Rekurzív sorozatok

Csikó Csaba
matematika szakos hallgató
ELTE TTK

Témavezető:
Dr. Mezei István
egyetemi docens
ELTE TTK Alkalmazott Analízis éss Számításmatematikai Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem Budapest, 2015.

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

1.1. A szakdolgozat felépítése

A rekurzív sorozatok felhasználása nagyon sok új és eddig kiaknázatlan lehetőséget rejt magában. Nemcsak a gazdasági életben foglal el jelentős szerepet, hanem az élet bármely területén is egyre erőteljesebben jelenik meg. A rekurzív sorozatok alkalmazását az eddig használt területeken túl, át kell alakítani a mai kor támasztotta elvárásoknak, igényeknek, kihasználva a technika adta újabbnál újabb lehetőségeket. A XXI. században a technikai eszközök fejlődése rohamléptekkel halad előre, melyeket szerintem feltétlenül hasznosítani kell a matematika különböző területein is. Egy program segítségével kiválóan szemléltethető például Hanoi tornyai rekurzív feladat. Meggyőződésem, hogy nem feltétlenül szükséges ragaszkodni a papír alapú oktatáshoz. Merni kell alkalmazni, használni az új technológiákat, eszközöket. Szakdolgozatom célja, hogy bemutassam, milyen lehetőségek tárultak fel előttem a képzés során, melyeket hasznosítani lehet a rekurzív sorozatok használatánál.

Szakdolgozatomban megmutatom,hogyan alkalmazhatók a rekurzív sorozatok. Az analízis, az algebra, számelmélet, véges matematika területeket érintem. Elméleti bevezetővel kezdem a dolgozatom, amely tételeket, definíciókat tartalmaz. A következő részben a teljes indukcióra helyezem a hangsúlyt bizonyítási módszerként. Különböző rekurzív sorozatok konvergenciáját vizsgálom. A Newton-féle gyökvonást kiemelhetném, de számtalan példát tudnék sorolni arra, mire használhatók még a rekurzív sorozatok. A 4. fejezetben a Fibonacci sorozat jelenik meg. Megtudhatjuk milyen kapcsolata van az aranymetszéssel, hogyan viselkednek tagjai között a prímek és kitekintve láthatjuk a természetben való előfordulását. 5. fejezetben a Catalan számok segítenek megoldani például azt a kérdést, hogy egy n tényezős szorzat hányféleképpen zárójelezhető.

1.2. Köszönetnyilvánítás

Mielőtt elkezdeném a téma kifejtését, szeretném megköszönni Mezei István tanár úrnak a kitartó és odaadó munkásságát, ezzel segítve szakdolgozatom elkészítését. Bármilyen kérdésemre szívesen válaszolt, türelme határtalannak bizonyult. Nagyon köszönöm barátaimnak a sok biztatást és segítséget.

2. fejezet

Elméleti bevezető

2.1. Végtelen számsorozat definíciója; megadási módja

Ha minden pozitív egész számhoz egy valós számot rendelünk hozzá, akkor ezzel egy végtelen számsorozatot adunk meg. Rövidebben, a függvényfogalom felhasználásával ezt úgy is kifejezhetjük, hogy végtelen számsorozat a pozitív egész számokon értelmezett (valós értékű) függvény. Továbbiakban sorozat vagy számsorozat mindig végtelen számsorozatot jelent.

Jelölés: a_n jelenti azt a sorozatot, amelynek n-edik eleme (az n-hez rendelt valós szám) a_n.

Fontosabb megadási módok a következők:

Képlettel: Ekkor közvetlenül adjuk meg az n és az a_n kapcsolatát.

2.1.1. Példa. :

1. $a_n = \frac{1}{n}$

Ekkor a sorozat első néhány eleme: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$

2. $a_n = \begin{cases} \sin\frac{\pi}{n} & \text{,ha } n \text{ páros} \\ 0 & \text{,ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$

Ekkor a sorozat néhány eleme: $0, 1, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \ldots$

Rekurzív formulával: Ekkor az előírás azt adja meg, hogy az n-edik elemet hogyan kapjuk meg a megelőzőkből. Szükséges ekkor a képzési szabályon kívül az első az első elem vagy az első néhány elem megadása is.

2.1.2. Példa. :

1. $a_1 = 1$; $\quad a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1}$

Ekkor a sorozat néhány eleme: $\quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2 \cdot 3}, \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4}, \ldots$

2. Tekintsük azt a sorozatot, amely úgy kezdődik: $0, 1,$ és mindegyik utána következő elem az előző kettő számtani közepe.

Formulával:

$a_1 = 0, a_2 = 1$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot (a_{n-1} + a_n).$$

A sorozat első néhány eleme: $0; 1; 0,5; 0,75$. Az eddigi adatokból nehéz megállapítani, hogy például a mekkora a 100. tag nagysága. Azt tudjuk, hogy $0,5$ és $0,75$ között van.

2.1.3. Megjegyzés. A megadási módokat tekintve látjuk, hogy a rekurzív formulával megadott sorozat n-edik elemének meghatározásához az összes előző elem ismerete szükséges.

Ez hátrányos a képlettel való megadással szemben. Ezért természetesen felvetődik a kérdés:

Egy rekurzív formulával adott (a_n) sorozatnak hogyan lehet megadni a képletét? Erre a kérdésre is keressük a választ.

2.2. Műveletek sorozatokkal

A sorozatok között természetes módon értelmezzék az algebrai műveleteket. Az a_n és b_n sorozat összege az a sorozat, amelynek n-edik eleme $a_n + b_n$; szorzata az a sorozat, melynek n-edik eleme $a_n b_n$, és hányadosa az, amelynek n-edik eleme $\frac{a_n}{b_n}$ feltéve, hogy az osztás minden n-re elvégezhető, azaz $b_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$

2.3. Monoton sorozat, korlátos sorozat

Egy sorozat növekvő, ha $a_{n+1} \geq a_n$. Ha a $\geq$ jel helyett a szigorúbb $>$ kikötés is érvényes, akkor a sorozat szigorúan növekvő. A csökkenő és a szigorúan csökkenő sorozat meghatározása ehhez hasonló módon történik. A növekvő és csökkenő számsorozatot közös néven monoton sorozatnak, a szigorúan növekvő és a szigorúan csökkenő sorozatot pedig szigorúan monoton sorozatnak nevezzük.

2.3.1. Példa. Monoton sorozatokra:

1. növekvők:

a, $\sin n\pi$

b, $\log_a n\ (a > 1)$

c, $a_1 = 1; \quad a_{n+1} = (n+1)a_n$

2. Csökkenők:

a, $\sin n\pi$

b, $\log_a n\ (0 < a < 1)$

c, $a_1 = 1 \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1}$

2.3.2. Megjegyzés. :

1. A csupa nullából álló $sinn\pi$ sorozat definíciónk értelmében tekinthető növekedőnek és csökkenőnek is.
2. Mindkét példában a, b, és c, szigorúan monoton sorozatnak tekinthető.

2.3.3. Definíció. Egy számsorozat felső korlátja K, ha $a_n \leq K$, $n = 1, 2, \ldots$.

2.3.4. Definíció. A számsorozat felső korlátjai közül a legkisebb a számsorozat felső határa.

Más szóval, H akkor felső határ, ha H egy felső korlát és bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan n, hogy $a_n > H - \varepsilon$.

2.3.5. Definíció. Egy számsorozat felülről korlátos, ha van felső korlátja. Hasonlóan értelmezzük az alsó korlát, az alsó határ és az alulról korlátos fogalmát.

2.3.6. Definíció. Ha egy sorozat alulról is és felülről is korlátos, akkor azt korlátos sorozatnak nevezzük.

2.3.7. Megjegyzés. Nyilvánvaló, hogy egy (a_n) sorozat pontosan akkor korlátos, ha van olyan $K > 0$, hogy $|a_n| \leq K$, $n = 1, 2, \ldots$.

2.3.8. Példa. :

1. A $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, ..., 1 - \frac{1}{n}$ felső korlátai például $10^2; 1,05; 2; 1$.

A felső határa 1.

2. Az $\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}; 0, ... \frac{n}{n+1}; 0, -\frac{n}{n+1}; 0...$

A számsorozat alsó határa -1, felső határa $+1$.

3. A $0; 1; 0; 1; \ldots$ számsorozat esetén minden negatív szám alsó korlát és minden egynél nagyobb szám felső korlát.

A sorozat alsó határa 0, felső határa 1.

4. Az $1; 2; ...; n; ...$ sorozat alulról korlátos, de felülről nem korlátos.

Az $1; -1; 2; -2; ...; n; -n; \ldots$ sorozat nem korlátos.

2.4. Nullasorozat; a határérték definíciója

2.4.1. Definíció. Az a_n sorozat nullasorozat, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N = N(\varepsilon)$, hogy

$$n > N(\varepsilon) \Rightarrow |a_n| < \varepsilon$$

.

2.4.2. Definíció. Az a_n sorozat nullsorozat, ha a 0 bármely ε -környezete véges sok elem kivételével az egész számsorozatot tartalmazza.

2.4.3. Megjegyzés. Ekvivalens a két definíció akkor, ha pontosan ugyanazok a számsorozatok elégítik ki mindkét definíciót. Nyilvánvaló, hogy az 1. és 2. definíció- ekvivalens.

2.4.4. Példa. : Nullasorozatra

1. Geometriai sorozat, amelynek hányadosa: $|q| < 1$.
2. $a_n = \frac{1}{n^2}$
3. $1; -1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; ...; \frac{1}{n}; -\frac{1}{n}; ...$
4. Egy sorozat, amelynek első száz eleme tetszőleges és $a_n = 0$, ha $n > 100$.
5. 0; 0; 0; ...

Tehát a nullasorozat egy olyan sorozat, amelynek elemei tetszőlegesen közel kerülnek a 0-hoz, ha n elég nagy.

A nullasorozat közvetlen általánosítása az a sorozat, amelynek elemei tetszőleges közel kerülnek egy tetszőleges A számhoz elég nagy n esetén. Ezek a konvergens sorozatok.

2.4.5. Definíció. Az a_n sorozat konvergens és határértéke az A szám, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van $N = N(\varepsilon)$, hogy

$$n > N(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - A| < \varepsilon$$

.

2.4.6. Definíció. Az a_n sorozat konvergens és határértéke A, ha az A bármely ε-környezete véges sok elem kivételével a számsorozat minden elemét tartalmazza.

Nyilvánvaló, hogy a következő két állítás ekvivalens:

2.4.7. Állítás. :

1. Az a_n sorozat konvergens és határértéke A.
2. Az $(a_n - A)$ sorozat nullasorozat.

A határérték jelölése: $\lim_{n\to\infty} a_n = A$; $\lim a_n = A$; $a_n \to A$.

2.4.8. Megjegyzés. Ezek mindegyike azt jelenti, hogy az (a_n) sorozat konvergens és határértéke A.

Az $N = N(\varepsilon)$ szám neve: az ε-hoz tartozó küszöbindex.

2.5. Határértékre vonatkozó tételek

2.5.1. Tétel. *Egy számsorozatnak legfeljebb egy határértéke lehet.*

2.5.2. Tétel. *a_n konvergens, $\Rightarrow a_n$ korlátos.*

2.5.3. Tétel. *Ha $a_n \to A$, akkor $A_{ni} \to A$.*

2.5.4. Tétel. *Ha $a_n \to A$ és $b_n \to B$, akkor*

$a,$ $a_n \pm b_n \to A \pm B$

$b,$ $ca_n \to cA$

$c,$ $a_n b_n \to AB$

$d,$ $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{A}{B}$

Tudjuk, hogy ha a_n konvergens, akkor korlátos. Igaz-e a tétel megfordítása? Nyilvánvalóan nem. Például a $0; 1; 0; 1; \ldots$ sorozat korlátos, de nem konvergens.

2.5.5. Tétel. *A Bolzano- Weierstrass-tétel: Minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.*

Következménye: ha egy monoton növekedő a_n sorozat felülről korlátos vagy egy monoton csökkenő a_n sorozat alulról korlátos, akkor konvergens is.

2.5.6. Tétel. *A Cauchy-konvergenciatétel:*

A konvergens (a_n) sorozatoknak olyan tulajdonságuk is van, hogy elég nagy n-re az a_n elemek egymáshoz is közel kerülnek. Ennek pontos matematikai megfogalmazása a következő:

Minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N = N(\varepsilon)$, hogy

$$n, m > N(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Ezzel a tulajdonsággal rendelkező sorozatokat önmagukban konvergens vagy Cauchy-sorozatoknak nevezzük.

2.5.7. Definíció. Végtelenhez divergáló sorozatok:

Azt mondjuk, hogy $a_n \to \infty$, ha minden $K > 0$ számhoz van $N = N(K)$, hogy $n > N(K) \Rightarrow a_n > K$.

Hasonlóan értelmezzük azt, hogy $a_n \to -\infty$.

2.5.8. Tétel. *:*

1. Ha $a_n \to \infty$, $b_n \to \infty$, akkor $a_n + b_n \to \infty$.

2. Ha $a_n \to \infty$, $b_n \geq c > 0$, akkor $a_n b_n \to \infty$.

3. Az $a_n \to \infty$, $b_n \to \infty$ feltételekből semmit sem tudunk következtetni a $\lim(a_n - b_n)$ és a $\lim \frac{a_n}{b_n}$ határértékekre.

3. fejezet

Rekurzív sorozatok

3.1. Feladatok

3.1.1. Feladat. Mutassuk meg, hogy az

$x_1 = \sqrt{2} \qquad x_{n+1} := \sqrt{2 + x_n}$

rekurzív definícióval megadott sorozat konvergens.

3.1.2. Megoldás. Írjuk fel a sorozat első néhány tagját:

$$\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}, \dots$$

Ezeket vizsgálva az a sejtésünk alakul ki, hogy a sorozat monoton nő.

Igazoljuk ezt teljes indukcióval:

$x_1 < x_2$, mert $\qquad x_1^2 = 2 < 2 + \sqrt{2} = x_2^2$

Tegyük fel, hogy $x_n < x_{n+1}$ fenáll.

Ekkor az egyenlőtlenséggel való számolás szabályai szerint

$$x_n + 2 < x_{n+1} + 2, x_{n+1} = \sqrt{x_n + 2} < \sqrt{x_{n+1} + 2} = x_{n+2}$$

is igaz és éppen ezt kellett megmutatni.

Igazoljuk még, hogy a sorozat felülről korlátos. $x_1 < 2$ nyilván igaz.
Tegyük fel, hogy $x_n < 2$.
Ekkor

$$x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} < \sqrt{2 + 2} = \sqrt{4} = 2$$

Tehát a 2 felső korlátja a sorozatnak. Most már csak a határértéket kell kiszámítani. Ehhez írjuk fel a definiáló egyenletet:

$$a_{x+1} = \sqrt{2 + x_n}$$

Az egyenlőség mindkét oldalának vegyük a határértékét. Ha $x_n \to x$, akkor nyilván $x_{n+1} \to x$ így azt kapjuk, hogy az x határérték az

$$x = \sqrt{2 + x}$$

egyenlet gyöke.

Ennek a másodfokú egyenlet gyökei az $x_1 = 2$ és $x_2 = -1$ értékeket adja. A negatív gyök nyilván nem felel meg a feltételeinknek, tehát a sorozat határértéke 2.

3.1.1. A Newton-féle gyökvonás

Elgondolkodtató, hogy számítógép és számológép nélkül milyen jól boldogultak elődeink és milyen maradandó alkotásokat hagytak hátra. Kitünően számoltak fejben, papíron és logarléccel. A bonyolultabb feladatok közé tartozik a gyökvonás.

Nézzük tehát a gyökvonás algoritmusát:

Tekintsük a következő nem lineáris rekurzív sorozatot.

3.1.3. Feladat. $x_1 = a$ $(a > 1)$

$$x_{n+1} := \frac{1}{2} \cdot (x_n + \frac{a}{x_n})$$

Vizsgáljuk meg, hogy konvergens-e ez a sorozat!

3.1.4. Megoldás. Nézzük meg, hogyan néznek ki az egyes tagok:

$$x_2 = \frac{1}{2} \cdot (x_1 + \frac{a}{x_1})$$
$$x_3 = \frac{1}{2} \cdot (x_2 + \frac{a}{x_2})$$
$$\vdots$$
$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot (x_n + \frac{a}{x_n})$$
$$\vdots$$

3.1.5. Állítás. (x_n) konvergens és $\lim(x_n) = \sqrt{a}$.

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy a sorozat szigorúan monoton csökkenő és alulról korlátos,így konvergens.

3.1.6. Állítás. (x_n) szigorúan monoton csökkenő

Minden $n \in \mathbb{N}$-re:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (x_n + \frac{a}{x_n})}{x_n} = \frac{1}{2}(1 + \frac{a}{x_n^2}) = \frac{1}{2} + \frac{a}{2n^2}.$$

Elég belátnunk, hogy $\frac{a}{2n^2} \leq \frac{1}{2}$ ⇔a≤ x_n^2.

$$x_n = \frac{1}{2} \cdot (x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}})$$

Ezt négyzetre emelve és a számtani-mértani közép közti egyenlőtlenséget kihasználva kapjuk:

$$x_n^2 = \left(\frac{x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}}{2}\right)^2 \geq \left(\sqrt{x_{n-1} \cdot \frac{a}{x_{n-1}}}\right)^2 = a$$

.

Mivel $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq 1 \Leftrightarrow x_{n+1} \leq x_n$, így x_n szigorúan monoton csökkenő.

3.1.7. Állítás. (x_n) alulról korlátos.

Többet is lehet látni: (x_n) sorozatnak van pozitív alsó korlátja.

Az (x_n) sorozat szigorúan monoton csökkenő és alulról korlátos, ebből következik, hogy (x_n) konvergens.

$\lim(x_n) =: \alpha > 0$ $\alpha =?$

$$x_{n+1} := \frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

Mivel $x_n \to \alpha$, így x_{n+1} is α-hoz tart, felírhatjuk az alábbi egyenletet.

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{a}{\alpha}\right)$$

Az egyenlet mindkét oldalát szorozva kapjuk:

$$2\alpha = \alpha + \frac{a}{\alpha}$$

Majd, α-t kivonva:

$$\alpha = \frac{a}{\alpha}$$

α-val megszorozva az egyenletet azt kapjuk, hogy:

$$\alpha^2 = a$$

Tehát a sorozat határértéke olyan pozitív szám, amelynek négyzete az a. Ezt a számot nevezzük az a négyzetgyökének, tehát $\alpha = \sqrt{a}$ és $\alpha = lim(x_n) = \sqrt{a}$.

□

3.1.8. Feladat. Most általánosítsuk az előző feladatot, azaz nézzük meg hogyan jutunk a magasabb gyökökig!

$a > 1 \quad k$ ∈N(k>2)

$$\sqrt[k]{a} = ?$$

Tekintsük az alábbi sorozatot: $x_1 = a$

Minden $n \in \mathbb{N}$-re

$$x_{n+1} = \frac{1}{k}\left((k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}}\right)$$

Rajz:

Érintő egyenlete: $y = x_1^k - a + m(x - x_1)$

$f(x) = x^k - a$

Derivált függvénye:

$$f^{'}(x_1) = kx_1^{k-1} = m$$

azaz

$$y = x_1^k - a + kx_1^{k-1}(x - x_1)$$

Hol metszi az x tengelyt?

$$0 = x_1^k - a + kx_1^{k-1}(x - x_1)$$

Az egyenlet mindkét oldalát x_1^{k-1}-nel osztva:

$$\frac{a}{x_1^{k-1}} = x_1 + k(x - x_1) = (1 - k)x_1 + kx$$

Ezt rendezve kapjuk az alábbiakat:

$$(k-1)x_1 + \frac{a}{x_1^{k-1}} = kx$$

Amiből x-et kifejezve kapjuk, hogy

$$x = \frac{1}{k}\left((k-1)x_1 + \frac{a}{x_1^{k-1}}\right)$$

. Ezt az x-et tekintjük x_2-nek.

3.1.9. Megjegyzés. most megmutatjuk, hogy a sorozat monoton csökkenő és alulról korlátos.

Minden n-re

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{1}{k}\left((k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}})\right)}{x_n} = \frac{1}{k}\left((k-1) + \frac{a}{x_n^k}\right) = 1 - \frac{1}{k}\left(1 - \frac{a}{x_n^k}\right)$$

Elég megmutatnunk, hogy $1 - \frac{a}{x_n^k} \geq 0 \Rightarrow x_n^k \geq a$

Nézzük tehát az x_n sorozatunkat: $x_n = \frac{1}{k}\left((k-1)x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}^{k-1}})\right)$
Emeljük k-adik kitevőre mindkét oldalt, majd a számtani-mértani közép közti egyenlőtlenségből adódik:

$$x_n^k = \left(\frac{x_{n-1}+x_{n-1}\ldots+x_{n-1}+\frac{a}{x_{n-1}^{k-1}}}{k}\right)^k \geq x_{n-1}\cdot x_{n-1}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{x_{n-1}^{k-1}} = a$$

Ebből látszik, hogy az (x_n) sorozatnak van pozitív alsó korlátja. (x_n) alulról korlátos)

Mivel (x_n) monoton csökkenő és alulról korlátos, ezért konvergens.
Keressük meg a határértékét:
$lim(x_n) = \alpha > 0$

$$\frac{1}{k}\left((k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}}\right)$$

Mivel $x_n \to \alpha$, így $x_{n+1} \to \alpha$, ezért felírhatjuk az alábbi egyenletet.

$$\alpha = \frac{1}{k}\left((k-1)\alpha + \frac{a}{\alpha^{k-1}}\right)$$

Az egyenlet mindkét oldalát k-val szorozzuk:

$$k\alpha = (k-1)\alpha + \frac{a}{\alpha^{k-1}}$$

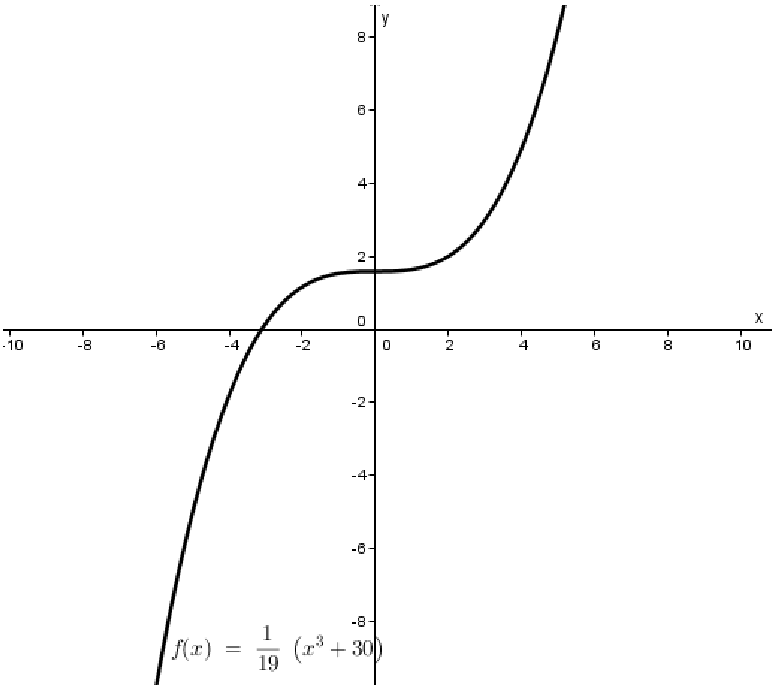
Majd ebből α-t kifejezzük:

$$\alpha = \frac{a}{\alpha^{k-1}}$$

$\alpha^k = a$, amiből $\alpha = \sqrt[k]{a}$.

3.1.2. Függvény, mint rekurzív sorozat

3.1.10. Feladat. Tekintsük az alábbi függvényt és alábbi rekurzív sorozatot:



$f(x) = \frac{1}{19} \cdot (x^3 + 30)$

$a \in \mathbb{R}$

$$x_1 = a$$

$$x_2 := f(x_1) = \frac{1}{19} \cdot (x_1^3 + 30)$$

$$\vdots$$

$$x_{n+1} := f(x_n) = \frac{1}{19} \cdot (x_n^3 + 30)$$

$$\vdots$$

1.$a = 2$

$$\begin{gathered} x_1 = 2 \\ x_2 = \frac{1}{19} \cdot (2^3 + 30) = 2 \\ \vdots \\ x_{n+1} = 2 \\ \vdots \end{gathered}$$

2. $a = 3$

$$\begin{gathered} x_1 = 3 \\ x_2 = \frac{1}{19} \cdot (3^3 + 30) = 3 \\ \vdots \\ x_{n+1} = 3 \end{gathered}$$

3. $a = 5$

$$\begin{gathered} x_1 = -5 \\ x_2 = \frac{1}{19} \cdot ((-5)^3 + 30) = -5 \\ \vdots \\ x_{n+1} = -5 \\ \vdots \end{gathered}$$

4. $-5 < a < 2$ pl. $a = 0$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = \frac{1}{19} \cdot (0^3 + 30) = \frac{30}{19}$$
$$x_3 = \frac{1}{19} \cdot (\frac{30}{19}^3 + 30) =$$
$$\vdots$$

3.1.11. Állítás. (x_n) szigorúan monoton növekvő

Bizonyítás. Teljes indukcióval

1, $x_1 < x_2$

$x_1 = a < x_2 = \frac{1}{19} \cdot (a^3 + 30)$

Az egyenlet mindkét oldalát 19-cel szorozva kapjuk ezt a harmadfokú egyenletet:

$$19a < a^3 + 30$$

Rendezzük egy oldalra, majd adjuk meg szorzat alakban:

$$0 < a^3 - 19a + 30 = (a + 5)(a - 2)(a - 3)$$

.

Tehát ilyen a esetén ami a megadott intervallumban van az első tényező pozitív, a másik két tényező negatív értékű lesz.

2, Tegyük fel

$$x_n < x_{n+1}$$

3, Igazoljuk, hogy

$$x_{n+1} < x_{n+2}$$

Feltettük, hogy

$$x_n < x_{n+1}$$

Emeljük harmadik hatványkitevőre mindkét oldalt:

$$x_n^3 < x_{n+1}^3$$

Adjunk 30-at mindkét oldalhoz:

$$x_n^3 + 30 < x_{n+1}^3 + 30$$

Majd osszuk el 19-cel:

$$x_{n+1} = \frac{1}{19} \cdot x_n^3 + 30 < \frac{1}{19} \cdot x_{13} + 30 = x_{n+2}$$

Tehát szigorúan monoton növekedő, ha $-5 < a < 2$. □ 5.

3.1.12. Állítás. $2 < a < 3$, akkor (x_n) szigorúan monoton csökkenő

Bizonyítás. Teljes indukcióval

1, $x_1 > x_2$

$a > \frac{1}{19}(a^3 + 30)$

$$0 > a^3 - 19a + 30 = (a+5)(a-2)(a-3)$$

Ha a a megadott intervallum eleme, akkor az első két tényező pozitív, a harmadik negatív értéket vesz fel.

2, Tegyük fel,

$$x_n > x_{n+1}$$

3, Igazolnunk kell ,hogy

$$x_{n+1} > x_{n+2}$$

Induljunk ki a feltevésünkből, vagyis

$$x_n > x_{n+1}$$

Emeljük harmadik hatványkitevőre mindkét oldalt:

$$x_n^3 > x_{n+1}^3$$

Adjunk hozzá 30-at:

$$x_n^3 + 30 > x_{n+1}^3 + 30$$

Osszuk el 19-cel:

$$\frac{1}{19} \cdot x_n^3 + 30 > \frac{1}{19} \cdot x_{n+1}^3 + 30$$

Tehát valóban, szigorúan csökkenő: $x_{n+1} > x_{n+2}$

6. Ha $a < -5$ akkor (x_n) szigorúan monoton csökkenő

7. Ha $a > 3$ akkor (x_n) szigorúan monoton növekvő. □

Összefoglalva: monotonitás

3.1.13. Megjegyzés. Ha valamelyik a-ról indítom a sorozatot konvergens, akkor mi lehet a határértéke?

$$x_{n+1} = \frac{1}{19} \cdot (x_n^3 + 30)$$

Mivel $(x_n) \to \alpha$-hoz, így $x_{n+1} \to \alpha$-hoz. Tehát számítsuk ki α értékét:

$$\alpha = \frac{1}{19} \cdot (\alpha^3 + 30)$$

Az egyenlet mindkét oldalát szorozzuk 19-cel:

$$19\alpha = \alpha^3 + 30$$

Rendezzük 0-ra és alakítsuk szorzattá:

$$0 = \alpha^3 - 19\alpha + 30 = (\alpha + 5)(\alpha - 2)(\alpha - 3)$$

Ebből a gyökök láthatók: $\alpha_1 = -5 \quad \text{vagy} \quad \alpha_2 = 2 \quad \text{vagy} \quad \alpha_3 = 3$

8. Ha $a < -5$ akkor tudjuk, hogy (x_n) szigorúan monoton csökkenő, ezért a $\lim(x_n)$ nem lehet -5, ebből következik, hogy $(x_n) \to -\infty$.

Ha $a > 3$, akkor tudjuk, hogy (x_n) szigorúan monoton növekvő, ezért $\lim(x_n) \to \infty$.

Ha $-5 < a < 2$, akkor (x_n) szigorúan monoton növekvő

3.1.14. Állítás. $x_n < 2$

Bizonyítás. Teljes indukcióval

1, $x_1 < 2$

2, Tegyük fel, hogy

$$x_n < 2$$

3, Igazolnunk kell, hogy

$$x_{n+1} < 2$$

, mert

$$x_n < 2$$

Emeljük mindkét oldalt harmadik hatványkitevőre.

$$x_n^3 < 8$$

Adjunk mindkét oldalhoz 30-at:

$$x_n^3 + 30 < 38$$

Osszuk le mindkét oldalt 19-cel:

$$x_{n+1} = \frac{1}{19}(x_n^3 + 30) < 2$$

Tehát (x_n) szigorúan monoton növekvő és korlátos($x_n < 2$), ebből következik hogy (x_n) konvergens, amiből csak $\lim(x_n) = 2$.

□ Ha $2 < a < 3$, akkor tudjuk, hogy (x_n) szigorúan monoton csökkenő.

3.1.15. Állítás. $(x_n) > 2$

Bizonyítás. Teljes indukcióval

1, $\quad x_1 > 2$

2, Tegyük fel, hogy

$$x_n > 2$$

3, Igazolnunk kell, hogy

$$x_{n+1} > 2$$

Tudjuk, hogy

$$x_n > 2$$

Vegyük mindkét oldal harmadik hatványkitevőjét:

$$x_n^3 > 8$$

Adjunk hozzá az egyenlet mindkét oldalához 30-at:

$$x_n^3 + 30 > 38$$

Majd osszuk 19-cel:

$$x_{n+1} = \frac{1}{19}((x_n)^3 + 30) > 2$$

Mivel (x_n) szigorúan monoton csökkenő ás alulról korlátos ($(x_n) > 2$), ezért (x_n) konvergens, amiből csak $\lim(x_n) = 2$.

□ Teljes összefoglalás:

Ha a kezdőérték:

$a < -5$, $\lim(x_n) = -\infty$

$a = -5$, akkor $(x_n) = -5$ (x_n), így $lim(x_n) = -5$

$-5 < a < 2$ kezdőérték, akkor $\lim(x_n) = 2$

$a = 2$, akkor $(x_n) = 2$, így $\lim(x_n) = 2$

$2 < a < 3$ kezdőérték, akkor $\lim(x_n) = 2$

$a = 3$, akkor (x_n)=3, így $\lim(x_n) = 3$

$a > 3$, akkor (x_n) szigorúan monoton növekvő, így $\lim(x_n) = +\infty$.

3.2. Rekurzív sorozat a kombinatorikában

3.2.1. Feladat. Van n forintunk. Minden nap pontosan egyet vásárolunk az alábbi termékekből: perec (1 forint), cukorka (2 forint), fagyi (2 forint). Határozzuk meg M_n-et, ahányféleképpen elkölthetjük pénzünket.

3.2.2. Megoldás. Az első nap háromféleképpen választhatunk: perecet veszünk, ekkor a maradék $n - 1$ forintot M_{n-1}-féleképpen költhetjük el vagy cukorkát veszünk 2 forintért, és a maradékot M_{n-2}- féleképp költhetjük el és ha fagyit, akkor a maradékot szintén M_{n-2}-féleképpen költhetjük el.
Így a következő rekurziót kapjuk:

$$M_n = M_{n-1} + 2M_{n-2}$$

Kezdőérték: $M_0 = M_1 = 1; M_2 = 3$ A többi a képletből adódik: $M_3 = 5, M_4 = 11, ...$

Teljesül ezekre az alábbi formula: $M_n = 2M_{n-1} + (-1)^n$, és sejtjük, hogy ez minden n-re igaz lesz.
Valóban az $M_n = M_{n-1} + 2M_{n-2}$ rekurzióból könnyen belátható indukcióval:

Ha $M_{n-1} = 2M_{n-2} + (-1)^{n-1}$ és $2M_{n-2} = M_{n-1} + (-1)^n$, akkor

$$M_n = M_{n-1} + 2M_{n-2} = M_{n-1} + (M_{n-1} + (-1)^n) = 2M_{n-1} + (-1)^n$$

Innen azt kapjuk, hogy $M_n = 2M_{n-1} + (-1)^n = 2(2M_{n-2} + (-1)^{n-1}) + (-1)^n 4M_{n-2} + 2(-1)^{n-1} + (-1)^n = 8M_{n-3} + 4(-1)^{n-2} + 2(-1)^{n-1} + (-1)^n = ... = 2^n - 2^{n-1} + 2^{n-2} - ... + (-1)^n = \frac{2^{n+1}-(-1)^n}{2-(-1))} = \frac{1}{3} \cdot (2^{n+1} + (-1)^n)$

4. fejezet

Fibonacci sorozat

4.1. Ismertető

A pizzai Leonardo a XII. és XIII. század fordulóján élt matematikus egyike volt azoknak, akik a hinduktól származó, de az akkori világban arab közvetítéssel elterjedő tízes alapú, helyi értékes rendszerre épülő számírási módot Európában meghonosították. Leonardo Pisano, ismertebb nevén Fibonacci kora matematikai ismereteit Liber Abaci címen ismert munkájában foglalta össze. E híres munkájában található a következő probléma, amit Fibonacci nyulaiként is gyakran emlegetnek:

Hány pár nyúlra szaporodik egy év alatt a kezdeti pár, ha tudjuk, a nyulak két hónap alatt válnak ivaréretté, és ezután minden pár minden hónapban egy új párnak ad életet és mindegyikük életben marad?

A feladat megoldásában a nyúl-párok számának időbeli alakulását kell követni. Az első hónapban egy nyúl-párunk van, és ugyanannyi lesz a másodikban is; a párok száma csak a harmadik hónapban változik egyről kettőre. A következő hónapban a szülők újabb párnak adnak életet, így a párok száma háromra nő. Az ötödik hónapban azonban már az új pár is szaporulatképes, így az új párok száma kettővel nő, és az összes párok száma ötre gyarapodik. A következő hónapban már mindkét ifjabb generáció hoz létre utódokat, és a párok száma hárommal növekedve nyolcra változik.

Az egyes hónapokhoz tartozó nyúl-párok számát leíró

$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ?$

számsor Fibonacci-sorozat néven vonult be a matematika történetébe. A sorozat előállításának alapja az a tulajdonság, mely szerint a harmadik elemtől kezdve bármely elem az előző kettő összege. A sorozat első két elemét azonban meg kell adni; ezek értéke a Fibonacci-sorozat esetén 1.

Tekintsük az alábbi rekurzív sorozatot:

$a_0 = K, \quad a_1 = L$

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

Keressük $a_n = q^n$ alakban. Ekkor az alábbi egyenletet kapjuk:

$$q^{n+2} = q^{n+1} + q^n$$

Az egyenlet mindkét oldalát q^n-nel osztjuk:

$$q^2 = q + 1$$

Az egyenletet átrendezve adódik:

$$q^2 - q - 1 = 0$$

Ennek megoldásai pedig: $q_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Az egyenlet két gyöke $q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ és $q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

4.1.1. Megjegyzés. q_1^n és q_2^n is eleget tesz a rekurziónak $\Rightarrow$lineáris kombinációjuk is:

$$c_1(q_1)^n + c_2(q_2)^n$$

Ennek megfelelően

$$c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 1 = K$$

$$c_1 \cdot q_1^1 + c_2 \cdot q_2^1 = L$$

ahol c_1, c_2 ismert.

Tekintsük az alábbiakat: $\frac{1}{1-x-x^2} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n + \ldots$

4.1.2. Állítás. a_n n-edik Fibonacci szám.

Bizonyítás.

$1 = (1 - x - x^2)(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... + a_nx^n + ...) =$
$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... + a_nx^n + ...+$
$-a_0x - a_1x^2 - a_2x^3 - ...+$
$-a_0x^2 - a_1x^3 - ...$

$$1 = a_0+(a_1-a_0)x+(a_2-a_1-a_0)x^2+(a_3-a_2-a_1)x^3+...+(a_n-a_{n-1}-a_{n-2})x^n$$

$a_0 = 1 \quad a_1 - a_0 = 0 \quad a_2 - a_1 - a_0 = 0 \quad \ldots \quad a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0,$
Ezekből adódik:

$a_1 = a_0 = 1 \quad a_2 = a_1 + a_0 \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

$$\frac{1}{1-x-x^2} = \frac{-1}{(-1)(x-\frac{1+\sqrt{5}}{2})(x-\frac{1-\sqrt{5}}{2})} = \frac{A}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} + \frac{B}{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} = \frac{Ax+Bx-A\frac{1-\sqrt{5}}{2}-B\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{(x-\frac{1+\sqrt{5}}{2})(x-\frac{1-\sqrt{5}}{2})}$$

$(A+B)=0$

Tehát $B=-A$ értéket helyettesítve:

$$-A(\frac{1-\sqrt{5}}{2})-B(\frac{1+\sqrt{5}}{2})=-1$$

$$B(\frac{1-\sqrt{5}}{2}-\frac{1+\sqrt{5}}{2})=-1$$

$$B\sqrt{5}=-1$$

B-t kifejezve kapjuk: $B=-\frac{1}{\sqrt{5}}A=\frac{1}{\sqrt{5}}$

Tehát

$$\frac{1}{1-x-x^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}+\frac{1}{x-\frac{1-\sqrt{5}}{2}}\right)$$

Ismert:

$1+t+t^2+t^3+...+t^n+...=\frac{1}{1-t}$ ahol $\quad |t|<1$

Ennek segítségével láthatjuk be, hogy megegyezik a két hatványsor, így együtthatóik is páronként:

$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[-\frac{1}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}+\frac{1}{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}\right]$

□

A sorozatok ilyen előállítási módját, mely az újabb elemek képzését az előzőekre vezeti vissza, rekurzív eljárásnak nevezik.

4.2. Fibonacci- sorozat és az aranymetszés

A Fibonacci-sorozat szoros kapcsolatban van az aranymetszéssel.

$$\frac{a}{x} = 1 + \frac{x}{a}$$

egyenlet az aranymetszésnek megfelelően felosztott szakasz. (ahol a jelöli a szakasz teljes hosszát, x a hosszabbik metszetet). Az aranymetszésnél a rövidebb és a hosszabbik metszet, valamint a felosztandó szakasz olyan mértani sorozatot alkotnak, melynek hányadosa

$$\frac{a}{x} = \phi$$

Ezt az egyenletet pedig kapcsolatba hozhatjuk a Fibonacci-sorozattal.

Jelöljük a továbbiakban $\frac{a}{x}$ -et q-val!
A fenti egyenlőség mindkét oldalát $a_1 \cdot q^k$-nal szorozva, ahol a_1 tetszőleges, zérustól különböző szám, az

$$a_1 \cdot q^{k+1} = a_1 \cdot q^k + a_1^{k-1}$$

egyenlőséget kapjuk, ami éppen azt jelenti, hogy a fenti $q = \phi$ hányadossal képzett mértani sorozatokra igaz, hogy a harmadik elemtől kezdve bármely elem egyenlő az előző kettő összegével.

Ez utóbbi tulajdonsága megvan a Fibonacci-sorozatnak is. Ugyanis a sorozat $(n + 1)$-edik eleme (a harmadik elemtől) a következő módon állítható elő:

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$$

Mindkét oldalt a_n-nel egyszerűsítve, az

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}$$

egyenlethez jutunk.

A kapott összefüggés formailag hasonló az aranymetszésnél kapott egyenlethez, és (a harmadik elemtől) alkalmas a sorozat előállítására:

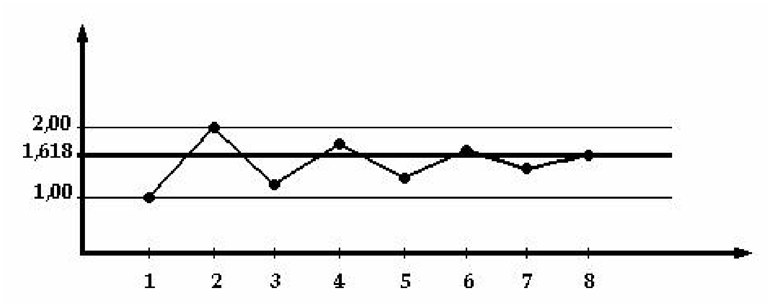
$$\begin{gathered}\frac{1}{1}+1\\ \frac{1}{2}+1\\ \frac{2}{3}+1\\ \frac{5}{3}+1\\ \vdots\end{gathered}$$

A kapott összefüggés akkor egyezne meg az aranymetszési egyenlettel, ha a Fibonacci-sorozat egymást követő elemeinek hányadosa ugyanaz az érték lenne, vagyis az elemek geometriai sorozatot alkotnának.

A Fibonacci-sorozat elemei azonban nem alkotnak mértani sorozatot, az egymást követő elemek hányadosa $\frac{f_{n+1}}{f_n}$ nem állandó, ami különösen jól látszik alacsony sorszámok esetén. Az elemek számának növelésével azonban ez a hányados egy állandó számhoz, a ϕ-hez közelít.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} \to \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \phi$$

A közelítés kétoldali: két egymást követő elem hányadosa nagyobb, illetve kisebb, mint a közrefogott aranyszám.



Írjuk fel a Fibonacci-sorozat elemeit és vizsgáljuk a két egymást követő tag hányadosának alakulását! Ez a kétoldali közelítés más módon is világossá tehető.

n	a_n	$\frac{a_n+1}{a_n}$
1	1	1
2	1	2
3	2	1,5
4	3	1,667
5	5	1,6
6	8	1,625
7	13	1,615
8	21	1,619
9	34	1,617
10	55	1,618

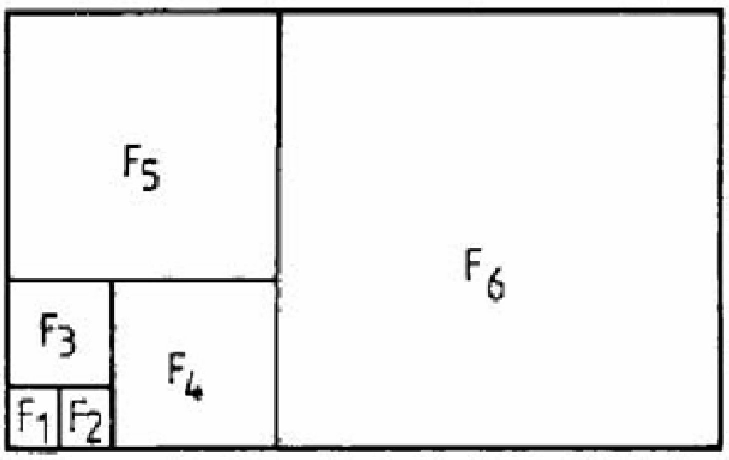
Ismeretes a mértani sorozatnak azon tulajdonsága, miszerint a második tagtól kezdve bármely elem az előtte lévő és őt követő elem mértani középarányosa. Ez másképpen fogalmazva azt jelenti, hogy a középső elem négyzete a vele közvetlenül szomszédos elemek szorzatával egyenlő. A Fibonacci-sorozat elemeire vonatkozóan ez a tulajdonság azzal a módosítással érvényesül, hogy a sorozat bármely elemének a négyzete (a másodiktól kezdve) a szomszédos elemek szorzatánál egyel kisebb vagy egyel nagyobb. Az elemek négyzetei és a szomszédos tagok szorzatai a következő táblázatról leolvashatók:

n	a_n	$q=a^2_n$	$p=a_n\text{-}1 \cdot a_n\text{+}1$	$q - p$
1	1	1		
2	1	1	1·2 = 2	1-2 = -1
3	2	4	1·3 = 3	4-3 = +1
4	3	9	2·5= 10	9-10 = -1
5	4	25	3·8= 24	25-24 = +1
6	8	65	5·13= 65	64-65 = -1

4.3. Fibonacci négyzetek

Azokat a négyzeteket, amelyek oldalainak mérőszámai a Fibonacci-sorozat elemei, Fibonacci-négyzeteknek nevezik. Az első n négyzet egymáshoz illesztésével olyan téglalapokat kapunk, melynek oldalhosszai megegyeznek az n-edik és az $(n+1)$ -edik négyzet oldalának hosszával. Ha f_n jelenti magát az n-edik négyzet oldalának hosszát, akkor ezek között a következő összefüggés áll fenn:

$$S_n = f_n \cdot f_{n+1}$$



Az összefüggés helyessége a négyzetek illesztésével a következő módon látható be: vegyünk két egységnyi oldalhosszúságú négyzetet (F_1, F_2) és ezek fölött helyezzük el a 2 egységnyi oldalhosszúságú F_3 négyzetet. Az így kapott alakzathoz illesszünk (jobbról) olyan négyzetet, melynek oldalhossza megegyezik az előző két négyzet oldalának összegével F_4. Az így kapott téglalap fölé illesszük az F_5, majd ezekhez ismét jobbról az F_6 négyzetet, és így tovább.

Az első két négyzet olyan téglalapot határoz meg, melyben az oldalak hosszúsága 1 és 2, vagyis amennyi az előző két négyzet oldalainak hossza. Az első három négyzet területösszege S_3, olyan téglalapot határoz meg, melynek oldalai 2 és 3, és ezek éppen az F_3 és F_4 négyzetek oldalhosszaival egyeznek meg. Az összefüggés helyessége, mely a Fibonacci-sorozat tulajdonságából következik, az ábráról is leolvasható.

4.4. Prímszámok a Fibonacci sorozatban

4.4.1. Megjegyzés. :

(1) $u_{n+k} = u_{n-1} + u_n u_{k+1}$

(2) $u_{2n} = (u_{n+1} + u_{n-1})(u_{n+1} - u_{n-1})$

(3) $u_{2n+1} = u_{n+1}^2 + u_n^2$

(4) $)u_{2n-1} = u_{n-1}^2 + u_n^2$

4.4.2. Tétel. *Ha u_n a Fibonacci sorozat n-edik eleme, akkor u_{kn} osztható u_n-nel ($k = 1, 2, \ldots$)*

Bizonyítás.

A tétel $k = 1$ esetén triviális, $k = 2$ esetén érvényes a (2) összefüggés, azaz a tétel igaz.

Tegyük fel, hogy k-ig minden természetes számra igaz a tétel, azaz

$$u_{kn} = c \cdot u_n$$

c természetes számok halmazának eleme.
Vizsgáljuk a $k + 1$ esetet:

$$u_{(k+1)\cdot n} = u_{kn+n} = u_{kn-1} \cdot u_n + u_{kn} \cdot u_{n+1} = u_{kn-1} \cdot u_n + c \cdot u_n \cdot u_{n+1} = u_n \cdot (u_{kn-1} + c \cdot u_{n+1})$$

Példa:

$u_{11} = 89, u_{22} = 89 \cdot 199, u_{33} = 2 \cdot 89 \cdot 19801$

4.4.3. Megjegyzés. Az 1. tétel általánosításaként adódik a Fibonacci sorozat összetett elemeire vonatkozó szükséges és elégséges egzisztencia tétel

□

4.4.4. Tétel. *Legyen az n index prímfelbontása $n = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_k$. u_q akkor és csak akkor osztója u_n-nek, ha $q \in p_1, p_2, .., p_n$*

Bizonyítás.

A bizonyítás szükségessége és elegségessége egyaránt az 1. tételből következik.

Következmény:

A 2. tétel jelöléseit használva kapjuk, hogy u_n osztható $lkkt(u_{p1}, u_{p2}, ..., u_{pk})$-vel.

□

4.4.5. Tétel. *Ha u_n prímszám, akkor n is prímszám.*

Bizonyítás. Ha u_n prímszám, akkor csak két osztója van $u_1 = 1$ és u_n, ekkor a 2. tétel miatt n összes osztója 1 és n, azaz n prímszám. □

Megj: A 3. tétel megfordítása csak az alábbi megszorítással érvényes:

4.4.6. Tétel. *Ha n prímszám, akkor u_n vagy prím vagy nincs olyan prímtényezője, amelyik Fibonacci szám.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy n prímszám és $u_n = k \cdot u_i$ $(i < n)$, ekkor a 2. tétel értelmében n i-nek a többszöröse, ami ellentmondás. Tehát u_n prímtényezői között nincs Fibonacci szám, kivéve, ha prímszám és az egyetlen prímtényezője önmaga.

□

4.4.7. Tétel. *Ha $n = 6k \pm 1 (k = 1, 2, ...)$ alakú, akkor u_n is az, azaz $n = 6k \pm 1$ esetén $u_n \equiv \pm 1 (mod 6)$*

Bizonyítás.

Teljes indukcióval:

$k = 1$ esetén $u_5 = 5$, $u_7 = 13$ tehát a tétel állítása teljesül.

Tegyük fel, hogy k-ra teljesül.
Vizsgáljuk $k + 1$-re a $6(k + 1) + 1$ esetet:

$u_{6(k+1)+1} = u_{6k+1+6}$. Az (1)-es miatt $u_{6k}u_6 + u_{6k+1}u_7 = (u_{6k+1} - u_{6-1})u_6 + u_{6k+1}u_7 = u_{6k+1}(u_6 + u_7) - u_{6k-1}u_6 = u_{6k+1}u_8 - u_{6k-1}u_6 = 21u_{6k+1} - 8u_{6k-1}$

Az indukciós feltevés szerint $u_{6k\pm1} \equiv \pm 1 (mod 6)$, tehát (mod 6) maradékát az alábbi táblázat foglalja össze: $21 \cdot u_{6k+1} - 8 \cdot u_{6k-1} mod 6$ $3 + 12 - 1 + 1$

Most vizsgáljuk meg a $6(k+1)-1$ esetet:

$u_{6(k+1)-1} = u_{6k+1+4}(1) miatt u_{6k}u_4 + u_{6k+1}u_5 = (u_{6k+1} - u_{6k-1})u_4 + u_{6k+1}u_5 = u_{6k+1}(u_4+u_5) - u_{6k-1}u_4 = u_{6k+1}u_6 - u_{6k-1}u_4 = 8u_{6k+1} - 3u_{6k-1}$

Az indukciós feltevés szerint $u_{6k} \pm 1 = \pm 1 mod 6$, tehát a (9) levezetés eredményeként kapott kifejezés(mod 6) maradékát az alábbi táblázat foglalja össze:

$8 \cdot u_{6k+1} - 3 \cdot u_{6k-1}(mod 6)\ 2 + 13 - 1 - 1$

Ha az 5. tételt összevetjük a prímszámokra vonatkozó 1. tétellel, mely szerint minden prímszám $6k-1$ vagy $6k+1$ alakú, akkor az alábbi tételhez jutunk:

□

4.4.8. Tétel. *Ha n prímszám,akkor $u_n 6k \pm 1$ alakú.*

4.4.9. Tétel. *Ha n prímszám és u_n nem prím, valamint r az u_n prímtényezőinek száma, akkor $u_n = \prod_{i=1}^{n}(6k_i \pm 1)$*

Megj: Figyelembe véve a 4. tételt adódik, hogy $6_{ki} \pm 1$ prímtényezők egyike sem Fibonacci szám.

Pédák: $n = 19$, $u_{19} = 4181 = (6 \cdot 6 + 1)(19 \cdot 6 - 1) = 37 \cdot 113$ $n = 31$, $u_{31} = 1346269 = (93 \cdot 6 - 1)(403 \cdot 6 - 1) = 557 \cdot 2417$

Nyitott probléma: Van-e végtelen sok prímszám eleme a Fibonacci sorozatnak?

A 3. és 4. tétel a Fibonacci sorozat prímszám tagjait vizsgálta. most definiáljuk a Fibonacci ikerprímeket az alábbiak szerint:

Definíció: Legyenek p és $p+2$ ikerprímek. Ha az u_p, u_{p+2} Fibonacci számok is prímek, akkor ezeket Fibonacci ikerprímeknek nevezzük.

Az 1. tétel szerint p és $p+2$ akkor és csak akkor lehetnek ikerprímek, ha $p = 6k-1$ alakú, ekkor természetesen $p+2 = 6k+1$ alakú prímszám. Következésképpen a Fibonacci ikerprímek u_{6k-1}, u_{6k+1} alakúak, azaz (11) alapján fennáll a következő összefüggés:

$u_{6k-1} * u_{6k+1} = u_{6k}^2 + (-1)^{6k}$, amiből $u_{6k-1} * u_{6k+1} = u_{6k}^2 + 1$

Ha tovább vizsgáljuk az u_{6k} Fibonacci számot, akkor a (2) összefüggés alapján kapjuk, hogy

$u_{6k} = u_{3k+1}^2 - u_{3k-1}^2 = (u_{3k+1} - u_{3k-1})(u_{3k+1} + u_{3k-1})$

Másrészt a 2. tétel szerint osztható minden olyan Fibonacci számmal, melynek indexe osztója $6k$-nak, azaz

$u_{6k} = A \cdot u_6 \cdot u_k = 2^3 \cdot A \cdot u_k$ (ahol A természetes szám)

Ebből következik a Fibonacci ikerprímekre vonatkozó alábbi tétel:

Tétel:

4.4.10. Tétel. *u_{6k-1} valamint u_{6k+1} Fibonacci ikerprímek, ha $u_{6k}^2 + 1$-nek pontosan két prímtényezője van.*

Megj:

-Az eddig ismert Fibonacci ikerprímek a $k = 1$ $(u_5 = 5, u_7 = 13), k = 2(u_{11} = 89, u_{13} = 233)$ értékekhez tartoznak. Kivételnek tekinthető az első Fibonacci ikerpram-pár az $u_3 = 2, u_5 = 5$, mivel ebben szerepel az egyetlen páros prímszám.

Nyitott problémák:

-Van-e a felsorolt hármon kívül Fibonacci ikerprím-pár? -Van-e végtelen sok Fibonacci ikerprím-pár?

4.5. Előfordulása a természetben

A virágszirmok száma gyakran Fibonacci-szám: például a liliomnak, a nősziromnak és a hármasszиromnak három; a haranglábnak, a boglárkának, a larkspurnak és a vadrózsának öt; a szarkalábnak, a vérpipacsnak és a pillangóvirágnak nyolc; a jakabnapi aggófűnek, a hamvaskának és a körömvirágnak 13; az őszirózsának, a borzas kúpvirágnak és a cikóriának 21; a fodroslevelű margitvirágnak, az útilapunak és egyes százszorszépeknek 34; más százszorszép-fajoknak pedig 55 vagy 89 szirma van.

Fibonacci-spirálba rendeződnek például a fenyőtoboz és az ananász pikkelyei, a napraforgó magjai, a málna szemei, a karfiol rózsái és egyes kaktuszok tüskéi. A nautiluszok háza is hasonlít a Fibonacci-spirálhoz, de nem egy negyed, hanem egy teljes kör alatt nő meg a sugár ϕ,-szeresére. Nautilusz

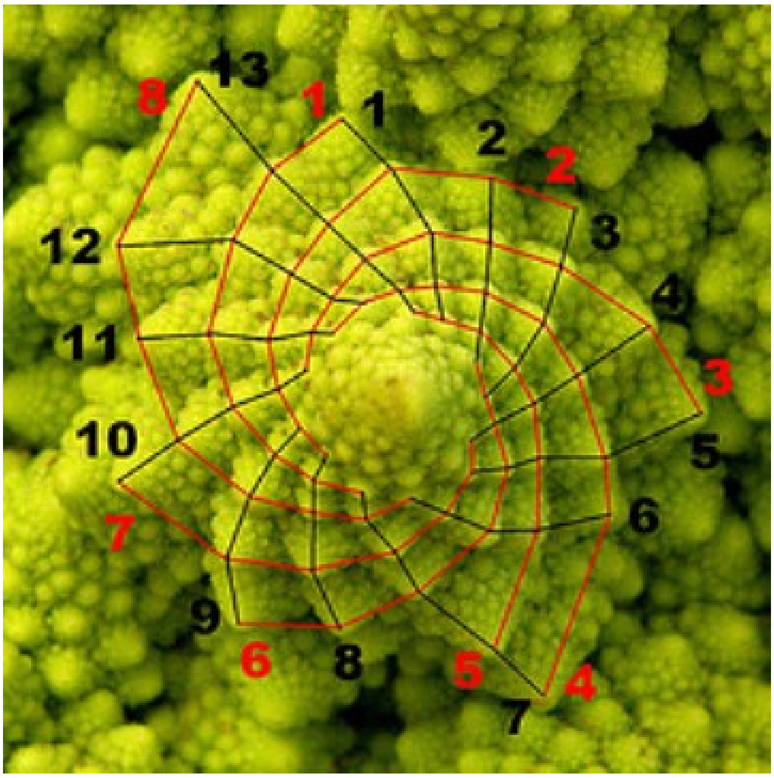
A növények szárán az egymást követő levelek elfordulása (a phyllotaxis) többnyire (egyes becslések szerint 90% -ban) $\frac{F_n}{F_{n+2}}$ teljeskör (például szilfa és hárs esetén 1/2, bükknél, mogyorónál és szedernél 1/3, tölgynél, almánál, cseresznyénél és meggynél 2/5, nyárnál, rózsánál és baracknál 3/8, fűznél és mandulánál 5/13). Ezek az arányok éppen a ϕ^{-2} lánctörtbe fejtésekor kapott közelítő törtek (ϕ, az aranymetszés).

Przemyslaw Prusinkiewicz szerint ezen jelenségek egy része megmagyarázható szabad csoportok bizonyos algebrai megkötéseinek kifejeződéseként, konkrétabban bizonyos Lindenmeyer nyelvtanokként. A fraktálgeometriában a Fuchs-csoportok és a Klein-csoportok tanulmányozása közben találkozhatunk Fibonacci-számokkal.

Egy méh n-generációs őseinek a száma az n-edik Fibonacci-szám.


7
8
6
5
10
9
4
11
3
12
13
1
2


3
5
6
4
4
7
3
2
5
2
8
1
1


13
8
1
1
2
2
3
12
4
11
3
10
5
7
6
9
6
8
5
4
7

5. fejezet

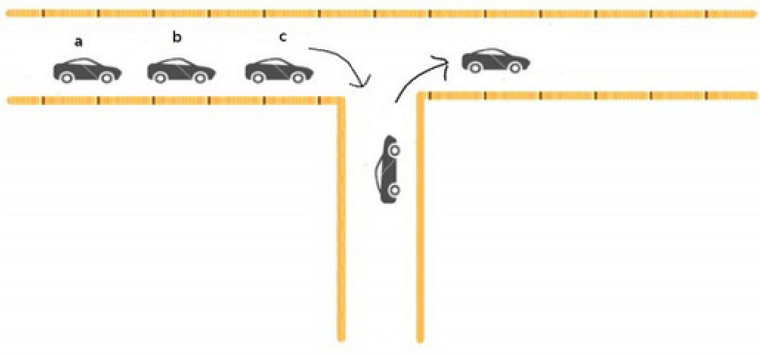
Catalan számok

A Catalan számokkal, vagy más néven a Catalan-sorozattal először Leonard Euler egyik munkájában találkozhatunk. Euler ebben azt vizsgálta, hogy hányféleképpen lehet háromszögekre bontani egy sokszöget. Mint a tudományos életben már sok esetben előfordult, ezt a sorozatot mégsem róla, hanem Eug?ne Charles Catalan belga matematikusról nevezték el. Catalan ismerte fel először ugyanis, hogy ezek a számok több problémára is közös megoldást adnak. Richard P. Stanley Enumerative Combinatorics című, 1999-ben megjelent munkájában 66 különböző definíciót adott a Catalan-számokra. Stanley nem ismeretlen magyar matematikus körökben, hiszen 1975-ben Pólya György díjat kapott, és nála volt doktorandusz három magyar matematikus is (Hetyei Gábor, Bóna Miklós és Mészáros Karola).

Az udvarias sofőr esete

Nézzünk egy példát. A járművek egy nagyon szűk, egysávos úton haladhatnak, ahol nem tudnak előzni. Az úthoz csatlakozik egy mellékút, ahová kiállhat az az autós, aki szeretné elengedni sietős társait. Ha még van olyan sofőr, aki szeretne kiállni, akkor ezen szúk mellékúton ő is megteheti, természetesen aki először kiállt, az egyre hátrébb kerül ebben a sorban.

A kérdés, hogy hány különböző sorrendben érkezhet meg az n db autó a szűk útszakasz végéhez?

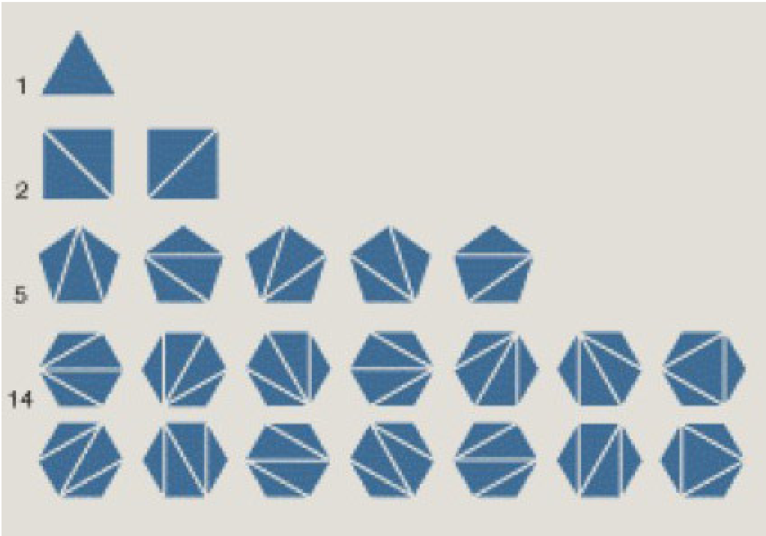


Az autókat a, b, c-vel jelöltük az úton balról jobbra. A megérkező autósokat jobbról balra követjük figyelemmel!

Lehetőségek	Lehetőségek száma
0	1
a	1
ab, ba	2
abc, bca, cab, bac, cba	5
abcd, bcda, bcad, cdab, cdba, bacd, bcda, cabd, cbad, dabc, dbca, dbac, dcab, dcba	14

5.0.1. Feladat. Háromszögekre bontás

Hányféleképpen lehet az $n + 2$ szöget átlókkal háromszögre bontani? (Egy konvex sokszög egymást nem metsző átlókkal történő háromszögekre bontása.)



Oldalak száma	3	4	5	6	7	8	9
Hányféleképpen bontható fel háromszögekre	1	2	5	14	42	132	429

Az első néhány Catalan-számot felírhatjuk a következőképpen: $n = 1, 2, ...$ esetén $1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, ...$

5.0.2. Feladat. Hányféleképpen bonthatunk fel egy konvex n-szöget egymást nem metsző átlókkal háromszögekre?

5.0.3. Megoldás. Jelölje T_n az ilyen háromszögelések számát. $T_3 = 1$, $T_4 = 2$, $T_5 = 5$, így érezzük, hogy a Catalan számok jönnek be, tehát természetes a $T_2 = 1$ definíció. Számozzuk meg az óra járása szerint a sokszög csúcsait. A rekurzió felírásához tekintsük az 1-2 oldalt tartalmazó háromszög harmadik csúcsát, legyen ez i. Ez a háromszög két kisebb háromszögre vágja az eredetit, amelyeket egymástól függetlenül bonthatunk háromszögekre. A két sokszög egyike egy $i-1$ szög (ezért is hasznos a $T_2 = 1$ definíció, hisz $i = 3$-ra ezt kapjuk.), a másik egy $n-i+2$-szög. Így a $T_n = \sum_{i=3}^{n} T_{i-1}T_{n-i+2}$ rekurziót kapjuk. Ha $i-1$ helyett j-t írunk, akkor az összegzés $j = 2$-től megy j=$n-1$-ig. Így a rekurzió:

$$T_n = C_{n-2}$$

5.0.4. Feladat. Hányféleképpen zárójelezhető egy n tényezős szorzat?

5.0.5. Megoldás. A zárójelezés azt jelenti, hogy ezután olyan kéttényezős szorzatot kapunk, amelynek minden zárójelében két tényező szerepel (változó vagy már zárójelezett kifejezés). Például n=4 esetén a lehetséges zárójelezések:

$$((x_1x_2)x_3)x_4, (x_1x_2)(x_3x_4), (x_1(x_2x_3))x_4, x_1((x_2x_3)x_4), x_1(x_2(x_3x_4))$$

Jelölje Z_n a zárójelezések számát, és legyen $Z_1 = 1$. Ha az utolsónak elvégzett szorzás előtti tényező $i \geq 1$ db változót tartalmaz, akkor ezt a részt Z_i-féleképpen, ugyanezen szorzás másik tényezőjét Z_{n-i}-féleképpen zárójelezhetjük. Így a $Z_n = Z_1 + Z_{n-1} + ... + Z_iZ_{n-i} + Z_{n-1}Z_1$ rekurziót kapjuk, amelynek a C_{n-1} sorozat a megoldása.

A kombinatorikában a Catalan számok egy természetes számokból álló sorozatot alkotnak, amely több, legtöbbször rekurziót tartalmazó probléma megoldásakor lép fel.

Az n-edik Catalan-szám a következőképpen számítható ki, ahol $n \geq 0$

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Irodalomjegyzék

[1] Máté László: Rekurzív sorozatok, Tankönyvkiadó, Budapest, 1980

[2] Lovász László-Pelikán József-Vesztergombi Katalin: Diszkrét matematika,Typotex kiadó, 2006

[3] Urbán János:Hátárérték-számítás, Műszaki Könyvkiadó 2009

[4] Kovács Ádám–Dr. Vámos Attila: Aranyháromszög, Műszaki Könyvkiadó 2007

[5] Lovász László: Kombinatorikai problémák és feladatok, Typo-TeX kiadó 2008

[6] Denkinger Géza–Gyurkó Lajos: Analízis, Nemzeti Tankönyvkiadó 2001

[7] Kósa András–Mezei István–S.Gyarmati Erzsébet: Analízis példatár, Műszaki kiadó, 1985

[8] http://hu.wikipedia.org/