EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

SZAKDOLGOZAT

A Kiepert-hiperbola

Témavezető:
Dr. Moussong Gábor
egyetemi adjunktus
Geometria Tanszék

Készítette:
Danyi Béla
BSc Matematika
tanári szakirány

Budapest, 2015

Tartalomjegyzék

Bevezető

Szakdolgozatom témája egy angol nyelvű cikk [1] alapján fogalmazódott meg, mely két speciális kúpszelettel, az ún. Kiepert-hiperbolával és Kiepert-parabolával foglalkozik. Ezekkel az alakzatokkal először Ludwig Kiepert német matematikus találkozott egy szerkesztési feladat megoldása során. Jelen dolgozat célja a Kiepert-hiperbola problémakörének vizsgálata (a Kiepert-parabola problémaköre már túlmutat ezen dolgozat keretein).

A dolgozatban szereplő, a Kiepert-hiperbolára vonatkozó állítások eddig is ismertek voltak, a dolgozat célja ezen ismert tételek újfajta megközelítése. Számos olyan cikket találni, melyekben az ún. trilineáris koordinátákat használják e problémakör tárgyalásához [1], de akad olyan megközelítés is, melyben a projektív geometriában használatos homogén koordináták kerülnek elő. Jelen dolgozat abban különbözik a fenti megközelítésektől, hogy lényegesen egyszerűbb, elemi állításokat használ.

A Kiepert-hiperbolával kapcsolatos tételek bizonyításához széleskörű háttérismeretre van szükségünk. Ennek érdekében a dolgozat első része egy elméleti bevezetőt tartalmaz, mely a szükséges előismeretek foglalja össze röviden. A dolgozat második része a konkrét problémakör tényleges tárgyalása lesz, ahol az elméleti bevezetőben leírtakra támaszkodva teszek megállapításokat Kiepert hiperbolájával kapcsolatban. A Kiepert által megoldott szerkesztési feladathoz hasonló problémából kiindulva először megadom, hogy milyen pontok mértani helyeként áll elő ez a speciális alakzat, majd ennek néhány tulajdonságáról fogalmazok meg állításokat.

Az olvasó figyelmébe ajánlom továbbá az irodalomjegyzékben szereplő könyveket és cikkeket, melyek az elméleti bevezetőben ismertnek tekintett definíciókat, állításokat és bizonyításokat is tartalmazzák.

1. Elméleti bevezető

Az elméleti bevezető első felében főként kúpszeletekre vonatkozó tételek és projektív geometriai definíciók, állítások és tételek szerepelnek majd, melyek annak megértését segítik, hogy Kiepert alakzata egy nem elfajuló kúpszelet. Az elméleti bevezető második része elemi geometriai állításokkal, merőleges affinitásokkal és ortocentrikus pontnégyesekkel kapcsolatos megállapításokat tartalmaz. Ezek az állítások a Kiepert-hiperbola aszimptotáinak és középpontjának meghatározásában segítenek.

A dolgozat során az ideális pontokkal kibővített (azaz a projektív) síkon dolgozunk majd, ezért az egyenesekhez és kúpszeletekhez automatikusan hozzá kell érteni azok ideális pontjait is. Ezekről a későbbiekben már nem teszek külön említést.

1.1. Kúpszelet megadása öt ponttal

Jelen fejezetben ún. homogén koordinátákat fogok használni annak érdekében, hogy az állítások akkor is érvényesek legyenek, ha nem csak közönséges, hanem ideális pontok is szerepelnek bennük. (A homogén koordinátákkal kapcsolatos előismeretek [2], [4].)

Egy adott háromszög Kiepert-hiperbolájának vizsgálata előtt érdemes meggondolni, hogy egy kúpszelet egyértelmű megadásához hány adatra van szükség. Az alábbi néhány tétel ezt a célt szolgálja.

1.1.1. Tétel: Tekintsünk a sík hat tetszőleges (nem feltétlenül különböző) pontját. Használjuk a következő jelöléseket: $P_1[p_1, p_2, p_3]$, $P_2[q_1, q_2, q_3]$, $P_3[r_1, r_2, r_3]$, $P_4[v_1, v_2, v_3]$, $P_5[u_1, u_2, u_3]$ és $P_6[w_1, w_2, w_3]$. Akkor és csak akkor van olyan másodrendű görbe, melyre ez a hat pont illeszkedik, ha az alábbi determináns értéke zérus:

$$\begin{vmatrix} p_1^2 & p_1p_2 & p_2^2 & p_1p_3 & p_2p_3 & p_3^2 \\ q_1^2 & q_1q_2 & q_2^2 & q_1q_3 & q_2q_3 & q_3^2 \\ r_1^2 & r_1r_2 & r_2^2 & r_1r_3 & r_2r_3 & r_3^2 \\ v_1^2 & v_1v_2 & v_2^2 & v_1v_3 & v_2v_3 & v_3^2 \\ u_1^2 & u_1u_2 & u_2^2 & u_1u_3 & u_2u_3 & u_3^2 \\ w_1^2 & w_1w_2 & w_2^2 & w_1w_3 & w_2w_3 & w_3^2 \end{vmatrix} = 0$$

Bizonyítás: Tekintsük a direkt irányt, azaz tegyük fel, hogy adott a fenti hat pont és egy rájuk illeszkedő másodrendű görbe. Egy másodrendű görbe egyenletének homogén koordinátákkal megadott egyenlete:

$$Ax_1^2 + Bx_1x_2 + Cx_2^2 + Dx_1x_3 + Ex_2x_3 + Fx_3^2 = 0$$

A fenti hat pont rajta van ezen a másodfokú görbén, ezért a koordinátákat behelyettesítve egy hat egyenletből álló egyenletrendszert kapunk, ahol az öt együttható ismeretlenként szerepel. Hat egyenlet van és öt ismeretlen, tehát az egyenletrendszernek biztosan van nem triviális megoldása az öt együtthatóra nézve. Ez azt jelenti, hogy a tételbeli determináns értéke nulla.

A fordított irány bizonyításához tegyük fel, hogy a tételbeli determináns értéke zérus. Ebből következik, hogy a korábban említett egyenletrendszernek létezik nem triviális megoldása az együtthatókra nézve. A fenti egyenlet minden tagjai másodfokú a homogén koordinátás felírásban, tehát a nem triviális megoldás biztosan másodrendű görbét származtatat. ■

1.1.2. Tétel: Bármely öt ponthoz létezik olyan másodrendű görbe, mely ezen öt ponton áthalad.

Bizonyítás: Ez a tétel egyszerűen következik az 1.1.1. Tételből $P_5 = P_6$ alkalmazásával. ■

1.1.3. Definíció: A projektív sík öt pontja általános helyzetű, ha közülük semelyik három nem kollineáris.

1.1.4. Tétel: Öt általános helyzetű ponton át egyetlen (nem elfajuló) kúpszelet halad.

Bizonyítás: Az 1.1.2. Tétel alapján öt pontra mindig illeszthető másodrendű görbe. Ha elfajuló lenne ez a görbe, akkor legfeljebb két egyenesből állna. Két egyenesen viszont csak négy pontot tudunk úgy felvenni, hogy közülük semelyik három ne legyen kollineáris. Öt pont esetén tehát szükségképpen közönséges kúpszeletet kapunk. Két különböző közönséges kúpszeletnek legfeljebb négy közös pontja lehet, ezért az öt ponton áthaladó kúpszelet egyértelmű. ■

Megjegyzés: Az 1.1.1., 1.1.2. és 1.1.4. Tételek bizonyítások részletes leírása [2].

1.2. Projektív transzformáció

A későbbiekben szükség lesz az ún. projektív transzformációk használatára, ezért a következőkben az ehhez szükséges definíciók és fontosabb tételek szerepelnek.

1.2.1. Definíció: A bijektív, kettősviszonytartó leképezéseket projektív transzformációknak vagy röviden projektivitásoknak nevezzük. Ha két alakzat között létezik projektív transzformáció, akkor a két alakzat projektív helyzetben van.

Megjegyzés: A projektív transzformációkat nevezhetjük projektív izomorfizmusoknak is, hiszen bijektívek és inverzük is projektív transzformáció.

Középpontos vetítés

A projektív transzformációk közül a síkbeli centrális vetítésre (más néven perspektivitás) lesz szükség, így az alábbiakban ezt definiálom pontsorokra illetve sugársorokra vonatkozóan.

1.2.2. Definíció: Legyen adott a projektív síkon két (különböző) egyenes (e illetve e') és egy olyan O pont, amely egyik egyenesre sem illeszkedik. Az e tartóegyenesű pontsornak az e' tartóegyenesű pontsorra történő O középpontú vetítése egy tetszőleges $X \in e$ ponthoz azt az $X' \in e'$ pontot rendeli, amelyre X, X' és O kollineáris. Ekkor a két egyenes az O pontra nézve perspektív helyzetben van.

1.2.3. Definíció: Legyen adott a síkban két különböző pont (O illetve O') és egy rájuk nem illeszkedő c egyenes. Az O tartópontú sugársornak az O' tartópontú sugársorra történő c tengelyű vetítése egy tetszőleges O-n átmenő e egyeneshez azt az O'-n átmenő e' egyenest rendeli, amelyre $e \cap c = e' \cap c$. Ekkor a két sugársor az c egyenesre nézve perspektív helyzetben van.

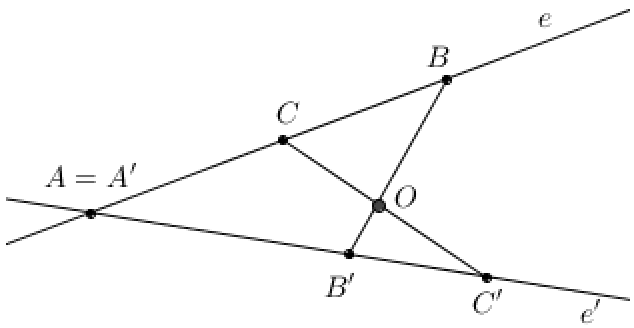
1.2.4. Tétel: (Papposz–Steiner-tétel) A kettősviszony invariáns a középpontos vetítésre nézve.

Megjegyzés: Ezt a tételt ismertnek tekintem, így a következőkben nem bizonyítom.

Az 1.2.2. és 1.2.3. Definíciók és az 1.2.4. Tétel ismeretében már bármely két elsőfajú alapalakzat (azaz pontsor vagy sugársor) között megadható egy projektív transzformáció, azaz egy bijektív, kettősviszonytartó megfeleltetés. A projektív síkon két (különböző) pontsor illetve két (különböző) sugársor esetén egyszerűen egy középpontos vetítést kell megadni, amit mindig meg tudunk tenni megfelelő középpont illetve tengely választásával. Ha egy pontsor és egy sugársor közötti projektív transzformációt akarunk megadni, akkor az a megfeleltetés, ami a sugársor egy egyeneséhez az adott pontsorral vett metszéspontját rendeli, egy kettősviszonytartó bijekciót létesít a két alakzat között. A következő tétel pontsorok közti projektív transzformációkra vonatkozik. Ennek duálisát tekintve sugársorokra is érvényes a tétel.

1.2.5. Tétel: (az egyenes projektív geometriájának alaptétele) Ha e illetve e' két különböző egyenes, $A, B, C \in e$ és $A', B', C' \in e'$ pedig különböző pontokból álló (tetszőleges) ponthármasok, akkor egyértelműen létezik olyan $e \longmapsto e'$ kettősviszonytartó bijekció, amelynél $A \longmapsto A'$, $B \longmapsto B'$ és $C \longmapsto C'$.

Bizonyítás: A létezés bizonyításához tekintsük az alábbi elrendezést.



1. ábra

Az 1. ábra alapján a CC' és BB' egyenesek egy olyan O metszéspontot határoznak meg, amivel mint középponttal, megadhatunk egy centrális vetítést e-ről e'-re. Erre a kettősviszonytartó bijekcióra fennáll, hogy $A \longmapsto A'$, $B \longmapsto B'$ és $C \longmapsto C'$. Tekintsük azt az esetet, amikor egyik pont sem esik egybe a saját képével. Ekkor egy megfelelően választott egybevágósággal (eltolások és forgatások kompozíciójaként) előállítható az első eset. Mivel minden egybevágóság kettősviszonytartó, így a kompozíciójuk is az lesz.

Az egyértelműség bizonyításához tekintsük a következőket. Vegyünk egy negyedik D pontot az e egyenesen. Azt már láttuk, hogy létezik olyan f kettősviszonytartó bijekció, amire $A \longmapsto A'$, $B \longmapsto B'$ és $C \longmapsto C'$. Legyen a D pontnak az f projektív transzformációnál vett képe D'. Ekkor az $(ABCD)$ kettősviszony egyértelműen meghatározza a D' pontot, mivel az f leképezésre teljesül, hogy $(ABCD) = (A'B'C'D')$. Tehát bármely további pont képe egyértelműen meghatározott. ■

1.2.6. Állítás: Adott két különböző tartópontú (A és B) sugársor és köztük egy f projektív transzformáció a P projektív síkon. A két tartópontot összekötő egyenest jelölje e. Az f leképezés pontosan akkor perspektivitás, ha az e egyenest önmagába viszi.

Bizonyítás: A perspektivitás definíciójából következik, hogy ha f perspektivitás, akkor $f(e) = e'$. A következőkben tegyük fel, hogy $e = e'$. Vegyünk az A tartópontú sugársorból az e egyenestől különböző további két egyenest, a-t és b-t. Ezek képe az f projektív transzformációnál legyen rendre a' illetve b'. A metszéspontok legyenek: $a \cap b = K_1$ illetve $a' \cap b' = K_2$. A K_1K_2 egyenes biztos nem illeszkedik egyik sugársor tartópontjára sem. A K_1K_2 tengelyű perspektivitásra fennáll, hogy $a \longmapsto a'$, $b \longmapsto b'$ illetve $e \longmapsto e'$. Az 1.2.5. Tétel duálisát tekintve ekkor egyértelműen létezik olyan kettősviszonytartó bijekció, amire a fentiek teljesülnek, tehát ekkor f azonos ezzel a perspektivitással. ■

1.3. Projektív képződmény

1.3.1. Definíció: Legyen adott egy $f : X \longmapsto X'$ projektív transzformáció a P-beli A tartópontú sugársorról a P-beli $B \neq A$ tartópontú sugársorra egy P projektív síkon. Ekkor az f projektív transzformáció képződményének nevezzük az

$$\{X \cap X' : \ X \in A\} \subseteq P$$

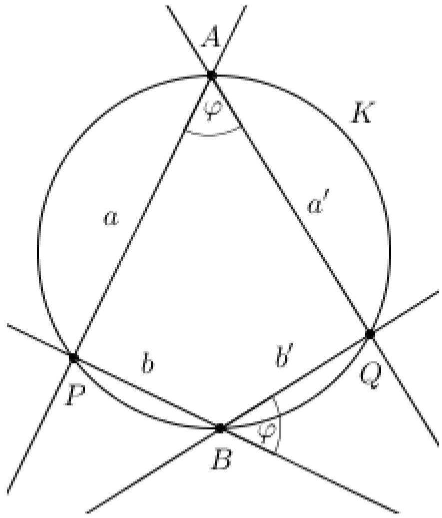
ponthalmazt a P projektív síkon.

Az alábbi példa egy későbbi tétel bizonyításához szükséges.

1.3.2. Példa: Tekintsünk két különböző tartópontú (P és Q) sugársort és egy rájuk illeszkedő nem elfajuló K kúpszeletet. Adjunk meg egy bijekciót a két sugársor egyenesei között a következő módon. Legyen az $a \in P$ egyenesnek a K kúpszelettel vett (P-től különböző) metszéspontja A. (Ez a pont egyértelmű, hiszen egy egyenesnek és egy nem elfajuló kúpszeletnek legfeljebb két metszéspontja lehet. Mivel A áthalad a kúpszelet P pontján, ezért legfeljebb további egy metszéspontja lehet a kúpszelettel. Ha nincs ilyen pont, akkor szükségképpen $A = P$, azaz a érinti a kúpszeletet P-ben.) Az $a \in P$ egyenesnek legyen az a $b \in Q$ egyenes megfeleltetve, melyre teljesül, hogy $a \cap b = A \in K$. Ha a P-ben érinti a kúpszeletet, akkor a neki megfeleltetett $b \in Q$ egyenes a tartópontokat összekötő egyenes lesz. Ha $A = Q$, akkor az $a \in P$ egyenesnek megfeleltetett $b \in Q$ egyenes a K kúpszelet Q-beli érintője. Ez a megfeleltetés bijektív lesz és a kúpszelet minden pontja előáll metszéspontként. Jelölje ezt a bijekciót g.

1.3.3. Állítás: A g bijektív megfeleltetés kettősviszonytartó.

Bizonyítás: Ha a K kúpszelet helyett kör szerepelne, akkor az állítás egyszerűen a kerületi szögek tételéből adódna.



2. ábra

Ha ugyanis a fenti g megfeleltetést alkalmazzuk, akkor minden $a \in P$ egyenesnek a saját (adott tartópontok esetén fix) φ szöggel vett a' elforgatottját rendeljük hozzá. Mivel ez egy egybevágóság a két sugársor között, így a megfeleltetés kettősviszonytartó lesz. Körre tehát teljesül az állítás. Egy kör viszont megfelelő középpontú középpontos vetítéssel átvihető kúpszeletbe, ahol a körön lévő két tartópont a kúpszelet két különböző pontjába megy, a tartópontokon átmenő egyenesek pedig a pontok képein átmenő egyenesekbe mennek úgy, hogy egy egyenes és képe a kúpszeleten metszik egymást. Az 1.2.4. Tételből tudjuk, hogy a középpontos vetítés kettősviszonytartó, tehát az általunk megadott g megfeleltetés bijektív és kettősviszonytartó. ■

Az 1.3.2. Példában szereplő projektív transzformáció képződménye tehát nem elfajuló kúpszelet.

1.3.4. Tétel: Tetszőleges nem perspektív projektív transzformáció projektív képződménye nem elfajuló kúpszelet.

Bizonyítás: Adott két különböző tartópontú (P és Q) sugársor és köztük egy f nem perspektív projektív transzformáció. Legyen az P tartópontú sugársor tetszőleges a, b és c egyenesének B tartópontú sugársorbeli képe rendre a', b' és c', továbbá legyen az egymásnak megfeleltetett egyenesek metszéspontja rendre A, B és C. Ekkor tekintsük a következő segédállítást.

1.3.5. Segédállítás: Az P, Q, A, B és C pontok általános helyzetűek, azaz semelyik három nem kollineáris.

Bizonyítás: Három különböző esetet kell megvizsgálnunk. Először azt látjuk be, hogy miért nem lehet két tartópont és egy metszéspont kollineáris. Ekkor ez a metszéspont úgy áll elő, hogy az egyik sugársornak a tartópontokon átmenő egyeneséhez a másik sugársornak a tartópontokon átmenő egyenesét rendeljük hozzá, azaz a tartópontokat összekötő egyenes helyben marad. Az 1.2.6. Állítás alapján ekkor a projektív transzformáció perspektivitás. A fenti transzformáció viszont nem perspektív.

Lássuk azt az esetet, amikor az egyik tartópont és két metszéspont kollineáris. A megadott kettősviszonytartó bijekció minden P tartópontú sugársorbeli egyeneshez pontosan egy Q tartópontú sugársorbeli egyenest rendel. Minden megfeleltetés egy-egy metszéspontot ad. Ha tehát két metszéspont kollineáris az egyik tartóponttal, akkor e két metszéspont által meghatározott sugársorbeli egyenesnek két megfeleltetett képe kellene, hogy legyen, hogy a két különböző metszéspont előálljon. Mivel bijekcióról beszélünk, ez nem lehetséges.

Végül nézzük a harmadik esetet, amikor a három metszéspont kollineáris. Jelölje ezt az egyenest e. A kettősviszonytartás miatt bármely negyedik egyenes a P tartópontú sugársorból éppen az e egyenesen metszi a képét. Mivel ez a megfeleltetés a tartópontokat összekötő egyenest önmagába viszi, az 1.2.6. Állítás alapján a két sugársor közti projektív transzformáció egy perspektivitás a három metszéspont által meghatározott egyenesre nézve. A fenti transzformáció viszont nem lehet perspektív. ■

Tehát a fent megadott öt pont általános helyzetű. Az 1.1.4. Tétel alapján ekkor egyetlen olyan K' nem elfajuló kúpszelet létezik, ami áthalad ezen az öt ponton.

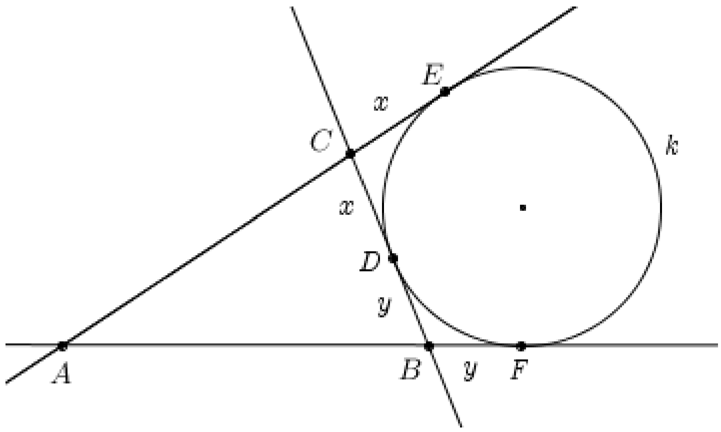
A következőkben tekintsük a most kapott K' nem elfajuló kúpszeletet és azt a g megfeleltetést, mely az 1.3.2. Példában szerepelt, azaz az $a \in P$ egyeneshez most azt az $a' \in Q$ egyenest rendeljük, melyre teljesül, hogy $a \cap a' \in K'$. Ez ugyanazt az A metszépontot állítja elő, mint amit az f projektív transzformációval kaptunk, hiszen éppen ebből nyertük a K' kúpszeletet. Hasonló okok miatt $b \cap b' = B$ és $c \cap c' = C$ is teljesül erre a g megfeleltetésre. Az 1.2.5. Tétel duálisát tekintve viszont ez a három megfeleltetés egyértelműen megadja a két sugársor közti projektív transzformációt. Ekkor az f projektív transzformáció megegyezik az általunk megadott g projektív transzformációval, így a képződményük is megegyezik, tehát az f nem perspektív projektív transzformáció képződménye egy nem elfajuló kúpszelet. ■

A továbbiakban a Kiepert-hiperbola középpontjának és két aszimptotájának helyzetének meghatározáshoz szükséges definíciók és állítások szerepelnek.

1.4. Elemi geometriai megfontolások

A következő elemi geometriai állítások egy későbbi tétel bizonyításához szükségesek.

Az első állításhoz tekintsük az alábbi elrendezést.



3. ábra

1.4.1. Állítás: Az ABC háromszög kerülete nem változik, ha a BC oldalt úgy mozgatjuk, hogy az végig érinti a k hozzáírt körnek az A csúcshoz közelebbi EF ívét.

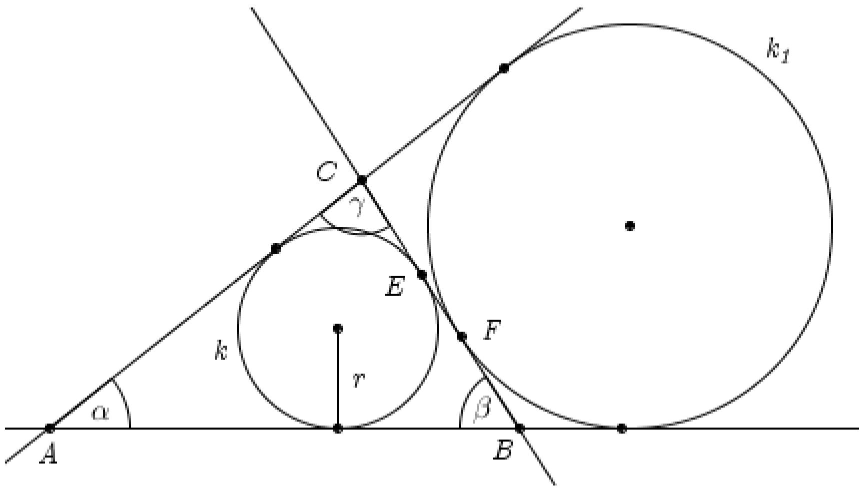
Bizonyítás: Az ABC háromszög kerülete $K = AB + BC + CA$. A külső pontból húzott érintőszakaszok tétele miatt $BC = CE + BF$. Ekkor az ABC háromszög kerületére teljesül, hogy $K = AB + CE + BF + CA = AF + AE$. Mozgassuk a BC oldalt úgy, hogy az végig érintse k körnek az A csúcshoz közelebbi EF ívét. Ekkor egy új háromszöget kapunk, hiszen az A csúcsból kiinduló két oldalegyenes mentén a B és C pontok elmozdulnak. A BC oldal állásától függetlenül az A, F és E pontok helyzete nem változik, mivel az A csúcs fix, k pedig végig a háromszög hozzáírt köre marad, hiszen a mozgatás során végig érinti a háromszög három oldalegyenesét. Ha A, F és E három fix pont, akkor viszont az $AF + AE$ összeg is állandó lesz, tehát a kerület nem változik. ∎

1.4.2. Állítás: Adott r sugarú kör köré írható háromszögek közül a legkisebb területű a szabályos háromszög.

Bizonyítás: Tetszőleges háromszög T területére teljesül, hogy

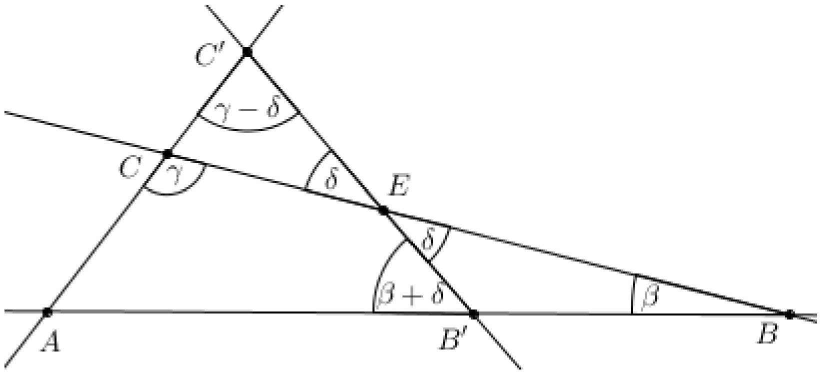
$$T = r \cdot s,$$

ahol r a háromszög beírt körének sugara, s pedig a háromszög félkerülete. Ha tehát egy adott r sugarú kör köré írt háromszögének területét akarjuk minimalizálni, akkor elég a kerületet minimalizálnunk. Ehhez tekintsük a 4. ábrán szereplő tetszőleges, nem szabályos ABC háromszöget. A beírt kör sugarát jelölje r, a belső szögeket pedig rendre α, β, γ. Nem szabályos háromszögben mindig található $60°$-nál nagyobb és $60°$-nál kisebb szög is. A mi esetünkben legyen $\gamma > 60°$ és $\beta < 60°$, a beírt kört jelölje k, a háromszöget a BC oldalon érintő hozzáírt kört pedig jelölje k_1.



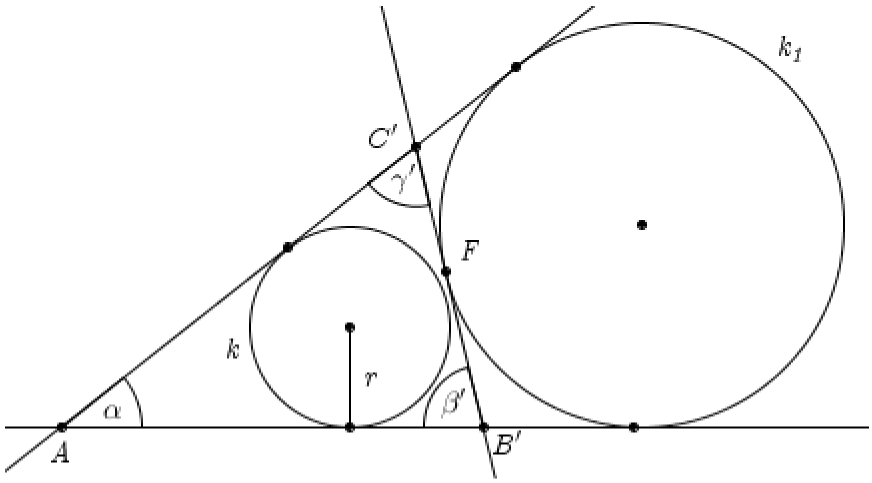
4. ábra

Azt szeretnénk belátni, hogy ha a háromszög γ szögét $60°$-ra korrigáljuk úgy, hogy a k kör a korrigálás után kapott $AB'C'$ háromszögnek is beírt köre legyen, akkor a háromszög kerülete nem nőhet. Első lépésként korrigáljuk a γ szöget $60°$-ra úgy, hogy a BC oldalt a k_1 kört érintve mozgatjuk. Az 1.4.1. Állítás alapján az így kapott $AB'C'$ háromszög kerülete egyenlő az eredeti ABC háromszög kerületével.



5. ábra

Az 5. ábra vázlatosan azt szemlélteti, hogy amennyivel csökkentjük γ értékét, annyival növeljük β értékét. Ekkor pedig világos, hogy a mozgatás során β nem érheti el γ eredeti értékét mielőtt γ elérné a $60°$-ot, hiszen $\gamma > 60°$ és $\beta < 60°$. Ebből az következik, hogy γ korrigálása után a $B'C'$ oldal nem érinti egyszerre a k illetve k_1 köröket, azaz nem lehet a két kör másik közös belső érintője. A $B'C'$ oldalt önmagával eltolva elérhető, hogy ez az oldal a k kört érintse. A 6. ábra alapján azt mondhatjuk, hogy a háromszög kerülete ezzel az eltolással csökken, hiszen mindegyik oldal hossza csökken. Ezzel az eljárással tehát az eredeti ABC háromszög helyett egy olyan $AB'C'$ háromszöget kapunk, melynek egyik szöge biztosan $60°$-os és a k kör a háromszög beírt köre.



6. ábra

Ha az első szög korrigálásával szabályos háromszöget kapunk, akkor készen vagyunk. (Ez akkor fordulhat elő, ha $\alpha = 60°$.) Ha az így kapott háromszög nem szabályos, akkor megint teljesül, hogy a háromszögben lesz egy $60°$-nál nagyobb és egy $60°$-nál kisebb szög is. Ekkor az előbbiekhez hasonlóan a nagyobbik szöget $60°$-ra korrigálva a kerület ismét csökkenni fog. Ezzel beláttuk az állítást. ■

1.5. Belső Steiner-ellipszis

Egy adott háromszög esetén végtelen sok olyan ellipszis létezik, melyek a háromszög mindegyik oldalát belülről érintik. Felmerül a kérdés, hogy van-e köztük maximális területű.

1.5.1. Állítás: Adott háromszöghöz egyértelműen létezik maximális területű beírható ellipszis. Ez az ellipszis a háromszög ún. belső Steiner-ellipszise, mely a háromszöget az oldalfelező pontokban érinti.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy létezik maximális területű beírható ellipszis a megadott háromszöghöz. Ekkor a háromszög és a beírt ellipszis területének aránya minimális. Ismeretes, hogy egy ellipszis megfelelő affinitással körbe vihető. Alkalmazzunk egy ilyen f affinitást egy adott háromszögre és a maximális területű beírható ellipszisére. Az affinitások ismert tulajdonságai miatt a háromszög egy másik háromszögbe megy, az ellipszis pedig a háromszög beírható körébe.

Felmerül a kérdés, hogy milyen háromszög lesz a képháromszög. Mivel az affinitások területarány-tartók, ezért ezt a kérdést úgy is megfogalmazhatjuk, hogy adott körhöz melyik a lehető legkisebb területű köréírt háromszög. Az 1.4.2. Állítás alapján tudjuk, hogy ez a kör köré írt szabályos háromszög. Adott kör köré írt szabályos háromszög viszont egyértelmű, így annak affin képe, azaz a háromszöghöz rendelt beírt ellipszis is egyértelmű lesz. A szabályos háromszög beírható köre az oldalfelező pontokban érinti a háromszöget, ezért az affinitásokra jellemző osztóviszonytartásból azt is megkapjuk, hogy a belső Steiner-ellipszis a felezőpontokban érinti az eredeti háromszög oldalait.

Eddig azzal a feltételezéssel éltünk, hogy létezik maximális területű beírható ellipszis. Vegyük a fenti háromszöget és alkalmazzuk rá azt az f affinitást, melyre háromszög affin képe a fenti szabályos háromszög. Alkalmazzuk erre a szabályos háromszögre és a beírt körére az előbbi affinitás inverzét, f^{-1}-t. Ekkor visszakapjuk az eredeti háromszöget. Mivel f olyan affinitás, amely ellipszist körbe visz, így annak inverze kört ellipszisbe visz. A szabályos háromszög beírt körének f^{-1}-nél vett képe egy olyan ellipszis lesz, ami az affinitás tulajdonságai miatt az oldalak felezőpontjában érinti az eredeti háromszög oldalait. A területarány-tartásból pedig következik, hogy ez a beírható ellipszis maximális területű. Ez alapján tehát bármely háromszöghöz létezik a belső Steiner-ellipszis, melyet az előbbi módon meg is tudunk adni. ■

Megjegyzés: Szabályos háromszög belső Steiner-ellipszise a háromszög beírt köre.

Egy ellipszishez mindig található (alkalmas arányú) merőleges tengelyes affinitás, amely az ellipszist körbe képezi. Ismeretes, hogy egy ilyen merőleges affinitás tengelye csak az ellipszis valamelyik szimmetriatengelyével párhuzamos állású lehet. Ezek alapján az alábbi következményt fogalmazhatjuk meg.

1.5.2. Következmény: Nem szabályos háromszöget szabályos háromszögbe vivő merőleges affinitások tengelyiránya párhuzamos a háromszög belső Steiner-ellipszisének valamelyik tengelyével.

A belső Steiner-ellipszis a Feuerbach-körhöz hasonlóan átmegy a háromszög három oldalfelező pontján. Általános háromszög esetén viszont mindig négy metszéspont van. A negyedik közös pont a háromszög ún. belső Steiner-pontja.

1.6. Ortocentrikus pontnégyes

A sík négy közönséges pontját ortocentrikus pontnégyesnek nevezzük, ha közülük bármely három által meghatározott háromszög magasságpontja éppen a negyedik pont. Ez alapján bármely (nem derékszögű) háromszög esetén a háromszög csúcsai és a magasságpont ortocentrikus pontnégyest alkotnak. Az ortocentrikus pontnégyesek egyik ismert tulajdonsága, hogy bármely három által alkotott háromszög Feuerbach-köre megegyezik. Ezt nevezzük az adott ortocentrikus pontnégyes Feuerbach-körének. A következőkben az ortocentrikus pontnégyesekkel kapcsolatban fogalmazunk meg néhány állítást.

1.6.1. Állítás: Ha egy háromszög három csúcsa illeszkedik egy derékszögű hiperbolára, akkor a magasságpontja is illeszkedik rá.

Bizonyítás: Ismeretes, hogy bármely derékszögű hiperbola egyenlete az aszimptoták koordinátarendszerében $xy = 1$. Vegyük ennek a hiperbolának három különböző pontját:

$$A = \left(a, \frac{1}{a}\right), B = \left(b, \frac{1}{b}\right), C = \left(c, \frac{1}{c}\right).$$

Tekintsünk azt a háromszöget, melynek ezek a csúcsai. Rövid koordinátás számolás után megkapjuk, hogy a háromszög magasságpontjának koordinátái:

$$M = \left(-\frac{1}{abc}, -abc\right),$$

melynek koordinátái kielégítik a derékszögű hiperbola egyenletét. ■

1.6.2. Állítás: Ha A, B, C, M ortocentrikus pontnégyes, akkor bármely olyan kúpszelet, amely áthalad rajtuk, derékszögű hiperbola.

Bizonyítás: Legyen adott az A, B, C, M ortocentrikus pontnégyes és egy rajtuk átfektetett K nem elfajuló kúpszelet. Tudjuk, hogy ez a nem elfajuló kúpszelet egy hiperbola, mivel egy parabola, illetve ellipszis bármely négy pontja konvex négyszöget határoz meg, de az ortocentrikus pontnégyes ezt nem teljesíti. Már csak azt kell belátnunk, hogy ez a hiperbola derékszögű. Legyen a hiperbola két ideális pontja I és J. Azt szeretnénk belátni, hogy a két ideális pont egymásra merőleges irányokat határoz meg.

Legyen az I-re merőleges irányú ideális pont I'. Ekkor az A, B, C, I, és I' öt általános helyzetű pont, azaz közülük semelyik három nem kollineáris. Ehhez négy esetet kell megvizsgálnunk. Az A, B, C ponthármas nem lehet kollineáris, hiszen egy ortocentrikus pontnégyes három pontjáról van szó. E három pont közül semelyik kettő nem lehet kollineáris az I ideális ponttal, ugyanis az A, B, C, I pontok mind a K kúpszeleten vannak, egy kúpszeleten viszont nem tudunk megadni három kollineáris pontot. A harmadik eset, amikor az A, B, C ponthármas valamely két pontja kollineáris az I' ideális ponttal. (Ezt elég az A, B pontpárra belátni, a másik két eset hasonlóan bizonyítható.) Legyen A, B kollineáris I'-vel. Ekkor a C, M, I ponthármas is kollineáris lesz, mivel A, B, C, M ortocentrikus pontnégyes, tehát AB merőleges CM-re, továbbá I' iránya merőleges I irányára. Ekkor megint azt kapjuk, hogy a K kúpszelet három pontja (C, M illetve I) kollineáris, ami nem lehetséges. Végül vizsgáljuk meg, hogy előfordulhat-e, hogy a két ideális pont (I és I') és az ortocentrikus pontnégyes egy pontja (például A) kollineáris. Ez az eset csak akkor állhat fenn, ha az A pont is ideális pont, ekkor a közös egyenes a sík ideális egyenese. Ekkor könnyen ellenőrizhető, hogy az A, B, C, M pontnégyes már nem lesz ortocentrikus, tehát ez az eset sem fordulhat elő. (B-vel illetve C-vel vizsgálva is hasonló eredményre jutunk) Megkaptuk, hogy A, B, C, I és I' öt általános helyzetű pont, tehát az 1.1.4. Tétel alapján egyértelműen illeszthető rájuk egy K' nem elfajuló kúpszelet. K' átmegy az A, B, C pontokon, így az 1.6.1. Állításunk alapján tudjuk, hogy M-en is átmegy. Az A, B, C, M, I öt általános helyzetű pont, tehát ezen öt ponthoz is egyértelműen létezik rajtuk átfektetett nem elfajuló kúpszelet. Az előbbiekben azt kaptuk, hogy K és K' is illeszkedik rájuk, tehát szükségképpen $K = K'$. Ekkor az is teljesül, hogy ennek a hiperbolának a második ideális pontja (az I mellett) a $J = I'$ pont lesz. Az I' ideális pont irányát I-re merőlegesnek választottuk, tehát megkaptuk, hogy a hiperbola derékszögű. ■

1.6.3. Állítás: Ha A, B, C, M ortocentrikus pontnégyes, akkor a rájuk illeszkedő derékszögű hiperbolák középpontja rajta vannak a pontnégyes Feuerbach-körén.

Bizonyítás: A könnyebb kezelhetőség érdekében tekintsük azt a háromszöget, melynek csúcsai az A, B, C ponthármas, magassága pedig az M pont. Továbbá tekintsük ezen ortocentrikus pontnégyes Feuerbach-körét. Ismert, hogy a háromszög magasságpontjából vett kétszeres nagyítással a Feuerbach-kör a háromszög köré írt körébe megy át. Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy ha a magasságpontot középpontosan tükrözzük a Feuerbach-kör összes pontjára, akkor megkapjuk a háromszög köré írt körét. Mivel a magasságpont rajta van a derékszögű hiperbolán, ezért ha a magasságpontot középpontosan tükrözzük a hiperbola középpontjára, akkor a hiperbola egy másik pontját kapjuk. Ha tehát a magasságponttal átellenes pont rajta van a háromszög köré írt körén, akkor szükségképpen a hiperbola középpontja rajta van a háromszög Feuerbach-körén. Ezt koordinátákkal érdemes megvizsgálni a hiperbola aszimptotáinak koordinátarendszerében.

Legyenek az ABC háromszög csúcsainak és magasságpontjának koordinátái:

$$A = \left(a, \frac{1}{a}\right), B = \left(b, \frac{1}{b}\right), C = \left(c, \frac{1}{c}\right) \text{ és } M = \left(-\frac{1}{abc}, -abc\right).$$

A magasságpontnak a hiperbola középpontjára, azaz a $(0,0)$ pontra vett tükörképe:

$$M = \left(\frac{1}{abc}, abc\right).$$

Adjuk meg az ABC háromszög köré írt körének középpontját a csúcsok koordinátáival kifejezve. Az AB oldal felezőmerőlegesének egyenlete:

$$bax - y = \frac{1}{2}(ba^2 + ab^2) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right).$$

Hasonlóan a BC oldal felezőmerőlegesének egyenlete:

$$bcx - y = \frac{1}{2}(bc^2 + cb^2) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right).$$

Ezek metszéspontja megadja a háromszög köré írt körének középpontjának két koordinátáját:

$$O = \frac{1}{2}\left(a + b + c + \frac{1}{abc}, \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + abc\right).$$

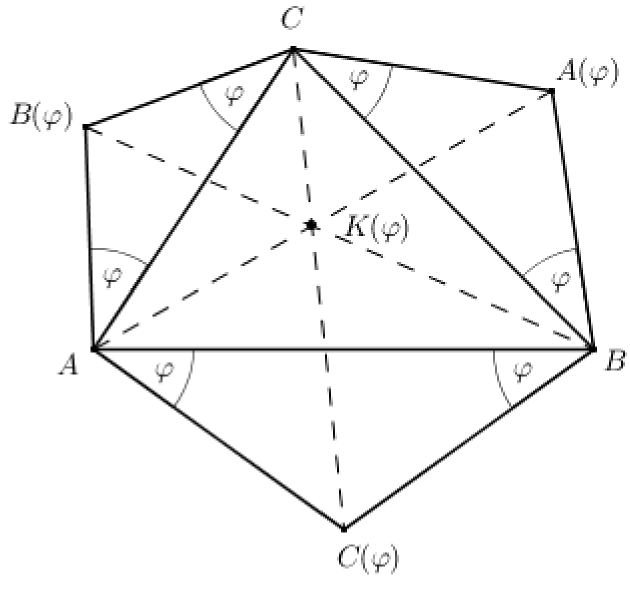
Az, hogy M' rajta van a háromszög köré írt körén, azzal ekvivalens, hogy az A, B és C csúcsok bármelyikét M'-vel helyettesítve az O pont koordinátái nem változnak. Esetünkben ez teljesül, tehát beláttuk, hogy az A, B, C, M ortocentrikus pontnégyesre illeszkedő derékszögű hiperbolák középpontja rajta vannak a pontnégyes Feuerbach-körén. ■

2. A Kiepert-hiperbola

2.1. Származtatás

Az alábbi fejezetben definiálom egy adott háromszög Kiepert-hiperboláját az elméleti bevezetőben szereplő állítások felhasználásával. Ennek a speciális alakzatnak a feltérképezéséhez induljunk ki az alábbi konstrukcióból.

Tekintsünk a projektív síkon egy (tetszőleges) ABC háromszöget. A háromszög belső szögeit a szokásos módon jelölje α, β, γ. Állítsunk a háromszög oldalaira, mint alapokra egymással hasonló, egyenlő szárú háromszögeket úgy, hogy vagy mindhárom nyitott háromszögtartomány diszjunkt az ABC háromszögtartománnyal, vagy egyik sem. Az eredeti ABC háromszög A, B illetve C csúcsával szemközti egyenlő szárú háromszögek szárcsúcsait jelölje rendre $A(\varphi)$, $B(\varphi)$ illetve $C(\varphi)$, az alapon fekvő szögüket pedig jelölje φ (lásd 7. ábra). Az ABC háromszög csúcsait a velük szemközti egyenlő szárú háromszögek szárcsúcsával összekötő egyeneseket jelölje $AA(\varphi) = a_\varphi$, $BB(\varphi) = b_\varphi$ és $CC(\varphi) = c_\varphi$.



7. ábra

A φ szög értéke negatív, ha ez a szög az ABC háromszög belseje felé nyílik, ellenkező esetben pedig pozitív értéket vesz fel. A φ szögre vonatkozóan két olyan határeset jelenik meg, melyeknél nem keletkezik a szokásos értelemben vett egyenlő szárú háromszög. Az egyik ilyen eset, ha φ derékszög, hiszen ekkor a szárcsúcs két párhuzamos egyenes metszéspontjaként áll elő. A projektív síkon dolgozunk, ezért az $A(\varphi)$, $B(\varphi)$ illetve $C(\varphi)$ pontokat a csúcsokban, az oldalakra állított merőlegesek metszéspontjaként előálló egy-egy ideális pontként definiáljuk. A másik „elfajuló” eset, ha φ értéke zérus. Ebben az esetben az $A(\varphi)$, $B(\varphi)$ illetve $C(\varphi)$ pontok az oldalak felezőpontjaként definiálhatók.

Megjegyzés: A későbbiekben ezt a két esetet nem különböztetjük meg a többitől, tehát a φ szög ezen két speciális értéke esetén is egyenlő szárú háromszögekről beszélünk majd, ami alatt a két „elfajuló” esetet értjük.

2.1.1. Tétel (Kiepert tétele): Az a_φ, b_φ és $c_\varphi$egyenesek egy $K(\varphi)$ pontban metszik egymást.

Ez a tétel egyszerűen következik egy későbbi tételünkből, ezért ennek bizonyításával később foglalkozunk.

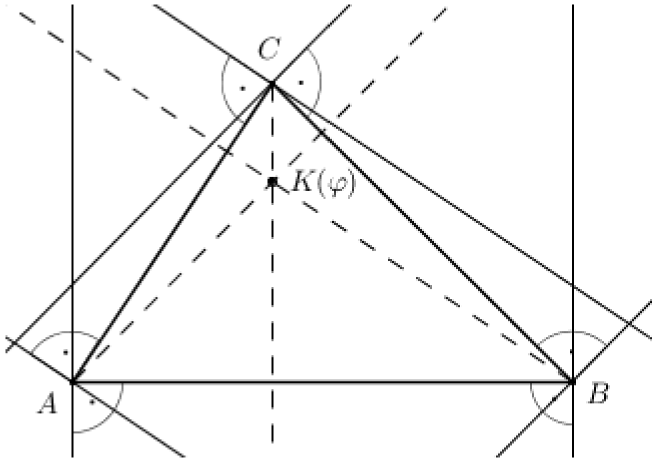
2.2. A K (φ) pontok mértani helye

Az előző tétel kapcsán felmerül a kérdés, hogy hol lesz a $K(\varphi)$ pontok mértani helye. Az a hozzárendelés, mely a φ szöghöz a $K(\varphi)$ metszéspontot rendeli, π szerint periodikus. Nekünk tehát elég egy periódusra szorítkoznunk a metszéspontok vizsgálatánál. A későbbiekben tekintsük azt a periódust, ahol $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

A legtöbb háromszöggel kapcsolatos problémához hasonlóan itt is érdemes röviden végiggondolni, hogy mit mondhatunk speciális háromszögek esetén. Egyenlő szárú háromszögek esetén megsejthetjük, hogy a $K(\varphi)$ pont a háromszög szimmetriatengelyét futja be, hiszen a $K(\varphi)$-t szolgáltató három metsző egyenes közül az egyik minden φ esetén az alap felezőmerőlegese lesz. Szabályos háromszög esetén pedig még egyszerűbb a dolgunk, hiszen a háromszög középpontja lesz az egyetlen $K(\varphi)$ pont. Ettől a két „elfajuló” esettől a továbbiakban eltekintünk, és mindig feltesszük, hogy az általunk vizsgált háromszög nem egyenlő szárú.

Az általános háromszögek vizsgálata előtt nézzünk meg néhány nevezetes pontot, melyek előállnak metszéspontként valamilyen φ szög esetén.

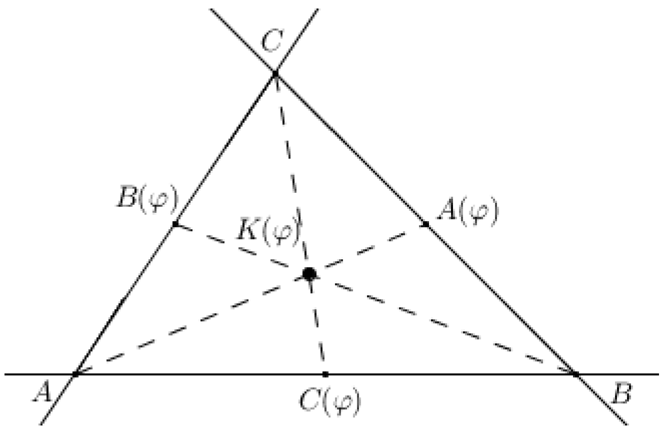
2.2.1. Állítás: Az ABC nem egyenlő szárú háromszög magasságpontja előáll metszéspontként $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ esetén.



8. ábra

Bizonyítás: Vizsgáljuk az AB oldalt. Állítsunk merőleges egyeneseket a végpontokban (8.ábra). Ez két egymással párhuzamos egyenest jelent, amik a saját ideális pontjukban metszik egymást. A háromszög C csúcsát és az előbb említett ideális pontot összekötő egyenes éppen az ABC háromszög C csúcsához tartozó magasságát adja. A háromszög másik két oldala esetén hasonlóan járhatunk el. A három egyenes metszéspontja tehát az ABC háromszög magasságpontja lesz. ■

2.2.2. Állítás: Az ABC nem egyenlő szárú háromszög súlypontja előáll metszéspontként $\varphi = 0$ esetén.



9. ábra

Bizonyítás: Ebben az esetben (9.ábra) mindhárom egyenlő szárú háromszög szárcsúcsa az ABC háromszög valamelyik oldalfelező pontjába esik. Ezeket a pontokat összekötve az ABC

háromszög szemközti csúcsaival, éppen az ABC háromszög súlyvonalait kapjuk, melyek a háromszög súlypontjában metszik egymást. ■

2.2.3. Állítás: Az ABC nem egyenlő szárú csúcsai is előállnak metszéspontként. $\varphi = -\alpha$ esetén a háromszög A csúcsa, $\varphi = -\beta$ esetén a háromszög B csúcsa, $\varphi = -\gamma$ esetén pedig a háromszög C csúcsa lesz a metszéspont. Ha valamelyik szög tompaszög, akkor a neki megfelelő csúcs a tompaszög kiegészítő szögével áll elő metszéspontként.

Bizonyítás: A három csúcsból elég az egyikre belátni az állítást. A többi ennek analógiájára már könnyen ellenőrizhető.

Lássuk be a fenti állítást a B csúcsra vonatkozóan. Ha $\varphi = -\beta$, akkor a BC oldalra állított egyenlő szárú háromszög szárcsúcsa, $A(\varphi)$ az AB oldalegyenesre esik. Ehhez hasonlóan az AB oldalra állított egyenlő szárú háromszög szárcsúcsa, $C(\varphi)$ a BC oldalegyenesre esik. Ekkor az a_φ illetve c_φ egyenesek rendre egybeesnek az AB illetve BC oldalegyenesekkel. Az AB és BC oldalak viszont éppen a B csúcsban metszik egymást. Ha β tompaszög, akkor $\varphi = 180 - \beta$ a B csúcsnál levő két külső szögszárat határozza meg, így a metszéspont maga a B csúcs lesz. ■

2.2.4. Tétel: Nem egyenlő szárú háromszög esetén a $K(\varphi)$ pontok mértani helye egy derékszögű hiperbola.

Ezt a tételt több lépésben bizonyítom egyrészt az elméleti bevezetőben leírtak alapján, másrészt új állításokat felhasználva. Először tekintsük az alábbi állítást.

2.2.5. Állítás: A φ szög egy projektív megfeleltetést létesít az A és B tartópontú sugársorok között.

Bizonyítás: Ha tekintjük az A és B tartópontú sugársorok egyeneseit, akkor azt mondhatjuk, hogy minden φ szöghöz pontosan egy olyan egyenes tartozik mindkét sugársor egyenesei közül, mely a $K(\varphi)$ metszéspontot állítja elő. Ez egyszerűen annak köszönhető, hogy a háromszög nem egyenlő szárú, és ezért A-n és B-n nem halad át a szemközti oldalhoz tartozó felezőmerőleges. A 2.2.1. Tétel jelöléseit használva a $K(\varphi)$ metszéspontot előállító, az A és B tartópontú sugársor egy-egy egyenese legyen rendre a_φ illetve b_φ.

A feladatunk tehát az, hogy tetszőleges φ szög mellett megadjunk egy kettősviszonytartó bijekciót az A és B tartópontú sugársorok között, ahol az a_φ egyenes képe éppen a b_φ egyenes. Ezt három lépésben tesszük meg. Először tekintsük azt a megfeleltetést, ami az A tartópontú sugársor egy egyeneséhez a BC oldal felezőmerőlegesének (későbbiekben f_a) azon pontját rendeli, melyben a sugársor egyenese elmetszi f_a-t. Ez egy kettősviszonytartó bijekciót létesít a sugársor és a pontsor között, ahol a_φ képe éppen az $A(\varphi)$ pont. Második lépésként tekintsük az f_a és f_b felezőmerőlegesek közti megfeleltetést. Az ABC háromszög oldalaira állított egyenlő szárú háromszögek hasonlóak, hiszen szögeik megegyeznek. Ekkor az a megfeleltetés f_a és f_b között, amely $A(\varphi)$-hez $B(\varphi)$-t rendeli, egy hasonlósági transzformáció, tehát kettősviszonytartó. Végül pedig az első lépés analógiájára tekintsük azt a megfeleltetést f_b és a B tartópontú sugársor között, ami az f_b pontsor egy eleméhez a B tartópontú sugársor azon egyenesét rendeli, mely áthalad a pontsor adott pontján. Ekkor $B(\varphi)$ képe a b_φ egyenes. Ekkor tehát azt mondhatjuk, hogy az A és B tartópontú sugársorok között megadott megfeleltetés egy kettősviszonytartó bijekció, hiszen ilyen megfeleltetések kompozíciójaként áll elő. ■

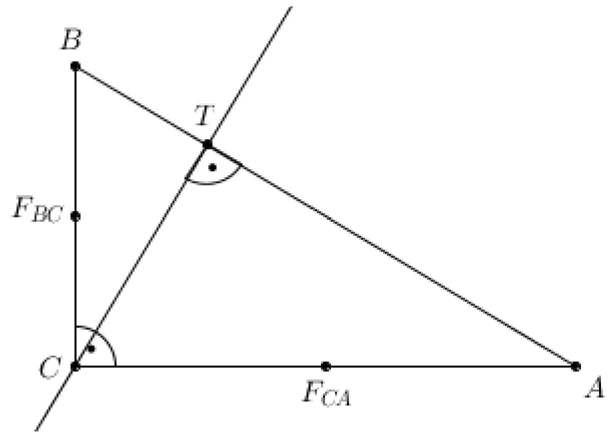
Ezzel a tétellel megadtunk egy projektív transzformációt az A és B tartópontú sugársorok között, amely tetszőleges φ szög esetén az a_φ egyenesnek a b_φ egyenest felelteti meg. Mivel a háromszög nem egyenlő szárú, az általunk megadott projektív transzformáció a két tartópontot összekötő egyenest nem önmagába viszi, ezért az 1.2.6. Állítás alapján a leképezés nem perspektivitás.

Az 1.3.4. Tétel alapján a φ szög által az A és B tartópontú sugársorok közt definiált projektív transzformáció képződménye egy nem elfajuló kúpszelet. Ez a kúpszelet áthalad a háromszög csúcsain, súlypontján és magasságpontján. Mivel a háromszög csúcsai és súlypontja nem feszíthetnek ki konvex négyszöget, a rajtuk áthaladó közönséges kúpszelet csak hiperbola lehet. A $K(\varphi)$ pontok mértani helye tehát hiperbola. Ezt a hiperbolát nevezzük az ABC nem egyenlő szárú háromszög Kiepert-féle hiperbolájának.

Tegyük fel először, hogy a háromszög nem derékszögű. Ekkor a csúcsok és a magasságpont ortocentrikus pontnégyest alkotnak, így az 1.6.2. Állítás szerint a Kiepert-hiperbola derékszögű. Ha a háromszög derékszögű, akkor hosszabb utat kell bejárnunk, ahhoz hogy belássuk, ekkor is derékszögű a Kiepert-hiperbola.

Ehhez tekintsük az ABC derékszögű háromszöget (10. ábra). Legyen $BC < CA$ és az átfogóhoz tartozó magasság talppontja T. A BC illetve CA oldalak felezőpontja legyen rendre F_{BC}

illetve F_{AC}. Ekkor a T körüli $+90°$-os, b/a arányú forgatva nyújtás a BC befogót a CA átfogóra képezi, továbbá tetszőleges φ esetén a $BCA(\varphi)$ háromszöget a $CAB(\varphi)$ háromszögbe viszi.



10. ábra

A következőkben azt szeretnénk belátni, hogy ha valamilyen φ_1 szöggel $AA(\varphi_1)$ és $BB(\varphi_1)$ párhuzamos, akkor létezik olyan φ_2 szög, hogy $AA(\varphi_1)$ merőleges $AA(\varphi_2)$-re és $BB(\varphi_1)$ merőleges $BB(\varphi_2)$-re, azaz $AA(\varphi_2)$ és $BB(\varphi_2)$ is párhuzamos. $AA(\varphi_1)$ és $BB(\varphi_1)$ metszéspontját $K(\varphi_1)$, míg $AA(\varphi_2)$ és $BB(\varphi_2)$ metszéspontja legyen $K(\varphi_2)$.

Állítsunk merőlegest az A pontban az $AA(\varphi_1)$ egyenesre, és messük el vele a BC oldal felezőmerőlegesét. Ez a felezőmerőleges az $A(\varphi)$ pontok mértani helye, így az előbb kapott metszéspont valamely φ_2 szöghöz tartozó $A(\varphi_2)$. Ez a φ_2 szög egyértelműen megadja az AC felezőmerőleges $B(\varphi_2)$ pontját. Azt kell tehát belátunk, hogy $AA(\varphi_2)$ párhuzamos $BB(\varphi_2)$.

Legyen $BB(\varphi_1)$ és a BC oldal felezőmerőlegesének hajlásszöge δ. A BC oldal felezőmerőlegese párhuzamos AC-vel, ezért a $BB(\varphi_1)$-et merőlegesen vetítve CF_{AC} szakaszra kapjuk, hogy

$$BB(\varphi_1) = \frac{a}{2}\sin\delta.$$

Mivel feltettük, hogy $AA(\varphi_1)$ és $BB(\varphi_1)$ párhuzamos és tudjuk, hogy $AA(\varphi_1)$ merőleges $AA(\varphi_2)$-re, ezért $BB(\varphi_1)$ merőleges $AA(\varphi_2)$-re. Ebből kapjuk, hogy $AA(\varphi_2)$ és az AC oldal felezőmerőlegesének hajlásszöge szintén δ. Az $AA(\varphi_2)$-t merőlegesen vetítve a CF_{BC} szakaszra kapjuk, hogy

$$AA(\varphi_2) = \frac{b}{2}\sin\delta.$$

Alkalmazzuk a fenti T körüli $+90°$-os, b/a arányú forgatva nyújtást az $A(\varphi_1)AA(\varphi_2)$ (derékszögű) háromszögre. Ekkor a képháromszög a $B(\varphi_1)A'B(\varphi_2)$ (derékszögű) háromszög. Az $A(\varphi_1)AA(\varphi_2)$ derékszögű háromszög két befogója $A(\varphi_1)A$ és $AA(\varphi_2)$, tehát ezek egymásra merőlegesek. Ekkor a fenti forgatva nyújtásnál vett képük, azaz $B(\varphi_1)A'$ és $A'B(\varphi_2)$ is merőlegesek egymásra. Továbbá azt is tudjuk, hogy $B(\varphi_1)B$ is merőleges $B(\varphi_1)A'$-re, mivel $A(\varphi_1)A$ párhuzamos $B(\varphi_1)B$-vel és $A(\varphi_1)A$ képe a fenti forgatva nyújtásnál éppen $B(\varphi_1)A'$. Ebből azt kapjuk, hogy $B(\varphi_1)B$ és $A'B(\varphi_2)$ párhuzamos. A merőleges vetítésekből kapott egyenletekből megállapítjuk, hogy $BB(\varphi_1)$ hossza és (b/a)-szorosa az $AA(\varphi_2)$ hosszának. Ez a hossz viszont egyenlő a $A'B(\varphi_2)$ hosszával, hiszen ez a szakasz az $AA(\varphi_2)$-nek a fenti forgatva nyújtásnál vett képe.

Azt mondhatjuk tehát, hogy $BB(\varphi_1)A'B(\varphi_2)$ paralelogramma (sőt, téglalap), tehát $BB(\varphi_2)$ és $B(\varphi_1)A'$ párhuzamos. Utóbbi viszont párhuzamos $AA(\varphi_2)$-vel is, mivel $AA(\varphi_2)$ merőleges $AA(\varphi_1)$-re, ami persze a forgatva nyújtás miatt merőleges $B(\varphi_1)A'$-re. Ezzel beláttuk, hogy $BB(\varphi_2)$ és $AA(\varphi_2)$ párhuzamos.

Az előbbiekben azzal a feltételezéssel éltünk, hogy létezik egy olyan φ_1 szög, melyre $K(\varphi_1)$ ideális pont, és így láttuk be, hogy ekkor biztosan létezik egy olyan φ_2 szög, melyre $K(\varphi_2)$ is ideális pont, továbbá a két ideális pont által meghatározott irány egymásra merőleges. Azt már tudtuk eddig is, hogy a $K(\varphi)$ pontok mértani helye hiperbola, tehát biztosan létezik a fentieknek megfelelő φ_1 szög, ebből pedig valóban következik, hogy a hiperbola derékszögű.

Most már kimondhatjuk, hogy tetszőleges nem egyenlő szárú háromszög Kiepert-hiperbolája derékszögű hiperbola.

A Kiepert-hiperbola a háromszög súlypontján is áthalad. Ebből az is következik, hogy a háromszög csúcsaira és súlypontjára illeszkedő Kiepert-hiperbola egyértelmű. Tekintsük ugyanis egy nem egyenlő szárú háromszög három csúcsát és a súlypontját. Ekkor mindig kiválasztható közülük három, melyek nem derékszögű háromszöget határoznak meg, tehát e három pont által alkotott háromszög magasságpontja ezzel a három ponttal ortocentrikus pontnégyest alkot. Mivel nem egyenlő szárú háromszögeket vizsgálunk, ehhez az ortocentrikus pontnégyeshez hozzá véve az eredeti pontnégyes negyedik pontját öt általános helyzetű pontot kapunk. Az 1.1.4. Tétel és 1.6.2. Állítás alapján erre az öt pontra egyértelműen illeszkedik egy derékszögű hiperbola, ami a fentiek szerint éppen a háromszög Kiepert-hiperbolája. A

Kiepert-hiperbolát tehát úgy is definiálhatjuk, mint a nem egyenlő szárú háromszög három csúcsán és a súlypontján áthaladó (egyértelműen létező) derékszögű hiperbola.

Térjünk rá a 2.1.1. Tétel bizonyítására.

2.2.1. Tétel bizonyítása: Az eddigiek alapján biztosan tudjuk, hogy bármely két csúcsot tekintjük is, a hozzájuk tartozó sugársorok projektív képződménye ugyanaz a derékszögű hiperbola lesz. Tekintsünk egy rögzített φ szöget. Ezen rögzített φ szöghöz tartozó egyenes az A, B és C tartópontú sugársorokból rendre legyenek az a_φ, b_φ és c_φ egyenesek. Mivel a háromszög A, B, C csúcsai is rajta vannak a hiperbolán, így a rajtuk átmenő a_φ, b_φ és c_φ egyenesek a hiperbolát legfeljebb további egy pontban metszik, hiszen egy egyenes és egy nem elfajuló kúpszelet metszéspontjainak száma legfeljebb kettő. Az a_φ és b_φ egyenesek tehát átmennek a b_φ egyenes hiperbolával vett metszéspontján. Mivel ugyanaz a hiperbola áll elő a B és C tartópontú sugársorokat használva, így ez ugyanígy teljesül a c_φ és b_φ egyenesekre is, azaz a rögzített φ szöghöz tartozó a_φ, b_φ és c_φ egyenesek valóban egy pontban metszik egymást. ■

3. A Kiepert-hiperbola további tulajdonságai

Ebben a fejezetben a Kiepert-hiperbola aszimptotáinak irányát és azok metszéspontját, azaz a hiperbola középpontját határozom meg. A következő tételekhez főként az elméleti bevezető második részében szereplő állításokat használom fel.

3.1. A Kiepert-hiperbola aszimptotáinak iránya

A Kiepert-hiperbola aszimptotáinak irányára vonatkozó tétel bizonyításához szükség van néhány derékszögű hiperbolákra vonatkozó egyszerű megállapításra. A következőkben ezeket foglalom össze röviden.

Tekintsük az $xy = 1$ egyenletű derékszögű hiperbolát. Vegyünk fel rajta három pontot:

$$A = \left(a, \frac{1}{a}\right), B = \left(b, \frac{1}{b}\right), C = \left(c, \frac{1}{c}\right).$$

Tegyük fel, hogy ez a három pont nem derékszögű háromszöget határoz meg. Az 1.6.1. Állítás alapján tudjuk, hogy ennek a háromszögnek az M magasságpontja is rajta van a fenti derékszögű hiperbolán. A magasságpont koordinátái:

$$M = \left(-\frac{1}{abc}, -abc\right)$$

Vizsgáljuk meg, hogy milyen megoszlásban helyezkedhet el ez a négy pont a hiperbola két ágán. Ehhez elég a pontok x koordinátáját vizsgálni. Ha a, b és c azonos előjelű, azaz a háromszög három csúcsa egy ágon van, akkor a magasságpont a másik ágon van, hiszen annak x koordinátája ellentétes előjelű. Ha a, b és c nem azonos előjelű, akkor a magasságpont a hiperbolának azon az ágán van, ahol két csúcs van. Összességében tehát azt mondhatjuk, hogy egy ortocentrikus pontnégyes mindig 3:1 arányban oszlik meg a rajtuk átmenő derékszögű hiperbola két ágán.

Megjegyzés: Ezt onnan is sejthetjük, hogy ha 2:2 vagy 4:0 arányban oszlanak meg a pontok a hiperbola két ágán, akkor konvex négyszöget feszítenek ki, viszont az ortocentrikus pontnégyesekre ez sosem teljesül.

Vizsgáljuk meg, hogy mit mondhatunk a háromszög súlypontjáról. Ez a pont nem mindig van rajta a hiperbolán. A későbbiekben tegyük fel, hogy a súlypont is rajta van a hiperbolán, hiszen ez a Kiepert-hiperbolára is teljesül. A súlypont koordinátái:

$$S = \frac{1}{3}\left(a + b + c, \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

Ha az ABC háromszög súlypontja is rajta van a hiperbolán, akkor nem fordulhat elő, hogy mindegyik csúcs azonos ágon van, hiszen a súlypont a háromszög egy belső pontja. Ebben az esetben a háromszög csúcsai 2:1 arányban oszlanak meg a hiperbola két ágán. Mivel a súlypont belső pontja a háromszögnek, ezért csak azon az ágon lehet, amelyiken két csúcs van. Ha tehát a súlypont is rajta van a fenti hiperbolán, akkor azonos ágon van a magasságponttal.

Vizsgáljuk meg, hogy mi történik a derékszögű hiperbolával és a fent megadott öt ponttal, ha alkalmazunk rájuk egy, a hiperbola valamelyik aszimptotájával párhuzamos irányú, $\lambda > 0$ arányú merőleges tengelyes affinitást. Ekkor az $xy = 1$ egyenletű derékszögű hiperbola affin képe az $xy = \lambda$ egyenletű derékszögű hiperbola lesz. A továbbiakban külön kell vizsgálnunk a kétféle irányú merőleges tengelyes affinitást.

Tekintsük először az y tengely irányával párhuzamos tengelyű, $\lambda > 0$ arányú merőleges tengelyes affinitást. Ekkor mindhárom csúcs x koordinátája szorzódik λ-val, tehát a képháromszög csúcsainak koordinátái:

$$A' = \left(\lambda a, \frac{1}{a}\right), B' = \left(\lambda b, \frac{1}{b}\right), C' = \left(\lambda c, \frac{1}{c}\right).$$

Mivel az affinitás osztóviszonytartó, ezért az ABC háromszög súlypontjának affin képe az $A'B'C'$ háromszög súlypontja lesz. A csúcsok képeinek koordinátáiból megadhatjuk a súlypont képének koordinátáit:

$$S' = \frac{1}{3}\left(\lambda(a + b + c), \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

Mivel tudjuk, hogy az eredeti S pont koordinátái kielégítették az $xy = 1$ egyenletet, így az S' pont koordinátái biztosan kielégítik az $xy = \lambda$ egyenletet. Tehát a súlypont affin képe rajta van a derékszögű hiperbola affin képén.

A magasságpont nem affin invariáns, tehát ennek koordinátáit nekünk kell kiszámolni. Rövid számolás után azt kapjuk, hogy a képháromszög magasságpontjának koordinátái:

$$M' = \left(-\frac{1}{\lambda abc}, -\lambda^2 abc\right).$$

Ne feledjük, hogy a pontok megoszlása a hiperbola két ágán nem változik az affinitás alkalmazása után sem, tehát a magasságpont és a súlypont továbbra is a hiperbola azonos ágán helyezkednek el. Ekkor viszont meg tudunk adni olyan λ arányt, mellyel S' és M' egybeesik, azaz az eredeti háromszög affin képe szabályos háromszög. Az x koordináták egyenlőségéből kapott arány:

$$\lambda^2 = -\frac{3}{(a+b+c)abc}.$$

A kifejezés akkor ad valós megoldást, ha a jobb oldali kifejezés nem negatív. Korábban láttuk, hogy az eredeti ABC háromszög S súlypontja és M magasságpontja az $xy = 1$ egyenletű hiperbola azonos ágán helyezkedik el, azaz az x koordinátájuk azonos előjelű. Ebből az következik, hogy $a + b + c$ és abc ellentétes előjelű. Ezért valóban létezik ilyen λ.

Megjegyzés: Ellenőrzésként nézzük meg, hogy az y koordináták egyenlőségéből ezt az arányt kapjuk-e:

$$-\lambda^2 abc = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

A jobb oldalon lévő kifejezés az eredeti háromszög S súlypontjának y koordinátája. Mivel S rajta van az $xy = 1$ egyenletű derékszögű hiperbolán, így a jobb oldali kifejezés egyenlő az S súlypont x koordinátájának reciprokával:

$$-\lambda^2 abc = \frac{3}{a+b+c},$$

tehát itt is ugyanazt a λ arányt kapjuk:

$$\lambda^2 = -\frac{3}{(a+b+c)abc}.$$

Tekintsük most az x tengely irányával párhuzamos tengelyű, $\lambda > 0$ arányú merőleges tengelyes affinitást. Minden hasonlóan megy, mint az előző esetben, csak a pontok koordinátái fognak megváltozni. Most a három csúcs y koordinátája szorzódik λ-val, tehát a képháromszög csúcsainak koordinátái:

$$A' = \left(a, \frac{\lambda}{a}\right), B' = \left(b, \frac{\lambda}{b}\right), C' = \left(c, \frac{\lambda}{c}\right).$$

A súlypont most is rajta van a derékszögű hiperbola affin képén, koordinátái:

$$S' = \frac{1}{3}\left(a + b + c, \lambda\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\right).$$

A képháromszög magasságpontjának koordinátái:

$$M' = \left(-\frac{\lambda^2}{abc}, -\frac{abc}{\lambda}\right).$$

A képháromszög S' súlypontja és M' magasságpontja ebben az esetben is a hiperbola azonos ágán helyezkednek el, tehát a korábbihoz hasonló módon meg tudunk adni egy olyan λ arányt, mellyel a képháromszög szabályos lesz:

$$\lambda^2 = -\frac{1}{3}abc(a + b + c).$$

A jobb oldali kifejezés előjele az első esetben elmondottak alapján szintén pozitív, tehát biztosan létezik ilyen λ arány.

Megjegyzés: Eddig feltettük, hogy az affinitás λ aránya pozitív. A negatív érték csupán a tengelyekre való tengelyes tükrözést eredményezné, tehát a fenti megállapítások ugyanúgy igazak maradnának.

Összességében az alábbi állításhoz jutottunk:

3.1.1. Állítás: Ha egy derékszögű hiperbolára egy olyan merőleges tengelyes affinitást alkalmazunk, melynek tengelye párhuzamos a hiperbola valamelyik aszimptotájával, akkor a hiperbolára illeszkedő összes olyan háromszöghöz, melynek súlypontja is illeszkedik a hiperbolára, létezik olyan λ arány, mellyel a háromszög szabályosba vihető át.

A derékszögű hiperbolákra tett megállapítások után lássuk a Kiepert-hiperbola aszimptotáinak irányára vonatkozó tételt.

3.1.2. Tétel: Tetszőleges nem egyenlő szárú háromszög Kiepert-hiperbolájának aszimptotái párhuzamosak a háromszög Steiner-ellipszisének tengelyirányaival.

Bizonyítás: Adott a (tetszőleges) ABC nem egyenlő szárú háromszög és a Kiepert-hiperbolája. A 2.2.2. Állítás alapján tudjuk, hogy erre a hiperbolára illeszkedik az ABC háromszög S súlypontja. Az 3.1.1. Állítás alapján azt mondhatjuk, hogy létezik olyan (megfelelő arányú) merőleges tengelyes affinitás, melynek tengelye az ABC háromszög Kiepert-hiperbolájának valamelyik aszimptotája, továbbá az is teljesül rá, hogy az ABC háromszöget szabályosba viszi. Az 1.5.2. Következmény alapján viszont azt mondhatjuk, hogy az ABC háromszög Kiepert-hiperbolájának aszimptotái párhuzamosak a háromszög belső Steiner-ellipszisének tengelyeivel. ■

3.2. A Kiepert-hiperbola középpontja

3.2.1. Tétel: Nem egyenlő szárú háromszög Kiepert-hiperbolájának középpontja megegyezik a háromszög belső Steiner-pontjával.

Bizonyítás: Vegyük azt a merőleges tengelyes affinitást, melynek tengelye a (tetszőleges) ABC nem egyenlő szárú háromszög Kiepert-hiperbolájának valamelyik aszimptotája, az affinitás aránya pedig olyan, hogy a képháromszög szabályos. Ekkor a Kiepert-hiperbola középpontja helyben marad, hiszen rajta van az affinitás tengelyén. Továbbá a Kiepert-hiperbola képe egy olyan derékszögű hiperbola, mely áthalad a szabályos háromszög csúcsain és középpontján. Ez a négy pont ortocentrikus pontnégyest alkot, így az 1.6.3. Állítás alapján a rajtuk átmenő derékszögű hiperbola középpontja rajta van a szabályos háromszög Feuerbach-körén, azaz a beírható körén. Szintén az 1.6.3. Állítás miatt az is igaz, hogy az eredeti ABC háromszög Kiepert-hiperbolájának középpontja rajta van az eredeti háromszög Feuerbach-körén. Az 1.5.1. Állítás bizonyításában viszont már megállapítottuk, hogy a most alkalmazott affinitás az ABC háromszög Steiner-ellipszisét az affinitással nyert szabályos háromszög beírható körébe viszi. Összességében tehát az mondhatjuk, hogy az ABC háromszögünk Kiepert-hiperbolájának középpontja a háromszög Steiner-ellipszisének és Feuerbach-körének valamelyik közös pontja. A négy közös pont közül három az ABC háromszög valamely oldalfelezőpontja.

Lássuk, hogy a hiperbola középpontja miért nem eshet egybe egyik oldalfelező ponttal sem. Tegyük fel, hogy a Kiepert-hiperbola középpontja a háromszög egyik oldalfelező pontja. Ekkor tekintsük azt a félegyenest, ami ebből a pontból indul és áthalad a háromszög vele szemközti csúcsán. Ez a félegyenes áthalad a háromszög súlypontján és egyik csúcsán, azaz a Kiepert-hiperbola két pontján. Ismeretes, hogy (tetszőleges) hiperbola esetén a középpontból húzott tetszőleges félegyenes a hiperbolát legfeljebb egy pontban metszi. A Kiepert-hiperbola középpontja tehát nem eshet egybe egyik oldalfelező ponttal sem. Ezzel viszont azt is megkaptuk, hogy a Kiepert-hiperbola középpontja a Feuerbach-kör és a belső Steiner-ellipszis negyedik metszéspontja, azaz a belső Steiner-pont lesz. ■

Irodalomjegyzék

[1] R. H. Eddy, R. Fritsch: The Conics of Ludwig Kiepert: A Comprehensive Lesson in the Geometry of the Triangle, *Mathematics Magazine*, Vol. 67, nom. 3., 1994.

[2] Hajós György: *Bevezetés a geometriába*. Budapest, Nemzeti Tankkönyvkiadó, 1999. ISBN 963-19-01165

[3] Moussong Gábor: *Geometria*. egyetemi jegyzet, ELTE, 2013.
letöltve: *http://www.math.elte.hu/~mg/tamop/geometria.pdf* (utolsó letöltés: 2015.05.30.)

[4] Reiman István: *Geometria és határterületei*. Budapest, Gondolat Könyvkiadó, 1986.

[5] Csiba Péter: A háromszög Fermat féle pontjától a Kiepert hiperbola rendkívüli bizonyításáig. *Polygon* XV. évfolyam 2. szám, 2007.