Trükkös integrálás

- Szakdolgozat -

Készítette: **Diószegi Edina**
(Matematika BSc, Tanári szakirány)

Témavezető: **Buczolich Zoltán**
(Analízis Tanszék, Matematikai Intézet)

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Budapest, 2015

Tartalomjegyzék

1. Előszó

Szakdolgozatom témája az integrálszámítás. A témaválasztásomat az motiválta, hogy középiskolai, valamint egyetemi éveim alatt többször találkoztam olyan integrálokkal, melyek kiszámítása némi kreativitást, trükköt igényeltek. Szakdolgozatomban ilyen problémákra mutatok példákat, valamint módszereket a meghatározásukra.

A differenciálszámítással ellentéteben nincs egy egységes szabály, általános formula az integrálok kiértékelésére. Azonban vannak eszközeink, amelyekkel gyakran célt érhetünk. Sokszor a megoldások menetében több lépéssel előre kell gondolkodnunk. A jobb megoldókészséget segíti, ha minél több példát látunk. Szakdolgozatomban a tanult módszerekre alapozva, ám azon túlmenően mutatok be érdekes integrálszámítási módszereket példákon keresztül. Ezeknek a feladatoknak a haszna, hogy nagyobb jártasságot szerezzünk az integrálok kiszámításában.

A példákban látni fogjuk, hogy sokszor egy bonyolult kifejezés milyen szép és egyszerű eredményt takar. Többször előfordulnak a nevezetes értékek, úgy mint a π, e, 1 és a 0. Vannak olyan integrálok, amelyeket csak egyféle módon tudunk meghatározni, míg másokra többféle megoldást adhatunk.

Az első fejezetben az *Integrálás sorbafejtéssel* módszerrel ismerkedünk meg. Ezen módszer alkalmazásához ismernünk kell a Taylor-sorfejtést, illetve a Fubini-Tonelli tétel egy speciális esetét, amit a fejezet elején ismertetek. Ebben a fejezetben megismerkedünk még az Euler-formulával is, melyet több példában is fogunk alkalmazni. A második fejezetben többváltozós integrálokra visszavezethető példákat mutatok be három feladaton keresztül. Ez a két módszer megtalálható Charles Martin *Methods for Evaluating Difficult Integrals* című cikkében. A harmadik fejezetben pedig a Riemann-Stieltjes integrálási szabállyal ismerkedünk meg.

A fejezetekben többször felbukkan Richard Feynman neve és a *"Surley You're Joking, Mr. Feynman!"* című könyvében található módszer, a paraméteres integrálási formula, amit felhasználunk az Euler integrál formula bizonyításában, illetve néhány feladat megoldásakor. Az Euler-sorral három fejezetben is találkozhatunk. Először az *Integrálás sorbafejtéssel* fejezeben, ahol csak felhasználjuk a sorösszegét egy példában. Majd a *Többváltozós módszerek* fejezetben adunk bizonyítást az Euler-sorra, végül a *Riemann-Stieltjes trükkös* *helyettesítés* fejezetben meghatározzuk a pontos értékét.

Végezetül az utolsó fejezetben az amerikai egyetemek között évente megrendezésre kerülő William Lowell Putnam matematikaverseny feladatai közül válogattam ki az integrálszámítással kapcsolatosakat. Ezen feladatok megoldásához felhasználjuk a korábbi fejezekben látott trükköket.

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Buczolich Zoltán tanár úrnak, hogy mindig segítőkész és lelkiismeretes volt, és hasznos tanácsokkal látott el.

2. Integrálás sorbafejtéssel

Ebben a fejezetben az integrálok meghatározásához sorbafejtést alkalmazunk. Ez egy nagyon hatékony módszert ad a kezünkben, amivel sok esetben könnyedén ki tudjuk számolni az integrálok értékét. A következőkben erre fogunk példákat látni. A módszer menete röviden, hogy vesszük az integrálandó függvényünk 0-beli Taylor-sorát, majd megcseréljük a szumma- és integráljelet. Ez azonban nem mindig tehető meg, viszont a követekző tétel ismeretében már elvégezhető, ha teljesülnek a feltételek.

A tétel a Fubini-Tonelli tétel speciális esete.

2.1. Tétel. *Ha az $f_1, f_2, f_3 \ldots$ függvénysor tagjai a (véges vagy végtelen) (a, b) intervallumon értelmezett nem-negatív, integrálható függvények, és a sor összegfüggvénye is integrálható az (a, b) minden $[c, d]$ részintervallumán, akkor a sort szabad tagonként integrálni, azaz*

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n\,(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n\,(x)\,dx.$$

A Fubini-Tonelli tételt általában mértékterekben történő integrálásnál, a Lebesgue integrál keretében szokták tárgyalni. Ez azonban meghaladja szakdolgozatom kereteit, ezért bővebben nem fogok írni róla. Viszont egy speciális változata már bizonyítható egyszerűbb eszközökkel is.

2.2. Tétel. *Ha az $f_1, f_2, f_3 \ldots$ függvénysor tagjai a (véges vagy végtelen) (a, b) intervallumon értelmezett nem-negatív, folytonos függvények, és a sor összegfüggvénye is folytonos az (a, b) minden $[c, d]$ részintervallumán, akkor a sort szabad tagonként integrálni, azaz*

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n\,(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n\,(x)\,dx.$$

2.3. Megjegyzés. Az általánosság megsértése nélkül feltehetjük – szükség esetén az (a, b) intervallumot kettévágva – hogy minden n-re $f_n\,(x)$ és $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n\,(x)$ is folytonos a $[c, b]$ intervallumon, ha $a < c < b$.

A tétel bizonyításához a következő, Dini tételen alapuló lemmára van szükségünk:

2.4. Lemma. *A fenti feltételek mellett minden* $c \in (a,b)$*-re* $\sum\limits_{n=1}^{k} f_n(x)$ *egyenletesen konvergál* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$*-hez* $[c,b]$*-n.*

Bizonyítás. Használjuk ki, hogy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ és minden k-ra a $\sum\limits_{n=1}^{k} f_n(x)$ függvények is folytonosak a kompakt $[c,b]$ intervallumon.

Legyen $\varepsilon > 0$ és

$$F_{k,c} = \left\{ x \in [c,b] : \left| \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) - \sum_{n=1}^{k} f_n(x) \right| \geq \varepsilon \right\}.$$

Mivel $\sum\limits_{n=1}^{k} f_n(x)$ monoton növekedve konvergál minden $x \in [c,b]$-re $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$-hez, ezért az $F_{k,c}$ halmazok egymásba skatulyázottak és $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_{k,c} = \emptyset$.

A folytonossági feltétel miatt az $F_{k,c}$ halmazok zártak. Így létezik $k \in \mathbb{N}$, hogy $F_{k,c} = \emptyset$, azaz

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) - \sum_{n=1}^{k} f_n(x) \right| < \varepsilon$$

minden $x \in [c,b]$ esetén az $f_n(x)$ függvények nem-negativitása miatt. Ebből pedig következik az egyenletes konvergencia. □

Ezzel a lemma bizonyítását befejeztük. Most térjünk rá a 2.2 tétel bizonyítására.

Bizonyítás. Bevezetjük a következő jelöléseket

$$A = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) dx \text{ és } B = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx.$$

Tegyük fel, hogy A véges, és bizonyítjuk, hogy B is véges.

A-ban vegyük a függvénysor k-adik részletösszegét, ekkor

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{k} f_n(x)\, dx \leq A < +\infty.$$

Mivel nem-negatív függvényeket adunk össze, így az integrál értéke csökken. Ekkor a szumma- és integráljel egyértelműen felcserélhető

$$\sum_{n=1}^{k} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{k} f_n(x)\, dx \leq A.$$

Ha k-val tartunk a végtelenbe, akkor az egyenlőség bal oldala tart B-hez. Viszont minden k-ra kisebb vagy egyenlő a két kifejezés A-nál, így $B \leq A$. Mivel feltettük, hogy A véges ebből következik, hogy B is véges.

Most pedig tegyük fel, hogy B véges, és bizonyítjuk, hogy A is véges. Minden $c \in (a, b)$-re

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_c^b f_n(x)\, dx \leq B < +\infty.$$

A 2.4 lemma szerint minden rögzített $c \in (a, b)$-re

$$A(c) = \int_c^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_c^b f_n(x)\, dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = B < +\infty.$$

Tehát ha $c \to a + 0$ akkor kapjuk, hogy $A(c) \to A \leq B$.

Nyilván ha $A = +\infty$, akkor B nem lehet véges, mert akkor a fentiek szerint A is véges lenne. Hasonlóan $B = +\infty$-ből is következik $A = +\infty$. $\square$

Most pedig nézzünk példákat az integrálás sorbafejtéssel módszerre.

2.5. Példa. Határozzuk meg a következő integrál értékét!

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} dx$$

Megoldás

Legyen $f(x) = \ln(1-x)$, ekkor $D(f) = (-\infty, 1)$. Az f függvény 0 középpontú Taylor-sorfejtése

$$f(x) = 0 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Most határozzuk meg a sor konvergenciatartományát. Ehhez ki kell számolni a konvergenciasugarát, ami a gyökkritérium felhasználásával történik:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\left|\frac{1}{n}\right|}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Az $x = 0 - R = -1$ pontban a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ Leibniz-sor konvergens. Az $x = 0 + R = 1$ pontban a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ sor divergens. A konvergenciahalmaz tehát a $[-1, 1)$ intervallum,

$$f(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, x \in [-1, 1). \tag{2.1}$$

Azonban nekünk $\frac{\ln(1-x)}{x}$-re van szükségünk, ezért osszuk el (2.1)-et x-szel.
$x \neq 0$ esetén

$$\frac{\ln(1-x)}{x} = \frac{-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}}{x} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n}, x \in [-1,0) \cup (0,1).$$

Az integrálást a $[0,1]$ zárt intervallumon kell elvégezni, viszont a 0 helyen a $g(x) = \frac{\ln(1-x)}{x}$ függvénynek szakadása van. Mivel $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1-x)}{x} = -1$, ezért a szakadás ezen a helyen megszüntethető a $g(0) := -1$ helyettesítéssel. Így a folytonosság kiterjeszthető a $[0,1]$ intervallumra, és vehetjük a g függvény Riemann integrálját:

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} dx = -\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n} dx = -\int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k+1} dx.$$

$\frac{x^k}{k+1} \geq 0$ és folytonosak a $(0,1)$ intervallumon, így alkalmazhatjuk a 2.2 tételt

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} dx = -\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{x^k}{k+1} dx = -\sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{x^{k+1}}{k+1} \cdot \frac{1}{k+1}\right]_0^1 =$$
$$= -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = -\frac{\pi^2}{6},$$

ahol $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ az ismert Euler-sor, aminek értékét az 5. fejezetben mi is ki fogjuk számolni.

2.6. Példa. Határozzuk meg az alábbi integrál értékét:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx.$$

Megoldás

Próbáljuk meg ismét sorba fejteni az integrálandó függvényünket. Azonban vegyük észre, hogy a nevezőben lévő kifejezés hasonlít a mértani sorhoz, amely alakja a következő:

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n, \text{ ha } |t| < 1, \tag{2.2}$$

Alakítsunk egy kicsit a nevezőben lévő kifejezésen, hogy jobban felismerhetővé váljon a mértani sor:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \int_0^{\infty} x^3 \frac{1}{e^x\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)} dx = \int_0^{\infty} x^3 e^{-x} \frac{1}{1 - e^{-x}} dx. \tag{2.3}$$

Legyen $t = e^{-x}$ a helyettesítés, ekkor az $\frac{1}{1-t}$ függvénynek a $t_0 = 0$ ponthoz tartozó Taylor-sora éppen a $\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}$ mértani sor, tehát

$$\frac{1}{1-e^{-x}} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}.$$

A sor konvergenciájának feltétele: $-1 < e^{-nx} < 1 \Rightarrow x > 0$. A konvergenciatartomány a $(0, +\infty)$ intervallum. A kapott eredményt helyettesítsük be a (2.3) integrálba:

$$\int_0^{\infty} x^3 e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} dx = \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} x^3 e^{-x} e^{-nx} dx = \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} x^3 e^{-x-nx} dx =$$
$$= \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} x^3 e^{-x(1+n)} dx = \int_0^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} x^3 e^{-kx} dx.$$

Mivel a függvénysor minden tagja nem-negatív és folytonos a $(0, +\infty)$ intervallumon, így alkalmazhatjuk a 2.2 tételt:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\infty} x^3 e^{-kx} dx.$$

Helyettesítsünk be $u = kx$-et, ekkor $dx = \frac{du}{k}$ és

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \left(\frac{u}{k}\right)^3 e^{-u} \frac{du}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{1}{k^4} u^3 e^{-u} du = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^4} \int_0^{\infty} u^3 e^{-u} du \right) =$$
$$= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} \right) \left(\int_0^{\infty} u^3 e^{-u} du \right).$$

Ismét felhasználunk egy ismert sorösszeget

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \tag{2.4}$$

valamint az Euler integrál formulát a gyorsabb megoldás érdekében.

2.7. Állítás. (Euler integrál formula) *Minden $n \geq 0$-re*

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x} = n!$$

Bizonyítás. Az egyenlőséget első neki futásra parciális integrálással is bebizonyíthatnánk, azonban nagy n-ekre elég hosszadalmas lenne. Ezért ehelyett alkalmazzuk egy amerikai fizikus, Richard Feynman módszerét.

Általában az integrálokat felírhatjuk

$$\int_a^b f(x,t)\,dx \tag{2.5}$$

alakban, ahol $f(x,t)$ egy kétváltozós függvény. Tehát definiálhatunk egy paraméteres integrált, ahol t a paraméter, x pedig az integrál változója. Az (2.5) integrál tulajdonképpen t függvénye, mivel elvégezve az integrálást az eredmény t-től függ, x-től már nem. Feynman szabálya a következő:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^b f(x,t)\,dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\,dx. \tag{2.6}$$

Azaz paraméteres integrálban a differenciálás és integrálás felcserélhető.

A későbbiekben is fogjuk alkalmazni ezt a módszert és a hozzá tartozó egyenlőséget.

Az ötlet tehát az, hogy vezessünk be egy t paramétert, és írjuk fel az integrálunkat annak függvényében. Majd deriváljunk t szerint n-szer, amivel már eljutunk a bizonyítandó állításunkhoz, ha t helyére 1-et írunk. Látni fogjuk, hogy ezzel a bizonyítással egy sokkal általánosabb problémára adunk megoldást.

$n = 0$ esetén az integrál értéke

$$\int_0^\infty x^0 e^{-x} dx = \int_0^\infty e^{-x} dx = -\left[e^{-x}\right] = -\lim_{x\to\infty} e^{-x} + e^0 = 1. \tag{2.7}$$

Minden $t > 0$-ra legyen $x = tu$, ekkor $dx = t \cdot du$, behelyettesítve (2.7)-be azt kapjuk, hogy

$$\int_0^\infty t e^{-tu} du = 1.$$

Osszuk le mindkét oldalt t-vel és u helyére írjunk x-et, ekkor

$$\int_0^\infty e^{-tx} dx = \frac{1}{t}.$$

Ez az alak paraméteres formája a (2.7)-nek, ahol mindkét oldal t függvénye. Mivel $t > 0$, így e^{-tx} integrálható minden $x \geq 0$-ra.

Most deriváljuk mindkét oldalt t szerint

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^\infty e^{-tx} dx = \left(\frac{1}{t}\right)'.$$

A bal oldalon szereplő kifejezést írjuk át a (2.6)-ban szereplő képlet felhasználásával

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^\infty e^{-tx} dx = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t} e^{-tx} dx = \int_0^\infty -x e^{-tx} dx,$$

ekkor
$$\int_0^\infty xe^{-tx}dx = \frac{1}{t^2}.$$
Ismét deriváljuk mindkét oldalt t szerint, majd alkalmazzuk a (2.6)-os egyenlőséget:
$$\int_0^\infty x^2e^{-tx}dx = \frac{2}{t^3}.$$
Folytatva a deriválást minden egyes új egyenlőségnél azt kapjuk, hogy
$$\int_0^\infty x^3e^{-tx}dx = \frac{6}{t^4},$$
$$\int_0^\infty x^4e^{-tx}dx = \frac{24}{t^5},$$
$$\dots$$
$$\int_0^\infty x^ne^{-tx}dx = \frac{n!}{t^{n+1}}.$$
A bizonyítás során bevezettünk egy t változót, hogy az egyenlőségeken el tudjuk végezni a $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ deriválást. Ha $t = 1$-et választunk megkapjuk a bizonyítani kívánt állítást, azaz
$$\int_0^\infty x^ne^{-x} = n!.$$
Ez a bizonyítás szerepel Keith Conrad *Differentiating Under The Integral Sign* című cikkében. □

Most pedig alkalmazzuk (2.4)-et és a 2.7 állítást, így megkapjuk az integrandus értékét, ami
$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1}dx = \frac{\pi^4}{90} \cdot 3! = \frac{\pi^4}{15}.$$
2.8. Példa. Határozzuk meg az alábbi végtelen sor összegét:
$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n2^n}.$$

Megoldás

Az eddigi példákkal ellentétben láthatjuk, hogy most nem egy függvény integrálját kell meghatároznunk. A sorbafejtés módszerét itt tehát az előbb bemutatott módon nem tudjuk alkalmazni. Viszont ha megnézzük a végtelen sort, akkor észrevehetjük, hogy a következő alakban is felírható
$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n2^n} = \sum_{n=1}^\infty \int_0^{\frac{1}{2}} x^{n-1}dx,$$

ugyanis
$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^{n-1} dx = \left[\frac{x^n}{n}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n} = \frac{1}{n2^n}.$$
Így már szerepel a feladatunkban integrál- és szummajel, mint ahogyan az előző példákban. Továbbá megfigyelhetjük, hogy itt a módszert visszafelé kell végrehajtani. Azaz a végtelen sort írjuk át az elemi függvényre, majd vesszük az integrálját. Ehhez ismét felhasználjuk a (2.2) pontban is látott mértani sor összegképletét és a 2.2 tételt. Mivel $x^{n-1} \geq 0$ és folytonosak a $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ intervallumon, így
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} = \int_0^{\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} x^k dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x} dx = -\Big[\ln(1-x)\Big]_0^{\frac{1}{2}} =$$
$$= -\ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \ln 1 = -\ln\frac{1}{2} = \ln 2.$$

3. Többváltozós módszerek

Ebben a fejezetbe az integrálok megoldásához ismét az analízis egy másik fejezetéből származó ismereteinket kell felhasználni. Ez pedig a többváltozós függvényekre való áttérés. Ahogyan az előző részben is láthattuk, sokszor bonyolultabbnak tűnő eszközökkel könnyebben és gyorsabban célhoz érünk. Erre fogunk most néhány példát látni.

3.1. Példa. Számoljuk ki az I integrál értékét, ahol
$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

Megoldás

Ha vesszük I-nek a négyzetét, akkor azt kapjuk, hogy
$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx\right)^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx\right).$$
Az I definíciója szerint a következő alakban is átírhatjuk az integrált
$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x^2+y^2\right)} dxdy = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\left(x^2+y^2\right)}\, dx\, dy.$$

I^2 polárkoordinátás alakban megadva:

$$I^2 = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\left(x^2+y^2\right)}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} re^{-r^2}dxd\varphi = \int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{2}\int_0^{\infty} -2re^{-r^2}dr\right)d\varphi =$$
$$= \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2}\left[e^{-r^2}\right]_0^{\infty} d\varphi = \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}d\varphi = \frac{1}{2}\cdot 2\pi = \pi.$$

Négyzetgyököt vonva pedig megkapjuk az I értékét, ami $I = \sqrt{\pi}$.

3.2. Példa. Határozzuk meg az alábbi integrál értékét!

$$I = \int_0^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}(\pi x) - \operatorname{arctg} x}{x}dx$$

Megoldás

I a Frullani-integrál egyik alakja.

A 2.8 példában látott trükköt itt is alkalmazhatjuk kiindulásképp. Azaz alakítsuk át az I-ben szereplő kifejezést egy határozott integrállá:

$$I = \int_0^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}(\pi x) - \operatorname{arctg} x}{x}dx = \int_0^{\infty}\left[\frac{\operatorname{arctg}(xy)}{x}\right]_1^{\pi}dx = \int_0^{\infty}\int_1^{\pi}\frac{1}{1+x^2y^2}dydx.$$

Így kaptunk egy kétváltozós integrált. A szukcesszív integrálás tétel alapján az integráljelek felcserélhetőek

$$I = \int_1^{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{1+x^2y^2}dxdy = \int_1^{\pi}\left[\frac{\operatorname{arctg}(xy)}{y}\right]_0^{\infty}dy = \int_1^{\pi}\frac{\pi}{2y}dy = \frac{\pi}{2}\int_1^{\pi}\frac{1}{y}dy =$$
$$= \frac{\pi}{2}\left[\ln y\right]_1^{\pi} = \frac{\pi}{2}\left(\ln\pi - \log 1\right) = \frac{\pi\ln\pi}{2}.$$

3.3. Példa. Bizonyítsuk be a következő egyenlőséget:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \int_0^1\int_0^1\frac{dxdy}{1-xy}.$$

Megoldás

Ezzel a végtelen sorral, melyet Euler-sor néven szoktunk emlegetni, a 2.5 példában már találkoztunk. Bizonyítása a fenti kettős integrál kiszámításán alapszik. A pontos értékét a 5. fejezetben fogjuk meghatározni.

Első lépésként az $\frac{1}{1-xy}$-t mértani sorrá fejtjük

$$\frac{1}{1-xy} = \sum_{n=0}^{\infty}(xy)^n. \tag{3.1}$$

Helyettesítsük be az integráljel mögé (3.1)-et, majd alkalmazzuk a szukcesszív integrálás tételét

$$\int_0^1 \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (xy)^n dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} x^n y^n dx \right) dy.$$

Most pedig ismét használjuk a jól bevált 2.2 tételt. Mivel $x^n \geq 0$ és folytonosak a $(0,1)$ intervallumon, így a feltételek teljesülnek. Tehát azt kapjuk, hogy

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 x^n y^n dx \right) dy = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} y^n \int_0^1 x^n dx \right) dy = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} y^n \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 \right) dy =$$
$$= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n+1} dy.$$

Majd ismét felcserélhetjük a szumma- és integráljelet a 2.2 tétel alapján

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{y^n}{n+1} dy = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left[\frac{y^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \frac{1}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Így bebizonyítottuk az egyenlőséget.

4. Vegyes trükkök

Ebben a fejezetben egy olyan példát mutatok be, amelynek megoldása során nem tudjuk felhasználni az eddigi módszereket. Azonban nagyon érdekes és kreatív trükköt láthatunk a feladat megoldása közben. A feladatunk pedig a következő:

4.1. Példa. Adjuk meg az alábbi integrál értékét, ha $a > 0$,

$$I(a) = \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2 + a^2} dx.$$

Megoldás

Először helyettesítsünk be $x = ay$-t, $dx = a \cdot dy$

$$I(a) = \int_0^{\infty} \frac{\ln(ay)}{(ay)^2 + a^2} \cdot a \cdot dy = \int_0^{\infty} \frac{\ln(ay)}{a^2(y^2+1)} \cdot a \cdot dy = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} \frac{\ln(ay)}{y^2+1} dy =$$
$$= \frac{1}{a} \int_0^{\infty} \frac{\ln a + \ln x}{y^2+1} dy = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} \frac{\ln a}{y^2+1} dy + \frac{1}{a} \int_0^{\infty} \frac{\ln y}{y^2+1} dy =$$
$$= \frac{\ln a}{a} \Big[\operatorname{arctg} y \Big]_0^{\infty} + \frac{1}{a} \int_0^{\infty} \frac{\ln y}{y^2+1} dy = \frac{\pi \ln a}{2a} + \frac{1}{a} I(1).$$

Most ki kell számolni az eredeti integrált $a = 1$-re. Ehhez felhasználunk egy trükköt. A határok megfordításával érdekes megfigyeléseket tehetünk az eredeti integrálról. Helyettesítsünk be $y = \frac{1}{u}$-t, ekkor $dy = -u^{-2}du$, a határok pedig a következőképpen módosulnak: $\lim\limits_{u\to 0} \frac{1}{u} = \infty$, $\lim\limits_{u\to\infty} \frac{1}{u} = 0$.

$$I(1) = \int_{\infty}^{0} \frac{\ln\left(\frac{1}{u}\right)}{\left(\frac{1}{u}\right)^2 + 1} \frac{du}{-u^2} = \int_{\infty}^{0} \frac{-\ln u}{-1-u^2} du = \int_{\infty}^{0} \frac{-\ln u}{-\left(u^2+1\right)} du = \int_{\infty}^{0} \frac{\ln u}{u^2+1} du =$$

$$= -\int_{0}^{\infty} \frac{\ln u}{u^2+1} du = -I(1)$$

Ami azt jelenti, hogy $I(1) = -I(1)$, ebből következik, hogy $I(1) = 0$. Vagyis az eredeti integrál értéke:

$$I(a) = \int_{0}^{\infty} \frac{\ln x}{x^2+a^2} dx = \frac{\pi \ln a}{2a} + \frac{1}{a} \cdot 0 = \frac{\pi \ln a}{2a}.$$

5. Riemann-Stieltjes trükkös helyettesítés

Ebben a fejezetben a standard helyettesítéses integrálásnál hatékonyabb módszerre, a Stieltjes-integrálra láthatunk példákat. Ez valójában a Riemann-integrál általánosítása, melyet gyakran használnak matematikai fizikában, valószínűségszámításban és számelméletben egyaránt. A Stieltjes-integrál jelölésbeli különbsége gyakran segít rájönni az alkalmas helyettesítésre, illteve a bilinearitást kihasználva, helyettesítés nélkül is megfejthetjük az integrál értékét. Most lássuk a módszer lényegét.

A szokásos integrálba történő behelyettesítésnél adott egy $g(t)$ függvényünk, melynek ismerjük a primitív függvényét:

$$\int g(t)\, dt = G(t) + C.$$

$f(t)$ integrálfüggvényét ki lehet számolni, ha létezik ϕ függvény, amelyre

$$f[\phi(\omega)]\, \phi'(\omega) = g(\omega).$$

Helyettesítsünk be $t = \phi(\omega)$-t, ekkor azt kapjuk, hogy

$$\int f(t)\, dt = \int f[\phi(\omega)]\, \phi'(\omega)\, d\omega = \int g(\omega)\, d\omega = G(\omega) + C.$$

Az integrálokba történő behelyettesítés nehézsége, hogy találni kell egy megfelelő ϕ függvényt, amely függ az integrál szerkezetétől. A könnyebb megértés és gyorsabb átalakítás érdekében célszerű megvizsgálni az alapokat, különösen a d-jelet az integrálban. Általában nem is tulajdonítunk neki nagy jelentőséget, csak formális jelölésként tesszük ki az integráljel mögé. Valójában ez egy bilineáris operátor, amely jelentősen segíti az integrandus transzformálását. A Riemann-Stieltjes integrál a következő jelölést használja:

$$I = \int_a^b f(x)\,dF(x),$$

ahol feltesszük, hogy $F(x)$ nem-negatív monoton, differenciálható függvény az $[a,b]$ intervallumon. Ekkor vehetjük a kifejezés szokásos Riemann integrálját:

$$I = \int_a^b f(x)\,F'(x)\,dx$$

Azaz az inverz áttérés az

$$F'(x)\,dx = d(F(x))\,. \tag{5.1}$$

Végezetül d bilinearitását kihasználva, $c \neq 0$ konstansra a következőt kapjuk:

$$\int cf(x)\,d(F(x)) = \int f(x)\,d(cF(x)).$$

Ezt az egyszerű összefüggést fogjuk felhasználni a következő példákban.
A példákat Valentin Fadeev *Changing the way we change the variables. Refresher notes in real analysis* című cikkéből válogattam össze.

5.1. Példa. Határozzuk meg az alábbi integrál értékét:

$$I = \int \frac{du}{a(1+u^2)+b(1-u^2)}.$$

Megoldás

Mielőtt új változót helyettesítenénk be, előbb végezzünk el néhány algebrai átalakítást az integrandusban:

$$\begin{aligned}I &= \int \frac{du}{a(1+u^2)+b(1-u^2)} = \int \frac{du}{(a+b)+(a-b)u^2} = \\ &= \int \frac{du}{(a+b)\left(1+\frac{a-b}{a+b}u^2\right)} = \frac{1}{a+b}\int \frac{du}{1+\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}u\right)^2}.\end{aligned}$$

Így elkülönítettünk egy négyzetes kifejezést a nevezőben, most ugyanezt bevisszük a d-jel mögé. Ezt a tényezőt előállíthatjuk úgy, hogy az integrál értéke ne változzon:

$$\frac{1}{\sqrt{a+b}}\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}}\frac{1}{\sqrt{a-b}}\int \frac{du}{1+\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}u\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\int \frac{d\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}u\right)}{1+\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}u\right)^2}.$$

Az utolsó kifejezésből már világosan látszik, hogy az $\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}u$ helyére bevezetve egy új változót, a jól ismert alapintegrált kapjuk:

$$I = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \int \frac{dv}{1+v^2} = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arctg} v + C = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} u \right) + C.$$

5.2. Példa. Számoljuk ki az alábbi integrál értékét:

$$I = \int \frac{dt}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}.$$

Megoldás

Emeljünk ki $\cos^2 t$-t

$$I = \int \frac{1}{cos^2 t} \frac{dt}{a^2 + b^2 \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}} = \int \frac{1}{a^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 t} \frac{dt}{\cos^2 t}.$$

Vegyük észre, hogy $(\operatorname{tg} t)' = \frac{1}{\cos^2 t}$. Alkalmazzuk (5.1)-et, ekkor $F(t) = \operatorname{tg} t$, $F'(t)\, dt = (\operatorname{tg} t)'\, dt = d(\operatorname{tg} t)$

$$I = \int \frac{1}{a^2 \left(1 + \left(\frac{b}{a} \operatorname{tg} t\right)^2\right)} \left((\operatorname{tg} t)'\, dt\right) = \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{b}{a} \operatorname{tg} t\right)^2} d(\operatorname{tg} t)$$

Mivel nekünk most $\left(\frac{b}{a} \operatorname{tg} t\right)$-re van szükségünk, ezért pótoljuk ki az integrált $\frac{b}{a}$-val:

$$\frac{1}{a^2} \frac{a}{b} \int \frac{1}{a + \left(\frac{b}{a} \operatorname{tg} t\right)^2} d\left(\frac{b}{a} \operatorname{tg} t\right) = \frac{1}{ab} \operatorname{arctg} \left(\frac{b}{a} \operatorname{tg} t\right) + C.$$

Mindkét példában tulajdonképpen nincs szükség az új változó bevezetésére. Azonban más esetekben a számítások terjedelmesek lehetnek, főleg ha a kifejezésből nem látjuk azonnal az alapintegrálalakot. Ilyen esetekben érdemes új változót bevezetni. Most ezekre nézzünk példákat.

5.3. Példa. Határozzuk meg a következő integrál értékét:

$$I = \int \frac{\sqrt{x^2+1}\left(\ln(x^2+1) - 2\ln x\right)}{x^4} dx.$$

Megoldás

Első pillantásra az integrandusban hasonló kifejezéseket vehetünk észre a logaritmusban és a gyökjel alatt. A logaritmus azonosságait felhasználva alakítsuk át a törtet:

$$I = \int \frac{\sqrt{x^2+1} \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)}{x^4} dx = \int \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2}} \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right) \frac{dx}{x^3} =$$

$$= \int \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2} \int \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) d\left(1 + \frac{1}{x^2}\right).$$

Az utolsó átalakításnál azt használtuk ki, hogy $\left(\frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{2}{x^3}$, valamint a következő azonosságot:

$$\int f d\left(F\right) = \frac{1}{a}\int f d\left(aF + b\right).$$

Most már jól elkülönített blokkokban szerepel az $1 + \frac{1}{x^2}$ kifejezés. Az átláthatóság kedvéért vezessünk be egy új változót a helyére, azaz

$$t := 1 + \frac{1}{x^2},$$

így azt kapjuk, hogy

$$I = -\frac{1}{2}\int \sqrt{t}\ln t dt.$$

Az integrál meghatázásához használjuk a Riemann-Stieltjes integrálásra vonatkozó parciális integrálási formulát: $\int f dg = fg - \int g df$. Ekkor:

$$\sqrt{t}dt = \frac{2}{3}d\left(\sqrt{t^3}\right) = \frac{2}{3}d\left(t\sqrt{t}\right).$$

Tehát $f\left(t\right) := \ln t$ és $g\left(t\right) := t\sqrt{t}$. Behelyettesítve a formulába

$$I = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\int \ln t \cdot d\left(t\sqrt{t}\right) = -\frac{1}{3}t\sqrt{t}\cdot\ln t + \frac{1}{3}\int t\sqrt{t}\cdot\frac{1}{t}dt = -\frac{1}{3}t\sqrt{t}\cdot\ln t + \frac{1}{3}\int \sqrt{t}dt =$$
$$= -\frac{1}{3}t\sqrt{t}\cdot\ln t + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}t\sqrt{t} + C = \frac{1}{9}t\sqrt{t}\left(2 - 3\ln t\right) + C =$$
$$= \frac{1}{9}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\left(2 - 3\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\right) + C.$$

5.4. Példa. Határozzuk meg a következő integrál értékét:

$$I = \int \frac{x}{\sqrt{t - x}}dx.$$

Megoldás

Helyettesítésnek $(t - x)$-et szeretnénk kapni, azonban a kifejezés hiányos. Adjunk hozzá és vonjunk ki belőle t-t. Ezután írjuk be $(t - x)$-et a d-jel mögé ügyelve az előjelre: $d\left(t - x\right) = -dx$.

$$I = \int \frac{x + t - t}{\sqrt{t - x}}dx = \int \frac{x + t - t}{\sqrt{t - x}}\left(-d\left(t - x\right)\right) = \int \frac{t - x - t}{\sqrt{t - x}}d\left(t - x\right) =$$
$$= \int \frac{t - x}{\sqrt{t - x}} - \frac{t}{\sqrt{t - x}}d\left(t - x\right) = \int \frac{t - x}{\sqrt{t - x}}d\left(t - x\right) - \int \frac{t}{\sqrt{t - x}}d\left(t - x\right) =$$
$$= \frac{2}{3}\left(t - x\right)^{\frac{3}{2}} - 2t\left(t - x\right)^{\frac{1}{2}} + C.$$

A második átalakítás után két, egyenként különálló $(t - x)$ komponensű kifejezésre bontottuk, amely lehetővé tette, hogy integráljuk a változó helyettesítése nélkül.

5.5. Példa. Adjuk meg a következő integrál értékét:

$$I = \int \frac{x+3}{\sqrt{4x^2+4x-3}} dx.$$

Megoldás

Kiindulásnak egy jól ismert, és gyakran használt trükköt fogunk alkalmazni, a teljes négyzetté alakítást. Ez egy nagyon hatékony módszer, ha nem boldogulunk egy négyzetes kifejezéssel.

A $(2x+1)^2$ alakhoz hiányzik 1, ezért adjuk hozzá és vonjuk is ki belőle. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$I = \int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{4x^2+4x+1-4}} = \int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{(2x+1)^2-4}} = \frac{1}{8}\int \frac{(8x+4+20)\,dx}{\sqrt{(2x+1)^2-4}} =$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{(8x+4)\,dx}{\sqrt{(2x+1)^2-4}} + \frac{1}{8}\int \frac{20dx}{\sqrt{(2x+1)^2-4}}.$$

Ismét alkalmazzuk (5.1)-et:
$F(x) = (2x+1)^2 - 4$, ekkor $\left((2x+1)^2-4\right)' dx = d\left((2x+1)^2-4\right)$, azaz
$2 \cdot 2(2x+1)\,dx = (8x+1)\,dx = d\left((2x+1)^2-4\right)$.
Helyettesítsük be a nevezőbe, ekkor azt kapjuk, hogy

$$I = \frac{1}{8}\int \frac{d\left((2x+1)^2-4\right)}{\sqrt{(2x+1)^2-4}} + \frac{5}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{(2x+1)^2-4}} =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{d\left((2x+1)^2-4\right)}{2\sqrt{(2x+1)^2-4}} + \frac{5}{4}\int \frac{d(2x+1)}{\sqrt{(2x+1)^2-4}}.$$

Az első integrált könnyű meghatározni, mivel $f(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} = \left(\sqrt{t}\right)'$. A második integrál $\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ alakú, ezért alkalmazzuk rá a tanult kiszámítási módszert. A mi esetünkben az integrandus nevezője $\frac{1}{\sqrt{u^2-1}}$ alakú. Így az integrál az $u = \operatorname{ch} t$ helyettesítéssel, vagy az $\int \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} du = \operatorname{arch} u + C = \ln|u+\sqrt{u^2-1}| + C$ alapintegrál felhasználásával kapható meg. Tehát az integrál értéke

$$I = \frac{1}{4}\sqrt{4x^2+4x-3} + \frac{5}{4}\ln|2x+1+\sqrt{4x^2+4x-3}| + C.$$

A következő kettős integrál már szerepelt a Többváltozós módszerek fejezetben 3.3 példájában. Most meghatározzuk a pontos értékét. Az integrál kiszámolásához szükségünk lesz a Riemann-Stieltjes integrálás módszerére.

5.6. Példa. Határozzuk meg a pontos értéke az alábbi integrálnak

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{dxdy}{1-xy}.$$

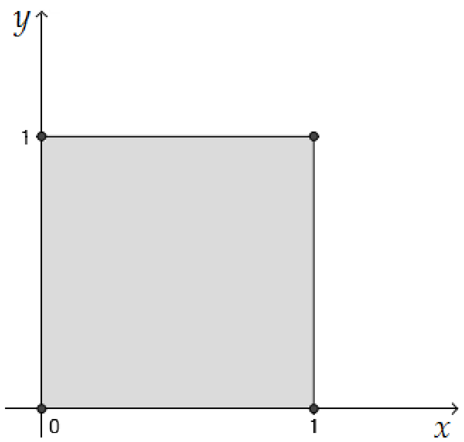
Megoldás

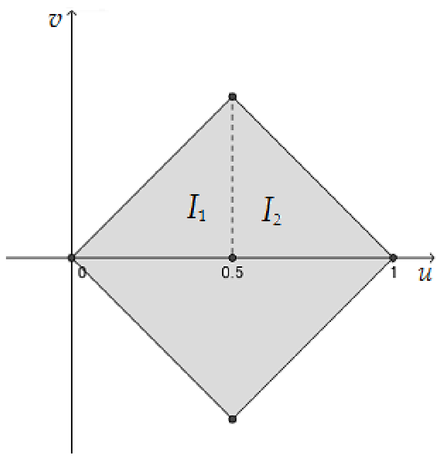
Az integrál kiszámításához transzformáljuk az integrálási tartományt a következőképpen: forgassuk el a koordinátarendszert 45°-kal, majd $\sqrt{2}$-ed részére kicsinyítsük. Ekkor a transzformációk mátrixa

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Az új koordináták

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \Rightarrow u = \frac{y+x}{2}, v = \frac{y-x}{2}.$$





Az így kapott integrálási tartomány egy $\frac{\sqrt{2}}{2}$ oldalú négyzet. Behelyettesítve $x = u - v$-t és $y = u + v$-t azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{1-xy} = \frac{1}{1-(u-v)(u+v)} = \frac{1}{1-(u^2-v^2)} = \frac{1}{1-u^2+v^2}.$$

A transzformáció Jacobi-determinánsa:

$$D = \begin{vmatrix} \partial_u (u-v) & \partial_v (u-v) \\ \partial_u (u+v) & \partial_v (u-v) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 1 = 1 + 1 = 2.$$

Az új integrálási tartomány és az integrálandó függvény az u tengelyre nézve szimmetrikusak, ezért kétszer számítjuk ki az integrált a tartomány felső felében, melyet két részre vágunk, I_1 és I_2-re.

$$I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^u \frac{1}{1-u^2+v^2} 2dvdu = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^u \frac{dv}{1-u^2+v^2} \right) du.$$

Felhasználjuk, hogy $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$

$$I_1 = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \operatorname{arctg} \frac{v}{\sqrt{1-u^2}} \right]_0^u du = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} du.$$

Ismét alkalmazhatjuk az (5.1) összefüggést $F(u) = \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}$-re, ekkor

$$F'(u) = \frac{1}{1+\frac{u^2}{1-u^2}} \cdot \frac{\sqrt{1-u^2} - u\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}(-2u)}{1-u^2} = \frac{1}{1+\frac{u^2}{1-u^2}} \cdot \frac{\sqrt{1-u^2} + \frac{u^2}{\sqrt{1-u^2}}}{1-u^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{1-u^2}\left(1+\frac{u^2}{1-u^2}\right)}{\left(1+\frac{u^2}{1-u^2}\right)(1-u^2)} = \frac{\sqrt{1-u^2}}{1-u^2} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Tehát I_1 Riemann-Stieltjes integrálja

$$I_1 = 2\int_1^{\frac{1}{2}} F(u)F'(u)\,du = \int_1^{\frac{1}{2}} F(u)\,d(F(u)) = 2\left[\frac{F(u)^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \left[F(u)^2\right]_0^{\frac{1}{2}} =$$

$$= F\left(\frac{1}{2}\right)^2 - F(0)^2 = \left(\frac{\pi}{6}\right)^2.$$

Most határozzuk meg I_2 értékét

$$I_2 = \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_0^{1-u} \frac{1}{1-u^2+v^2} 2dvdu = 2\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\int_0^{1-u} \frac{dv}{1-u^2+v^2}\right) du.$$

I_1-hez hasonlóan számoljuk az értékét

$$I_2 = 2\int_{\frac{1}{2}}^1 \left[\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \operatorname{arctg} \frac{v}{\sqrt{1-u^2}} \right]_0^{1-u} du = 2\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \operatorname{arctg} \frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}} du$$

Ismét felhasználjuk az (5.1)-ben kapott összefüggést. Legyen $G(u) = \operatorname{arctg} \frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}$, ekkor

$$G'(u) = \frac{1}{1+\frac{(1-u)^2}{1-u^2}} \cdot \frac{-\sqrt{1-u^2} + (1-u)\cdot\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}}{1-u^2} = \frac{1}{\frac{1-u^2+(1-u)^2}{1-u^2}} \cdot \frac{\frac{-\left(1-u^2\right)+(1-u)u}{\sqrt{1-u^2}}}{1-u^2} =$$

$$= \frac{1-u^2}{2(1-u)} \cdot \frac{-1+u^2+u-u^2}{\sqrt{1-u^2}\,(1-u^2)} = \frac{1}{2(1-u)} \cdot \frac{-(1-u)}{\sqrt{1-u^2}} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}.$$

I_2 Riemann-Stieltjes integrálja

$$I_2 = 2(-2)\int_{\frac{1}{2}}^1 G(u)\left(-\frac{1}{2}\right)G'(u)\,du = -4\int_{\frac{1}{2}}^1 G(u)\,d(G(u)) =$$

$$= -4\left[\frac{G(u)^2}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^1 = -2\left[G(u)^2\right]_{\frac{1}{2}}^1 = -2G(1)^2 + 2G\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2\left(\frac{\pi}{6}\right)^2.$$

Tehát $I = \left(\frac{\pi}{6}\right)^2 + 2\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 = 3\left(\frac{\pi}{6}\right)^2$,

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{dxdy}{1-xy} = 2I = 2\cdot 3\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 = 6\cdot\frac{\pi^2}{36} = \frac{\pi^2}{6}.$$

6. Putnam matematikai versenyfeladatok

A William Lowell Putnam nevét viselő matematika verseny 1938-ban indult. Az Egyesült Államok és Kanada főiskoláin és egyetemein azóta minden évben megrendezésre kerül. A névadó az egykori harvardi diák 1921-ben cikket írt az iskola folyóiratába, amelyben egy főiskolák közötti szellemi vetélkedés előnyeire hívta fel a figyelmet. Halála után özvegye hozta létre a William Lowell Putnam főiskolák közötti emlékalapítványt. Az első versenyt angol nyelvből rendezték, és csak pár évvel később indult matematikából. Az özvegy 1935-ben bekövetkezett halála után az Amerikai Matematikai Társulat vette át a szervezést.

Ebben a fejezetben William Lowell Putnam matematikai verseny elmúlt éveinek feladatsoraiból válogattam össze néhány integrálási feladatot.

6.1. Példa. Az alábbi feladat a 41. Putnam Matematika Versenyen szerepelt 1980-ban.

Adjuk meg $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$ értékkét, ahol

$$f(x) = \frac{1}{\operatorname{tg}^{\sqrt{2}} x}.$$

Megoldás

Alkalmazzuk $x = \frac{\pi}{2} - y$ helyettesítést, amiből azt kapjuk, hogy $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \operatorname{ctg} y = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$, és $dx = -dy$.

Tehát átírva az integrandust a fenti helyettesítésre

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{-dy}{1 + \left(\frac{1}{\operatorname{tg} y}\right)^{\sqrt{2}}} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{-dy}{\frac{(\operatorname{tg} y)^{\sqrt{2}}+1}{(\operatorname{tg} y)^{\sqrt{2}}}} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} -\frac{(\operatorname{tg} y)^{\sqrt{2}}}{(\operatorname{tg} y)^{\sqrt{2}} + 1} dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\operatorname{tg} y)^{\sqrt{2}}}{(\operatorname{tg} y)^{\sqrt{2}} + 1} dy.$$

Az eredeti integrál hozzáadásával a következő eredményhez jutunk

$$I + I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + (\operatorname{tg} x)^{\sqrt{2}}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\operatorname{tg} x)^{\sqrt{2}}}{(\operatorname{tg} x)^{\sqrt{2}} + 1} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + (\operatorname{tg} x)^{\sqrt{2}}} + \frac{(\operatorname{tg} x)^{\sqrt{2}}}{(\operatorname{tg} x)^{\sqrt{2}} + 1} dx =$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + (\operatorname{tg} x)^{\sqrt{2}}}{1 + (\operatorname{tg} x)^{\sqrt{2}}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1dx = \frac{\pi}{2}.$$

Tehát $I = \frac{\pi}{4}$.

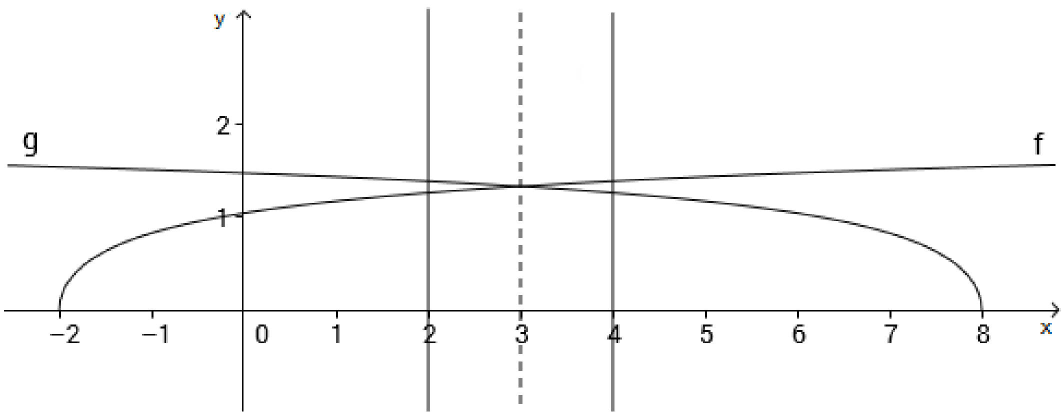
6.2. Példa. Az alábbi feladat az 1987-ben 47. alkalommal megrendezett matematika versenyen szerepelt.

Határozzuk meg a következő integrál értékét!

$$I=\int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)}-\sqrt{\ln(x+3)}}dx.$$

Megoldás

Vizsgáljuk meg a gyökjel alatti kifejezést. Legyen $f(x)=\sqrt{\ln(9-x)}$ és $g(x)=\sqrt{\ln(x+3)}$. Ha $x=3$ a helyettesítési érték, akkor $9-x=6$ és $x+3=6$, vagyis $f(3)=g(3)$. Továbbá 3 az integrálhatárok számtani közepe is. Ez alapján úgy tűnik, hogy az integráljel alatti kifejezés szimmetrikus 3-ra.



A fenti megállapítások már sugallják, hogy $u+3=9-x$ legyen a helyettesítés. Ekkor $x=6-u$, $dx=-du$ és a határok $u=6-2=4$, $u=6-4=2$.

$$I=-\int_4^2 \frac{\sqrt{\ln(3+u)}}{\sqrt{\ln(3+u)}-\sqrt{\ln(9-u)}}du=\int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(3+u)}}{\sqrt{\ln(3+u)}-\sqrt{\ln(9-u)}}du.$$

Adjuk össze az így kapott I-t az eredetivel

$$2I=\int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)}-\sqrt{\ln(x+3)}}dx+\int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(3+x)}}{\sqrt{\ln(3+x)}-\sqrt{\ln(9-x)}}dx=$$

$$=\int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)}-\sqrt{\ln(x+3)}}dx-\int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(3+x)}}{\sqrt{\ln(9-x)}-\sqrt{\ln(x+3)}}dx=$$

$$=\int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(9-x)}-\sqrt{\ln(x+3)}}{\sqrt{\ln(9-x)}-\sqrt{\ln(x+3)}}dx=\int_2^4 1dx=2.$$

Tehát

$$2I=2\Rightarrow I=1.$$

6.3. Példa. A következő feladat az 1997-es 58. Putnam matematika versenyen szeperelt $A3$ sorszámmal.

Határozzuk meg az integrál értékét

$$\int_0^\infty \left(x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{2\cdot 4} - \frac{x^7}{2\cdot 4\cdot 6} + \cdots\right)\left(1 + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2\cdot 4^2} + \frac{x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2} + \cdots\right) dx.$$

Megoldás

Jelöljük a szorzótényezőket $f(x)$-szel és $g(x)$-szel

$$f(x) = x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{2\cdot 4} - \frac{x^7}{2\cdot 4\cdot 6} + \cdots$$
$$g(x) = 1 + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2\cdot 4^2} + \frac{x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2} + \cdots$$

Így felírva az integrált már nem is tűnik olyan ijesztőnek: $\int_0^\infty f(x)\, g(x)\, dx$. Emeljünk ki x-et $f(x)$-ben

$$f(x) = x\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2\cdot 4} - \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot} + \cdots\right) = x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n n!} = xe^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Ezt az exponenciális sor általános alakjából kaptuk meg

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{n!} = e^q. \tag{6.1}$$

Ebben az esetben $q = -\frac{x^2}{2}$, azaz $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$.

Most írjuk át az integrálban $f(x)$-et a fentiek alapján

$$\int_0^\infty xe^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \left(1 + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2\cdot 4^2} + \frac{x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2} + \cdots\right) dx.$$

Szorozzunk be $xe^{-\frac{x^2}{2}}$-vel

$$\int_0^\infty xe^{-\frac{x^2}{2}} + \frac{x^3 e^{-\frac{x^2}{2}}}{2^2} + \frac{x^5 e^{-\frac{x^2}{2}}}{2^2\cdot 4^2} + \frac{x^7 e^{-\frac{x^2}{2}}}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2} + \cdots dx$$

Integráljuk az összeget tagonként

$$\int_0^\infty xe^{-\frac{x^2}{2}} dx + \int_0^\infty \frac{x^3 e^{-\frac{x^2}{2}}}{2^2} dx + \int_0^\infty \frac{x^5 e^{-\frac{x^2}{2}}}{2^2\cdot 4^2} dx + \int_0^\infty \frac{x^7 e^{-\frac{x^2}{2}}}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2} dx + \cdots$$

Most helyettesítsünk be $u = \frac{x^2}{2}$-et, ekkor $x = \sqrt{2u}$ és $\frac{dx}{du} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{\sqrt{u}}$

$$\int_0^\infty \sqrt{2u}e^{-u}\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{\sqrt{u}}du + \int_0^\infty \frac{\left(\sqrt{2u}\right)^3 e^{-u}}{2^2}\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{\sqrt{u}}du + \int_0^\infty \frac{\left(\sqrt{2u}\right)^5 e^{-u}}{2^2\cdot 4^2}\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{\sqrt{u}}du+$$
$$+\int_0^\infty \frac{\left(\sqrt{2u}\right)^7 e^{-u}}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{\sqrt{u}}du + \cdots$$

Egyszerűsítés után felismerhetjük a 2.7 állításban szerepelt Euler integrál formulát. Ezt alkalmazva az integrál már egyszerűen meghatározható.

$$\int_0^\infty e^{-u}du + \frac{1}{2^2}\int_0^\infty ue^{-u}du + \frac{1}{2^2\cdot 4^2}\int_0^\infty u^2e^{-u}du + \frac{1}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}\int_0^\infty u^3e^{-u}du + \cdots =$$
$$= 1 + \frac{1}{2^2}\cdot 2\cdot 1! + \frac{1}{2^2\cdot 4^2}\cdot 2^2\cdot 2! + \frac{1}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}\cdot 2^3\cdot 3! + \cdots = \sum_{n=0}^\infty \frac{2^n\cdot n!}{2^{2n}\left(n!\right)^2} = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{2^n n!}$$

Ismét egy exponenciális sorhoz jutottunk, ez esetben $q = \frac{1}{2}$, tehát az összeg értéke

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{2^n n!} = \sqrt{e}.$$

6.4. Példa. A 2005-ben megrendezett 66. William Lowell Putnam matematika versenyen A5-ös feladataként szerepelt az alábbi integrál:

$$I = \int_0^1 \frac{\ln\left(x+1\right)}{x^2+1}dx.$$

A feladat megoldására három példát fogunk látni.

I. Megoldás

Végezzük el a következő behelyettesítést: $x := \operatorname{tg}\theta$, ekkor $\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$. Ekkor az integrandus az alábbi módon változik meg:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln\left(\operatorname{tg}\theta+1\right)}{\operatorname{tg}^2\theta+1}\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln\left(\operatorname{tg}\theta+1\right)}{\left(\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+1\right)\cos^2\theta}d\theta =$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln\left(\operatorname{tg}\theta+1\right)}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+1\right)d\theta =$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\cos\theta}\right)d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\sin\theta+\cos x\right) - \ln\left(\cos\theta\right)d\theta.$$

Most hozzuk kicsit barátságosabb alakra $\sin\theta+\cos\theta$-t, hogy alkalmazni lehessen a logaritmus azonosságait. Azaz állítsunk elő az összegből egy szorzatot.

Az átalakításban felhasználjuk az ismert trigonometrikus azonosságokat. Ha $\sin\theta+\cos\theta$-et négyzetre emeljük, akkor azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}(\sin\theta+\cos\theta)^2 &= \sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2 x = 1+\sin(2\theta) = 1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right) = \\ &= 1+\cos\left(2\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\right) = 1+\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right) = \\ &= 1+\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)-\left(1-\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right).\end{aligned}$$

Azaz
$$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right).$$

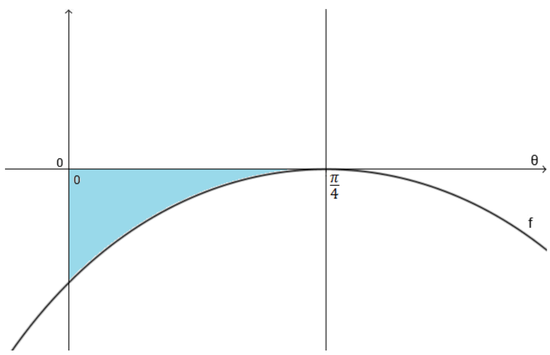
A kapott eredményt írjuk vissza a logartimusba. Most már alkalmazhatjuk a logaritmus azonosságait:

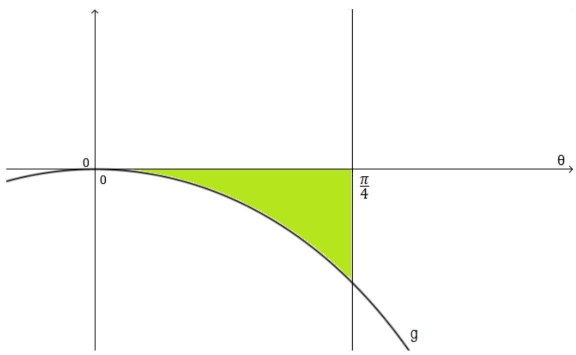
$$\begin{aligned}\ln(\sin\theta+\cos\theta) &= \ln\left(\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\right) = \ln\left(\sqrt{2}\right)+\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\right) = \\ &= \frac{1}{2}\ln 2+\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\right).\end{aligned}$$

Az integrálunk a következőképpen néz ki az átalakítások után:

$$\begin{aligned}I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\ln 2+\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\right)-\ln(\cos\theta)d\theta = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\ln 2 d\theta+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\right)d\theta-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cos\theta)d\theta.\end{aligned}$$

$f(\theta)=\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\right)$ és $g(\theta)=\ln(\cos\theta)$ $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ intervallumon vett integrál-jai egyenlők, ezért a két integrál kiejti egymást.





Végül azt kapjuk, hogy

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}\ln 2 d\theta=\frac{\pi}{8}\ln 2.$$

II. Megoldás

Ebben a megoldásban is helyettesítést alkalmazunk: $x := \frac{1-u}{1+u}$, ekkor a határok megcserélődnek és $\frac{dx}{du} = -\frac{2}{(1+u)^2}$.

$$I = \int_1^0 \frac{\ln\left(\frac{1-u}{1+u}+1\right)}{\left(\frac{1-u}{1+u}\right)^2+1}\left(-\frac{2du}{(1+u)^2}\right) = -\int_1^0 \frac{\ln\left(\frac{1-u+1+u}{1+u}\right)}{\frac{(1-u)^2+(1+u)^2}{(1+u)^2}}\frac{2du}{(1+u)^2} =$$

$$= \int_0^1 \frac{\ln\left(\frac{2}{1+u}\right)}{2\left(1+u^2\right)}2du = \int_0^1 \frac{\ln 2 - \ln(1+u)}{1+u^2}du = \int_0^1 \frac{\ln 2}{1+u^2}du - \int_0^1 \frac{\ln(u+1)}{u^2+1}du.$$

Vegyük észre, hogy a különbség második tagja az integrál definíciója, azaz egyenlő I-vel, tehát

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{\ln 2}{1+u^2}du - I \\ 2I &= \ln 2\int_0^1 \frac{1}{1+u^2}du = \ln 2\Big[\operatorname{arctg} u\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4}\ln 2 \\ I &= \frac{\pi}{8}\ln 2. \end{aligned}$$

A most bemutatott megoldás az integrál meghatározására Roger Nelsen matematikustól származik.

III. Megoldás

Ez a levezetés Steven Sivek nevéhez köthető, aki a Princeton Egyetem matematika tanszékének oktatója. A megoldás során felhasználjuk Feynman módszerét, amely már szerepelt 2.7 állítás bizonyításában, továbbá az ehhez tartozó (2.6) formulát.

Definiáljuk a következő függvényt:

$$f(t) = \int_0^1 \frac{\ln(xt+1)}{x^2+1}dx.$$

Ekkor az eredeti integrálunk egyenlő az f függvény $t=1$ helyen felvett értékével, azaz $f(1) = I$, valamint

$$f(0) = \int_0^1 \frac{\ln 1}{x^2+1}dx = 0.$$

Alkalmazzuk (2.6)-ot $f(t)$-re:

$$f'(t) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\ln(xt+1)}{x^2+1}\right)dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\frac{x}{xt+1}dx = \int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)(xt+1)}dx.$$

Bontsuk fel parciális törtekre az integrálban lévő kifejezést. Figyeljünk oda, hogy az integrandus nevezőjének nem minden gyöke valós. Azaz a nevező nem alakítható át elsőfokú tényezők szorzatává, hiszen az x^2+1 tényező diszkriminánsa $D<0$. Tehát az integrandus parciális tört alakja a következő:

$$\frac{x}{\left(x^2+1\right)(xt+1)} \equiv \frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x^2+1}=\frac{(Ax+B)(xt+1)+C\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)(xt+1)}= \\ =\frac{(At+C)x^2+(A+Bt)x+B+C}{\left(x^2+1\right)(xt+1)}.$$

A számláló összehasonlításával

$$x \equiv (At+C)x^2+(A+Bt)x+B+C.$$

Az együtthatók egyeztetéséből adódó egyenletrendszer:

$$At+C=0$$
$$A+Bt=1$$
$$B+C=0$$

$$A=\frac{1}{t^2+1}; B=\frac{t}{t^2+1}; C=-\frac{t}{t^2+1}.$$

Tehát

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x}{\left(x^2+1\right)(xt+1)}dx &= \int_0^1 \frac{\frac{x}{t^2+1}+\frac{t}{t^2+1}}{x^2+1}-\frac{\frac{t}{t^2+1}}{xt+1}dx= \\
&= \int_0^1 \frac{x+t}{t^2+1}\frac{1}{x^2+1}dx-\frac{1}{t^2+1}\int_0^1 \frac{t}{xt+1}dx= \\
&= \frac{1}{t^2+1}\int_0^1 \frac{x+t}{x^2+1}dx-\frac{1}{t^2+1}\Big[\ln(xt+1)\Big]_0^1= \\
&= \frac{1}{t^2+1}\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx+\frac{1}{t^2+1}\int_0^1 \frac{t}{x^2+1}dx-\frac{1}{t^2+1}\ln(t+1)= \\
&= \frac{1}{t^2+1}\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx+\frac{t}{t^2+1}\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx-\frac{\ln(t+1)}{t^2+1}= \\
&= \frac{1}{2\left(t^2+1\right)}\Big[\ln\left(x^2+1\right)\Big]_0^1+\frac{t}{t^2+1}\Big[\operatorname{arctg} x\Big]_0^1-\frac{\ln(t+1)}{t^2+1}= \\
&= \frac{\ln 2}{2\left(t^2+1\right)}+\frac{t}{t^2+1}\frac{\pi}{4}-\frac{\ln(t+1)}{t^2+1}.
\end{aligned}$$

Amiből azt kapjuk, hogy

$$f'(t)=\frac{\ln 2}{2\left(t^2+1\right)}+\frac{t}{t^2+1}\frac{\pi}{4}-\frac{\ln(t+1)}{t^2+1}. \tag{6.2}$$

Nekünk az I-re van szükségünk, ami egyenlő $f(1)$-gyel, ezért integráljuk (6.2)-t a $[0,1]$ intervallumon

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \left(\frac{\ln 2}{2(t^2+1)} + \frac{t}{t^2+1}\frac{\pi}{4} - \frac{\ln(t+1)}{t^2+1} \right) dt = \\
&= \frac{\ln 2}{2} \int_0^1 \frac{1}{t^2+1} dt + \frac{\pi}{8} \int_0^1 \frac{2t}{t^2+1} dt - \int_0^1 \frac{\ln(t+1)}{t^2+1} dt = \\
&= \frac{\ln 2}{2} \Big[\operatorname{arctg} t \Big]_0^1 + \frac{\pi}{8} \Big[\ln\left(t^2+1\right) \Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{\ln(t+1)}{t^2+1} dt = \\
&= \frac{\ln 2}{2}\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} \ln 2 - I = 2\frac{\pi \ln 2}{8} - I.
\end{aligned}$$

Rendezve az egyenletet megkapjuk I értékét:

$$\begin{aligned}
2I &= 2\frac{\pi \ln 2}{8} \\
I &= \frac{\pi}{8} \ln 2.
\end{aligned}$$

7. Összefoglalás

Szakdolgozatomban igyekeztem különböző integrálási módszereket bemutatni. Azonban az eszköztár szinte kimeríthetetlen, az integrálok meghatározására nem létezik egy egységes módszer. Mint az az előzőekből kiderült sokszor szükség van egy egyedi, kreatív ötletre, hogy eljussunk a megoldáshoz, sőt gyakran néhány lépéssel előre is kell gondolkodnunk a megoldás menetében. Ehhez pedig úgy szerezhetünk rutint, ha minél több "trükkös" integrálási feladatot oldunk meg. Bízom abban, hogy a fentebb leírtak hasznosnak bizonyulnak majd mások számára is, és fel tudják használni integrálási problémáik során.

Hivatkozások

[1] Charles Martin, *Methods for Evaluating Difficult Integrals*, April 2010
http://math.ucsb.edu/~cmart07/Evaluating%20Integrals.pdf

[2] Keith Conrad, *Differentiating Under The Integral Sign*, 2-3.
http://www.math.uconn.edu/~kconrad/blurbs/analysis/diffunderint.pdf

[3] Martin Aigner - Günter M. Ziegler, *Bizonyítások a Könyvből*, Typotex, Budapest (2004), 37-39.

[4] Valentin Fadeev, *Changing the way we change the variables. Refresher notes in real analysis*
http://folk.ntnu.no/oistes/Diverse/changingvariables.pdf

[5] Manjul Bhargava, Kiran Kedlay és Lenny Ng, *Solutions to the 58th William Lowell Putnam Mathematical Competition*, December 1997, 1.
http://kskedlaya.org/putnam-archive/1997s.pdf

[6] Manjul Bhargava, Kiran Kedlay és Lenny Ng, *Solutions to the 66th William Lowell Putnam Mathematical Competition*, December 2005, 2-3.
http://www.math.hawaii.edu/~dale/putnam/2005.pdf

[7] http://mks.mff.cuni.cz/kalva/putnam/psoln/psol877.html

[8] John Coffey, *Maths Puzzles & Problems*, 2010
http://www.mathstudio.co.uk/Q13%20Int%20sqrt%20ln%209-x.pdf

[9] Laczkovich Miklós - T. Sós Vera, *Analízis II.*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2007

[10] *KöMaL* 1998/április, 203-205.
http://db.komal.hu/KomalHU/cikk.phtml?id=199931

[11] http://en.wikipedia.org/wiki/Fubini%27s_theorem#Tonelli.27s_theorem_for_non-negative_functions

[12] Wikipédia számos szószedete:
http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page