paralelogrammává, melynek a megfelelő oldalpárja már párhuzamos a négyzet egyik oldalpárjával. Ekkor az előzőek értelmében megvalósítható az két alakzat eltolással egymásba való átdarabolása. □

Megjegyzés: Minden paralelogramma átdarabolható eltolással egy vele egyenlő területű paralelogrammába.

Az előzőek alapján egyik eltolással átdarabolható egy olyan paralelogrammába, melynek az egyik oldalpárja hosszabbik oldalpárja párhuzamos lesz a másik paralelogramma hosszabbik oldalpárjával. Ekkor újabb darabolásokkal elérhető, hogy ez legyen a hosszabbik oldala a paralelogrammának. Ezek után mindkettő paralelogramma átdarabolható egy négyzetté, melynek egyik oldalpárja párhuzamos lesz a két paralelogramma hosszabb oldalaival, ezért a két paralelogramma egymásba eltolással átdarabolható.

3. Kétféle távolságot meghatározó ponthalmazok $\mathbb{R}^n$-ben

Hány pontot vehetünk fel egy n dimenziós euklideszi térben úgy, hogy a páronként vett távolságuk csak kétféle értéket vegyen fel?

E fejezetben ezen az alapvetően geometriai problémán keresztül mutatom be egy újabb alkalmazását a már ismertetett és használt lineáris algebrai módszereknek.

Legyen az euklideszi tér $\mathbb{R}^n$. Jelölje a kérdésfelvetésben megfogalmazott feltételeknek megfelelően felvehető pontok maximális számát a tér dimenziójától függően $m(n)$.

A továbbiakban erre a maximális számra keresek alsó és felső korlátokat. Az általam ismertetett konstrukció bizonyítja majd, hogy hány pontból lehet bármilyen dimenziójú térben megfelelő ponthalmazt konstruálni, illetve mi az a felső korlát, melynél több pont egészen biztosan nem vehető fel, hogy eleget tegyen a feltételeknek.

3.1. Alsó és felső korlát a pontok maximális számára

3.1.1. Alsó korlát a pontok maximális számára

Forrásom [1] 1.2.3. (175.o.) feladatához adott megoldás ötletes konstrukciót ad arra nézve, hogy $\binom{n+1}{2}$ pont mindig megadható, úgy, hogy a pontok távolsága kétféle legyen:

Tekintsük $\mathbb{R}^{n+1}$ pontjait, melyeknek $n+1$ koordinátája közül pontosan kettő 1-gyel, a többi pedig 0-val egyenlő. Ez $\binom{n+1}{2}$ különböző pont.

Először azt kell tisztáznunk, hogy ezek az $\mathbb{R}^{n+1}$-beli pontok egy eggyel alacsonyabb dimenziós tér pontjaiként is tekinthetők.

Ez azzal indokolható, hogy a pontok koordinátáinak összege minden pontra nézve 2, így a pontok elemei a $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 2$ egyenletű hipersíknak.

Mi lehet két ilyen pont távolsága?

1.eset	2. eset
$x = (1, \ldots 0, \ldots 1 \ldots)$	$x = (1, \ldots 1, \ldots 0 \ldots 0 \ldots)$
$y = (1, \ldots 1, \ldots 0 \ldots)$	$y = (0, \ldots 0, \ldots 1 \ldots 1 \ldots)$
$\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 = 2$	$\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 = 4$
$\lVert x - y \rVert = \sqrt{2}$	$\lVert x - y \rVert = 2$

Ha a két 1-es koordináta közül az egyik ugyanazon a helyen áll, a másik két egyes két különböző helyen az $n+1$ koordinátával rendelkező vektorokban, akkor a két pont távolsága $\sqrt{2}$. (Ez az 1. eset.)

Ha a két-két 1-es koordináta különböző helyeken áll a vektorokban, akkor a két pont távolsága 2. (Ez a 2. eset.)

Így beláttuk, hogy a fent megadott konstrukció egy olyan ponthalmazt eredményez, mely $\mathbb{R}^n$ ponthalmazaként is tekinthető, kétféle távolságot határoz meg.

Tehát: $m(n) \geq \binom{n+1}{2}$.

Észrevétel: Ez a konstrukció kapcsolatba hozható az 1 részben tárgyalt 9. feladattal. Ezek a vektorok ugyanis tekinthetők klubok karakterisztikus vektoraiként is. A fenti konstrukcióban megadott pontok a 9. feladat feltételeinek éppen a „fordítottját" elégítik ki. Ha ezekhez a vektorokhoz, mint karakterisztikus vektorokhoz klubokat társítunk, akkor minden klubnak két tagja lesz, ami páros, a kétféle távolság feltétele pedig úgy mutatkozik meg, hogy a kluboknak páros, vagy páratlan számú közös tagja van. Tehát ha Párosváros szabályai közül (P2) szabályt hagynánk el, (P1)-et viszont megtartanánk, akkor ezek a vektorok megfelelnének a feltételeknek. Így éppen **Félig Párosváros** „fordítottját" kapjuk. Másképpen megfogalmazva **Párosváros** [1.2] és **Fordított Páratlanváros** [1.1.5] feltételeit összevonva kapnánk azt az új szabályrendszert, melyet ezek a vektorok kielégítenek.

A konstrukció rámutat arra, hogy ezen feltételek mellett $\binom{n+1}{2}$ klub alakítható egy $n+1$ lakosú városban.

3.1.2. Felső korlát a pontok maximális számára

Ahhoz, hogy egy felsőkorlátot adjunk az említett ponthalmazokra, be kell vezetnünk az alábbi kétváltozós függvényt:

$$F(x, y) = \left(\|x - y\| - \delta_1^2\right)(\|x - y\|)\,\delta_2^2.$$

Legyen $a_1, \dots a_m$ olyan ponthalmaz, melyek közül bármely kettőnek a távolsága $\delta_1 \neq 0$ vagy $\delta_2 \neq 0$.

Ekkor legyen $f_i(x) = F(x, a_i)$ n változós függvény.

Tudjuk, hogy

$$f_i(a_j) = \begin{cases} \delta_1^2 \delta_2^2 & ha\ i = j \\ 0 & ha\ i \neq j, \end{cases} \tag{3.1.1}$$

hiszen az $a_1, \dots a_m$ pontok között csak kétféle távolság lép fel, ezért az F függvényben az egyik szorzattényező 0 lesz, ha két különböző pontot helyettesítünk x, y helyére az a_i

Állítás: $f_1, \dots f_m$ pedig lineárisan függetlenek $\mathbb{R}$ felett.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy egy lineáris kombinácójuk az azonosan 0 függvény, ekkor egy rögzített a_j helyen is 0 az értéke, vagyis:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(a_j) = \lambda_j \cdot \delta_1^2 \delta_2^2 = 0 \tag{3.1.2}$$

$$\delta_1, \delta_2 \neq 0 \Rightarrow \lambda_j = 0 \tag{3.1.3}$$

Tehát csak a triviális kominácíó ad 0 értéket. □

Másrészt viszont elmondhatjuk, hogy minden f_i függvény kifejezhető az alábbi függvények valós együtthatós lineáris kombinációival:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^2, \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \cdot x_j, x_i x_j, x_i, 1$$

Ez annak az eredménye, hogy F-ben a szorzat mindkét tegjában az x_i^2 alakú kifejezésekegyütthatója 1.

Ez összesen $1 + n + \binom{n+1}{2} + n + 1 = \frac{(n+1)(n+4)}{2}$ polinom, és mivel minden f_i eleme az általuk generált térnek, ami így $1 + n + \binom{n+1}{2} + n + 1 = \frac{(n+1)(n+4)}{2}$ dimenziós, f_i függvények pedig függetlenek, ezért

$$m(n) \leq \frac{(n+1)(n+4)}{2} \tag{3.1.4}$$

3.2. Gömbi ponthalmazok kétféle távolsággal

A 3.1 részben felállított korlátok esetében semmilyen feltételt nem kötöttünk ki a ponthalmazra.

Miként módosulnak a pontok maximális számára vonatkozó korlátok, ha csak *gömbi ponthalmazokra* szorítkozunk, vagyis csak olyan pontokat engedünk meg, melyek egy adott távolságra vannak egy adott középponttól?

17. Feladat. ***(Kétféle távolságot meghatározó gömbi halmazok $\mathbb{R}^n$-ben)***

Ha $\mathbb{R}^n$-ben egy gömb felületén keresünk egy olyan ponthalmazt, melyek közötti távolság továbbra is csak kétféle lehet, akkor mennyi lehet ezen pontok maximális száma? (Delsarte-Goethal-Seidel, (1977))

Megoldás. A pontok maximális számára ebben az esetben a következő alsó és felső korlát adható:

$$\binom{n+1}{2} \leq m_g(n) \leq \frac{n(n+3)}{2} \tag{3.2.1}$$

Bizonyítás.

Mivel a gömb középpontjának és sugarának megválasztása nem változtathat a felvehető pontok maximális számán, ezért feltehető, hogy egy origó középpontú egységgömb felszínén helyezkednek el a pontok.

Az alsó korlátra vegyük az előző feladatban hozott példát kétféle távolságot meghatározó ponthalmazra. Vegyük észre, hogy ezek a pontok egyenlő távol vannak az origótól, tehát csak a hosszukkal kell elosztani minden koordinátájukat, a hozott példában ez a hossz $\sqrt{2}$ és így máris az origó középpontú egységgömb felszínén levő pontokat kapjuk.

Mint azt már korábban is említettem, ezekre a pontokra a koordináták összege is ugyanannyi, a normálás után $\frac{2}{\sqrt{2}}$, ezért ezek a pontok egy n dimenziós tér pontjaiként is tekinthetők. Mivel egy n dimenziós hipersík és egy $n+1$ dimenziós gömb felületének a metszete $\mathbb{R}^{n+1}$-ben egy eggyel kisebb dimenziójú gömbnek a felülete, ezért egy n dimenziós gömb felületének a pontjait adtuk meg.

A felső korlátra a bizonyítás hasonlóan megy, mint az általános esetben, de most azt is tudjuk, hogy $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$, ezért f_i függvények lehetséges száma (ami egyben a felvehető pontok száma) csökken, hiszen az alábbi polinomok által generált térben vannak (és továbbra is függetlenek).

$$\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^2}_{1}, \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)}_{1} \cdot x_j, x_i x_j, x_i, 1 \tag{3.2.2}$$

Továbbá:

$$x_1^2 = 1 - \sum_{i=2}^{n} x_i^2$$

miatt még egy polinomot, x_1^2-et ki tudunk fejezni a többi segítségével.

Tehát f_i függvények ezért az alább polinomok által generált téren belül vannak:

$$x_j, \quad \underbrace{x_i x_j}_{\textit{kivéve } i=j=1}, 1 \tag{3.2.3}$$

Ez összesen $n + \binom{n+1}{2} - 1 + 1 = \frac{n(n+3)}{2}$ polinom, tehát az általuk generált altér dimenziója is legfeljebb ennyi lehet, tehát ezen a téren belül a független fi függvények száma is. Ez pedig azt jelenti, hogy a kétféle távolságot meghatározó gömbi ponthalmaz maximális elemszáma is legfeljebb ez lehet. □

Megjegyzés: A polinomok terének vizsgálatával, további kombinatorika eredményekkel foglalkozik [1] 5. fejezete.

3.3. Részhalmazok kétféle szimmetrikus differenciával

18. Feladat. *Legyenek $A_1, \ldots, A_m$ egy n elemű halmaz részhalmazai. Legfeljebb hány ilyen részhalmazt adhatunk meg úgy, hogy a páronkénti szimmetrikus differenciájuk kétféle méretű legyen?*

Megoldás. Ez a feladat kapcsolatot teremt az 1. fejezetben tárgyalt témakör és a kétféle távolsággal bíró halmazok között.

Ahogy azt az első fejezetben tettük itt is célszerű az $A_1, \ldots, A_m$ részhalmazok helyett a karakterisztikus vektoraikat tekinteni.

Ezeket a karakterisztikus vektorokat az első fejezetben leírt módon definiáltakhoz képest úgy módosítjuk, hogy minden 0 koordinátát -1-re cserélünk. Ha ezeket a vektorokat $\mathbb{R}^n$-beli pontok helyvektoraiként értelmezzük, akkor ezek az origótól egyenlő, $\sqrt{n}$ távolságra elhelyezkedő pontok lesznek. (Ezért volt igazából szükség a módosításra). Jelölje a_i egy adott A_i halmazhoz tartozó, módosított karakterisztikus vektort.

Egy k elem pontosan akkor tartozik A_i és A_j szimmetrikus differenciájához, ha módosított karakterisztikus vektoraikban a k. koordináta különbözik, tehát az egyik vektorban 1, a másikban -1. Tehát $\|a_i - a_j\| = |A_i \triangle A_j| \cdot 2^2$. Mivel a halmazok szimmetrikus differenciája kétféle mérető, ezért ez a feltétel ugyanazt jelenti, mint az a feltétel, hogy a pontok között páronként kétféle távolság lép fel, ráadásul a módosított karakterisztikus vektorok mind $\sqrt{n}$ hosszúak, ezért egy gömbfelszín pontjai. Tehát érvényes a pontok számára, azaz $m$re a már belátott felső korlát $\frac{n(n+3)}{2}$.

Ha azonban a 17. feladat bizonyítására tekintünk, akkor a (3.2.3) -ben felsorolt bázispolinomokat tovább csökkenthetjük, hiszen azt is tudjuk, hogy minden f_i-ben a két szorzatból $\pm 2 \cdot x_i \pm \cdot x_i = 4x_i^2$ tagok összege is konstans, mégpedig 4, hiszen midnen a_i koordinátája ± 1. Tehát f_i továbbra is független függvények az alábbi polinomok által generált tér elemei:

$$\underbrace{x_i x_j}_{i \leq j}, x_i, 1 \tag{3.3.1}$$

Ez a tér legfeljebb $\binom{n}{2} + n + 1 = \binom{n+1}{2} + 1$.

3.4. Gosset politóp

A 3.1 és a 3.2 részekben a felvehető pontok maximális számára adtunk alsó és felső korlátot.

A kétféle távolságot meghatározó pontok, illetve gömbi pontok maximális számát ezen részek alapján még nem ismerjük. Tehát nem tudjuk, hogy valóban fel is vehető-e annyi darab pont, amennyit felső korlátként megadtunk a maximális számra, csak azt tudjuk, hogy ennél több pont már biztosan nem vehető fel.

Ezért e fejezet zárásaképpen arról írok, hogy élesek-e a megadott felső korlátok.

Míg a (3.1.4)-ben felállított felső korlátról Bannai és Bannai (1981) bebizonyította, hogy sehol sem éles ([1] hivatkozik [3]-ra), mégpedig úgy, hogy 1-gyel javították azt, addig az utóbbi, a (3.2.1) -ben adott felső korlátról ismerünk három dimenziószámot, $n = 2, 6, 22$, ahol ez a korlát éles, mégpedig kifejezetten érdekes geometriai konfigurációk mutatnak példát a szélsőséges esetekre.

Az alábbiakban az $n = 6$ dimenziójú térben mutatok példát $\frac{n(n+3)}{2}$ pontú halmazra, melyek azonos távolságra vannak az origótól, és közülük bármely két pont távolsága két értéket vesz fel.

19. Feladat. *Igazoljuk példával $n = 6$ esetében a kétféle távolságot meghatározó gömbi ponthalmazok méretére vonatkozó felső korlát élességét.*

Adjunk meg $\mathbb{R}^6$ vektortérben egy 27 pontból álló halmazt, melyekre igaz, hogy a pontok távolságai kétféle értéket vesznek fel.

A Gosset politóp egy 56 pontból álló halmaz $\mathbb{R}^8$-ben, mely a következőképpen adható meg:

Vegyük az összes olyan pontot, melynek a koordinátái a $\{1,1,1,1,1,1,-3,-3\}$ vagy a $\{-1,-1,-1,-1,-1,-1,3,3\}$ halmazok elemeinek egy permutációja.

Így $2 \cdot \binom{8}{2} = 56$ pontból álló halmazt kapunk, melyek egy 7 dimenziós gömb felszínének pontjai, hiszen a $\sum_{i=1}^{8} = 0$ egyenlet által meghatározott hipersík pontjai, valamint mindegyik pontba mutató helyvektor $\sqrt{6 \cdot (\pm 1)^2 + 2 \cdot (\pm 3)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$.

Legyen $A = \{x \in \mathbb{R}^8 | \, (\forall i) \, x_i \in \{1,1,1,1,1,1,-3,-3\}\}$, ahol x_i a P pont i. koordinátáját jelöli.

Hasonlóan $B = \{P \in \mathbb{R}^8 | \, (\forall i) \, P^i \in \{-1,-1,-1,-1,-1,-1,3,3\}\}$.

Ekkor $|A| = |B| = 28$.

A halmaz (és hasonlóan B halmaz) pontjai között fellépő távolságok a két 3as koordináta helyzetétől függően a következők lehetnek:

$$\begin{array}{l|l}
x = (1, \ldots 1, \ldots -3 \ldots -3) & \\
y = (-3, \ldots -3, \ldots 1 \ldots 1) & \|x-y\| = \sqrt{4 \cdot 4^2} = 8 \\
x = (1, \ldots -3, \ldots -3 \ldots 1) & \\
y = (1, \ldots -3, \ldots 1 \ldots -3) & \|x-y\| = \sqrt{2 \cdot 4^2} = 4\sqrt{2}
\end{array}$$

Mi lehet egy A és egy B halmazbeli pont távolsága?

I.
$$\begin{array}{lcccccccc}
x = & (1, & 1, & 1, & 1, & 1, & 1, & -3, & -3) \\
y = & (-1, & -1, & -1, & -1, & -1, & -1, & 3, & 3)
\end{array}$$

$$\|x-y\| = \sqrt{2^2 \cdot 6 + 6^2 \cdot 2} = 4 \cdot \sqrt{6}$$

II.
$$\begin{array}{lcccccccc}
x = (& 1, & 1, & 1, & 1, & 1, & 1, & -3, & -3) \\
y = (& -1, & -1, & -1, & -1, & -1, & 3, & 3, & -1)
\end{array}$$

$$\|x-y\| = \sqrt{2^2 \cdot 7 + 6^2} = \sqrt{64} = 8$$

III.
$$\begin{array}{lcccccccc}
x = (& 1, & 1, & 1, & 1, & 1, & 1, & -3, & -3) \\
y = (& -1, & -1, & -1, & -1, & 3, & 3, & -1, & -1)
\end{array}$$

$$\|x-y\| = \sqrt{2^2 \cdot 8} = 4 \cdot \sqrt{2}$$

A fentiek alapján látható tehát, hogy csak III. esetben kaptunk egy harmadik féle értéket két pont távolságára.

Az A és B ponthalmazok önmagukban egy-egy kétféle távolsággal bíró, hétdimenziós gömbszerű ponthalmazok, a felső korlát a pontok számára ebben az esetben $\frac{7(7+3)}{2} = 35$, tehát ebben az esetben még nem kapunk az éles esetre példát.

Ha a 7 dimenziós Gosset politóp x pontjaira még azt a feltételt is kikötjük, hogy $x_1 + x_2 = 1$, továbbá tudjuk, hogy $\sum_{i=1}^{8} x_i = 0$, akkor a két feltételt összeegyeztetve a $2 - x_2 + x_2 + \sum_{i=3}^{8} x_i = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=3}^{8} x_i = -2$ feltételt kapjuk, mely egy 6 dimenziós affin altér egyenlete.

Alkalmazzuk az $x_1 + x_2 = 2$ feltételt a 7 dimenziós Gosset politópra. Ekkor a fentiek alapján egy 6 dimenziós alakzatot kapunk, ez a 6 dimenziós Gosset politóp.

Ekkor A és B pontjai közül a következők tartoznak az alakzathoz:

$$\begin{array}{lcccl}
x = (& 1, & 1, & \ldots) & \text{(a) típus} \\
y = (& 1, & -3, & \ldots) & \text{(b) típus} \\
z = (& -1, & 3, & \ldots) & \text{(c) típus}
\end{array}$$

Ez a feltétel tehát kizárja III. esetben kapott távolságot, mert a 6 dimenziós Gosset politóp bármely két pontjának koordinátái közül nem fog ugyanazon a helyen állni a két -3-as koordináta, mint a két 3-as.

Az (a) típusú pontokból $\binom{6}{2} = 15$ féle van, hiszen a két 3-as koordináta ennyiféleképp helyezkedhet el, (b) és (c) típusú pontokból $6 - 6$ van, hiszen a másik -3 koordináta $6 - 6$ helyre kerülhet.

Ez összesen 27 pont, melyek egy 6 dimenziós alakzat pontjai, és bármely két pont távolsága 8, vagy $4 \cdot \sqrt{2}$, tehát kétféle távolság lép fel a pontok között. Valamint a pontokhoz tartozó helyvektorok mind egyenlő hosszúak. Mivel $\frac{6 \cdot (6+3)}{2} = 27$ éppen a kétféle távolsággal bíró halmazt alkotó pontok számára vonatkozó felső korlát, ezért ez egy megfelelő példa a korlát élességére 6 dimenzióban.

Visszatekintés

Szakdolgozatom harmadik részében, mely egyben befejezése is munkámnak, visszatekintettem az első részben bemutatott témakör problémáira. A dolgozatban vizsgált extremális problémák, geometriai feladatok között a kapcsolat az alkalmazott módszerek hasonlóságában rejlik.

Hivatkozások

[1] Babai László, Frankl Péter: Linear Algebra Methods in Combinatorics - with Applications to Geometry and Compute Science (1992)

[2] Hermann Péter: Lineáris algebra alkalmazásai c. kurzus, ELTE, 2015/1.

[3] E. Bannai, E.Bannai , (1981) , An upper bound of the cardinality of an s-distance subset in real Euclidean space II, Combinatroica 1, 99-102.

[4] Kiss Emil: Bevezetés az algebrába

[5] Dr. Pelikán József Algebra 1 kurzus, 2012/2013/1.

[6] Dr. Pelikán József Algebra 2 kurzus, 2012/2013/2.