Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

A hiperbolikus sík Poincaré-féle körmodellje

Szakdolgozat

Készítette:

Czapáry-Martincsevics Máté András

Matematika BSc
Tanári szakirány

Témavezető:

Verhóczki László

Egyetemi docens
Geometriai Tanszék

Budapest

2015

Tartalomjegyzék

Előszó

Szakdolgozatomban a hiperbolikus sík Poincaré-féle körmodelljét fogom vizsgálni. A hiperbolikus síkgeometria bemutatására főként a Cayley-Klein-féle modellt és a Poincaré-féle körmodellt szokták alkalmazni. A Poincaré-féle körmodellnek az a nagy előnye, hogy a szögek modellbeli mértékei és az euklideszi síkbeli mértékei megegyeznek, vagyis ez egy úgynevezett szögtartó modell.

A dolgozat első fejezete előkészíti a modell tárgyalását. Mivel a modellbeli egyenesek az euklideszi síkon köröknek felelnek meg, így szükség van a körökre vonatkozó alapvető ismeretekre. A fejezetben egyszerű körgeometria fogalmak és állítások tárgyalására kerül sor. Látni fogjuk, hogy a modellbeli tengelyes tükrözések euklideszi értelemben inverziók. Ennek következtében fontos szerep jut az inverzióval kapcsolatos állításoknak is. Emiatt az első fejezetben részletesen tárgyaljuk a síkbeli inverziót és annak tulajdonságait, többek között igazoljuk, hogy az inverzió megőrzi a körök hajlásszögét, továbbá a köri pontnégyes kettősviszonyát. A vizsgálatok során szintetikus geometriai eszközöket alkalmazunk, koordináta-geometriai eszközöket nem.

A második fejezetben kerül sor a hiperbolikus síkgeometria részletesebb tárgyalására. Ennek első alfejezetében megadjuk a hiperbolikus síkgeometria axiómáit. A 2.2. alfejezetben pedig bevezetjük a Poincaré-féle körmodellt, amelyben a távolságot a köri pontnégyes kettősviszonyával értelmezzük. Igazoljuk, hogy a modellben teljesülnek az axiómák.

Az utolsó fejezetben előbb speciális egyenesseregeket értelmezünk. Bevezetjük a távolságvonal, más szóval a hiperciklus fogalmát. Definiáljuk, hogy mikor mondjuk két egyenes egy-egy pontját egymáshoz korrespondeálónak. Ez alapján értelmezni tudjuk a paraciklus fogalmát is. Végül megmutatjuk a modell egyik fontos tulajdonságát, miszerint ha veszünk az euklideszi síkon egy kört vagy egy egyenest és annak a modellkörbeli részét, akkor az a modellben vagy egyenes, vagy kör, vagy hiperciklus, vagy pedig paraciklus. Emiatt mondható, hogy a Poincaré-féle körmodell ciklustartó.

Köszönöm témavezetőmnek, Verhóczki Lászlónak, a szakmai segítséget és a türelmet, amelyet a szakdolgozatom elkészítéséhez nyújtott.

1. fejezet

Körök geometriája

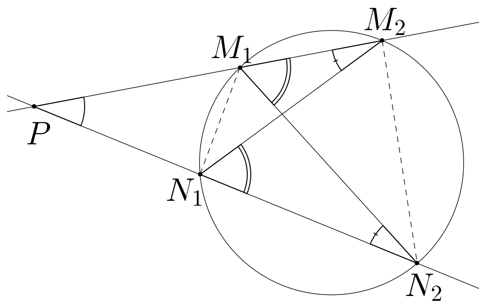
1.1. Pont körre vonatkozó hatványával kapcsolatos tételek

Ebben a fejezetben áttekintjük az alapvető körgeometriai fogalmakat és tételeket az euklideszi síkgeometriában. A jelölések vonatkozásában arra törekszünk, hogy a *Hajós György: Bevezetés a geometriába* c. könyv (lásd [3]) jelöléseit alkalmazzuk. Az A és B pontok távolságát AB, vagy $d(A, B)$ jelöli. Elsőként a pont körre vonatkozó hatványával kapcsolatos egyszerű tételeket mondunk ki.

1.1.1. Tétel: Adott a síkon egy kör és egy pont. Ekkor ha a pontból szelőt húzunk a körhöz, a ponttól a metszéspontokig húzott szakaszok hosszának szorzata nem függ a szelő megválasztásától.

Bizonyítás: Az 1.1. ábra jelöléseit használva adódnak az alábbiak: $N_2M_1M_2\measuredangle = M_2N_1N_2\measuredangle$ és $M_1M_2N_1\measuredangle = M_1N_2N_1\measuredangle$, mivel páronként azonos körívekhez tartozó kerületi szögek.

Ebből következik, hogy a $PN_1M_2\triangle$ és a $PM_1N_2\triangle$ háromszögek hasonlóak, mivel kettő szögük páronként egyenlő és az $M_1PN_1\measuredangle$ szögük közös. Hasonló háromszögek megfelelő oldalainak aránya megegyezik, tehát:



1.1. ábra

$$\frac{PN_1}{PM_2} = \frac{PM_1}{PN_2},$$

$$PN_1 \cdot PN_2 = PM_1 \cdot PM_2. \qquad \square$$

Megjegyzés: Ha a P pont a körön belülre esik, akkor is teljesül az állítás, a bizonyítás a fentihez hasonlóan történik.

A következő definícióban fölidézzük az irányított szakasz előjeles hosszának fogalmát.

1.1.2. Definíció: Legyen adott egy egyenes és annak egy irányítása. Legyen A és B két tetszőleges pont az egyenesen. Az $\overrightarrow{AB}$ irányított szakasz előjeles hosszán a $d(A, B)$ pozitív számot értjük, ha $\overrightarrow{AB}$ iránya megegyezik az egyenes irányításával, illetőleg a $-d(A, B)$ számot, ha azzal ellentétes.

Megjegyzés: A továbbiakban az irányított egyenesen lévő $\overrightarrow{AB}$ irányított szakasz előjeles hosszát AB jelöli.

Vegyük a P pontot és az O középpontú, r sugarú k kört. A P pontból húzott szelő körrel vett metszéspontjait jelölje M_1 és M_2. Értelmezzük a pont körre vonatkozó hatványát:

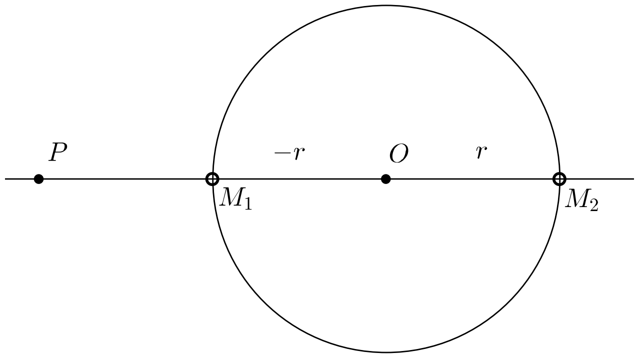
1.1.3. Definíció: A szelőegyenesen vegyük a két irányítás egyikét. Az előjeles hosszakkal vett $PM_1 \cdot PM_2$ szorzatot a P pont k-ra vonatkozó *hatványának* nevezzük. Jelölés: $h(k, P)$.

Megjegyzés: Az 1.1.1. Tételből következik, hogy a hatvány nem függ a P ponton átmenő szelőegyenes megválasztásától.

Megjegyzés: Ha P a körön kívül van, akkor PM_1 és PM_2 előjele megegyezik, tehát a hatvány pozitív. Ha P a körön belül van, akkor az előjeles hosszak ellentétes előjelűek, tehát a hatvány negatív.

1.1.4. Tétel: Egy P pontnak egy körre vonatkozó hatványa megegyezik a pont körközépponttól mért távolsága négyzetének és a sugár négyzetének különbségével, azaz $h(k, P) = OP^2 - r^2$.

Bizonyítás:



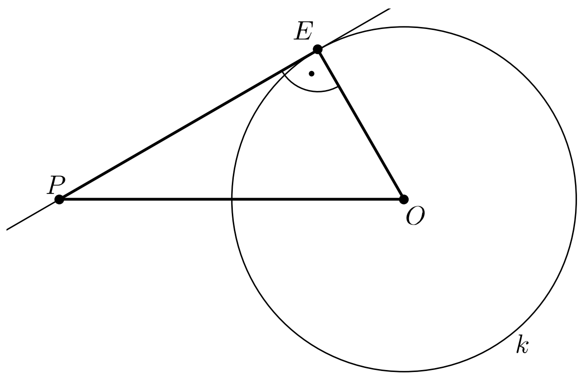
1.2. ábra

A PO egyenesen vegyük a $\overrightarrow{PO}$ irányítást. A PO egyenes körrel vett metszéspontjait jelölje M_1 és M_2. Ekkor előjeles hosszakkal adódik, hogy $OM_1 = -r$ és $OM_2 = r$, tehát $PM_1 = PO - r$ és $PM_2 = PO + r$. Ebből következik:

$$h(k, P) = PM_1 \cdot PM_2 = OP^2 - r^2. \qquad \square$$

1.1.5. Tétel: Egy körön kívüli pont körre vonatkozó hatványa egyenlő a pontból a körhöz húzott érintőszakasz hosszának négyzetével.

Bizonyítás:



1.3. ábra

A P-ből a körhöz húzott érintőegyenes érintési pontja legyen E. Mivel az érintőszakasz merőleges a sugárra, így a Pitagorasz-tételt alkalmazva adódik, hogy $OP^2 = PE^2 + EO^2$. Ezt átrendezve és az 1.1.4. Tételt felhasználva:

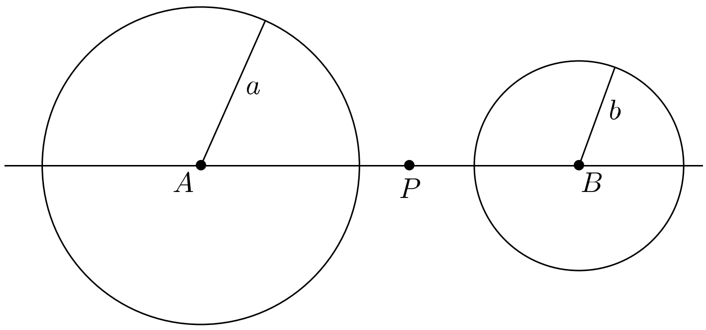
$$PE^2 = OP^2 - r^2 = h(k, P). \qquad \square$$

1.2. A hatványvonal

1.2.1. Definíció: Két nem koncentrikus kör *centrális* egyenesén a középpontjaikra illeszkedő egyenest értjük.

1.2.2. Állítás: Két nem koncentrikus kör centrális egyenesén pontosan egy olyan pont van, amelynek a két körre vonatkozó hatványa megegyezik.

Bizonyítás:



1.4. ábra

A körök középpontjai legyenek A és B, sugaraik pedig a és b. Az AB egyenesen vegyük az A kezdőpontú, B-t tartalmazó félegyenessel meghatározott irányt. Az AB egyenesnek tekintsük egy P pontját. Amennyiben a P-nek a két körre vonatkozó hatványai egyenlők, akkor az AP és BP irányított szakaszok előjeles hosszaira fennáll: $AP^2 - a^2 = BP^2 - b^2$. Az előjeles hosszakra nyilván igaz: $AP = AB + BP$. A két egyenlőségből a BP irányított szakasz előjeles hosszára fennáll

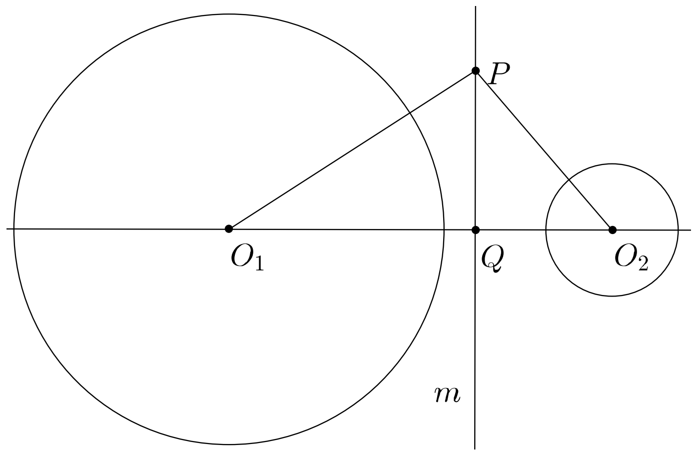
$$BP = \frac{a^2 - b^2 - AB^2}{2AB}.$$

Ez pedig már igazolja az állítást, mivel a BP előjeles hossz egyértelműen adódik a két kör adataiból. $\square$

1.2.3. Definíció: Azon pontok mértani helyét, amelyek két körre vonatkozó hatványa ugyanannyi, a két kör *hatványvonalának* nevezzük.

1.2.4. Állítás: Két nem koncentrikus kör hatványvonala egy olyan egyenes, amely merőleges a körök centrális egyenesére.

Bizonyítás:



1.5. ábra. A két kör hatványvonala

A körök középpontjai legyenek O_1, O_2, sugaraik pedig r_1, r_2. Vegyük a sík egy P pontját, amely nincs rajta a körök centrális egyenesén és amelyre teljesül $O_1P^2 - r_1^2 = O_2P^2 - r_2^2$, azaz megegyezik a két körrel vett hatványa. P-nek a centrálisra vett merőleges vetületét jelölje Q, a PQ egyenest pedig m.

Pitagorasz-tétel alapján $O_1P^2 = O_1Q^2 + QP^2$ és $O_2P^2 = O_2Q^2 + QP^2$. Ezeket behelyettesítve az előbbi egyenletbe: $O_1Q^2 - r_1^2 = O_2Q^2 - r_2^2$. Az előbbi állítás alapján Q a centrális egyenesen az egyetlen pont, amelynek a két körrel vett hatványa egyenlő.

Hasonlóan az is belátható, hogy az m egyenes bármely tetszőleges P' pontjára is teljesül $(O_1P')^2 - r_1^2 = (O_2P')^2 - r_2^2$.

Ezek felett már csak azt kell belátni, hogy m pontjain kívül nincs más pont, amire teljesülnének az előbbiek. Tegyük fel, hogy létezik olyan $P' \notin m$, amelynek a két körre vonatkozó hatványai megegyeznek. Ekkor a körök centrálisára merőleges,

P'-t tartalmazó egyenes minden pontjára is igaz, tehát a centrálissal vett metszéspontjára is. Így a centrálison 2 pontra is teljesülne a tulajdonság, ez azonban a 1.2.2. Állításban belátottak alapján nem lehetséges. $\square$

Megjegyzés: Adott pont hatványa két eltérő sugarú koncentrikus körre nem lesz egyenlő, hiszen ha d a pont távolsága a közös centrumtól, $r_1 \neq r_2$ pedig a két kör sugara, akkor fennáll $d^2 - r_1^2 \neq d^2 - r_2^2$.

Két kör hajlásszöge

Az alábbiakban értelmezni fogjuk egymást metsző kör és egyenes, illetve két metsző kör hajlásszögét.

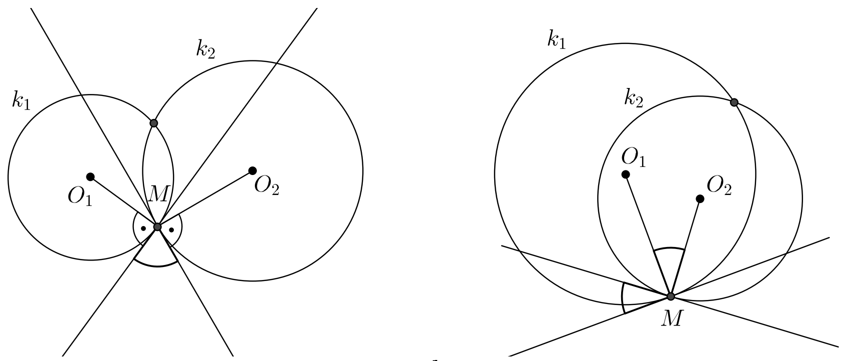
1.2.5. Definíció: Egymást metsző kör és egyenes hajlásszögén az egyenes és az egyik metszéspontba húzott körérintő hajlásszögét értjük.

1.2.6. Definíció: Azt egymást metsző k_1, k_2 körök hajlásszögén az egyik metszéspontban a körökhöz húzott érintőegyenesek hajlásszögét értjük. Jele: $(k_1, k_2)\measuredangle$.

Tekintsük az alábbi eseteket az 1.6. ábra alapján:

1. eset: ha $O_1MO_2\measuredangle \geq 90°$, akkor $(k_1, k_2)\measuredangle + O_1MO_2\measuredangle = 180°$.

2. eset: ha $O_1MO_2\measuredangle \leq 90°$, akkor $(k_1, k_2)\measuredangle = O_1MO_2\measuredangle$.



1.6. ábra

Megjegyzés: Könnyű belátni, hogy két kör derékszögben metszi egymást akkor és csak akkor, ha a metszéspontba húzott sugáregyenesek merőlegesek egymásra. Ebből és az 1.1.5. Tételből következik, hogy k_1 és k_2 körök merőlegesek egymásra akkor és csak akkor, ha a középpontok hatványaira fennáll $h(k_2, O_1) = r_1^2$ és $h(k_2, O_1) = r_2^2$.

1.3. A síkbeli inverzió

A következőkben bevezetünk egy fontos geometriai transzformációt.

1.3.1. Definíció: Legyen adva a síkban egy O középpontú, r sugarú k kör. Ezt a kört az inverzió *alapkörének*, az O pontot az inverzió *pólusának*, r^2-et pedig az inverzió *hatványának* nevezzük. A k körre vonatkozó inverzión azt a ι leképezést értjük, amely egy O-tól különböző P ponthoz az OP félegyenes azon P' pontját rendeli, amelyre fennáll:

$$OP \cdot OP' = r^2.$$

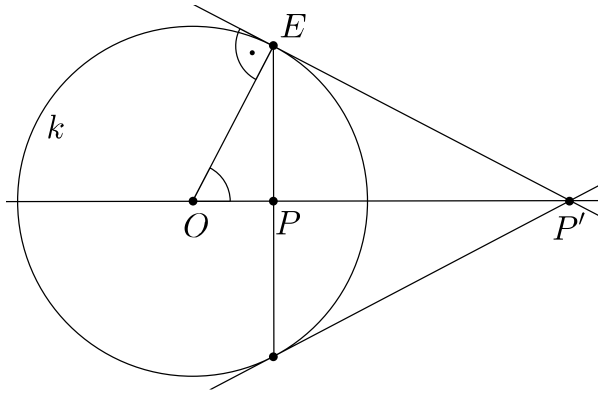
Megjegyzés: A P' pont a P pont *inverze*. Az inverzió a pólus kivételével minden síkbeli ponthoz rendel egy-egy inverz pontot. A definícióból következik, hogy ha P inverze P', akkor P' inverze P. Ha egy alakzat pontjainak vesszük az inverz képeit, akkor az *inverz alakzatot* kapjuk, azaz *invertáljuk* az alakzatot.

Az is belátható, hogy az alapkörön kívüli pontok inverzei az alapkörön belül vannak, az alapkörön belüli pontok inverzei pedig az alapkörön kívülre esnek, az alapkör pontjai pedig önmaguk inverzei.

1.4. Inverz pont szerkesztése

1.4.1. Állítás: Ha a P pont az O középpontú, r sugarú k kör belső pontja, akkor a P-n át az OP szakaszra szerkesztett merőleges húr végpontjaiból húzott érintők metszéspontja épp P-nek a k-ra vonatkozó inverz képe.

Bizonyítás:



1.7. ábra. A P pont inverz képe

A metszéspontot jelölje P'. Tudjuk, hogy P' illeszkedik az O kezdőpontú, P-n áthaladó félegyenesre. Az $OP'E\triangle$ hasonló az $OPE\triangle$-höz, mert egyik szögük közös, másik pedig derékszög. Ebből felírható, hogy:

$$\frac{OP'}{OE} = \frac{OE}{OP} ,$$

amelyből átrendezve megkapjuk, hogy:

$$OP \cdot OP' = OE^2 = r^2. \qquad \square$$

1.4.2. Állítás: Ha a P pont az O középpontú, r sugarú k kör külső pontja, akkor P-ből a körhöz húzott érintők érintési pontjait összekötő húr és az OP szakasz metszéspontja P-nek a k-ra vonatkozó inverz képe.

Bizonyítás: Az érintési pontok az OP szakasz Thalész-körének segítségével megkaphatóak, innen pedig az előző állítás bizonyítása alapján igazolható az állítás. $\square$

1.5. Egyenesek és körök inverz képei

Ebben az alfejezetben igazoljuk, hogy az inverzió a körök és egyenesek halmazát önmagába képezi.

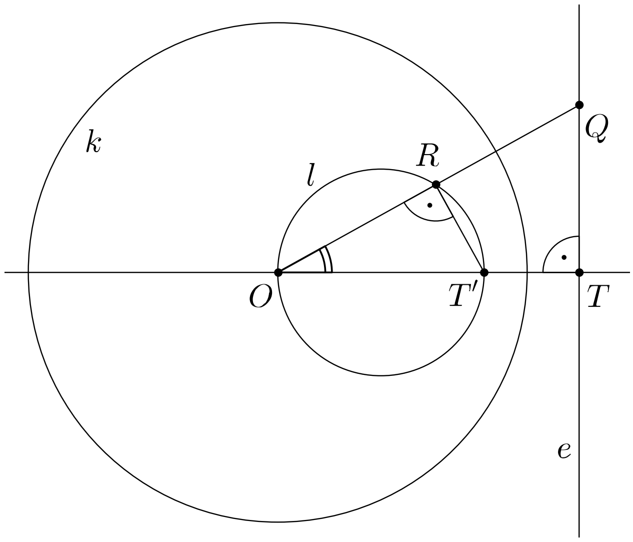
Minden esetben, amikor póluson áthaladó alakzat inverzéről beszélünk, akkor valójában arról az alakzatról beszélünk, amelyből elhagyjuk a pólust, hiszen annak nincsen inverz képe.

1.5.1. Állítás: Póluson átmenő egyenes inverz képe önmaga.

Bizonyítás: Inverzió definíciójából adódik. □

1.5.2. Állítás: Póluson át nem haladó egyenes inverz képe póluson átmenő kör.

Bizonyítás: Jelölje ι az O középpontú, r sugarú k körre vonatkozó inverziót. Azt kell belátnunk, hogy az e egyenes $\iota(e)$ képe egy kör. (Lásd az 1.8. ábrát)



1.8. ábra

Az O-ból az e-hez húzott merőleges talppontját jelölje T. Ekkor az $\iota(T) = T'$ is a merőlegesen lesz. Azt állítjuk, hogy az OT' átmérőjű l kör lesz e inverz képe.

Vegyük e egy tetszőleges, T-től különböző Q pontját, és legyen R az OQ szakasz l-el vett metszéspontja. Az $ORT'\triangle$ és $OTQ\triangle$ háromszögek hasonlóak, mivel kettő szögük megegyezik. Ebből adódik, hogy a megfelelő oldalak arányai megegyeznek:

$$\frac{OT'}{OR} = \frac{OQ}{OT} \ .$$

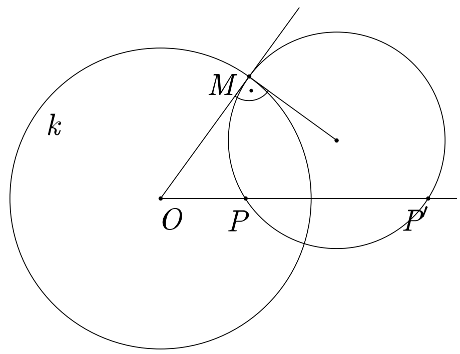
Átrendezve az egyenlőséget megkapjuk, hogy $OR \cdot OQ = OT \cdot OT' = r^2$, tehát $R = \iota(Q)$. Mivel Q az e tetszőlegesen választott pontja, így teljesül, hogy $\iota(e) = l$ és az inverzió tulajdonságaiból adódik $\iota(l) = e$ is. □

Megjegyzés: Az állítás akkor is teljesül, ha az egyenes érinti vagy metszi a kört, a bizonyítás hasonló módon történik.

1.5.3. Állítás: Legyen adott egy k kör és a P és P' különböző pontok, amelyek egymásnak k-ra vonatkozó inverzei. Ekkor bármely kör, amely áthalad a P és P' pontokon, merőlegesen metszi k-t.

Bizonyítás:

A két kör mindenképp metszi egymást, mivel P és P' közül egyik a k kör belső, a másik annak külső pontja. Jelölje M a két kör egyik metszéspontját. Ekkor felírhatjuk az alábbiakat:



$$\left.\begin{aligned} OP \cdot OP' = r^2 \\ OM^2 = r^2 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow OP \cdot OP' = OM^2$$

Az 1.1.5. Tételből adódik, hogy OM a másik körhöz húzott érintőszakasz, így a két kör érintője merőlegesen metszi egymást. □

1.5.4. Állítás: Az inverzió alapkörét derékszögben metsző kör képe önmaga.

Bizonyítás: Vegyük az O középpontú, r sugarú k kört, mint az inverzió alapkörét és a C középpontú, s sugarú l kört, amely k-t derékszögben metszi. A körök egyik metszéspontját jelöljük M-el. Az eddig belátottak alapján tudjuk, hogy $h(l, O) = OM^2 = r^2$.

Az O-ból l-hez húzott tetszőleges szelő messe l-et a P_1 és P_2 pontokban. Ekkor $OP_1 \cdot OP_2 = OM^2 = r^2$, tehát a P_1 és P_2 pontok egymás inverz képei. Mivel ez tetszőleges szelőre teljesül az 1.1.1. Tétel miatt, így l minden pontja l-re képződik.

□

1.5.5. Állítás: Póluson át nem menő kör inverz képe póluson át nem menő kör.

Bizonyítás: A ι inverzió alapköre legyen az O középpontú, r sugarú k kör, l pedig legyen a póluson át nem haladó, C középpontú, s sugarú kör.

Tekintsük azt a κ középpontos hasonlóságot a síkban, amelynek O a centruma és előjeles aránya

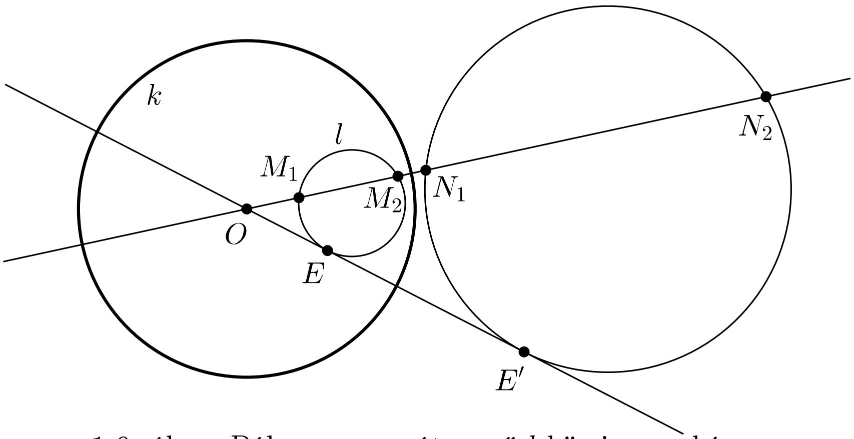
$$\lambda = \frac{r^2}{h(l, O)} .$$

A következőkben belátjuk, hogy $\iota(l) = \kappa(l)$.

1. eset

Legyen l olyan kör, amelynek a pólus nem belső pontja. Ekkor az O-nak az l-re vonatkozó hatványára fennáll $h(l, O) > 0$, a hasonlóság arányára pedig teljesül $\lambda > 0$.

Legyen OE az O pontból az l-hez húzott egyik érintőszakasz, ekkor fennáll: $h(l, O) = OE^2$.



1.9. ábra. Póluson nem átmenő l kör inverz képe

Tudjuk, hogy tetszőleges P pontra $\iota(P)$ és $\kappa(P)$ is illeszkedik az O-ból induló, P-t tartalmazó egyenesre.

A középpontos hasonlóság definíciójából adódik, hogy ha E az l kör O-ból húzott egyik érintőjének az érintési pontja, akkor $\kappa(E)$ az O-ból a $\kappa(l)$-hez húzott érintő érintési pontja lesz.

Jelölje $\iota(E)$-t E'. Ekkor az inverzióból adódik, hogy $OE \cdot OE' = r^2 \Rightarrow OE' = r^2/OE$. A $\kappa(E)$ pont távolsága O-tól:

$$\lambda \cdot OE = \frac{r^2}{h(l, O)} \cdot OE = \frac{r^2}{OE^2} \cdot OE = \frac{r^2}{OE} = OE'.$$

Ezzel már igazolva van, hogy $E' = \kappa(E)$.

Vegyünk egy tetszőleges egyenest, amely áthalad az O ponton és metszi l-et és $\kappa(l)$-et. Jelölje M_1 és M_2 az l-el vett metszéspontokat, N_1 és N_2 a $\kappa(l)$ körrel vett metszéspontokat, amelyekre teljesül $\kappa(M_1) = N_1$ és $\kappa(M_2) = N_2$. Ekkor fennáll

$OM_1 \cdot OM_2 = h(l, O)$. Az eddigiek alapján teljesül:

$$OM_1 \cdot ON_2 = OM_1 \cdot OM_2 \cdot \frac{r^2}{h(l,O)} = h(l,O) \cdot \frac{r^2}{h(l,O)} = r^2.$$

Mivel $OM_1 \cdot ON_2 = r^2$, így $\iota(M_1) = N_2$. Hasonló módon belátható, hogy $\iota(M_2) = N_1$.

2. eset

Ha az l körnek a pólus belső pontja, akkor $h(l, O) < 0$, tehát $\lambda < 0$ is teljesül. Vegyünk egy az O ponton átmenő tetszőleges e egyenest, amely az l kört az M_1, M_2 pontokban metszi. A $\kappa(M_1)$ illetve a $\kappa(M_2)$ pontokat jelölje rendre a Q_1 és Q_2 pontok, ezek nyilván elemei a $\kappa(l)$ körnek.

Mivel λ negatív, így az M_1 és Q_1 pontokat az e egyenesen az O pont elválasztja. Az 1.1.1. Tételből következik, hogy az előjeles hosszakkal fennáll

$$h(l, O) = OM_1 \cdot OM_2.$$

Ekkor adódnak az alábbiak:

$$OQ_1 \cdot OM_2 = \lambda \cdot OM_1 \cdot OM_2 = \frac{r^2}{h(l,O)} \cdot h(l,O) = r^2.$$

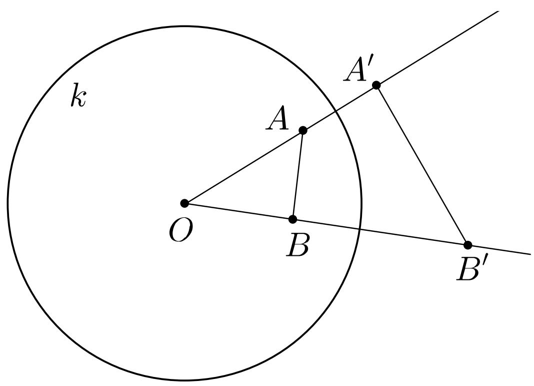
Tehát fennáll $Q_1 = \iota(M_2)$. A fentiekhez hasonló módon igazolható $Q_2 = \iota(M_1)$ is. Ezzel beláttuk, hogy $\kappa(l) = \iota(l)$, vagyis l inverz képe egy kör. □

Az inverzióval nyert képpontok távolsága

1.5.6. Lemma: Ha az O középpontú, r sugarú körre vonatkozó inverzió az A és B pontokat rendre az A' és B' pontokba viszik, akkor a pontok távolságára fennáll:

$$A'B' = r^2 \frac{AB}{OA \cdot OB} \ .$$

Bizonyítás:



1.10. ábra

Az 1.10. ábra jelöléseit felhasználva:

$$\left.\begin{array}{r} OA \cdot OA' = r^2 \\ OB \cdot OB' = r^2 \end{array}\right\} \Longrightarrow OA \cdot OA' = OB \cdot OB' \Longrightarrow \frac{OB'}{OA} = \frac{OA'}{OB} = \lambda$$

Ebből következik, hogy az $OAB\triangle$ és $OB'A'\triangle$ háromszögek hasonlóak, mivel az O pontbeli szögük közös és 2-2 oldaluk aránya páronként megegyezik. A hasonlóság aránya λ, tehát kifejezve az $A'B'$ távolságot:

$$A'B' = \lambda \cdot AB = \frac{OB'}{OA} \cdot AB.$$

Az inverzió definíciójából pedig adódik, hogy $OB' = {}^{r^2}\!/_{OB}$, tehát

$$A'B' = \frac{r^2}{OA \cdot OB} \cdot AB. \qquad \square$$

1.6. Inverzió szögtartó tulajdonsága

A következő tételeknek fontos szerepe lesz a Poincaré-modell tárgyalásában.

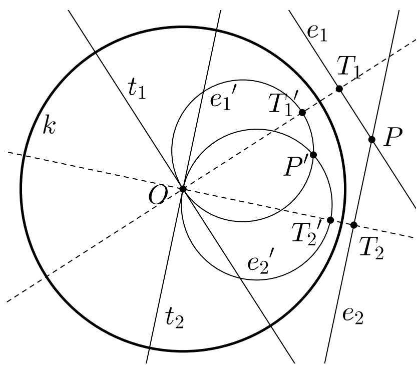
1.6.1. Tétel: Ha két kör, vagy egy kör és egy egyenes egy, a pólustól különböző pontban érinti egymást, akkor az inverz képeik is egy pólustól különböző pontban érintkeznek.

Bizonyítás: Jelölje l_1 és l_2 a két alakzatot, E pedig az érintkezési pontjukat. Inverz képeiket rendre jelölje $l_1{}'$, $l_2{}'$ és E'. Az előző tételek alapján belátható, hogy az $l_1{}'$, $l_2{}'$ alakzatok közül legalább az egyik kör. Mivel E illeszkedett mindkét alakzatra, így E' is illeszkedik azok inverz képeire. Az $l_1{}'$ és $l_2{}'$ alakzatoknak az E' ponton kívül nincs más közös pontja: a pólus nem lehet közös pont, mivel az eredeti alakzatok közül legfeljebb egy tartalmazta a pólust. Ha az E' ponton kívül lenne más közös pont, akkor annak inverze illeszkedne az l_1 és l_2 alakzatokra, ezeknek viszont az E ponton kívül más közös pontja nincs. Tehát az $l_1{}'$ és $l_2{}'$ alakzatok érintik egymást.

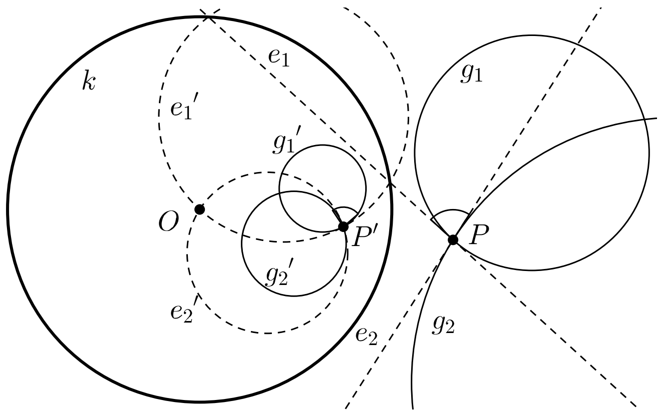
$\square$

1.6.2. Tétel: Ha két alakzat, amelyeknek mindegyike kör vagy egyenes egy, a pólustól különböző pontban metszi egymást, akkor inverzeik ugyanakkora szögben metszik egymást.

Bizonyítás: Tételünket először arra az esetre látjuk be, ha mindkét alakzat egyenes. Jelölje ι az O centrumú k alapkörű inverziót. Az 1.11. ábrának megfelelően legyenek e_1 és e_2 az O-t nem tartalmazó metsző egyenesek és a metszéspontjukat jelölje P. T_1 jelölje az O-nak az e_1-re bocsátott merőleges vetületét, T_1 inverz képét pedig jelölje T_1'. Evidens, hogy az O, T_1 és T_1' pontok kollineárisak. Ekkor az 1.5.2. Állítás bizonyítása alapján az $e_1' = \iota(e_1)$ kör az O és T_1' pontokat összekötő szakasz Thalész-köre. Az e_1' kör O-beli érintőjét jelölje t_1. Mivel OT_1 merőleges az e_1 és t_1 egyenesekre, e_1 és t_1 párhuzamosak. A t_2 egyenest hasonló konstrukcióval kaphatjuk meg e_2-ből. Mivel $e_1 \parallel t_1$ és $e_2 \parallel t_2$, így adódik: $(e_1', e_2')\measuredangle = (t_1, t_2)\measuredangle = (e_1, e_2)\measuredangle$.



1.11. ábra



1.12. ábra

Most belátjuk, hogy ennek a speciális esetnek a teljesüléséből már igazolható a többi eset is. Tekintsük a 1.12. ábrát. g_1 és g_2 olyan metsző körök, amelyek nem tartalmazzák az O pontot. P jelölje az egyik metszéspontjukat. Ezen alakzatok inverzei rendre a g_1', g_2' körök és a P' pont. A g_1, g_2 körökhöz a P pontba húzott érintőket jelölje e_1 és e_2, amelyeknek az inverz képei rendre e_1' és e_2'. Ezek a képek olyan körök lesznek, amelyek az 1.6.1. Tételből adódóan a P' pontban érintik a g_1' illetve a g_2' köröket. A bizonyítás első felét felhasználva már adódik, hogy $(g_1, g_2)\measuredangle = (e_1, e_2)\measuredangle = (e_1', e_2')\measuredangle = (g_1', g_2')\measuredangle$. □

1.7. Köri pontnégyes kettősviszonya

1.7.1. Definíció: Vegyük az M, N, A és B kollineáris pontokat. Ekkor a négy pont *kettősviszonyán* az

$$(MNAB) = \frac{MA}{AN} : \frac{MB}{BN} \text{ számot értjük.}$$

1.7.2. Definíció: Vegyük egy tetszőleges g körön az M, N, A és B pontokat. A négy pont *köri kettősviszonyán* az

$$(MNAB)_g = \frac{MA}{AN} : \frac{MB}{BN}$$

pozitív számot értjük, ahol az összefüggésben a pontokat összekötő húrok hosszai szerepelnek.

Megjegyzés: A továbbiakban a köri pontnégyes kettősviszonyára is az $(MNAB)$ jelölést használjuk, azaz elhagyjuk a g-indexelést.

Megjegyzés: A definíciókból könnyen adódik, hogy $(MNAB) = (MNBA)^{-1}$, valamint hogy $(MNAB) = (ABMN)$.

A következő tétel arról szól, hogy az inverzió megőrzi a kollineáris és a köri pontnégyesek kettősviszonyát.

1.7.3. Tétel: A síkban tekintsünk egy ι inverziót, amelyik alapköre k. Legyenek M, N, A és B olyan pontok, amelyek egy körre vagy egy egyenesre esnek. Ezek inverz képei legyenek rendre az M', N', A' és B' pontok. Ekkor a kettősviszonyokra fennáll $\left|(MNAB)\right| = \left|(M'N'A'B')\right|$.

Bizonyítás: Felhasználva az 1.5.6. Lemmát az inverz pontok távolságáról adódik:

$$\left|(M'N'A'B')\right| = \frac{M'A'}{A'N'} \cdot \frac{B'N'}{M'B'} = \left(\frac{\cancel{r^2} \cdot MA}{\cancel{OM} \cdot \cancel{OA}} : \frac{\cancel{r^2} \cdot AN}{\cancel{OA} \cdot \cancel{ON}}\right) \cdot \left(\frac{\cancel{r^2} \cdot BN}{\cancel{OB} \cdot \cancel{ON}} : \frac{\cancel{r^2} \cdot MB}{\cancel{OM} \cdot \cancel{OB}}\right) =$$
$$= \frac{MA}{AN} \cdot \frac{BN}{MB} = \left|(MNAB)\right| \qquad \square$$

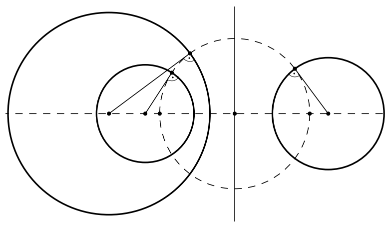
1.8. Körsorok

A következőkben szintetikus módon vannak definiálva a körsorok és azok típusai. A kimondott állításoknál nem adjuk meg azok bizonyítását. Ezekről a *Hajós György: Bevezetés a geometriába* c. könyv (lásd [3]) 40. paragrafusában olvashatunk bővebben, ahol ezek analitikus geometriai módszerekkel bizonyítva vannak.

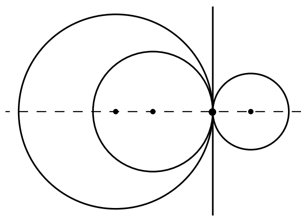
1.8.1. Definíció: A síkban legyen adott két pont. Vegyük a két pont által meghatározott egyenest és a két pontot összekötő szakasz Thalész-körét. Tekintsük az összes olyan kört, amely a Thalész-kört derékszögben metszi és amelyek centruma az egyenesen van. Ezen körök a két ponttal, mint pontkörrel, és az azokat összekötő szakasz felezőmerőlegesével együtt egy *elliptikus körsort* alkotnak. (lásd az 1.13. ábrát)

1.8.2. Definíció: A síkban legyen adott egy egyenes és azon egy pont. Tekintsük az összes olyan kört, amelyik az egyenest az adott pontban érinti. Ezen körök a ponttal, mint pontkörrel, és az egyenessel együtt egy *parabolikus körsort* alkotnak. (lásd az 1.14. ábrát)

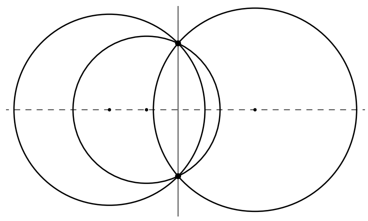
1.8.3. Definíció: A síkban legyen adott két pont. A két ponton átmenő körök és a két pont egyenese együttesen egy *hiperbolikus körsort* alkotnak. (lásd az 1.15. ábrát)



1.13. ábra. Elliptikus körsor



1.14. ábra. Parabolikus körsor



1.15. ábra. Hiperbolikus körsor

Megjegyzés: Az említett körsorok bármelyikére igaz, hogy az adott körsor bármely két körének a hatványvonala a körsor egyenese.

1.8.4. Definíció: A körsor két elemének közös pontját a körsor minden eleme tartalmazza. Egy ilyen pontot a körsor *alappontjának* mondunk.

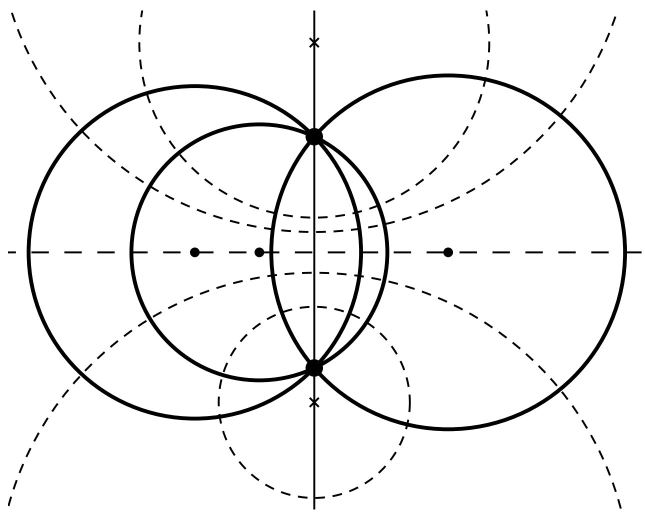
1.8.5. Definíció: A síkban legyen adott egy pont. Tekintsük az összes olyan kört, amelynek az adott pont a centruma. Ezen körök és a pont, mint pontkör együttesen *koncentrikus körsort* alkotnak.

Megjegyzés: Ha egy körsor nem koncentrikus, akkor a körsor elemeinek középpontjai mind a hatványvonalra merőleges egyenesnek a különböző pontjai. Ezt az egyenest a körsor *centrálisának* mondjuk.

A Poincaré-féle körmodell tárgyalása során felhasználjuk majd az alábbi tételeket.

1.8.6. Tétel: Ha egy kör vagy egy egyenes merőlegesen metszi egy körsor két elemét, akkor merőlegesen metszi a körsor valamennyi elemét.

1.8.7. Definíció: Legyen adott egy körsor, amely vagy hiperbolikus, vagy elliptikus, vagy pedig parabolikus. A körsor elemeit derékszögben metsző körökből és a körsor centrális egyeneséből álló körsort az eredeti körsor *konjugált* körsorának nevezzük.



1.16. ábra. Egy hiperbolikus körsor és szaggatottal a hozzá tartozó konjugált elliptikus körsor

1.8.8. Tétel: A hiperbolikus körsor konjugáltja egy elliptikus körsor. A parabolikus körsor konjugáltja egy parabolikus körsor.

Megjegyzés: Egy pont(kör) merőlegesen metszi az őt tartalmazó egyenest vagy kört. A konjugáltság, mint reláció két körsor között szimmetrikus, hisz a merőlegesség is az.

2. fejezet

Hiperbolikus síkgeometria

2.1. Síkgeometriák axiomatikus felépítése

Ebben a fejezetben megadjuk a síkgeometriák egy axiómarendszerét. Az euklideszi és a hiperbolikus geometria felépítésére több különböző axiómarendszer is alkalmas. Mi olyan axiómarendszert veszünk, amely a távolság fogalmára alapul. Csak a síkbeli axiómákat mondjuk ki, hiszen a Poincaré-féle körmodell is csak a hiperbolikus síkgeometriára ad modellt.

Megjegyzés: A tárgyalt axiómarendszert *metrikusnak* szokás nevezni, mivel mint említettük, ebben a távolságfüggvény kitüntetett szerepet játszik.

Jelölések, kitüntetett alakzatok

A sík összes pontjának a halmazát jelölje X. A sík pontjainak részhalmazai között vannak kitüntetett alakzatok, ezeket *egyeneseknek* mondjuk és nem definiáljuk. A továbbiakban a pontokat nagy betűvel $(A, B, C, \dots)$, az egyeneseket kis betűvel $(e, f, g, \dots)$, a síkokat illetve szögeket pedig görög kisbetűvel $(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$ fogjuk jelölni.

Egy A pont *illeszkedik* egy e egyenesre, ha $A \in e$, azaz A pont eleme az e alakzatnak. Ha az A, B és C pontok egy egyenesre esnek, *kollineárisnak* mondjuk őket. Ha tetszőleges számú pont *nem kollineáris*, akkor van köztük három olyan pont, amely nem esik egy egyenesre.

Illeszkedési axiómák

(IA 1) Van a síkban három olyan pont, amelyek nem kollineárisak.

(IA 2) Bármely két ponthoz egy és csakis egy egyenes illeszkedik.

Megjegyzés: Ha A és B két egymástól különböző pont, akkor a rájuk illeszkedő egyenest a továbbiakban $\langle A, B\rangle$-vel jelöljük.

Birkhoff-féle vonalzó axióma

Vegyük a sík összes pontjainak X halmazát és ezen halmaz önmagával vett Descartes-szorzatát, vagyis az $X \times X = \big\{(A,B) \bigm| A, B \in X\big\}$ halmazt, amelynek elemei tehát pontpárok.

(BVA) Adva van egy olyan $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ valós függvény, amely teljesíti az alábbi feltételt: Tetszőleges $g \in X$ egyeneshez létezik egy olyan $\xi : g \to \mathbb{R}$ bijekció, hogy bármely a g egyenesre illeszkedő A, B pontokra fennáll a $\big|\xi(A) - \xi(B)\big| = d(A, B)$ összefüggés.

Megjegyzés: A $d : X \times X \to \mathbb{R}$ függvényt távolságfüggvénynek mondjuk.

2.1.1. Definíció: A sík valamely A, B pontjainak távolságán a $d(A, B)$ nemnegatív számot értjük.

2.1.2. Definíció: Ha egy egyenes A, B és C pontjait tekintjük, a B pont *elválasztja* az A és C pontokat, hogyha fennáll $d(A, B) + d(B, C) = d(A, C)$.

2.1.3. Definíció: Vegyük egy e egyenes egymástól különböző A és B pontjait. Ekkor az A és B pontokat, valamint az azokat az e egyenesen elválasztó pontok halmazát együttesen *(zárt) szakasznak* nevezzük. Az A és B pontokat a szakasz végpontjainak nevezzük. Ha a szakaszból elhagyjuk a végpontjait, akkor a kapott alakzatot *nyílt szakasznak* mondjuk. A továbbiakban amikor szakaszról beszélünk mindig a zárt szakaszra gondolunk. Két pont egyértelműen meghatároz egy szakaszt és ezt a két pontot a szakasz *végpontjainak* mondjuk. Az A és B pontok által meghatározott szakaszra az AB jelölést használjuk.

2.1.4. Definíció: *Irányított szakaszon* olyan szakaszt értünk, amely határpontjainak a sorrendjét is megadjuk, tehát meghatározzuk, hogy melyik a *kezdőpontja* és melyik a *végpontja*. Az A és B pontok által meghatározott irányított szakaszt jelölje $\overrightarrow{AB}$. Ennek A a kezdőpontja, B pedig a végpontja.

A következő alakzatokkal kapcsolatos tételeket nem bizonyítjuk.

2.1.5. Tétel: Ha egy egyenesen adott egy P pont, akkor ez a pont az egyenes P ponttól különböző pontjait két egyértelműen meghatározott osztályba sorolja úgy, hogy az egyenes két pontja akkor és csak akkor van ugyanabban az osztályban, ha a P pont nem választja el azokat.

2.1.6. Definíció: A fenti tételben szereplő osztályokat *nyílt félegyeneseknek* nevezzük, a P pontot pedig a nyílt félegyenesek *kezdőpontjának* mondjuk. Ha a P pontot is hozzávesszük a nyílt félegyeneshez, akkor *zárt félegyenest* kapunk. A továbbiaknak félegyenesen mindig zárt félegyenest értünk. Ha a félegyenesen adott egy P-től különböző Q pont, akkor a félegyenesre a $[P, Q\rangle$ jelölést használjuk. Minden félegyenes meghatároz egy *irányt*. Az $\overrightarrow{AB}$ irányított szakasz iránya megegyezik az $[A, B\rangle$ félegyenes által meghatározott iránnyal. Egy egyenesen kétféle irány adható meg, ezek egymással *ellentétesek*.

2.1.7. Definíció: Ha az $\langle A, B\rangle$ egyenesen megadunk egy irányt, akkor *irányított egyeneshez* jutunk. A továbbiakban ha egy $\langle A, B\rangle$ irányított egyenesről beszélünk, akkor azon az $[A, B\rangle$ félegyenes által meghatározott irányt tekintjük.

Pasch-féle rendezési axióma

(PRA) Ha adott egy háromszögvonal és egy egyenes, amely nem megy át a háromszög egyik csúcspontján sem és metszi a háromszögvonal egyik oldalát, akkor az egyenes metszi a háromszögvonal még egy oldalát.

A (PRA) axióma alapján már igazolható az alábbi tétel.

2.1.8. Tétel: Ha a síkban egy e egyenest tekintünk, akkor a síknak az e egyenestől különböző pontjai egyértelműen két osztályba sorolhatók úgy, hogy két pont akkor és csak akkor tartozik ugyanabba az osztályba, ha a két pontot összekötő szakasznak nincs közös pontja a megadott e egyenessel.

Egy ilyen osztályt, az egyenessel együtt *(zárt) félsíknak* nevezünk. Az egyenes a félsík *határegyenese*, a félsík többi pontját *belső* pontoknak, a félsíkhoz nem tartozó pontokat pedig *külső* pontoknak nevezzük. Ha a félsíkból elhagyjuk a határegyenesét, *nyílt félsíkhoz* jutunk. A továbbiakban félsík alatt mindig zárt félsíkot értünk.

2.1.9. Definíció: A síkban a zászló egy olyan félegyenesből és egy olyan félsíkból álló alakzatpár, ahol a félsík határegyenese tartalmazza a félegyenest.

Egybevágósági axióma

2.1.10. Definíció: *Egybevágósági transzformáción* (más szóval *izometrián*) egy olyan $\varphi : X \to X$ bijektív leképezést értünk, amely távolságtartó és egyenest egyenesbe képez.

Megjegyzés: Két síkbeli alakzat *egybevágó*, ha van olyan izometria, amely az egyiket a másikba viszi.

Az alábbi kijelentést nevezik egybevágósági axiómának.

(EA) Ha adva van két síkbeli zászló, akkor egyértelműen létezik egy olyan egybevágósági transzformáció, amely az első zászlót a második zászlóba képezi.

Az (IA1), (IA2), (BVA), (PRA) és (EA) axiómák által meghatározott geometriát *abszolút geometriának* nevezik.

Párhuzamossági axióma

(PA) Ha adott egy g egyenes és egy arra nem illeszkedő P pont, akkor csak egy olyan egyenes van, amely áthalad a P ponton és nem metszi a g egyenest.

Ha az abszolút geometria axiómáihoz hozzávesszük a síkbeli párhuzamossági axiómát, akkor az így kapott geometria az *euklideszi síkgeometria*.

A párhuzamossági axióma tagadása

(HPA) Ha adott egy g egyenes és egy arra nem illeszkedő P pont, akkor legalább két olyan egyenes van, amely illeszkedik a P pontra és nem metszi a g egyenest.

Ha az abszolút síkgeometria axiómáihoz a (PA) axióma helyett annak (HPA) tagadását vesszük, akkor az ezen axiómák által meghatározott geometriát nevezzük *hiperbolikus síkgeometriának*.

2.2. A Poincaré-féle körmodell

Ebben az alfejezetben definiáljuk a hiperbolikus síkgeometria Poincaré-féle körmodelljét.

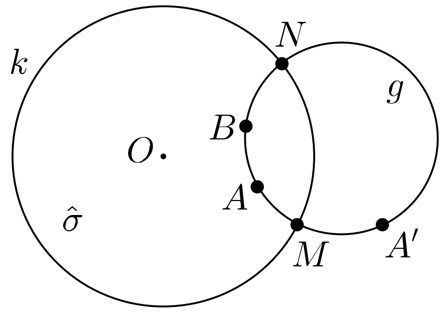
Tekintsünk az euklideszi térben egy σ síkot és abban egy O centrumú, r sugarú k körvonalat. A modellbeli sík pontjainak $\hat{\sigma}$ halmaza legyen a k körvonal által határolt nyílt körlemez, azaz legyen $\hat{\sigma} = \big\{P \in \sigma \;\big|\; OP < r\big\}$.

Jelölje G a σ síkbeli egyenesek és körök halmazát. A modell egyenesei ekkor a G halmaz azon elemeinek a $\hat{\sigma}$ nyílt körlemezzel vett metszetei, amelyek a k körvonalat merőlegesen metszik. Az így kapott modellbeli egyenesek $\hat{G}$ halmazára tehát fennáll $\hat{G} = \big\{g \cap \hat{\sigma} \;\big|\; g \in G,\ (g,k)\measuredangle = 90°\big\}$.

Illeszkedési axiómák teljesülése

2.2.1. Állítás: Vegyük az A és B tetszőleges, egymástól különböző pontokat a $\hat{\sigma}$ modellbeli síkon. Ekkor az A és B pontokra egy és csakis egy modellbeli egyenes illeszkedik.

Bizonyítás: Az A pont k körrel vett inverz képét jelölje A'. Az A, B és A' pontok egyértelműen meghatároznak egy g kört, amely az 1.5.3. Állításból kifolyólag merőleges a k körre. Ha egy kör áthalad az A ponton és merőleges a k körre, akkor az A' ponton is át kell haladnia, tehát az g körön kívül nincs másik kör, amely merőleges a k körre és tartalmazza az A és B pontokat is. Az A és B pontokon áthaladó modellbeli egyenes az g körnek a $\hat{\sigma}$ nyílt körlemezben lévő köríve. □



2.1. ábra

Megjegyzés: Az előző bizonyításból következik az első illeszkedési axióma teljesülése is, miszerint van a síkban három olyan pont, amelyek nem kollineárisak. Ha C tetszőleges pont, amely nincs rajta az l körön és eleme $\hat{\sigma}$-nak, akkor teljesül, hogy az A, B és C pontok nem esnek egy egyenesre a modellben.

Megjegyzés: Ha vesszük a modell k határkörén az M és N különböző pontokat, akkor ezek is egyértelműen meghatároznak egy modellbeli egyenest, az M-en és N-en áthaladó, k-t merőlegesen metsző kör vagy egyenes modellsíkkal vett metszetét.

Távolság értelmezése a modellben

Az A és B pontok legyenek a $\hat{\sigma}$ modellsík különböző pontjai. Jelölje $g \in G$ az A és B pontokon áthaladó, k körvonalat merőlegesen metsző egyenest vagy kört. A g-nek a k-val vett metszéspontjait jelölje M és N. Ekkor a modellbeli $\hat{d} : \hat{\sigma} \times \hat{\sigma} \to \mathbb{R}$ távolságfüggvény értéke legyen

$$\hat{d}(A, B) = \Big| ln(MNAB) \Big|,$$

ahol $(MNAB)$ a g-re eső M, N, A, B pontok kettősviszonyát jelenti. (lásd a 2.1. ábrát)

Megjegyzés: A $\hat{d}$ távolságfüggvényre definíció szerint teljesül, hogy tetszőleges $A \in \hat{\sigma}$ pontra $\hat{d}(A, A) = 0$. Könnyen beláthatjuk, hogy ha A és B $\hat{\sigma}$-beli pontok, akkor fennáll, hogy $\hat{d}(A, B) = \hat{d}(B, A)$.

Birkhoff-féle vonalzó axióma teljesülése

2.2.2. Tétel: Legyen l egy olyan kör, amely a modell k alapkörét derékszögben metszi. Ekkor az l körre vonatkozó ι inverzió leszűkítése a $\hat{\sigma}$ modellsíkra egy izometria a modellben.

Bizonyítás:

Az inverzió alapkörét derékszögben metsző köröket és egyeneseket az inverzió önmagukra képzi, így $\iota(k) = k$, valamint $\iota(\hat{\sigma}) = \hat{\sigma}$. Mivel az inverzió szögtartó, így a k-t derékszögben metsző kör vagy egyenes inverz képe a k-t ugyancsak derékszögben metszi, tehát a modellben az inverzió egyenestartó.

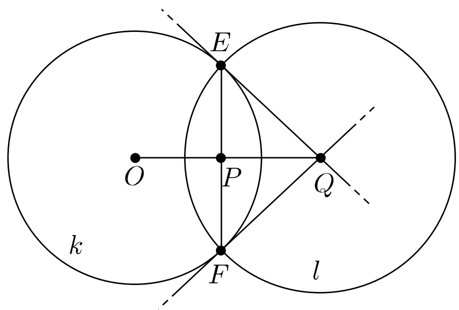
Legyenek A és B tetszőleges egymástól különböző modellbeli pontok, a rajtuk áthaladó modellbeli egyenest jelölje $\hat{g}$, annak k-val vett metszéspontjait pedig jelölje M és N. Az A, B, M, N pontok inverz képeit jelölje rendre A', B', M', N'. Mivel az 1.7.3. Tételben beláttuk, hogy az inverzió megőrzi a kettősviszony értékét, így könnyen adódik, hogy

$$\hat{d}(A, B) = \Big| \ln(MNAB) \Big| = \Big| \ln(M'N'A'B') \Big| = \hat{d}(A', B'),$$

tehát az inverzió megőrzi a modellbeli távolságot. □

2.2.3. Állítás: Legyen P egy O-tól különböző pont. Van olyan modellbeli izometria, amely P-t az O-ba, O-t pedig P-be viszi.

Bizonyítás:



2.2. ábra

A P pontnak a k alapkörű inverzióval nyert képét jelölje Q, az $\langle O, P\rangle$ egyenesre a P pontba állított merőlegesnek és a k körnek a metszéspontjait pedig jelölje E és F. A Q középpontú, E-t tartalmazó kört jelölje l. Az 1.4.1. Állítást felhasználva mivel $k \perp l$, így az l körhöz az E és F pontokba húzott érintők az O pontban metszik egymást, tehát P-nek az l körre vett inverz képe épp az O pont. Az is következik k és l merőlegességéből, hogy ez az inverzió izometria a modellben.

Ezzel beláttuk, hogy tetszőleges P ponthoz szerkeszthető olyan l kör, amelyre vett ι inverzió izometria a modellben és $\iota(P) = O$. Az inverzió definíciójából következik, hogyha $\iota(P) = O$ akkor $\iota(O) = P$. $\square$

Megjegyzés: Könnyű belátni, hogy az l körre vonatkozó inverzió modellkörre vett leszűkítése megegyezik az l modellbeli egyenesre történő tükrözéssel.

2.2.4. Következmény: Egy modellbeli egyenes izometriával átvihető egy O-n átmenő egyenesbe és mivel az izometria távolságtartó a modellben, így elegendő ilyen egyenesekre belátnunk a Birkhoff-féle vonalzó axiómát.

2.2.5. Állítás: A Birkhoff-féle vonalzóaxióma teljesül a modellben.

Bizonyítás: Az axiómát elegendő az O pontot tartalmazó egyenesekre belátni.

Tekintsük a σ síkon a g egyenest, amely az M és N pontokban metszi a modellünk k alapkörét és áthalad annak O középpontján. Ekkor a $\hat{g} = g \cap \hat{\sigma}$ egy O-n áthaladó modellbeli egyenes lesz. Az axióma $\xi : \hat{g} \to \mathbb{R}$ függvényét válasszuk úgy, hogy tetszőleges $P \in \hat{g}$ pontra $\xi(P) = \ln(MNP)$. Ekkor az (MNP) osztóviszony értéke a $(0,\infty)$ intervallumba esik és tetszőleges $x \in (0,\infty)$ számra egyértelműen létezik $P \in \hat{g}$, melyre $(MNP) = x$. Az ugyancsak a $(0,\infty)$ intervallumon értelmezett ln természetes logaritmusfüggvény szigorúan monoton növekvő, tehát a $\xi : \hat{g} \to \mathbb{R}$ leképezés bijektív. Tetszőleges $A, B \in \hat{g}$ pontokra ekkor

$$\Big|\xi(A) - \xi(B)\Big| = \Big|\ln(MNA) - \ln(MNB)\Big| = \left|\ln\frac{(MNA)}{(MNB)}\right| = \Big|\ln(MNAB)\Big| = d(A,B)$$

teljesül, mivel (MNP) értéke nemnegatív szám, hiszen P mindig M és N közé esik.

□

Pasch-féle rendezési axióma igazolása

A szemlélet alapján ez az axióma is teljesül, de mivel a szabatos bizonyítás nehezebb, erre most nem térünk ki. A bizonyítás fellelhető a *Szirmai Jenő, G. Horváth Ákos: Nemeuklideszi geometriák modelljei* c. könyv (lásd [2]) 1.3. alfejezetében.

Egybevágósági axióma teljesülése

2.2.6. Állítás: A modellben teljesül az egybevágósági axióma.

Bizonyítás: Vegyük a modellbeli tetszőleges Z_1 és Z_2 zászlókat. A Z_1 zászló félegyenesének a kezdőpontját jelölje A_1, Z_2-ét pedig A_2. Jelölje ι_1 azt az inverziót, amely A_1-et átviszi O-ba, a ι_2 pedig azt, amelyik A_2-t viszi át O-ba. A 2.2.3. Állítás bizonyítása szerint ilyen inverziók léteznek, és ezek modellbeli egybevágóságok. Az így kapott $\iota_1(Z_1) = \hat{Z}_1$ illetve $\iota_2(Z_2) = \hat{Z}_2$ alakzatok félkörlemezek lesznek. A $\hat{Z}_1$ félkörlemezt át lehet vinni $\hat{Z}_2$-be egy O középpontú elforgatással, vagy egy O-n átmenő egyenesre való tükrözéssel. Jelölje ezt a transzformációt φ. Tekintsük most a $\mu = \iota_2 \circ \varphi \circ \iota_1$ izometriát. Könnyű belátni erre, hogy $\mu(Z_1) = Z_2$.

Most azt kell belátnunk, hogy μ-n kívül nincs más olyan izometria, ami Z_1-et és Z_2-t egymásba képzi. Legyen $\bar{\mu}$ olyan modellbeli izometria, amelyre teljesül $\bar{\mu}(Z_1) = Z_2$. Ekkor a $\bar{\varphi} = \iota_2 \circ \bar{\mu} \circ \iota_1$ izometria a $\hat{Z}_1$ félkörlemezt $\hat{Z}_2$-be viszi. Mivel ilyen izometria csak egy van, így fennáll $\bar{\varphi} = \varphi$, ebből pedig következik $\bar{\mu} = \mu$. □

Hiperbolikus párhuzamossági axióma teljesülése

2.2.7. Állítás: A modellben teljesül a (HPA) hiperbolikus párhuzamossági axióma.

Bizonyítás: A 2.2.3. Állítás alapján feltehető, hogy $P = O$. Vegyünk egy az O-n nem átmenő g egyenest. A modellbeli g egyenes az euklideszi síkon egy olyan kört ad, amely derékszögben metszi k-t. Emiatt g nem tartalmazza O-t. Az O-n átmenő modellbeli egyenesek a k kör átmérői. Ezek között pedig végtelen sok olyan van, amely nem metszi g-t. Ezzel beláttuk, hogy a (HPA) axióma igaz a modellben. □

A Poincaré-féle körmodell szögtartó tulajdonsága

Akárcsak az euklideszi síkgeometriában, a modellben is értelmezni lehet a szögvonal és a szögtartomány fogalmát. Be lehet vezetni a derékszög fogalmát is. Eszerint egy szöget derékszögnek mondunk, ha a mellékszögeivel egybevágó.

Értelmezni lehet a szögek mértékét. Az O-n átmenő modellbeli egyenesek a modellkör átmérői. Az ezekre történő modellbeli tükrözés azonos az euklideszi értelemben vett tengelyes tükrözés modellkörre való leszűkítésével. Világos, hogy az O csúcsú, szögek szögfelezői az euklideszi síkban és a modellben megegyeznek. Vegyük észre azt is, hogy az O csúcsú derékszög a modellben ugyan azt jelenti, mint az euklideszi síkon. Ezekből következi, hogy az O csúcsú szögek modellbeli mértéke azonos azok euklideszi mértékével.

Ha egy olyan szöget veszünk a modellben, amelyik C csúcsa különbözik O-tól, akkor a 2.2.3. Állításban láttuk, hogy van olyan modellbeli tükrözés, amely az O, C pontokat felcseréli, azaz a C csúcsú szöget egy O csúcsúba viszi. Mivel ez a tengelyes tükrözés euklideszi értelemben egy inverzió, és az 1.6.2. Tételben kimondottak szerint az inverzió szögtartó, így azt kapjuk, hogy a modellbeli szögek mértéke ez esetben is megegyezik az euklideszi szögek mértékével.

3. fejezet

Ciklusok a Poincaré-féle modellben

3.1. Speciális egyenesseregek

A hiperbolikus síkgeometriában három féle egyenesseregről beszélhetünk.

Sugársor

3.1.1. Definíció: Egy adott pontra illeszkedő egyenesek seregét *sugársornak* nevezzük.

Eddigi ismereteink alapján nagyon egyszerű megszerkeszteni egy sugársort. Az adott P pontunkat invertáljuk a modell határkörére, és az így kapott két pont, mint pontkör által meghatározott hiperbolikus körsor elemeinek modellbe eső körívei lesznek a P ponthoz tartozó sugársor egyenesei.

Merőleges egyenessereg

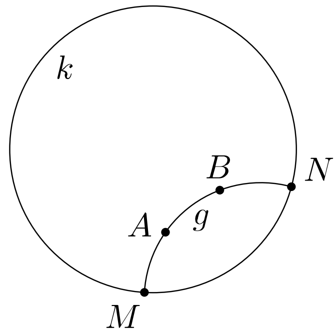
3.1.2. Definíció: Egy adott egyenest merőlegesen metsző egyenesek összességét *merőleges egyenesseregnek* mondjuk.

Körsorok tulajdonságainak ismeretében ez is könnyen megszerkeszthető a modellben. Az adott e modellbeli egyenest tartalmazó kör és a modell k alapköre meghatároznak egy hiperbolikus körsort. Mint ismeretes, a hiperbolikus körsor konjugáltja egy elliptikus körsor, amelynek minden eleme derékszögben metszi e-t, valamint k-t is, tehát a modellsíkkal vett metszeteik egyenesek a modellben. Ezek az egyenesek az e egyeneshez tartozó merőleges egyenessereg elemei.

Adott iránnyal párhuzamos egyenesek serege

Vegyünk a modellkörben egy $g = \langle A, B \rangle$ egyenest és azon az $[A, B\rangle$ félegyenessel megadott irányítást.

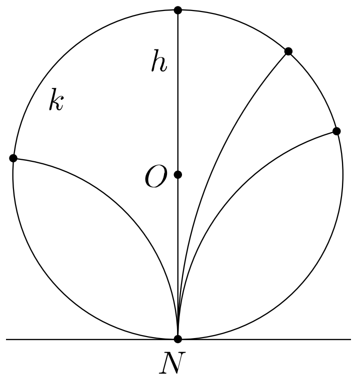
A g-nek megfelelő körív k-ra eső határpontjai legyenek M és N. Ekkor az egyenes irányítása meghatározza a két határpont egy sorrendjét. Jelölje M az A-hoz közelebbi határpontot, N pedig a B-hez közelebbit. Ekkor M-et a g irányításához tartozó kezdőpontnak, N-et pedig a végpontnak mondjuk a k határkörön.



3.1.3. Definíció: Legyenek adva a g, l irányított egyenesek, amelyeknek a határkörön a kezdő- és végpontjai az M, N illetve $\bar{M}$, $\bar{N}$. Azt mondjuk, hogy a g, l irányított egyenesek azonos irányúak (*más szóval párhuzamosak*), ha a határköri végpontjaik egybeesnek, azaz fennáll $N = \bar{N}$.

Megjegyzés: A fentiek alapján a k határkör tetszőleges N pontja egy irányt határoz meg a modellsíkon.

3.1.4. Definíció: Tekintsük a k határkör egy N pontját és az általa meghatározott irányt. A modell azon irányított egyeneseinek seregét, amelyek ezt az irányt képviselik, azaz határköri végpontjuk N, az *irányított egyenesek egy párhuzamos seregének* mondjuk.



3.1. ábra. Az N határpont által meghatározott párhuzamos egyenessereg

Megjegyzés: Tekintsünk a modell k határkörén egy tetszőleges N pontot és a $h = \langle O, N \rangle$ egyenest. Ez a h egyenes és az N pont, mint pontkör, egyértelműen meghatároznak egy parabolikus körsort. Ennek körei az N pontban érintik h-t. A körsor elemei merőlegesek a modell határkörére. Ezen parabolikus körsor elemeinek a modellsíkkal vett metszetei egyenesek lesznek a modellben, amelyeknél ha N-et választjuk végpontnak, akkor az irányított egyenesek egy párhuzamos seregéhez jutunk. (lásd a 3.1. ábrát)

Megjegyzés: Könnyű belátni, hogy ha veszünk egy egyenessereget, akkor az teljesen lefedi a modellsíkot. Igazolható az is, hogyha az egyenesseregből kiválasztunk egy egyenest, akkor a rá történő tükrözés az egyenessereget önmagára képezi.

Bevezetjük az egyenesekre eső korrespondeáló pontok fogalmát.

3.1.5. Definíció: A síkon legyenek adva az a, b egymástól különböző egyenesek és ezeken a $P \in a$, $Q \in b$ pontok. Legyenek $A \in a$ és $B \in b$ olyan pontok, amelyek a $\langle P, Q \rangle$ egyenes egyazon oldalára esnek. Akkor mondjuk, hogy az a egyenes P pontja és a b egyenes Q pontja korrespondeálnak egymáshoz, ha a szögekre fennáll $APQ\measuredangle = BQP\measuredangle$. Jelölés: $(P, a) \stackrel{\frown}{=} (Q, b)$.

Megjegyzés: Az a, b egyenesek messék egymást egy C pontban. Ezeken legyenek P és Q olyan pontok, hogy $CP = CQ$. Nyilvánvaló, hogy az a egyenes P pontja és a b egyenes Q pontja korrespondeálnak egymáshoz.

3.2. Ciklusok

Az egyenesseregek segítségével már definiálhatjuk a modellben a ciklusok három típusát, a paraciklust, hiperciklust (*azaz a távolságvonalat*) és a kört.

3.2.1. Definíció: Vegyünk a modellsíkon egy t egyenest és az azzal határolt egyik félsíkot. Azt a görbét, amelyet a félsíknak a t egyenestől egy adott távolságra eső pontjai alkotnak, *hiperciklusnak* mondjuk. A t egyenest szokás a hiperciklus *tengelyének* nevezni.

3.2.2. Állítás: Vegyünk a síkon egy t egyenest, az általa határolt egyik félsíkot és abban azt a hiperciklust, amelyet a t-től egy adott r távolságra eső pontok alkotnak. Az a, b egyenesek legyenek merőlegesek t-re és messék azt az A, B pontokban. A hiperciklusnak az a, b egyenessel vett metszéspontjait jelölje P és Q. Ekkor fennáll $(P,a)\frown(Q,b)$.

Bizonyítás: Az AB szakasz felezőmerőlegese legyen f. Az f-re történő tükrözés egymásba képezi az A, B pontokat. A szögtartás miatt az a, b merőleges egyeneseket is egymásba képezi. Ugyan ez igaz a P, Q pontokra is. Emiatt ez a tükrözés az $APQ\measuredangle$ szöget a $BQP\measuredangle$ szögbe képezi, tehát P és Q korrespondeálnak egymással. □

3.2.3. Definíció: A modellsíkban tekintsük irányított egyenesek egy párhuzamos seregét. Ha kijelölünk egy pontot az egyik egyenesen, és vesszük a többi egyenesen a vele korrespondeáló pontokat, akkor az ezen pontok által meghatározott görbét *paraciklusnak* nevezzük.

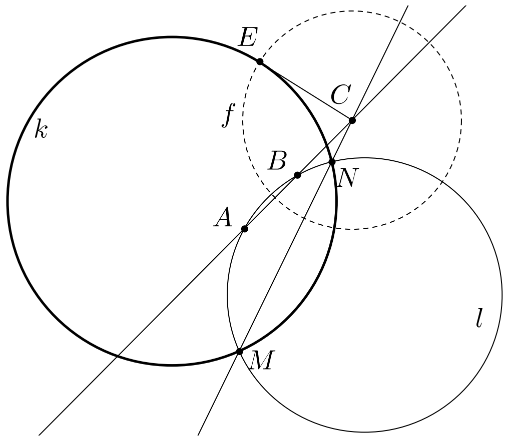
Megjegyzés: A modellbeli egyeneseket, köröket, hiperciklusokat és paraciklusokat közös néven *ciklusoknak* hívják.

A szakasz felezőmerőlegese a modellben

A következő állítások bizonyítása előtt szükséges megmutatnunk, hogyan lehet a modellben két tetszőleges pontnak megszerkeszteni az őket összekötő szakasz felezőmerőlegesét. Ehhez kihasználjuk, hogy a felezőmerőlegesre történő tengelyes tükrözés (euklideszi értelemben inverzió) a két pontot felcseréli.

A modell alapkörét jelölje k, A és B legyen két tetszőleges pont a modellsíkon, a rajtuk áthaladó modellbeli l egyenes alapkörrel vett metszéspontjait pedig jelölje M és N.

Mivel az AB szakasz felezőmerőlegese egy egyenes a modellben, így az $\langle A, B\rangle$ modellbeli egyenest és k-t is merőlegesen kell messe. Az $\langle A, B\rangle$ modellbeli egyenes által meghatározott l euklideszi kör és k meghatároznak egy hiperbolikus körsort, tehát az erre konjugált körsor elemei mindkettőt merőlegesen metszik. A szakaszfelező merőlegest meghatározó f kör tehát ezen konjugált elliptikus körsor eleme, így a centruma rajta van a körsor $\langle M, N\rangle$ centrális egyenesén. Azt is tudjuk, hogy ha A és B egymás inverz képei, akkor f centruma az általuk meghatározott $\langle A, B\rangle$ egyenesen is rajta van. Ha $\langle A, B\rangle$ metszi $\langle M, N\rangle$-et a C pontban, akkor csak egy C centrumú f kör van, amely merőlegesen metszi k-t és ennek sugara a k-hoz húzott érintőszakasz hossza.



3.2. ábra. Az AB szakasz f felezőmerőlegese

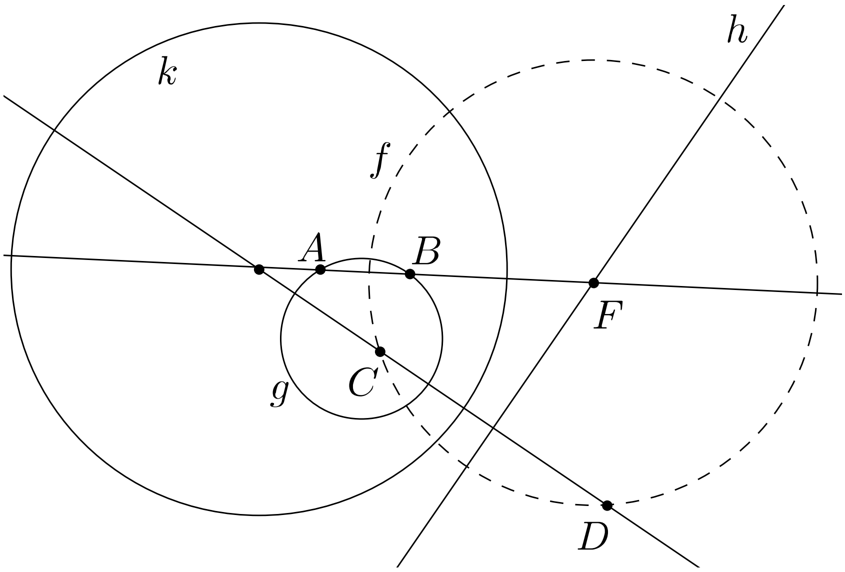
Ha a két egyenes nem metszi egymást, f akkor is az elliptikus körsor eleme, ez esetben a hatványvonala, amely az AB szakasz euklideszi értelemben vett szakaszfelező merőlegese is lesz.

Az euklideszi körök, mint modellbeli ciklusok

3.2.4. Tétel: A modellkör által tartalmazott euklideszi kör a Poincaré-féle modellben is egy kört ad.

Bizonyítás: Vegyük a modell k alapköre által tartalmazott g kört. A k és g körök meghatároznak egy elliptikus körsort. Ennek két pontkörét jelölje C és D, és válasszuk C-nek a modellbe eső pontot.

A g körön válasszunk két tetszőleges pontot, A-t és B-t. Azt akarjuk belátni, hogy ezeknek a C-től mért modellbeli távolsága megegyezik.



3.3. ábra. Egy C centrumú modellbeli g kör

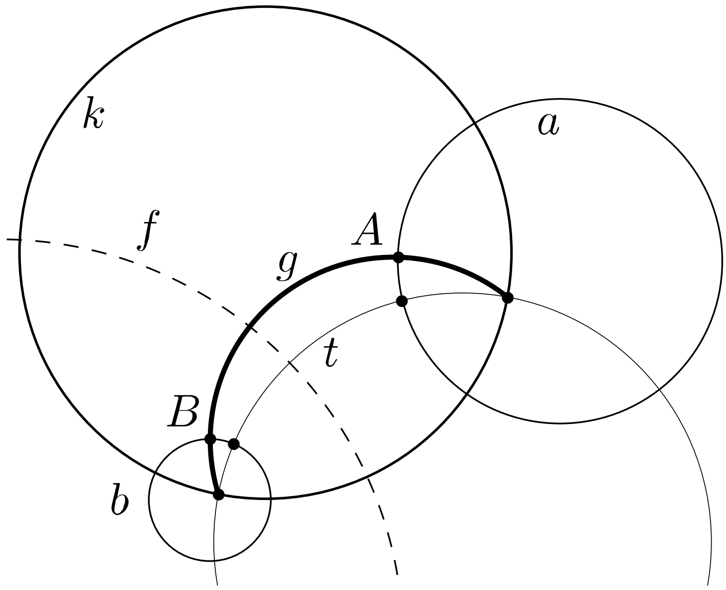
Szerkesszük meg az A, B pontok modellbeli f felezőmerőlegesét (lásd a 3.3. ábrát). Az f átmegy a C ponton, mivel a konjugált hiperbolikus körsor eleme.

Az f kör derékszögben metszi a k, g köröket. Emiatt az f-re történő ι_f inverzió g-t önmagába képezi. Innen már adódik, hogy ι_f felcseréli az A, B pontokat és fixen hagyja C-t. Mivel ι_f egy modellbeli izometria, konkrétabban az f-re történő tükrözés, így fennáll $\hat{d}(C, A) = \hat{d}(C, B)$. Ezzel beláttuk, hogy g egy C centrumú modellbeli kör. □

3.2.5. Tétel: Vegyünk egy olyan g kört, amely nem derékszögben metszi a k határkört. Ekkor g-nek a modellkörbeli része egy hiperciklus.

Bizonyítás: Vegyük a k, g metsző körök által meghatározott hiperbolikus körsort. Ezen körsorból vegyük a k-t merőlegesen metsző t kört, amelynek modellbe eső része egy modellbeli egyenes (lásd a 3.4. ábrát).

A g körön vegyünk két modellbeli pontot, ezek legyenek A és B. Azt szeretnénk belátni, hogy ezen pontok a modellbeli t egyenestől egyenlő távolságra vannak.



3.4. ábra. Egy t tengelyű g hiperciklus

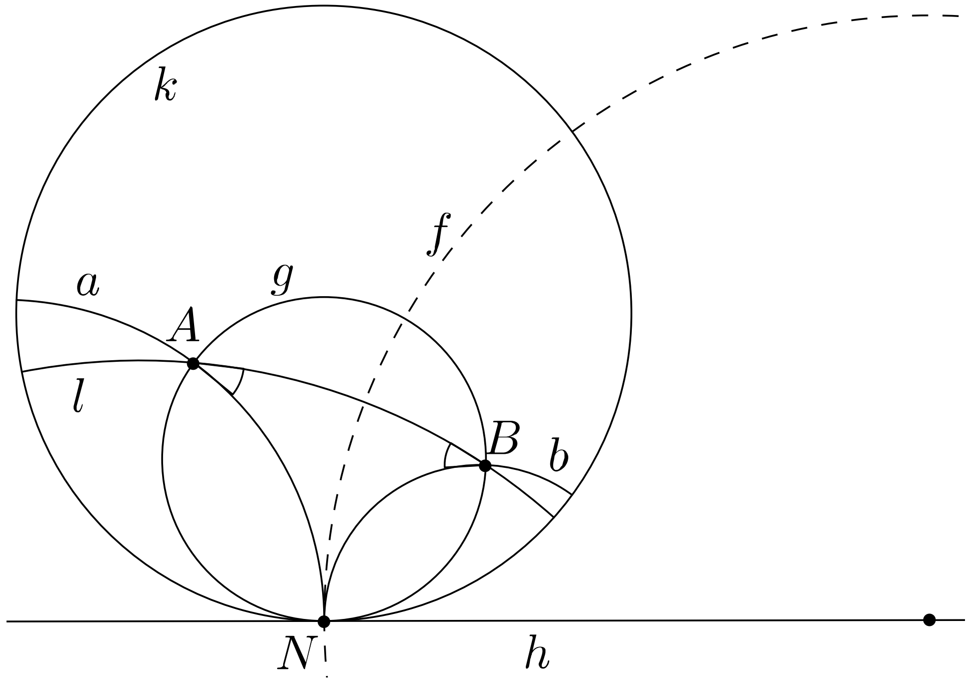
Vegyük az A, B pontok modellbeli f felezőmerőlegesét. Ezen f kör eleme a konjugált elliptikus körsornak, tehát merőlegesen metszi g-t is. Alkalmazzuk ismét az f körre történő ι_f inverziót, amely a modellben egy tengelyes tükrözés. Ez fixen hagyja a modellbeli t egyenest és felcseréli az A, B pontokat. Mivel a tükrözés távolságtartó, így az A, B pontok t-től mért modellbeli távolsága megegyezik. □

3.2.6. Tétel: Legyen g egy olyan kör, amely belülről érintkezik a k határkörrel. Ekkor g a Poincaré-modellben egy paraciklus.

Bizonyítás: A k, g körök érintkezési pontja legyen N. Az N pontba a k körhöz húzott érintőt jelölje h. Ekkor h és N meghatároznak egy parabolikus körsort, amelynek körei az N pontban érintik h-t.

A határköri N pont, mint végpont, meghatározza a modellbeli irányított egyenesek egy párhuzamos seregét. Ezek szintén egy parabolikus körsornak felelnek meg. Az említett két körsor egymásnak konjugáltja. (lásd a 3.5. ábrát)

Vegyünk a g körön két pontot, ezek legyenek A és B, a rajtuk áthaladó modellbeli egyenes legyen l. Legyenek a és b azon irányított egyenesek, amelyek iránya megegyezik az N által meghatározott iránnyal és átmennek az A, B pontokon. Szerkesszük meg a modellbeli AB szakasz f felezőmerőleges egyenesét, amely szintén eleme a második parabolikus körsornak. Emiatt az f kör derékszögben metszi a g, l köröket is.



3.5. ábra. Egy modellbeli g paraciklus

Látható, hogy az f alapkörre vonatkozó ι_f inverzió egymásba viszi az a és b köröket, és fixen hagyja az l egyenest. Ebből már adódik, hogy a modellben l azonos szögben metszi az a, b egyeneseket, tehát fennáll az $(A, a) \triangleq (B, b)$ korrespondencia.

Mivel a g bármely két pontja korrespondeál a rajtuk átmenő irányított egyenesekre nézve, így g egy paraciklust ad a Poincaré-féle modellben. □

Irodalomjegyzék

[1] H. S. M. Coxeter: *A geometriák alapjai.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1987.

[2] G. Horváth Ákos, Szirmai Jenő: *Nemeuklideszi geometriák modelljei.* Typotex Kiadó, Budapest, 2004

[3] Hajós György: *Bevezetés a geometriába.* Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1999.

[4] Reiman István: *A geometria és határterületei.* Gondolat Kiadó, Budapest, 1976.

[5] Strohmajer János: *A geometria alapjai.* Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1996.

[6] Szász Pál: *Bevezetés a Bolyai-Lobacsevszkij-féle geometriába.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1973.