KONVEXITÁS, SZÉLSŐÉRTÉK

SZAKDOLGOZAT

Készítette: **Babák Bence**

Matematika Bsc, Matematika tanári szakirány

Témavezető: Sigray István, műszaki gazdasági tanár

Analízis Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Budapest, 2014.

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Dolgozatomban a szélsőérték és a konvexitás témakörével foglalkozom. Az ezekről tanult ismereteket foglalom össze példákkal és feladatokkal segítve az anyag megértését. Úgy vettem észre, hogy a legtöbb szakon, ahol tanítanak matematikát fontos témakör a szélsőérték számítás, legyen szó gazdasági, természettudományos vagy mérnöki képzésről. Ennek fényében hasznos lehet már középiskolában a szakkörökön vagy emelt óraszámú csoportok óráin bővebb áttekintést adni a témáról. Ezt hivatott segíteni a szakdolgozatom.

Először az egyváltozós szélsőértéket és konvexitást tárgyalom, majd kitekintek a többváltozós szélsőérték problémájára a kétváltozós függvények példáján. A legvégén bemutatok egy algoritmust az egyváltozós polinomfüggvények gyökeinek keresésére, amit Maple-lel támogattam meg.

Szeretnék köszönetet mondani Sigray Istvánnak, akinek az útmutatása és a tanácsai nélkül nem készülhetett volna el a szakdolgozatom.

2. Egyváltozós függvények szélsőértéke

1.1. Definíció. Legyen D halmaz, $f: D \to \mathbb{R}, a \in D$. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az a pontban abszolút minimuma illetve abszolút maximuma van, ha

$$\forall x \in D \text{ esetén } f(x) \geq f(a) \text{ illetve } f(x) \leq f(a).$$

1.2. Definíció. Legyen D halmaz, $f: D \to \mathbb{R}, a \in D$.

i. Azt mondjuk, hogy f lokálisan szigorúan növő illetve fogyó az a pontban, ha $\exists \delta > 0$, hogy bármely $x_1 \in (a - \delta, a + \delta)$, $x_1 < a$ esetén $f(x_1) < f(a)$ illetve $f(x_1) > f(a)$ és bármely $x_2 \in (a - \delta, a + \delta)$, $x_2 > a$ esetén $f(x_2) > f(a)$ illetve $f(x_2) < f(a)$.

ii. Azt mondjuk, hogy f lokálisan növő illetve fogyó az a pontban, ha $\exists \delta > 0$, hogy bármely $x_3 \in (a - \delta, a + \delta)$, $x_3 < a$ esetén $f(x_3) \leq f(a)$ illetve $f(x_3) \geq f(a)$ és bármely $x_4 \in (a - \delta, a + \delta)$, $x_4 > a$ esetén $f(x_4) \geq f(a)$ illetve $f(x_4) \leq f(a)$.

A minimum és a maximum közös elnevezése a szélsőérték.

1.3. Tétel. Ha f differenciálható a −ban, és f az a pontban lokálisan növő, akkor $f'(a) \geq 0$. Ugyanígy, ha f az a pontban lokálisan fogyó, akkor $f'(a) \leq 0$.

1.4. Definíció. Legyen D halmaz, $f: D \to \mathbb{R}, a \in D$.

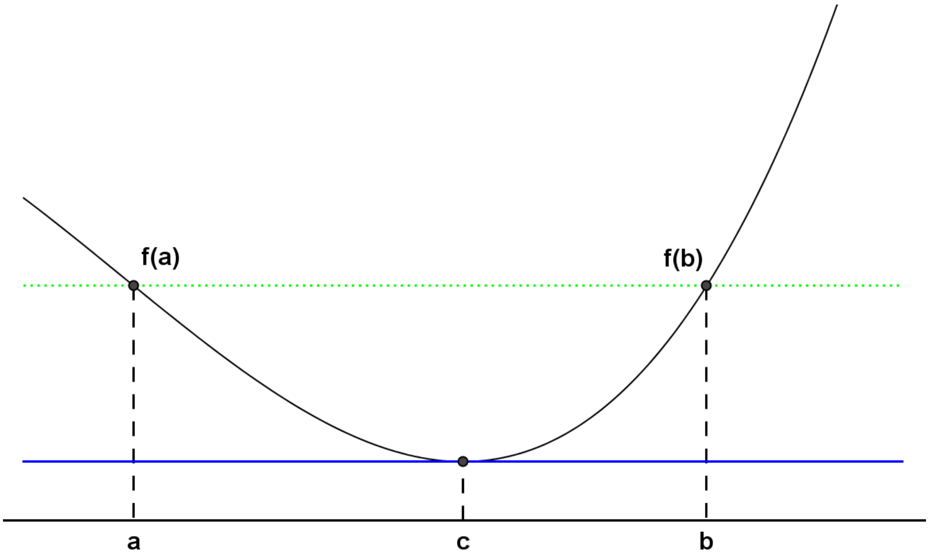
1. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az a pontban lokális minimuma van, ha $\exists \delta > 0$, hogy $\forall x \in (a - \delta, a + \delta) \cap D$ esetén $f(x) \geq f(a)$.
2. Szigorú lokális minimum akkor van, ha $\forall x \in (a - \delta, a + \delta) \cap D$ esetén $f(x) > f(a)$.
3. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az a pontban lokális maximuma van, ha $\exists \delta > 0$, hogy $\forall x \in (a - \delta, a + \delta) \cap D$ esetén $f(x) \leq f(a)$.
4. Szigorú lokális minimum akkor van, ha $\forall x \in (a - \delta, a + \delta) \cap \mathrm{D}$ esetén $f(x) < f(a)$.

1.5. Tétel (Lokális szélsőérték szükséges feltétele). Ha f differenciálható a −ban, és az f függvénynek lokális szélsőértéke van az a pontban, akkor $f'(a) = 0$.

1.5.2. Példa. Legyen $g(x) = x^3$. A $g'(x) = 3x^2$ derivált függvény a 0 −ban 0 −t vesz fel, és még sincs ott szélsőértéke.

1.6. Tétel. (Weierstrass-tétel). Korlátos és zárt intervallumon értelmezett folytonos függvény felveszi minimumát és maximumát.

1.7. Tétel. (Rolle-tétel). Ha f folytonos $[a, b]$ −n, f differenciálható (a, b) −n és $f(a) = f(b)$, akkor létezik olyan $c \in (a, b)$, hogy $f'(c) = 0$.

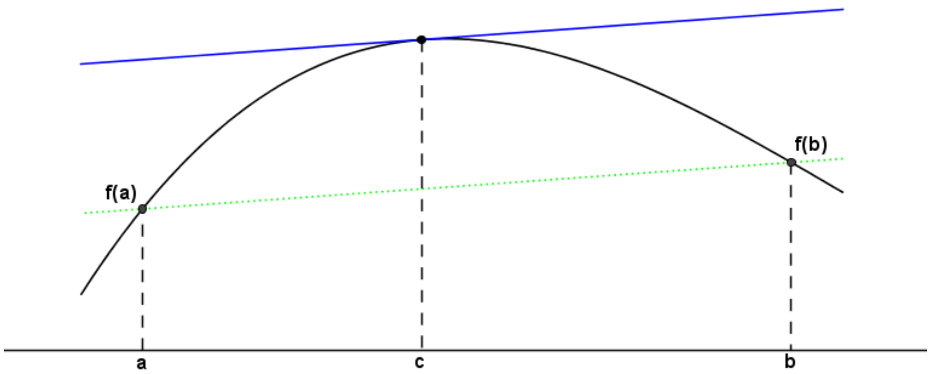


2.1. ábra

1.7.1. Megjegyzés. A tétel a Weierstrass-tétel és a 1.3. Tétel segítségével látható be.

1.8. Tétel. (Lagrange-féle középértéktétel). Legyen f folytonos $[a, b]$ −n f differenciálható (a, b) −n. Ekkor $\exists c \in (a, b)$ olyan, hogy

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$



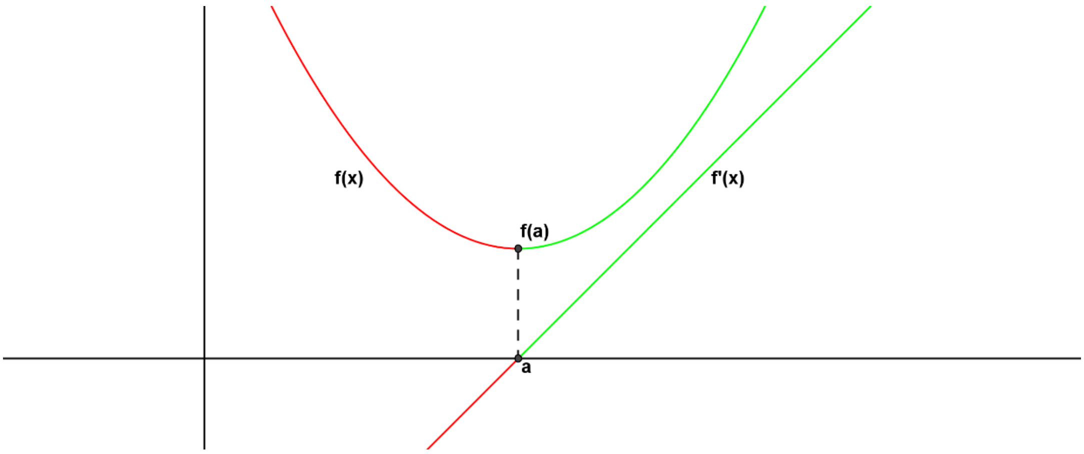
2.2. ábra

1.8.1. Megjegyzés. A Lagrange-féle középértéktétel a Rolle-tétel általánosítása. Legyen $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. Ekkor teljesül a Rolle-tétel, mert $g(a) = f(a)$ és $g(b) = f(a)$, így van olyan $x_0 \in (a,b)$, melyre teljesül a $g'(x_0) = 0$, azaz $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

1.8.2. Megjegyzés. A 2.2. ábrán látszik, hogy lesz legalább egy olyan pontja a függvénynek, melyben a függvény pontbeli érintője párhuzamos a két végpontra illeszkedő egyenessel.

1.9. Tétel. (monotonitás elégséges feltétele). Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, f differenciálható I −n. Ha minden $x \in I$ pontban

i.	$f'(x) \geq 0$, akkor	f monoton nő I −n,
ii.	$f'(x) > 0$, akkor	f szigorúan monoton nő I −n,
iii.	$f'(x) \leq 0$, akkor	f monoton fogy I −n,
iv.	$f'(x) < 0$, akkor	f szigorúan monoton fogy I −n.



2.3. ábra

1.9.1. Megjegyzés. A tétel a Lagrange-féle középértéktétellel bizonyítható. Legyen például x belső pontja az I −nek, $f'(x) > 0$, és legyen $x < y$, $x, y \in I$. Ekkor a középértéktétel szerint

$$f(x) - f(y) = f'(c)(y - x) > 0.$$

1.9.2. Példa. Nézzük a $f(x) = \cos x$ függvényt az $I = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumon. Ekkor $f'(x) = -\sin x$. Az $f'(x)$ pozitív $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ −n, tehát $f(x)$ ezen az intervallumon szigorúan monoton nő, ugyanígy $f'(x)$ negatív $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ −n, tehát $f(x)$ ezen az intervallumon szigorúan monoton csökken.

1.9.3. Példa. Legyen $f(x)=x^3$. Az f függvény szigorúan monoton növő $\mathbb{R}$ −en, mégis $f'(0)=0$.

1.10. Definíció. Legyen a belső pontja g értelmezési tartományának. Ha létezik $\delta>0$, hogy $g(a)=0$, és $\forall x\in(a-\delta,a)$ esetén $g(a)\geq 0$ és $\forall x\in(a,a+\delta)$ esetén $g(a)\leq 0$ vagy fordítva, akkor azt mondjuk, hogy g előjelet vált a −ban.

1.11. Definíció. Az f függvény kritikus pontjának nevezzük f értelmezési tartományának minden olyan pontját, amelyben f' derivált függvény értéke 0, vagy nincs értelmezve.

1.12. Tétel. (lokális szélsőérték elégséges feltétele). Legyen $I\subset\mathbb{R}$ nyílt intervallum, legyen f differenciálható I −n, és $a\in I$. Ha f' előjelet vált a −ban, akkor f −nek lokális szélsőértéke van a −ban. Mégpedig, ha $\exists\delta>0$, hogy $\forall x\in(a-\delta,a)$ esetén $f'(x)\geq 0$ és $\forall x\in(a,a+\delta)$ esetén $f'(x)\leq 0$, akkor a lokális maximumhely. Ha $\forall x\in(a-\delta,a)$ esetén $f'(x)\leq 0$ és $\forall x\in(a,a+\delta)$ esetén $f'(x)\geq 0$, akkor a lokális minimumhely.

1.12.1.Megjegyzés. A Lagrange-féle középértéktétellel bizonyítható.

1.12.2. Példa. Nézzük az $f(x)=x^2-4x+7$ függvényt az $I=\mathbb{R}$ számegyenesen. Először meg kell néznünk, hogy hol lesz a deriváltfüggvény 0.

$$f'(x)=2x-4=0\Leftrightarrow x=2.$$

Ilyenkor érdemes egy táblázatot készíteni az intervallumokkal, a deriváltfüggvénnyel és az eredeti függvénnyel.

	$x\in(-\infty,2)$	$x=2$	$x\in(2,\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$fogyó$	$lokális\ minimum$	$növő$

Tehát f $-$nek 2 $-$ben lokális minimuma van, ami abszolút minimum is, mert a függvény $(-\infty, 2)$ $-$n szigorúan monoton fogy és $(2, \infty)$ $-$en szigorúan monoton nő.

1.13. Tétel. Legyen f differenciálható $I \subset \mathbb{R}$ $-$en, és kétszer differenciálható egy $a \in \operatorname{int} I$ pontban. Tegyük fel, hogy $f''(a) = 0$. Ekkor ha

i. $f''(a) < 0$, akkor a szigorú lokális maximumhely,
ii. $f''(a) > 0$, akkor a szigorú lokális minimumhely.

1.13.1. Példa. Nézzük az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$ függvényt! Ekkor $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$ és $f''(x) = 6x + 6$. Először meg kell keresni, $f'(x)$ gyökeit: $x_1 = -3$ és $x_2 = 1$. Ezután meg kell vizsgálni a második deriváltat x_1 $-$ben és x_2 $-$ben:

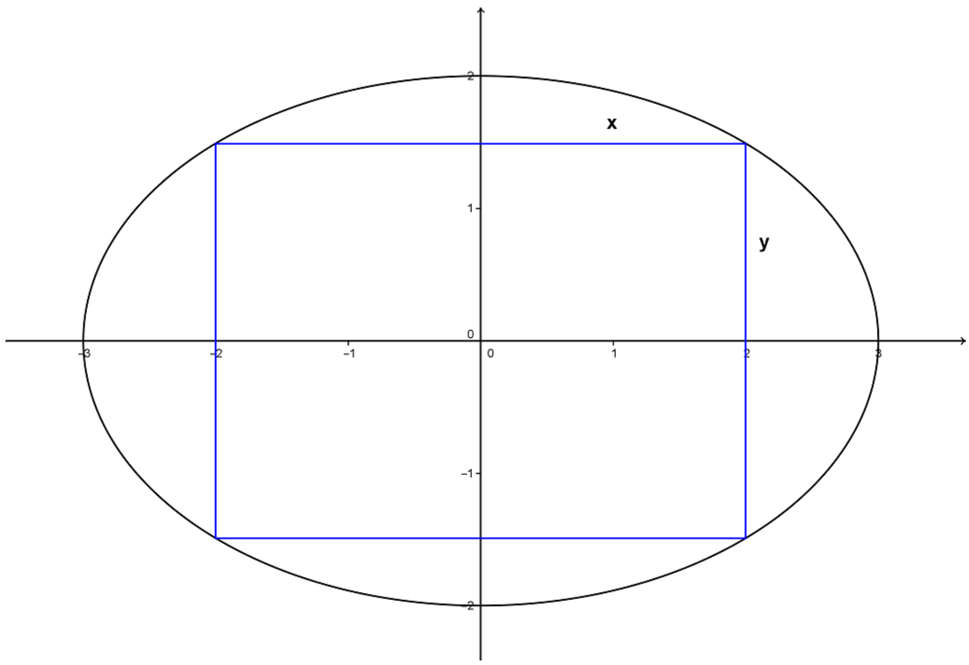
$$f''(-3) = 6 \cdot (-3) + 6 = -12 < 0 \Rightarrow x_1 = -3 \text{ lokális maximumhely,}$$

$$f''(1) = 6 \cdot 1 + 6 = 12 > 0 \Rightarrow x_2 = 1 \text{ lokális minimumhely.}$$

1.14. Tétel. (Bolzano-tétel). Intervallumon értelmezett, negatív és pozitív értékeket is felvevő, folytonos függvénynek van zérushelye.

2. Egyváltozós szélsőérték feladatok

2.1. Feladat.[1] Írjunk a $4x^2 + 9y^2 = 36$ egyenletű ellipszisbe maximális területű téglalapot. Mekkorák a téglalap oldalai?



2.1. ábra

A téglalap x tengellyel párhuzamos oldalainak hossza $2x$, az y tengellyel párhuzamos oldalának hossza $2y$. Innen a téglalap területe $4xy$. Területet akarunk számolni, így tegyük fel, hogy $x, y > 0$.

Ezután az ellipszis egyenletéből kifejezzük y-t az x segítségélvel.

$$4x^2 + 9y^2 = 36 \Rightarrow x^2 = 9 - \frac{9}{4}y^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9 - \frac{9}{4}y^2}$$

Itt $x > 0$ miatt a gyökjel előtt nem lehet negatív előjel.

A kapott kifejezést visszahelyettesítjük.

$$T(y) = 4y\sqrt{9 - \frac{9}{4}y^2} = 12y\sqrt{1 - \frac{y^2}{4}}$$

A $T(y)$ értelmezési tartománya $y \in \mathbb{R}^+$. Meg kell keresni, hogy hol vesz fel $0-$t a deriváltfüggvény.

$$T'(y) = \frac{-12y^2 + 24}{\sqrt{-y^2 + 4}} = 0 \Leftrightarrow (-12y^2 + 24) = 0 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2}$$

A korábbi feltétel miatt y nem lehet $-\sqrt{2}$. Táblázat segítségével megnézzük, hogy $y = \sqrt{2}$ $-$ben van-e lokális szélsőérték.

	$0 < y < \sqrt{2}$	$y = \sqrt{2}$	$\sqrt{2} < y$
$T'(y)$	$+$	0	$-$
$T(y)$	$nő$	$abszolút\ maximum$	$fogy$

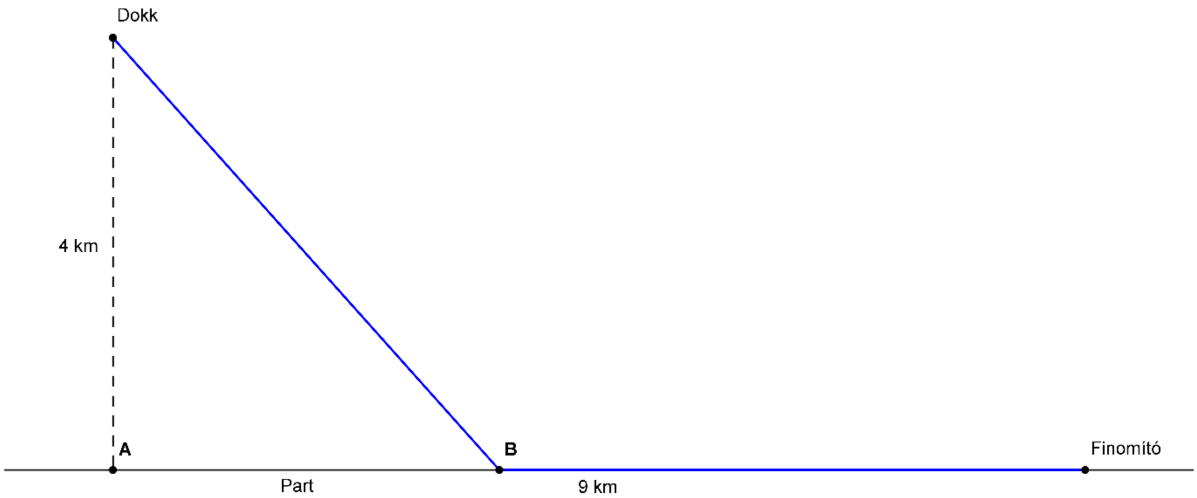
Az $y = \sqrt{2}$ $-$ben abszolút maximum van, és mivel $T(y)$ a $(0, \sqrt{2})$ intervallumon szigorúan monoton nő, a $(\sqrt{2}, \infty)$ intervallumon pedig szigorúan monoton csökken.

$y = \sqrt{2}$ $-$t visszahelyettesítjük az x $-$re kapott képletbe.

$$x = \sqrt{9 - \frac{9}{4}\sqrt{2}^2} \Rightarrow x = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

A keresett téglalapban az oldalak hossza $2\sqrt{2}$ és $3\sqrt{2}$, és a hozzájuk tartozó terület 12.

2.2. Feladat.[2] **Az óriástankerek a parttól négy kilométerre lévő dokkban rakják ki az olajat. A legközelebbi finomító a szárazföldnek a dokkhoz legközelebb eső pontjához 9 kilométerre keletre van. Csővezetéket kell építeni a dokk és a finomító között. A csővezeték mérföldje 300 000 dollárba kerül, ha víz alatt halad, 200 000 dollárba, ha szárazföldön. Jelöljük ki B pont jelét úgy, hogy az építési költségek a lehető legkisebbek legyenek.**



2.2. ábra

Az ábrán kékkel jelölt szakasz hosszát kell úgy megválasztanunk, hogy minimálisak legyenek a költségek.

Nevezzük el az A-val és a B-vel határolt szakaszt x-nek. Ekkor a B ponttól a finomítóig a távolság $9 - x$, és $0 \leq x \leq 9$. A dokk és a B pont távolsága $\sqrt{x^2 + 16}$. A csővezeték ezen része fog a víz alatt haladni, a szárazföldön futó csővezeték hossza pedig $9 - x$. A kiszámolt adatok és az árak segítségével fel tudjuk írni a csővezeték árát leíró függvényt:

$$f(x) = 300000 \cdot \sqrt{x^2 + 16} + 200000 \cdot (9 - x).$$

Az $f(x)$ függvény deriváltfüggvénye:

$$f'(x) = \frac{300000x - 200000 \cdot \sqrt{x^2 + 16}}{\sqrt{x^2 + 16}}.$$

$$\frac{300000x - 200000 \cdot \sqrt{x^2+16}}{\sqrt{x^2+16}} = 0 \Leftrightarrow 300000x - 200000 \cdot \sqrt{x^2+16} = 0$$

Ezt átrendezve eljutunk az $1{,}25x = \sqrt{x^2+16}$ egyenlethez. Utána a kifejezést négyzetre emeljük és átrendezzük: $x^2 = \frac{64}{5}$. Ebből megkapjuk a lehetséges szélsőértékhelye: $\pm\frac{8\sqrt{5}}{5}$. A $-\frac{8\sqrt{5}}{5}$ kisebb, mint 0, így nem lehet megoldás.

	$x=0$	$0 < x < \frac{8\sqrt{5}}{5}$	$x = \frac{8\sqrt{5}}{5}$	$\frac{8\sqrt{5}}{5} < x < 9$	$x = 9$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$fogy$	$fogy$	$abszolút$ $mimimum$	$nő$	nő

Valóban akkor lesz minimális a csővezeték építésének költsége, ha $x = \frac{8\sqrt{5}}{5}$. Tehát a szárazföldi csővezeték hossza $9 - \frac{8\sqrt{5}}{5}$ km ($\approx 5{,}42\ km$), míg a víz alatt futó csővezeték hossza $\sqrt{\frac{8\sqrt{5}}{5} + 16}$ ($\approx 4{,}42\ km$).

2.3. Feladat.[3] **Az $\boldsymbol{f(x) = a \ln x + bx^2 + x}$ függvénynek milyen $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ értékek mellett lesz $\boldsymbol{x_1 = 1}$ és $\boldsymbol{x_2 = 2}$ helyen lokális szélsőértéke? Igazolja, hogy a meghatározott $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ értékek mellett a függvénynek $\boldsymbol{x_1 = 1}$ helyen lokális minimuma, $\boldsymbol{x_2 = 2}$ helyen lokális maximuma van!**

Ha f-nek lokális szélsőértéke van az lesz $x_1 = 1$ és az $x_2 = 2$ helyen, akkor a deriváltfüggvénynek mindkét helyen 0-nak kell lennie.

$$f'(x) = \frac{a}{x} + 2bx + 1$$

$$f'(1) = \frac{a}{1} + 2b \cdot 1 + 1 = 0 \text{ és } f'(2) = \frac{a}{2} + 4b + 1 = 0$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$a + 2b + 1 = 0 \Rightarrow a = -2b - 1$$

$$\frac{-2b-1}{2}+4b+1=0 \Rightarrow b=-\frac{1}{6} \Rightarrow a=-\frac{2}{3}$$

Tehát a keresett függvény az

$$f(x)=-\frac{2}{3}\ln x-\frac{1}{6}x^2+x.$$

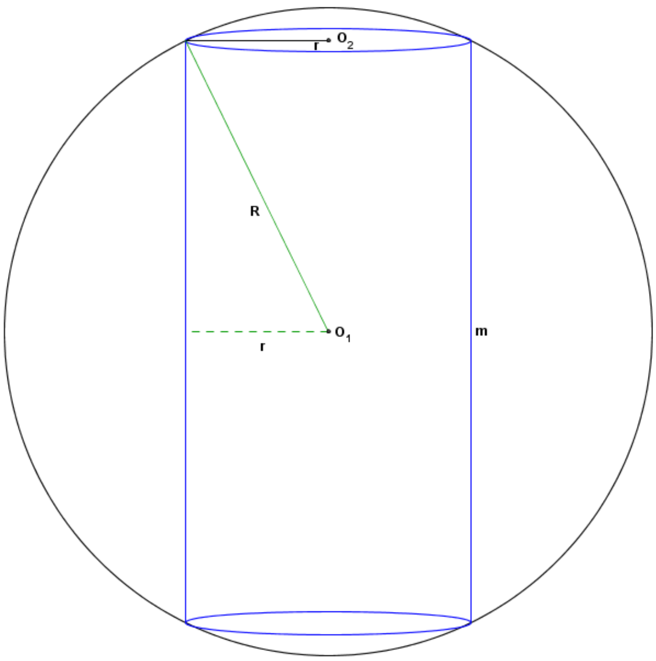
Most azt kell belátni, hogy a függvénynek az $x_1=1$ helyen lokális minimuma, és az $x_2=2$ helyen lokális minimuma van. Ehhez meg kell nézni a második derivált előjelét a megadott helyeken.

$$f''(x)=-\frac{1}{3}+\frac{2}{3x^2}$$

$f''(x_1=1)>0 \Rightarrow$ lokális minimum van $x_1=1$ –ben.

$f''(x_2=2)<0 \Rightarrow$ lokális maximum van $x_2=2$ –ben.

2.4. Feladat.[1] Melyik a gömbbe írható maximális térfogatú henger?



2.3. ábra

Az R a gömb sugara, az r a henger alapkörének sugara, m pedig a henger magassága. A henger térfogata kiszámítható a $V = r^2\pi \cdot m$ képlettel, ahol az ábra szerint

$$m = 2 \cdot \sqrt{R^2 - r^2}$$

A térfogatfüggvény a következő lesz:

$$V(r) = r^2\pi \cdot 2 \cdot \sqrt{R^2 - r^2}$$

Ekkor $0 < r < R$.

A függvénynek ott lehet szélsőértéke, ahol a deriváltfüggvény értéke 0.

$$V'(r) = \frac{-2\pi \cdot r^3 + 4\pi \cdot r \cdot (R^2 - r^2)}{\sqrt{R^2 - r^2}} = 0$$

$$V'(r) = 0 \Leftrightarrow -2\pi \cdot r^3 + 4\pi \cdot r \cdot (R^2 - r^2) = 0$$

$$-2\pi \cdot r^3 + 4\pi \cdot r \cdot (R^2 - r^2) = \pi \cdot r \cdot (-3r^2 + 2R^2) = 0 \Leftrightarrow r = 0 \text{ vagy} - 3r^2 + 2R^2 = 0$$

$$r_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{24R^2}}{6} \Rightarrow r_1 = \frac{\sqrt{6}R^2}{3} \text{ és } r_2 = -\frac{\sqrt{6}R^2}{3}, \text{és fentről } r_3 = 0.$$

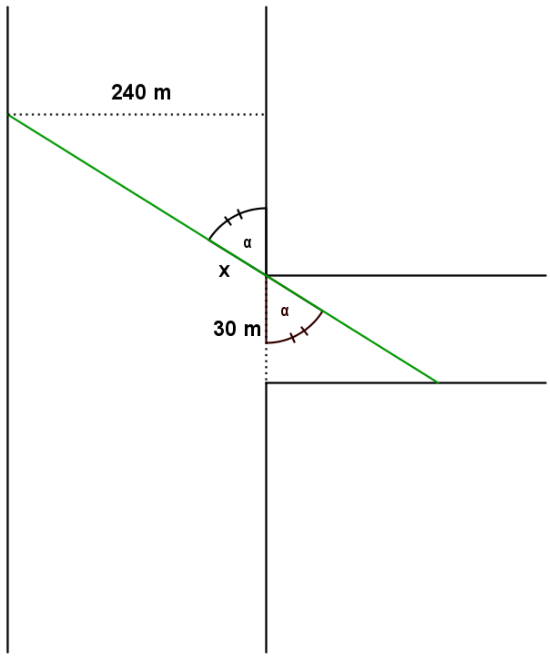
Az r_2 és az r_3 nem megoldás, mert nincsenek benne a megadott intervallumban.

Ha a deriváltfüggvény r_1-ben előjelet vált, akkor ott szélsőérték helye van. Ha pozitívból negatívba vált, akkor lokális maximum, ha negatívból pozitívba, akkor lokális minimum található r_1-ben.

	$0 < r < \frac{\sqrt{6}R^2}{3}$	$r = \frac{\sqrt{6}R^2}{3}$	$\frac{\sqrt{6}R^2}{3} < r < R$
$V'(r)$	$+$	0	$-$
$V(r)$	$nő$	$abszolút\ maximum$	$fogy$

A $V(r)$ függvény a $\left(0, \frac{\sqrt{6}R^2}{3}\right)$ intervallumon szigorúan monoton nő, a $\left(\frac{\sqrt{6}R^2}{3}, R\right)$ intervallumon szigorúan monoton csökken, így $\frac{\sqrt{6}R^2}{3}$ –ben abszolút maximuma van a függvénynek. Tehát akkor kapjuk meg a gömbbe írható maximális hengert, ha a henger alapkörének a sugarának $\frac{\sqrt{6}R^2}{3}$ −at választjuk, ahol R a gömb sugara.

2.5. Feladat.[1] Egy 240 m szélességű folyóból a folyó irányára merőlegesen 30 m szélességű csatorna indul ki. Mekkora annak a leghosszabb hajónak a hosszúsága, amely a folyóból a csatornába be tud fordulni? (A hajó szélességét hanyagoljuk el)



2.4. ábra

Legyen α a hajó és a folyó iránya által bezárt szög ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$). Az x hosszúságot megkapjuk, ha összeadjuk a $240 \cdot \frac{1}{\sin\alpha}$ és a $30 \cdot \frac{1}{\cos\alpha}$ kifejezéseket. Ennek az összegnek keressük a minimumát $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ −n.

$$l(\alpha) = 240 \cdot \frac{1}{\sin\alpha} + 30 \cdot \frac{1}{\cos\alpha}$$

$$l'(\alpha) = 30 \frac{1}{\cos\alpha} \operatorname{tg}\alpha - 240 \frac{1}{\sin\alpha} \operatorname{ctg}\alpha$$

A függvénynek ott lehet szélsőértéke, ahol a $l'(\alpha) = 0$.

$$l'(\alpha) = 0 \;\Leftrightarrow 30\frac{1}{\cos\alpha}\operatorname{tg}\alpha = 240\frac{1}{\sin\alpha}\operatorname{ctg}\alpha \Leftrightarrow 30\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} = 240\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$$

$$\sin^3\alpha = 8\cos^3\alpha \Leftrightarrow \operatorname{tg}\alpha = 2 \Leftrightarrow \alpha = \operatorname{arctg} 2$$

Tehát a függvénynek arctg 2 helyen lehet szélsőértéke.

	$0 < \alpha < arctg\,2$	$\alpha = arctg\,2$	$arctg\,2 < \alpha < \frac{\pi}{2}$
$l'(\alpha)$	$-$	0	$+$
$l(\alpha)$	$fogy$	$abszolút\ minimum$	$nő$

A függvénynek az $\alpha = \operatorname{arctg} 2$ helyen lokális minimumhelye van, melyben az értéke körülbelül 335,41. Az arctg 2 előtt az l függvény szigorúan monoton fogy, utána szigorúan monoton nő, tehát arctg 2 −ben abszolút minimuma van.

Tehát legfeljebb 335,41 m annak a hajónak a hossza, amely a folyóból a csatornába be tud fordulni.

2.5.1. Megjegyzés. Ennek a feladatnak az az érdekessége, hogy látszólag egy maximumot keresünk, valójában viszont egy minimumot. Azt számoltuk ki, hogy körülbelül 335,41 m-nél hosszabb hajó biztosan nem tud befordulni.

2.6. Feladat.[4] Legyen $f(x) = log_a(x) - x$, ahol $a > 1$.

a) **Bizonyítsd be, hogy a függvénynek van maximuma!**
b) **Milyen $a > 1$ esetén lesz a maximum legalább 0?**
c) **Milyen $a > 1$ esetén lesz az $f(x)$ függvénynek zérushelye?**

Legelőször ki kell kötni, hogy $x > 0$, mert a logaritmus függvények a $(0, \infty)$ intervallumon vannak értelmezve.

a) Az $f(x)$ függvénynek akkor lesz abszolút maximuma $x_0 \in (0, \infty)$ helyen, ha az $f'(x)$ deriváltfüggvény az x_0 helyen 0, és $f'(x)$ előjelet vált x_0 −ban, mégpedig pozitívből negatívba vált, és a $(0, x_0)$ intervallumon $f(x)$ monoton nő, (x_0, ∞) −en monoton csökken.

$$f'(x) = \frac{1}{x \ln a} - 1 = 0$$

$$x_0 = \frac{1}{\ln a}$$

	$x \in \left(0, \frac{1}{\ln a}\right)$	$x = \frac{1}{\ln a}$	$x \in \left(\frac{1}{\ln a}, \infty\right)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$monoton\ nő$	$abszolút\ maximum$	$monoton\ fogy$

Tehát az $f(x) = log_a(x) - x$ függvénynek abszolút maximuma van az $x_0 = \frac{1}{\ln a}$ helyen.

b) Ebben a feladatrészben a maximumhelyen felvett értéket kell megvizsgálnunk.

$$f\left(\frac{1}{\ln a}\right) = log_a\left(\frac{1}{\ln a}\right) - \frac{1}{\ln a} \geq 0$$

$$log_a\left(\frac{1}{\ln a}\right) \geq \frac{1}{\ln a}$$

Az e alapú logaritmust átírva a alapú logaritmusra.

$$log_a\left(\frac{1}{\frac{log_a(a)}{log_a(e)}}\right) \geq \frac{1}{\frac{log_a(a)}{log_a(e)}}$$

$$log_a\big(log_a(e)\big) \geq log_a(e)$$

$$log_a(e) \geq e$$

$$log_a(e) \geq log_a(a^e)$$

$$e \geq a^e$$

$$\sqrt[e]{e} \geq a$$

Az $f(x) = log_a(x) - x$ függvénynek akkor lesz legalább 0 a maximuma, ha $a \in (1, \sqrt[e]{e}]$.

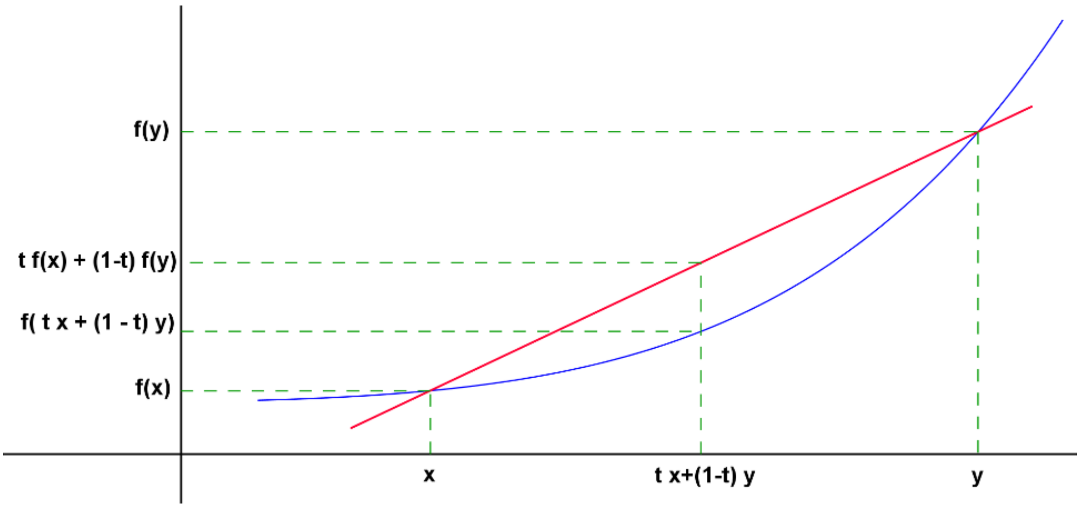
c) Az utolsó feladatrész következik az előző kettő feladatrész eredményeiből. Egyrészt tudjuk, hogy az $f(x) = log_a(x) - x$ függvénynek $a > 1$ esetén maximuma van, másrészt akkor lesz ez a maximum legalább 0, ha $a \in (1, \sqrt[e]{e}]$. Így a Bolzano-tétel szerint pontosan akkor lesz zérushelye $f(x)$ $-$nek, ha $a \in (1, e^e]$. Mégpedig, ha $a \in (1, \sqrt[e]{e})$, akkor 2 zérushelye lesz, ha $a = \sqrt[e]{e}$, akkor pedig 1.

3. Konvexitás

Amikor a második deriválttal vizsgáltuk, hogy egy adott pontban lokális maximum vagy lokális minimum van, akkor voltaképp azt néztük meg, hogy a pontbeli vízszintes érintő lokálisan a függvénygrafikon felett vagy alatta helyezkedik el. Differenciálható függvények esetén a szigorú konvexség illetve szigorú konkávság pontosan azt jelenti, hogy a pontbeli érintő lokálisan a függvénygrafikon fölött vagy alatt helyezkedik el. A szigorú konvexséget illetve konkávságot azonban nem csak differenciálható függvényre fogjuk definiálni.

3.1. Definíció. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $f: I \to \mathbb{R}$. Ha $\forall x, y \in I$ és $\forall t \in [0,1]$ esetén

1. $f(tx + (1-t)y \leq t \cdot f(x) + (1-t) \cdot f(y)$, akkor f konvex I $-$n,
2. $f(tx + (1-t)y < t \cdot f(x) + (1-t) \cdot f(y)$, akkor f szigorúan konvex I $-$n,
3. $f(tx + (1-t)y \geq t \cdot f(x) + (1-t) \cdot f(y)$, akkor f konkáv I $-$n,
4. $f(tx + (1-t)y > t \cdot f(x) + (1-t) \cdot f(y)$, akkor f szigorúan konkáv I $-$n.

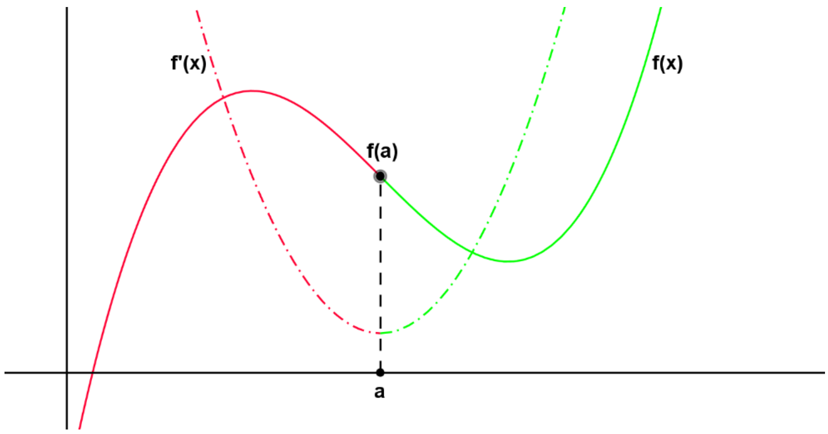


3.1. ábra

3.1.1. Megjegyzés. A 3.1-es ábrán látható, hogy konvex függvény esetén minden húr az f függvény grafikonja felett halad.

3.2. Tétel. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, f differenciálható I −n. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek:

i. f konvex illetve konkáv I −n;
ii. f' monoton növő illetve fogyó I −n.



3.2. ábra

3.3. Tétel. Legyen f kétszer differenciálható I −n. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek:

i. f konvex illetve konkáv I −n;
ii. $\forall x \in I$ esetén $f''(x) \geq 0$ illetve $f''(x) \leq 0$.

Valamint

i. f szigorúan konvex illetve szigorúan konkáv I −n;
ii. $\forall x \in I$ esetén $f''(x) > 0$ illetve $f''(x) < 0$.

3.4. Definíció. Legyen D halmaz, $f: D \to \mathbb{R}, a$ a D belső pontja. Tegyük fel, hogy f differenciálható a −ban. Azt mondjuk, hogy az a pont az f függvénynek inflexiós pontja, ha $\exists \delta > 0$ olyan, hogy $f\big|_{(a-\delta,a]}$ szigorúan konvex és $f\big|_{[a,a+\delta)}$ szigorúan konkáv, vagy fordítva.

Vagyis röviden, ha f differenciálható a −ban és f az a −ban konvexitást vált.

3.5. Tétel. Legyen f differenciálható I −n és f kétszer differenciálható az $a \in I$ pontban. Ha az a az f függvénynek inflexiós pontja, akkor $f''(a) = 0$.

3.6. Tétel. Legyen f kétszer differenciálható I $-$n, $a \in \operatorname{int} I$. Ekkor az alábbiak ekvivalensek:

i. f $-$nek az a pont inflexiós pontja;
ii. f'' előjelet vált a $-$ban.

3.7. Tétel.[5] (Jensen-egyenlőtlenség). Legyen egy $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon az f függvény konvex, $a_1, \dots, a_n \in I$ $p_1, \dots, p_n$ nem negatív számok, amikre teljesül, $p_1 + \cdots + p_n = 1$. Ekkor

$$f(p_1 a_1 + \cdots + p_n a_n) \leq p_1 f(a_1) + \cdots + p_n f(a_n).$$

Ha f konvex, akkor

$$f(p_1 a_1 + \cdots + p_n a_n) \geq p_1 f(a_1) + \cdots + p_n f(a_n).$$

Ha f szigorúan konvex vagy konkáv, akkor az egyenlőség csak az $a_1 = \cdots = a_n$ esetben teljesül.

3.7.1. Példa.[5] Legyen $f(x) = x^2$, ami szigorúan konvex a valós számok halmazán, így ha $a_1, \dots, a_n$ tetszőleges, $p_1, \dots, p_n = \frac{1}{n}$, akkor

$$\left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right)^2 \leq \frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n},$$

ami a számtani és a négyzetes közép közötti egyenlőtlenség. Egyenlőség csak akkor áll fenn, ha $a_1 = \cdots = a_n$.

4. Kétváltozós függvények lokális szélsőértékei

A kétváltozós esetben egy abszolút maximum kiszámítása sokkal nehezebb, mint az egyváltozós esetben. Nem lehet táblázatot készíteni, sokszor peremen kell szélsőértéket keresni, ami rendkívül bonyolult. Amit az egyváltozós esetből viszonylag egyszerűen át lehet vinni, az a lokális szélsőérték kiszámítása.

4.1. Definíció. Legyen $D \subset \mathbb{R}^2$, $f: D \to \mathbb{R}, (a,b) \in \operatorname{int} D$. Az f függvény x szerinti vagy első változó szerinti parciális deriváltja létezik az (a,b) −ben, ha

$$\exists \lim_{x \to a} \frac{f(x,b) - f(a,b)}{x-a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h} \in \mathbb{R}.$$

4.1.1. Megjegyzés. Jelölés: $D_1 f(a,b)$. Tulajdonképpen az (a,b) pont második koordinátáját lerögzítjük (konstansként kezeljük), és az így kapott egyváltozós függvényt deriváljuk a −ban.

4.2. Definíció. Legyen $D \subset \mathbb{R}^2$, $f: D \to \mathbb{R}, (a,b) \in \operatorname{int} D$. Az f függvény y szerinti vagy második változó szerinti parciális deriváltja létezik az (a,b) −ben, ha

$$\exists \lim_{y \to b} \frac{f(a,y) - f(a,b)}{y-b} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a,b+h) - f(a,b)}{h} \in \mathbb{R}.$$

4.3. Definíció. Az $f: D \to \mathbb{R}$ $(D \subset \mathbb{R}^2)$ függvény első illetve második parciális derivált függvénye $D_1 f: D \to \mathbb{R}$ illetve $D_2 f: D \to \mathbb{R}$

$$\mathcal{D}(D_1 f) = \{(x,y) \in \operatorname{int} D : \exists D_1 f(x,y)\}, \qquad (D_1 f)(x,y) \coloneqq D_1 f(x,y)$$

$$\mathcal{D}(D_2 f) = \{(x,y) \in \operatorname{int} D : \exists D_2 f(x,y)\}, \qquad (D_2 f)(x,y) \coloneqq D_2 f(x,y)$$

4.4. Definíció. Az $f: D \to \mathbb{R}$ $(D \subset \mathbb{R}^2)$ másodrendű parciális deriváltjait az első illetve a második parciális derivált függvények további parciális deriváltjaiból nyerjük:

$$D_{11} f \coloneqq D_1(D_1 f), \qquad D_{12} f \coloneqq D_1(D_2 f), \qquad D_{21} f \coloneqq D_2(D_1 f), \qquad D_{22} f \coloneqq D_2(D_2 f).$$

4.5. Definíció. Az $f: D \to \mathbb{R}$ $(D \subset \mathbb{R}^2)$ függvénynek lokális minimuma illetve lokális maximuma (lokális szélsőértéke) van az $(a, b) \in \operatorname{int} D$ pontban, ha (a, b) −nek létezik olyan $U = B\big((a, b), r\big)$ környezete, hogy

$$f(x, y) \geq f(a, b) \text{ illetve } f(x, y) \leq f(a, b), \qquad \forall (x, y) \in U.$$

Az $f(a, b) \in \mathbb{R}$ szám az f lokális minimuma illetve lokális maximuma (a, b) −ben. Ha

$$f(x, y) > f(a, b) \text{ illetve } f(x, y) < f(a, b), \qquad \forall (x, y) \in U$$

teljesül, akkor f-nek szigorú lokális minimuma illetve szigorú lokális maximuma (szigorú lokális szélsőértéke) van (a, b) −ben.

4.6. Tétel. Ha az $f: D \to \mathbb{R}$ $(D \subset \mathbb{R}^2)$ függvénynek az $(a, b) \in \operatorname{int} D$ pontban lokális szélsőértéke van, és léteznek a parciális deriváltjai (a, b) −ben, akkor

$$D_1 f(a, b) = D_2 f(a, b) = 0.$$

4.6.1. Megjegyzés. A tétel nem ad elégséges feltételt a szélsőérték létezésére.

4.6.2. Példa. Legyen $f(x, y) = xy$. Ekkor $D_1 f(0,0) = D_2 f(0,0) = 0$, még sincs lokális szélsőértéke $(0,0)$ −ban.

4.7. Tétel. Legyen f az A korlátos és zárt halmazon értelmezett folytonos függvény, és tegyük fel, hogy f −nek léteznek a parciális deriváltjai $\operatorname{int} A$ pontjaiban. Ekkor f a legkisebb és a legnagyobb értékét vagy ∂A −n veszi fel, vagy $\operatorname{int} A$ egy olyan pontjában, ahol $D_1 f(a, b) = D_2 f(a, b) = 0$.

4.8. Definíció. Legyen $f: D \to \mathbb{R}$ $(D \subset \mathbb{R}^2)$ függvény, $(a, b) \in \operatorname{int} D$. Azt mondjuk, hogy az f differenciálható az (a, b) pontban, ha léteznek olyan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ számok, melyekre

$$\lim_{(x,y) \to (a,b)} \frac{f(x, y) - f(a, b) - \alpha(x - a) - \beta(y - b)}{|(x - a, y - b)|} = 0.$$

4.9. Definíció. Legyen f differenciálható $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ pont egy környezetében. Ha f parciális derivált függvényei differenciálhatók az (a,b) pontban, akkor azt mondjuk, hogy f kétszer differenciálható az (a,b) pontban.

4.10. Definíció. Legyen $q: D \to \mathbb{R}$ $(D \subset \mathbb{R}^2)$ polinom. Azt mondjuk, hogy q kvadratikus alak, ha

$$q(x,y) = c_{11}x^2 + c_{21}xy + c_{12}yx + c_{22}y^2.$$

4.10.1. Példa. Legyen f kétszer differenciálható (a,b) −ben, $q = d^2f(a,b)$

$$d^2f(a,b)(x,y) = D_{11}f(a,b) \cdot x^2 + D_{21}f(a,b) \cdot x \cdot y + D_{12}f(a,b) \cdot x \cdot y + D_{22} \cdot y^2.$$

4.11. Definíció. Egy $q: D \to \mathbb{R}$ $(D \subset \mathbb{R}^2)$ kvadratikus alak pozitív illetve negatív definit, ha minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ esetén $q(x,y) > 0$ illetve $q(x,y) < 0$. A kvadratikus alakot pozitív illetve negatív szemidefinitnek hívjuk, ha az előbbiekben egyenlőség is meg van engedve. Egy $q: D \to \mathbb{R}$ kvadratikus alak indefinit, ha felvesz pozitív és negatív értékeket is.

4.11.1. Megjegyzés. A kvadratikus alak definitsége a $q(x,y) = c_{11}x^2 + c_{21}xy + c_{12}yx + c_{22}y^2$ egyenletben szereplő együtthatókból képzett $C := \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix}$ mátrix definitségével egyezik meg. Ekkor

- ha $\det C > 0$ és $c_{11} > 0 \Rightarrow C$ pozitív definit
- ha $\det C > 0$ és $c_{11} < 0 \Rightarrow C$ negatív definit
- ha $c_{21} = c_{12}$ és $\det C = 0$ és $c_{11} > 0 \Rightarrow C$ pozitív szemidefinit
- ha $c_{21} = c_{12}$ és $\det C = 0$ és $c_{11} < 0 \Rightarrow C$ negatív szemidefinit
- ha $\det C < 0 \Rightarrow C$ indefinit

Ebben az esetben a $\det C > 0, c_{11} = 0$ nem fordulhat elő.

4.12. Tétel. Legyen $f: D \to \mathbb{R}$ ($D \subset \mathbb{R}^2$) kétszer differenciálható az $(a, b) \in \operatorname{int} D$ pontban, és tegyük fel, hogy $D_1 f(a, b) = D_2 f(a, b) = 0$.

1. Ha f −nek (a, b) −ben lokális minimuma illetve maximuma van, akkor a $d^2 f(a, b)(x, y) = D_{11} f(a, b) \cdot x^2 + D_{21} f(a, b) \cdot x \cdot y + D_{12} f(a, b) \cdot x \cdot y + D_{22} \cdot y^2$ kvadratikus alak pozitív illetve negatív szemidefinit.
2. Ha $d^2 f(a, b)(x, y) = D_{11} f(a, b) \cdot x^2 + D_{21} f(a, b) \cdot xy + D_{12} f(a, b) \cdot xy + D_{22} \cdot y^2$ kvadratikus alak pozitív illetve negatív definit, akkor f −nek (szigorú) lokális minimuma illetve (szigorú) lokális maximuma van (a, b) −ben.

4.12.1. Példa. Legyen $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = x^2 + y^2$.

Először meg kell határozni az első és a második változó szerinti parciális derivált függvényeket.

$$D_1 f(x, y) = 2x, \qquad D_2 f(x, y) = 2y$$

$$2x = 0 \Leftrightarrow x = 0, \qquad 2y = 0 \Leftrightarrow y = 0$$

$$D_1 f(0,0) = D_2 f(0,0) = 0$$

Ezután meghatározzuk a második parciális derivált függvényeket.

$$D_{11} f(x, y) = 2, \qquad D_{12} f(x, y) = 0, \qquad D_{21} f(x, y) = 0, \qquad D_{22} f(x, y) = 2$$

$$D_{11} f(0,0) = 2, \qquad D_{12} f(0,0) = 0, \qquad D_{21} f(0,0) = 0, \qquad D_{22} f(0,0) = 2$$

Ekkor a mátrixunk így néz ki:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\det C = 4 > 0$ és $c_{21} = c_{12} = 0$ és $c_{11} = 2 > 0 \Rightarrow C$ pozitív szemidefinit, így a kvadratikus alak is pozitív szemidefinit, tehát az $f(x, y) = x^2 + y^2$ függvénynek lokális minimuma van $(0,0)$ −ban.

5. Kétváltozós függvények szélsőértéke, feladatok

5.1. faladat. Keressük meg az $f(x,y) = -\frac{x^3}{3} - \frac{y^2}{2} + x + y$ függvény lokális szélsőértékét!

Először az első és a második változó szerinti parciális derivált függvényeket határozzuk meg.

$$D_1 f(x,y) = -x^2 + 1, \qquad D_2 f(x,y) = -y + 1$$

$$-x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1, -y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = 1$$

A $(-1,1)$ és a $(1,1)$ helyeken lehet lokális szélsőértéke a függvénynek.

$$D_1 f(-1,1) = D_2 f(-1,1) = 0$$

$$D_1 f(1,1) = D_2 f(1,1) = 0$$

Most a második parciális derivált függvényeket számoljuk ki.

$$D_{11} f(x,y) = -2x, \qquad D_{12} f(x,y) = 0, \qquad D_{21} f(x,y) = 0, \qquad D_{22} f(x,y) = -1$$

Először nézzük meg az $(1,1)$ pontot!

$$D_{11} f(1,1) = -2, \qquad D_{12} f(1,1) = 0, \qquad D_{21} f(1,1) = 0, \qquad D_{22} f(1,1) = -1$$

A mátrix ekkor a következő lesz:

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\det C = 2 > 0$ és $c_{21} = c_{12} = 0$ és $c_{11} = -2 < 0 \Rightarrow C$ negatív szemidefinit $\Rightarrow$ a kvadratikus alak negatív szemidefinit $\Rightarrow$ az $f(x,y) = -\frac{x^3}{3} - \frac{y^2}{2} + x + y$ függvénynek lokális maximuma van $(1,1)$ $-$ban.

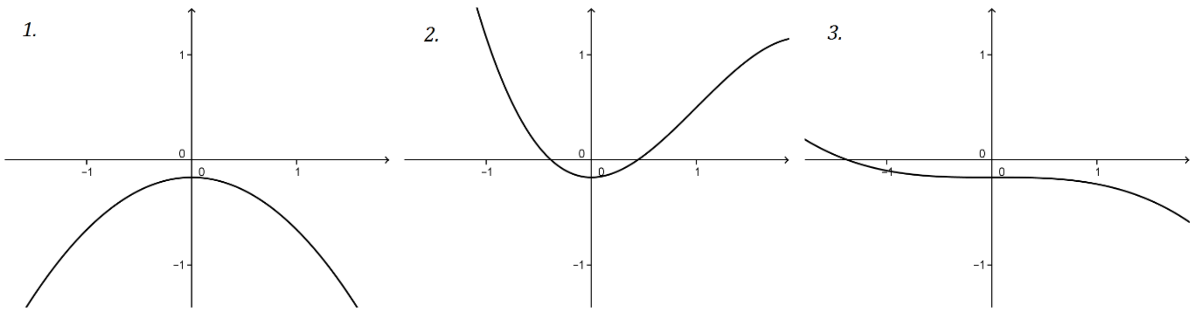
Most vizsgáljuk meg a $(-1,1)$ pontot!

$$D_{11}f(-1{,}1) = 2, \qquad D_{12}f(-1{,}1) = 0, \qquad D_{21}f(-1{,}1) = 0, \qquad D_{22}f(-1{,}1) = -1$$

A mátrix ekkor a következő lesz:

$$C \coloneqq \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Látható, hogy a $\det C = -2 < 0$, így külön meg kell vizsgálni ezt az esetet.



5.1. ábra

Az 5.1. ábrán az f függvény függőleges síkmetszetei látszanak $(-1{,}1)$ $-$ben, mégpedig:

1. $g_t(x) = f(-1 + x\cos t\,, 1 + x\sin t)$, ahol $t = \frac{\pi}{2}$,
2. $g_t(x) = f(-1 + x\cos t\,, 1 + x\sin t)$, ahol $t = 0$,
3. $g_t(x) = f(-1 + x\cos t\,, 1 + x\sin t)$, ahol $t = \arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Az 1. ábrán lévő síkmetszet szerint a f $-$nek lokális maximuma van $(-1{,}1)$ $-$ben, a 2. ábra szerint pedig lokális minimuma, így egyik sem lehet. Ezek mellett látható egy olyan síkmetszet is a 3. ábrán, ahol inflexiós pontot látunk. Ebből arra lehet következtetni, hogy f $-$nek a $(-1{,}1)$ pontban úgynevezett nyeregpontja van.

6. Algoritmus, Maple

6.1. Maple.[5] A Maple egy hatékony matematikai szoftver csomag PC-re, melynek segítségével algebrai és formális matematikai műveletek végezhetőek el. Képes továbbá numerikus analízis feladatok elvégzésére és az eredmények sokoldalú grafikus megjelenítésére. A Maple munkafelülete alkalmas technikai dokumentációk készítésére, munkafelületén szöveg, matematikai kifejezések és grafikonok egyaránt megférnek. Nagy erőssége az egyenlet megoldó képesség, és az, hogy jól kezeli a formális matematikai számításokat.

6.2. A szükséges ismeretek.

6.2.2. Intervallumfelezés. Legyen $[a, b]$ egy olyan intervallum, amin az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvény pontosan egyszer vált előjelet (tehát egy gyöke van $[a, b]$ −n). Legyen $a_1 = a$, $b_1 = b$, $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$.

1. Ha $f(a_n) \cdot f(c_n) < 0$, akkor $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = c_n$ és $c_{n+1} = \frac{a_{n+1}+b_{n+1}}{2}$.
2. Ha $f(c_n) \cdot f(b_n) < 0$, akkor $a_{n+1} = c_n$, $b_{n+1} = b_n$ és $c_{n+1} = \frac{a_{n+1}+b_{n+1}}{2}$.
3. Ha $f(a_n) \cdot f(c_n) = 0$, akkor megtaláltuk a gyököt, így befejeződik az algoritmus.

Az n-edik lépében a legjobb becslés c_n, így a hiba felső korlátja $\frac{b_n-a_n}{2} = \frac{b-a}{2^n}$.

6.2.2.1. Példa. Legyen $f(x) = x^2 - 2$, $[a, b] = [1,2]$.

	$a_1 = 1$	$b_1 = 2$	$c_1 = 1,5$
$f(a_1) \cdot f(c_1) < 0$	$a_2 = 1$	$b_2 = 1,5$	$c_2 = 1,25$
$f(c_2) \cdot f(b_2) < 0$	$a_3 = 1,25$	$b_3 = 1,5$	$c_3 = 1,375$
$f(a_3) \cdot f(c_3) < 0$	$a_4 = 1,375$	$b_4 = 1,5$	$c_4 = 1,4375$
$f(a_4) \cdot f(c_4) < 0$	$a_5 = 1,375$	$b_5 = 1,4375$	$c_5 = 1,40625$
$f(c_5) \cdot f(b_5) < 0$	$a_6 = 1,40625$	$b_6 = 1,4365$	$c_6 = 1,421375$
$f(a_6) \cdot f(c_6) < 0$	$a_7 = 1,40625$	$b_7 = 1,421375$	$c_7 = 1,4138125$

Tehát 6 intervallumfelezés után a közelítési értékünk $c_7 = 1{,}4138125$.

6.2.3. Definíció.[5] A matematikában a polinom egy olyan kifejezés, melyben csak számok és változók nemnegatív egész kitevőjű hatványainak szorzatai illetve ilyenek összegei szerepelnek.

6.3. Az algoritmus motivációja. Egy $f(x)$ polinomfüggvény gyökei intervallumfelezéssel akkor találhatóak meg egy $I \subset \mathbb{R}$ zárt intervallumon, ha előzőleg fel tudtuk osztani olyan intervallumokra I −t, amelyek mindegyikében egyszer és csakis egyszer metszi a függvény az x tengelyt. Ehhez segítséget adnak a függvény lokális szélsőértékei. Két szomszédos szélsőérték vagy azonos előjelű, ez esetben nincs a két szélsőérték hely között gyök, vagy különböző előjelű, ez esetben a Bolzano-tétel miatt van a két szélsőértékhely között gyök, mégpedig egy, a szigorú monotonitás miatt. Elfajuló esetként foglalkozni kell azzal is, ha egy lokális szélsőérték éppen 0 lenne. Az eljáráshoz még hozzátartozik a legkisebb szélsőértékhelynél kisebb illetve a legnagyobbnál nagyobb számokból álló félegyenes vizsgálata is. Itt is a Bolzano-tételre és a szigorú monotonitásra építünk, felhasználva a polinom végtelenbeli és mínusz végtelenbeli határértékét. Az $f(x)$ függvény lokális szélsőértékhelyei könnyen kiszámolhatóak $f'(x)$ gyökei ismeretében, és így a feladatot eggyel kisebb fokú polinom valós gyökeinek megkeresésére vezettük vissza.

6.4. Az algoritmus. Legyen $I = [-10^{100}, 10^{100}] \subset \mathbb{R}$, $f: I \to \mathbb{R}$ egy negyedfokú polinomfüggvény.

1. Meghatározzuk $f'(x)$ −et és $f''(x)$ −et
2. Meghatározzuk $f''(x)$ zérushelyeit a megoldóképlet segítségével: x_{21}, x_{22} $(x_{21} < x_{22})$
3. Megnézzük, hogy x_{21}, x_{22} léteznek-e és gyökei-e $f'(x)$ −nek
4. Intervallumokat képzünk a következő módon:
   - ha $\exists\, x_{21}, x_{22} \in I$, akkor $I_{31} = [-10^{100}, x_{21}], I_{32} = [x_{21}, x_{22}], I_{33} = [x_{22}, 10^{100}]$
   - ha $\exists\, x_{21} \in$ I és $\nexists x_{22} \in I$, akkor $I_{31} = [-10^{100}, x_{21}], I_{32} = [x_{21}, 10^{100}]$
   - ha $\nexists\, x_{21}, x_{22} \in I$, akkor $I_{31} = I$
5. Megnézzük, hogy az adott intervallumon előjelet vált-e $f'(x)$, majd intervallumfelezéssel meghatározzuk az adott intervallum(ok)on a $f'(x)$ gyökeit: x_{31}, x_{32}, x_{33}

6. Megnézzük $f(x)$ és $f'(x)$ legnagyobb közös osztóját. Ha ez nem 1, akkor megoldjuk az egyenletet, így megtaláljuk $f(x)$ egy vagy kettő gyökét (erre alkalmas eljárás az Euklideszi algoritmus)
7. Intervallumokat képzünk $f'(x)$ gyökeiből a következő módon:
   - ha $\exists x_{31}, x_{32}, x_{33} \in I$, akkor $I_{41} = [-10^{100}, x_{31}], I_{42} = [x_{31}, x_{32}], I_{43} = [x_{32}, x_{33}], I_{44} = [x_{34}, 10^{100}]$
   - ha $\exists x_{31}, x_{32} \in I$ és $\nexists x_{33} \in I$, akkor $I_{41} = [-10^{100}, x_{31}], I_{42} = [x_{31}, x_{32}], I_{43} = [x_{32}, 10^{100}]$
   - ha $\exists x_{31} \in I$ és $\nexists x_{32}, x_{33} \in I$ akkor $I_{41} = [-10^{100}, x_{31}], I_{42} = [x_{31}, 10^{100}]$
8. Megnézzük, hogy az adott intervallumon előjelet vált-e $f(x)$, majd intervallumfelezéssel meghatározzuk az adott intervallum(ok)on a $f(x)$ gyökeit: $x_{41}, x_{42}, x_{43}, x_{44}$.

6.2.4.1. Példa. Legyen $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9,\ I = [-10^{100}, 10^{100}] \subset \mathbb{R}$. Határozzuk meg $f(x)$ gyökeit intervallumfelezés segítségével.

$$f'(x) = 4x^3 - 20x$$
$$f''(x) = 12x^2 - 20$$

Az $f''(x)$ gyökei a megoldóképlettel:

$$x_{21} = \frac{\sqrt{15}}{3}, \qquad x_{22} = -\frac{\sqrt{15}}{3}$$

Az $f'(x)$ −hez tartozó intervallumok az $f''(x)$ gyökeiből:

$$I_{21} = \left[-10^{100}, -\frac{\sqrt{15}}{3}\right], \qquad I_{22} = \left[\frac{\sqrt{15}}{3}, -\frac{\sqrt{15}}{3}\right], \qquad I_{23} = \left[\frac{\sqrt{15}}{3}, 10^{100}\right]$$

Az intervallumfelezésekhez a Maple-t használom $\frac{1}{10000}$ maximális hibahatárral. Az $f'(x)$ gyökeinek közelítőértékei:

$$x_{31} = -2{,}235996109, \qquad x_{32} = 0, \qquad x_{33} = 2{,}235996109$$

Az $f(x)$ −hez tartozó intervallumok az $f'(x)$ gyökeinek közelítőértékei:

$$I_{41} = [-10^{100}; -2{,}235996109], I_{42} = [-2{,}235996109; 0], I_{43} = [0; 2{,}235996109]$$

$$I_{44} = [2{,}235996109; 10^{100}]$$

Az $f(x)$ gyökeinek közelítőértékei:

$$x_{31} = -2{,}999755018, \qquad x_{32} = -1{,}000015960, \qquad x_{33} = 1{,}000015960$$

$$x_{44} = 2{,}999755018$$

6.2.5. Megjegyzés. Ha egy polinomfüggvénynek 0-ban gyöke van, akkor azt a Maple nem tudja meghatározni intervallumfelezés segítségével. Ebben az esetben azt a hibaüzenetet adja, hogy „Error, (in Student:-NumericalAnalysis:-Roots) maximum number of iterations (10000) exceeded" (Hiba, az iterációk száma elérte a maximumot).

Az algoritmust automatizáltam egy Maple dokumentumban, ennek eredménye a függelékben található.

6.2.6. Megjegyzés. A Maple-ben megírt algoritmus továbbfejleszthető az intervallum, a pontosság növelésével, illetve az elvet követve magasabb fokú polinomfüggvények gyökeinek kiszámításával.

6.2.7. Probléma. A 6.2.5. Megjegyzésben említett hibára a következő megoldást találtam. Egy polinomfüggvénynek akkor gyöke a 0, ha abban a konstans tag 0, így elegendő volt ezt megvizsgálni.

6.2.8. Probléma. Mivel a $f'(x)$ −nek nem a gyökei, csak a gyökeinek közelítése álltak rendelkezésemre, nem tudtam leellenőrizni, hogy $f(x)$ −nek gyöke van-e ott, ahol $f'(x)$ −nek. Így nem találtam meg ezeket a gyököket, ugyanis nem tudtam használni az intervallumfelezést, mert ebben az esetben nem vált előjelet a függvény az intervallumon. Ekkor megnéztem a két polinom legnagyobb közös osztóját (ha volt), és ennek segítségével határoztam meg a közös gyököket.

Függelék

> $with(Student[NumericalAnalysis])$:
> $with(Algebraic)$:
>
> $a :=;$
> $b :=;$
> $c :=;$
> $d :=;$
> $e :=;$
>
> $negyed := a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e; harmad := 4 \cdot a \cdot x^3 + 3 \cdot b \cdot x^2 + 2 \cdot c \cdot x + d; masod := 12 \cdot a \cdot x^2 + 6 \cdot b \cdot x + 2 \cdot c$
>
> $diszkriminans := (6 \cdot b)^2 - 4 \cdot 12 \cdot a \cdot 2 \cdot c$
> **if** $diszkriminans > 0$ **then** $xs21 := convert\left(\frac{-(6 \cdot b) + \sqrt{diszkriminans}}{2 \cdot (12 \cdot a)}, float, 10\right); xs22 := convert\left(\frac{-(6 \cdot b) - \sqrt{diszkriminans}}{2 \cdot (12 \cdot a)}, float, 10\right)$ **elif** $diszkriminans = 0$ **then** $x21 := convert\left(\frac{-(6 \cdot b) + \sqrt{diszkriminans}}{2 \cdot (12 \cdot a)}, float, 10\right)$ **end if**
> **if** $diszkriminans > 0$ **and** $xs21 < xs22$ **then** $x21 := xs21; x22 := xs22$ **elif** $diszkriminans > 0$ **and** $xs22 < xs21$ **then** $x21 := xs22; x22 := xs21$ **end if**;
>
> **if** $diszkriminans < 0$ **then** $xs31 := Bisection\left(harmad, x = [-10^{100}, 10^{100}], tolerance = 10^{-2}\right)$ **end if**
>
> **if** $eval\left(harmad, x = \frac{-(6 \cdot b) - \sqrt{diszkriminans}}{2 \cdot (12 \cdot a)}\right) = 0$ **then** $xs32 := \frac{-(6 \cdot b) - \sqrt{diszkriminans}}{2 \cdot (12 \cdot a)}$ **end if**
> **if** $eval\left(harmad, x = \frac{-(6 \cdot b) + \sqrt{diszkriminans}}{2 \cdot (12 \cdot a)}\right) = 0$ **then** $xs33 := \frac{-(6 \cdot b) + \sqrt{diszkriminans}}{2 \cdot (12 \cdot a)}$ **end if**
>
> **if** $diszkriminans = 0$ **and** $d \neq 0$ **then** $xs34 := Bisection\left(harmad, x = [-10^{100}, 10^{100}], tolerance = 10^{-4}, maxiterations = 10000\right)$ **end if**
>
> **if** $diszkriminans > 0$ **and** $d = 0$ **then** $xs35 := 0$ **end if**
>
> **if** $diszkriminans > 0$ **and** $sign\left(eval(harmad, x = -10^{100}) \cdot eval(harmad, x = x21)\right) < 0$ **then** $xs36 := Bisection\left(harmad, x = [-10^{100}, x21], tolerance = 10^{-4}, maxiterations = 10000\right)$ **end if**

> **if** $diszkriminans > 0$ **and** $sign(eval(harmad, x = x21) \cdot eval(harmad, x = x22)) < 0$ **then** $xs37 := Bisection(harmad, x = [x21, x22], tolerance = 10^{-4}, maxiterations = 10000)$ **end if**

> **if** $diszkriminans > 0$ **and** $sign(eval(harmad, x = x22) \cdot eval(harmad, x = 10^{100})) < 0$ **then** $xs38 := Bisection(harmad, x = [x22, 10^{100}], tolerance = 10^{-4}, maxiterations = 10000)$ **end if**

>

> $L := \{xs31, xs32, xs33, xs34, xs35, xs36, xs37, xs38\}$

> **if** $type(L_1, numeric) = true$ **and** $type(L_2, numeric) = true$ **and** $type(L_3, numeric) = true$ **then** $S := sort([L_1, L_2, L_3])$ **end if**; **if** $type(L_1, numeric) = true$ **and** $type(L_2, numeric) = true$ **and** $type(L_3, numeric) = false$ **then** $S := sort([L_1, L_2])$ **end if**; **if** $type(L_1, numeric) = true$ **and** $type(L_2, numeric) = false$ **and** $type(L_3, numeric) = false$ **then** $S := sort([L_1])$ **end if**;

> $x31 := S_1$; **if** $type(L_2, numeric) = true$ **then** $x32 := S_2$ **end if**; **if** $type(L_3, numeric) = true$ **then** $x33 := S_3$ **end if**;

>

> **if** $e = 0$ **then** $xs41 := 0$ **end if**;

>

> $M := \{solve(GreatestCommonDivisor(harmad, negyed), x)\}$;**if** $nops(M) = 1$ **then** $xs42 := M_1$ **end if**; **if** $nops(M) = 2$ **then** $xs42 := M_1$; $xs43 := M_2$ **end if**

>

> **if** $sign(eval(negyed, x = -10^{100}) \cdot eval(negyed, x = x31)) < 0$ **then** $xs44 := Bisection(negyed, x = [-10^{100}, x31], tolerance = 10^{-4}, maxiterations = 10000)$ **end if**

> **if** $sign(eval(negyed, x = x31) \cdot eval(negyed, x = x32)) < 0$ **and** $type(x32, numeric) = true$ **then** $xs45 := Bisection(negyed, x = [x31, x32], tolerance = 10^{-4}, maxiterations = 10000)$ **end if**

> **if** $sign(eval(negyed, x = x32) \cdot eval(negyed, x = x33)) < 0$ **and** $type(x33, numeric) = true$ **then** $xs46 := Bisection(negyed, x = [x32, x33], tolerance = 10^{-4}, maxiterations = 10000)$ **end if**

> **if** $sign(eval(negyed, x = x33) \cdot eval(negyed, x = 10^{100})) < 0$ **and** $type(x33, numeric) = true$ **then** $xs47 := Bisection(negyed, x = [x33, 10^{100}], tolerance = 10^{-4}, maxiterations = 10000)$ **end if**

> **if** $sign(eval(negyed, x = x31) \cdot eval(negyed, x = 10^{100})) < 0$ **and** $type(x33, numeric) = false$ **and** $type(x32, numeric) = false$ **then** $xs48 := Bisection(negyed, x = [x31, 10^{100}], tolerance = 10^{-4}, maxiterations = 10000)$ **end if**

>

> $M := \{xs41, xs42, xs43, xs44, xs45, xs46, xs47, xs48\}$

> **if** $type(M_1, numeric) = true$ **and** $type(M_2, numeric) = true$ **and** $type(M_3, numeric) = true$ **and** $type(M_4, numeric) = true$ **then** $T := sort([M_1, M_2, M_3, M_4])$ **end if**; **if** $type(M_1, numeric) = true$ **and** $type(M_2, numeric) = true$ **and** $type(M_3, numeric) = true$ **and** $type(M_4, numeric) = false$ **then** $T := sort([M_1, M_2, M_3])$ **end if**; **if** $type(M_1, numeric) = true$ **and** $type(M_2, numeric) = true$ **and** $type(M_3, numeric) = false$ **and** $type(M_4, numeric) = false$ **then** $T := sort([M_1, M_2])$ **end if**; **if** $type(M_1, numeric) = true$ **and** $type(M_2, numeric) = false$ **and** $type(M_3, numeric) = false$ **and** $type(M_4, numeric) = false$ **then** $T := sort([M_1])$ **end if**;

> **if** $type(M_1, numeric) = false$ **then** $print(Nincs\ gyök)$ **end if**; **if** $type(M_1, numeric) = true$ **then** $x_1 = T_1$ **end if**; **if** $type(M_2, numeric) = true$ **then** $x_2 = T_2$ **end if**; **if** $type(M_3, numeric) = true$ **then** $x_3 = T_3$ **end if**; **if** $type(M_4, numeric) = true$ **then** $x_4 = T_4$ **end if**

>

> *restart*;

Irodalomjegyzék

Az 1, 2, 3 fejezetek esetében Sikolya Eszter és Bátkai András jegyzetére támaszkodtam:

http://www.cs.elte.hu/~seszter/oktatas/2009_10_2/BSc_ea/BSc_analizis_II_eloadas.pdf

http://www.cs.elte.hu/~batka/oktatas/differencialas.pdf

[1] Bartha Gábor, Bogdán Zoltán, Duró Lajosné dr., Gyapjas Ferencné, Hack Frigyes, dr. Kántor Sándorné, dr. Korányi Erzsébet: Matematika feladatgyűjtemény II., Tankönyvkiadó, Budapest, 1988.

[2] George B. Thomas, Maurice D. Weir, Joel Hass, Frank R. Giordano: Thomas- féle Kalkulus 1., Typotex Kiadó, Budapest, 2011.

[3] Obádovics J. Gyula: Felsőbb Matematikai Feladatgyűjtemény, Scolar Kiadó, Budapest, 1999.

[4] 2012. őszi félév zárthelyi dolgozat feladat

[5] https://www.wikipedia.org/

Nyilatkozat

Név: Babák Bence

ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematika Bsc.

Neptun azonosító: GQPIMN

Szakdolgozat címe: Konvexitás, szélsőérték

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló munkám eredménye, saját szellemi termékem, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részleteket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2014. december 31.

a hallgató aláírása