Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Térbeli geometriai transzformációk analitikus leírása

Szakdolgozat

Készítette:
Fodor Edina
Matematika BSc,
Tanári szakirány

Témavezető:
Verhóczki László
Egyetemi docens,
Geometriai Tanszék

Budapest
2015

Tartalomjegyzék

Előszó

Szakdolgozatom témájának a térbeli egybevágósági és hasonlósági transzformációk tárgyalását választottam.

Az egyetemen csak a síkbeli egybevágóságokat és hasonlóságokat osztályoztuk a tanári szakirányos geometria tanulmányaink során. Megtudtuk, hogy ha egy síkbeli egybevágóság irányítástartó, akkor az vagy eltolás, vagy elforgatás. Ha pedig egy síkbeli egybevágóság irányításváltó, akkor az vagy tengelyes tükrözés, vagy csúsztatva tükrözés. Tanultunk arról is, hogy ha egy hasonlóság nem egybevágóság, akkor az vagy forgatva nyújtás, vagy pedig tükrözve nyújtás. Érdekelt, hogy amennyiben a térbeli transzformációkat vesszük, akkor hogyan lehet elvégezni azok osztályozását. Szakdolgozatom fő célja tehát a térbeli egybevágóságok és hasonlóságok osztályozása.

Vizsgálataimhoz elsősorban analitikus eszközöket fogok alkalmazni. Fel fogom használni azt is, hogy egy egybevágósági – vagy hasonlósági – transzformáció mindig meghatároz egy lineáris izomorfizmust a térbeli szabad vektorok terén. Ezt nevezzük az egybevágóság által indukált lineáris leképezésnek.

Amennyiben veszünk a térben egy derékszögű koordináta-rendszert, akkor minden egybevágóság illetve hasonlóság leírható egy mátrixegyenlettel. Ezt a mátrixegyenletet az indukált lineáris leképezés 3×3-as mátrixa és a kezdőpont képének koordináta-hármasa határozzák meg.

Szakdolgozatom első két fejezete előkészítő jellegű. Az első fejezetben áttekintjük a térbeli egybevágóságok alapvető tulajdonságait valamint definiáljuk típusait. Megnézzük, hogy két síkra tükrözés szorzata milyen egybevágóságot eredményez. A második fejezetben az egybevágóságok analitikus leírását tárgyaljuk. Megvizsgáljuk, hogy az egybevágóságok különböző típusainál hogyan lehet megadni az indukált leképezések mátrixát.

A harmadik fejezetben kerül sor a térbeli egybevágóságok osztályozására. Igazolni fogjuk, hogy ha egy egybevágóság irányítástartó, akkor az vagy egy eltolás, vagy egy elforgatás, vagy pedig egy csavarmozgás. Ha egy egybevágóság irányításváltó, akkor az vagy egy síkra tükrözés, vagy egy csúsztatva tükrözés, vagy pedig egy forgatva tükrözés. Az osztályozási tétel bizonyításában ki fogjuk használni, hogy a szabad vektorok terén mindig meg lehet adni egy olyan ortonormált bázist, amelyre nézve az egybevágóság indukált lineáris leképezésének mátrixa speciális alakot vesz fel.

A negyedik fejezetben áttérünk a térbeli hasonlóságok analitikus tárgyalására. Az alapfogalmak és alaptulajdonságok bevezetése után belátjuk, hogy ha egy hasonlóság nem egybevágóság, akkor annak egyértelműen létezik fixpontja. Ezt is felhasználjuk annak bizonyítására, hogy ha egy térbeli hasonlóság nem egybevágóság és nem középpontos hasonlóság, akkor az egy forgatva nyújtás. A térbeli forgatva nyújtáson egy olyan tengely körüli elforgatás és egy olyan középpontos hasonlóság szorzatát értjük, ahol a centrum rajta van a tengelyen.

1. fejezet

Térbeli egybevágóságok alapvető tulajdonságai

1.1. Jelölések

Az alábbiakban felsorolom, hogy szakdolgozat során milyen jelöléseket fogunk használni.

Az euklideszi tér pontjainak halmazát X jelöli. A pontokat az ábécé nagy betűivel (például A, P), az egyeneseket az ábécé kis betűivel (például e, f) jelöljük. A síkokat a görög ábécé betűivel jelöljük majd, például σ, μ.

Az A és B ponton átmenő egyenest $\langle A, B\rangle$ jelöli. A két pont távolságát $d(A, B)$ vagy AB fogja jelölni. Az A kezdőpontú és B végpontú irányított szakaszra a szokásos $\overrightarrow{AB}$ jelölést alkalmazzuk. Emellett $\overrightarrow{AB}$ az irányított szakasszal reprezentált szabad vektort is jelöli.

A térbeli szabad vektorokat az irányított szakaszok ekvivalenciaosztályaiként lehet értelmezni. A térbeli szabad vektorok az összeadás és a valós számmal való szorzás műveletére nézve egy vektorteret alkotnak. Ezt a továbbiakban $\mathcal{V}$ jelöli. A vektorok jelölésére az ábécé félkövér kisbetűit használjuk, például $\mathbf{b},\ \mathbf{v}$. Egy $\mathbf{b}$ vektor hosszát $|\mathbf{b}|$ jelöli.

A térbeli szabad vektoroknál be lehet vezetni a skaláris szorzás és a vektoriális szorzás fogalmát is. Legyenek adottak az $\mathbf{u},\ \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ vektorok. A két vektor skaláris szorzatára $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ helyett, az $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$ jelölést alkalmazzuk majd a szakdolgozatban. Az $\mathbf{u},\ \mathbf{v}$ vektorok vektoriális szorzatára a szokásos $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ jelölést használjuk. Amennyiben veszünk, egy harmadik $\mathbf{w}$ vektort is, akkor az $\langle \mathbf{u} \times \mathbf{v},\ \mathbf{w}\rangle$ számot mondjuk az $\mathbf{u},\ \mathbf{v},\ \mathbf{w}$ vektorok vegyes szorzatának.

1.1.1. Megjegyzés. A vektoriális szorzat definíciójából következik, hogy egy $\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c}$ lineárisan független vektorhármas *jobbrendszert* képez akkor és csak akkor, ha vegyes szorzatukra $\langle \mathbf{a} \times \mathbf{b},\ \mathbf{c}\rangle > 0$ teljesül. Hasonlóan a vektorok egy *balrendszert* képeznek, ha a vegyes szorzatuk negatív.

Az analitikus tárgyalás során derékszögű koordináta-rendszereket fogunk majd használni. A térben egy ilyen Descartes-féle koordináta-rendszert kapunk, ha veszünk egy O kezdőpontot és három páronként egymásra merőleges egységvektort. Ezek az egységvektorok, melyek a szabad vektorok $\mathcal{V}$ terének egy ortonormált bázisát adják, legyenek $\mathbf{i},\ \mathbf{j},\ \mathbf{k}$. Az O pontot mondjuk a koordináta-rendszer *origójának*, az $\mathbf{i},\ \mathbf{j},\ \mathbf{k}$ vektorokat pedig a koordináta-rendszer *élvektorainak* (vagy *alapvektorainak*). A továbbiakban feltesszük, hogy $\mathbf{i},\ \mathbf{j},\ \mathbf{k}$ vektorhármas egy jobbrendszert képez.

Vegyünk a térben egy P pontot. Ennek az O kezdőpontra vonatkozó $\overrightarrow{OP}$ helyvektora egyértelműen áll elő az $\mathbf{i},\ \mathbf{j},\ \mathbf{k}$ alapvektorok lineáris kombinációjaként az $\overrightarrow{OP} = x_P\mathbf{i} + y_P\mathbf{j} + z_P\mathbf{k}$ alakban. A lineáris kombinációban szereplő $x_P,\ y_P,\ z_P$ együtthatókat mondjuk a P pont koordinátáinak az adott koordináta-rendszerben. Eszerint a P pontnak megfelel az (x_P, y_P, z_P) számhármas, melyet a P *koordináta-hármasának* mondunk.

1.1.2. Megjegyzés. Tekintsük azokat az $E_1,\ E_2,\ E_3$ térbeli pontokat, amelyekre az $\overrightarrow{OE_1} = \mathbf{i}$, $\overrightarrow{OE_2} = \mathbf{j}$, és $\overrightarrow{OE_3} = \mathbf{k}$ összefüggések teljesülnek. Ekkor az $\langle O,\ E_1\rangle$, $\langle O,\ E_2\rangle$ és $\langle O,\ E_3\rangle$ egyeneseket a koordináta-rendszer *tengelyeinek* mondjuk, és rendre x-, y- és z-tengelynek hívjuk.

1.2. Az egybevágóságokra vonatkozó alapfogalmak

Ebben a szakaszban áttekintjük az egybevágóságokkal kapcsolatos alapfogalmakat, továbbá felsoroljuk az egybevágóságok alapvető tulajdonságait.

1.2.1. Definíció. *Térbeli egybevágósági transzformációnak* (röviden *egybevágóságnak*) olyan $\varphi\colon X \to X$ bijektív leképezést nevezünk, amelyre tetszőleges $A, B \in X$ pontok esetén teljesül a $d(A,B) = d(\varphi(A),\ \varphi(B))$ összefüggés.

1.2.2. Megjegyzés. A definícióból következnek az alábbi állítások:

(1) Legyenek φ_1 és φ_2 egybevágósági transzformációk. Ekkor ezek szorzata, a $\varphi_2 \circ \varphi_1$ kompozíció is egy térbeli egybevágóságot ad.

(2) Legyen $\varphi\colon X \to X$ egy egybevágóság. Mivel φ egy bijektív leképezés, φ-nek létezik inverze, melyet φ^{-1} jelöl. Ekkor φ^{-1} szintén egy egybevágósági transzformáció.

1.2.3. Definíció. Legyenek adottak az $\mathcal{A},\ \mathcal{B}$ térbeli alakzatok. *Egybevágónak* nevezzük ezeket, ha létezik olyan φ egybevágóság, amely $\mathcal{A}$-t $\mathcal{B}$-be képezi, azaz $\varphi(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$.

1.2.4. Megjegyzés. Az $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ egybevágó alakzatokat $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$-vel jelöljük.

1.2.5. Megjegyzés. Az egybevágóság ekvivalenciareláció a térbeli alakzatok halmazán, vagyis teljesülnek a következő feltételek az $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ és $\mathcal{C}$ térbeli alakzatokra:

(1) Reflexív: $\mathcal{A} \simeq \mathcal{A}$

(2) Szimmetrikus: Ha $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$, akkor $\mathcal{B} \simeq \mathcal{A}$.

(3) Tranzitív: Ha $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$ és $\mathcal{B} \simeq \mathcal{C}$, akkor $\mathcal{A} \simeq \mathcal{C}$ is teljesül.

Az alábbi tétel egyszerűen igazolható:

1.2.6. Tétel. *Minden $\varphi \colon X \to X$ egybevágósági transzformációra teljesülnek a következő állítások:*

(1) Egyenest egyenesbe, szakaszt szakaszba, síkot síkba képez.

(2) Párhuzamos egyenesek φ szerinti képei szintén párhuzamos egyenesek.

(3) Parallelogrammát parallelogrammába képez.

(4) Ha az $A, B, C, D \in X$ pontokra fennáll az $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ összefüggés, akkor az $A' = \varphi(A)$, $B' = \varphi(B)$, $C' = \varphi(C)$ és $D' = \varphi(D)$ képpontokra $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}$ teljesül.

1.3. Egybevágóságok típusai

1.3.1. Definíció. Legyen adott egy $\mathbf{v}$ térbeli vektor. A $\mathbf{v}$ vektorral történő *eltoláson* azt az $\varepsilon_{\mathbf{v}} \colon X \to X$ bijektív leképezést értjük, ahol tetszőleges $P \in X$ pontra fennáll: $\overrightarrow{P\varepsilon_{\mathbf{v}}(P)} = \mathbf{v}$.

1.3.2. Definíció. Legyen adott a térben egy t egyenes. Ezen jelöljünk ki egy irányítást egy olyan $\mathbf{v}$ ($\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$) vektorral, amely párhuzamos t-vel. Vegyünk egy $\alpha \in (-\pi, \pi)$, $\alpha \neq 0$ előjeles szöget. Az irányított *t egyenes körüli α előjeles szöggel vett elforgatáson* azt a $\varrho \colon X \to X$ leképezést értjük, amely t pontjait fixen hagyja és tetszőleges P ($P \notin t$) pont esetén a $P' = \varrho(P)$ képpontra fennállnak a következők:

(1) P' rajta van a P-n átmenő t-re merőleges μ síkon.

(2) A $C = \mu \cap t$ metszéspontra fennáll $CP = CP'$.

(3) $PCP'\sphericalangle$ szögre $PCP'\sphericalangle = |\alpha|$ teljesül.

  a) Ha $\alpha > 0$, akkor $\mathbf{v}$, $\overrightarrow{CP}$, $\overrightarrow{CP'}$ vektorok jobbrendszert alkotnak.

  b) $\alpha < 0$ esetén $\mathbf{v}$, $\overrightarrow{CP}$, $\overrightarrow{CP'}$ vektorok balrendszert képeznek.

A fenti definícióban szereplő t egyenest az elforgatás *tengelyének* nevezzük.

1.3.3. Megjegyzés. Az $\alpha = 0$ szögű elforgatáson a tér *identikus leképezését* értjük, amely az összes pontot helybenhagyja. Értelmezhető a π szögű tengely körüli elforgatás is. Ezen a t egyenesre történő *tengelyes tükrözést* értjük.

1.3.4. Definíció. A tér σ *síkjára való tükrözésen* egy olyan $\tau\colon X \to X$ leképezést értünk, amely helyben hagyja σ pontjait, és egy $P \notin \sigma$ pont $\tau(P) = P'$ tükörképére teljesülnek az alábbiak:

(1) A $\langle P, P' \rangle$ egyenes merőleges a σ síkra.

(2) A PP' szakaszt a σ sík a felezőpontjában metszi.

Az alábbi állítás azt mondja ki, hogy milyen egybevágóságot kapunk két síkra tükrözés szorzataként.

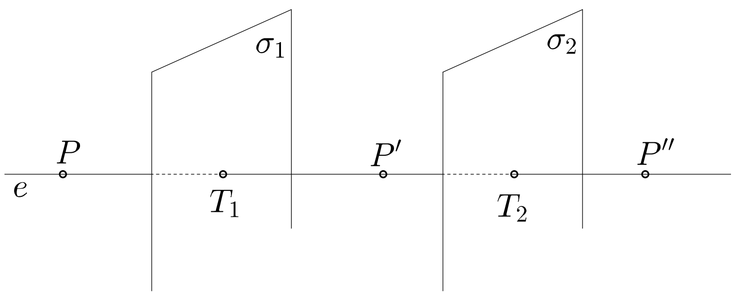
1.3.5. Állítás. *Legyen $\sigma_1 \neq \sigma_2$ két adott sík. A síkokra tükrözéseket jelölje rendre τ_1 és τ_2. Ezek szorzatára igazak a következő kijelentések:*

(1) Ha $\sigma_1 \parallel \sigma_2$, akkor $\tau_2 \circ \tau_1$ kompozíció egy eltolás.

(2) Ha $\sigma_1 \nparallel \sigma_2$, akkor $\tau_2 \circ \tau_1$ a $t = \sigma_1 \cap \sigma_2$ egyenes körüli elforgatás.

Bizonyítás.

(1) Vegyünk a térben egy P pontot, és azt a σ_1 és σ_2 síkokra merőleges e egyenest, amely átmegy P-n.



1.3.1. ábra. Két párhuzamos síkra való tükrözés szorzata

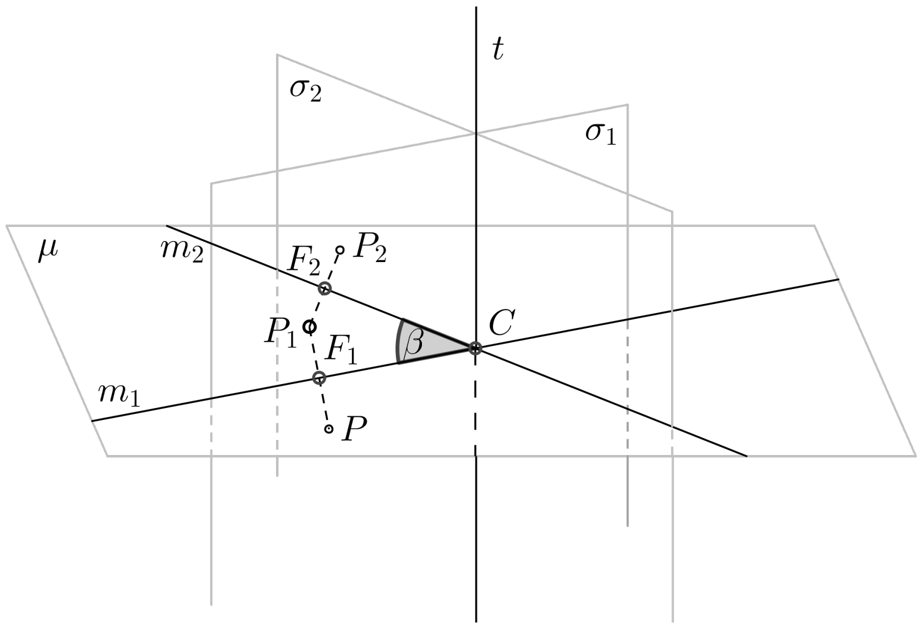
Legyen $T_1 = e \cap \sigma_1$ és $T_2 = e \cap \sigma_2$. Tükrözzük a P pontot a σ_1 síkra, a képpontot nevezzük P'-nek, azaz $\tau_1(P) = P'$. Majd tükrözzük P'-t a σ_2 síkra, vagyis a P'' képpontra fennáll a $\tau_2(P') = P''$ egyenlőség.

A síkra tükrözés definíciójából adódik, hogy $\overrightarrow{PP'} = 2\,\overrightarrow{T_1P'}$ és $\overrightarrow{P'P''} = 2\,\overrightarrow{P'T_2}$. Írjuk fel a $\overrightarrow{PP''}$ vektort ezen két vektor összegeként:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PP''} &= \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'P''}\\ &= 2\,\overrightarrow{T_1P'} + 2\,\overrightarrow{P'T_2} = 2\,(\overrightarrow{T_1P'} + \overrightarrow{P'T_2})\\ &= 2\,\overrightarrow{T_1T_2}\end{aligned}$$

Tehát $\tau_2 \circ \tau_1(P) = P''$ éppen a P pont $2\,\overrightarrow{T_1T_2}$ vektorral vett eltoltja. Eszerint ha a két tükörsík párhuzamos, akkor a $\tau_2 \circ \tau_1$ szorzat egy *eltolás*.

(2) Mivel $\sigma_1 \nparallel \sigma_2$, így $\sigma_1 \cap \sigma_2 \neq \emptyset$. Jelölje a két sík metszésvonalát t. Legyen $P \notin t$ a tér egy pontja, és a rajta áthaladó, t-re merőleges sík pedig μ. A μ sík messe a σ_1 és σ_2 síkokat az m_1 és m_2 egyenesekben.



1.3.2. ábra. Két metsző síkra tükrözés szorzata

Tükrözzük P-t a σ_1-re, ami azonos P-nek az m_1-re vonatkozó μ síkbeli tükörképével. Legyen a képpont P_1, majd ezt tükrözve a σ_2 síkra megkapjuk a P_2 tükörképpontot. Tehát $\tau_1(P) = P_1$ és $\tau_2(P_1) = P_2$. A PP_1 és P_1P_2 szakaszok felezőpontjai legyenek az $F_1,\ F_2$ pontok, amelyek a síkra tükrözés definíciójából adódóan az m_1 és m_2 egyenesekre esnek.

Jelöljük C-vel a $t \cap \mu$ metszéspontot, és β-val az m_1 és m_2 egyenesek hajlásszögét. Ekkor a $PCP_2\sphericalangle$ szög a következőképpen számolható ki:

$$\begin{aligned} PCP_2\sphericalangle &= PCP_1\sphericalangle + P_1CP_2\sphericalangle = 2\ F_1CP_1\sphericalangle + 2\ P_1CF_2\sphericalangle \\ &= 2(F_1CP_1\sphericalangle + P_1CF_2\sphericalangle) = 2\ F_1CF_2\sphericalangle = 2\beta \end{aligned}$$

Tehát a $PCP_2\sphericalangle$ szög nem függ P megválasztásától. Így a $P_2 = \tau_2 \circ \tau_1(P)$ pont a P-nek a t egyenes körüli 2β szögű elforgatottja, ahol β a σ_1 és σ_2 síkok hajlásszöge.

Ha a két tükörsík nem párhuzamos, akkor a $\tau_2 \circ \tau_1$ kompozíció egy a metszésvonaluk körüli *elforgatás*.

Ezzel beláttuk az állítást. $\square$

1.3.6. Következmény. *Bármely tengely körüli α szögű elforgatás előáll két síkra tükrözés szorzataként, ahol a két tükörsík hajlásszöge $\beta = \alpha/2$.*

1.3.7. Definíció. Legyen ϱ egy a t tengely körüli α szögű elforgatás és $\mathbf{v}$ $(\mathbf{v} \neq 0)$ egy t-vel párhuzamos vektor. Ekkor az $\varepsilon_{\mathbf{v}} \circ \varrho$ egybevágóságot, azaz az elforgatás és a $\mathbf{v}$ vektorral való eltolás szorzatát *csavarmozgásnak* hívjuk.

1.3.8. Definíció. Legyen adott a térben egy σ sík és egy vele párhuzamos $\mathbf{v}$ $(\mathbf{v} \neq 0)$ vektor. Jelölje τ a σ síkra történő tükrözést és $\varepsilon_{\mathbf{v}}$ a $\mathbf{v}$ vektorral való eltolást. Ekkor a síkra tükrözés és az eltolás szorzataként nyert $\varepsilon_{\mathbf{v}} \circ \tau$ egybevágóságot *csúsztatva tükrözésnek* nevezzük.

1.3.9. Definíció. Legyen adott a térben egy σ sík, egy rá merőleges irányított t egyenes, továbbá egy $\alpha \in (-\pi, \pi]$ előjeles szög. Ekkor a t körüli α előjeles szögű ϱ elforgatás és a σ síkra való τ tükrözés $\tau \circ \varrho$ kompozícióját *forgatva tükrözésnek* mondjuk.

1.3.10. Megjegyzés. A fentiek során a csavarmozgást, a csúsztatva tükrözést és a forgatva tükrözést egyaránt két egybevágóság szorzataként értelmeztük. Könnyen látható, hogy a szorzat két tényezője mindhárom esetben felcserélhető egymással.

2. fejezet

Az egybevágóságok analitikus leírása

A fejezet során feltesszük, hogy a térben rögzítve van egy derékszögű koordináta-rendszer, amelynek O a kezdőpontja és az $\mathbf{i},\ \mathbf{j},\ \mathbf{k}$ ortonormált vektorok az alapvektorai.

A témavezető által írt [4] elektronikus jegyzet 7. fejezetében sor kerül a síkbeli egybevágóságok analitikus tárgyalására és a mátrixegyenlettel való leírására. Ezt alapul véve a fejezet első két szakaszában a *térbeli* egybevágóságok analitikus leírását tárgyaljuk.

2.1. Indukált lineáris leképezés

Az 1.2.6. Tétel (4) pontja szerint értelmezni lehet egy leképezést a szabad vektorok terén is.

2.1.1. Definíció. Legyen $\varphi\colon X \to X$ egy adott egybevágóság. A φ transzformáció által a szabadvektorok terén *indukált leképezésnek* azt a $\hat{\varphi}\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ függvényt nevezzük, amelyre $\hat{\varphi}\left(\overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)} = \overrightarrow{A'B'}$ teljesül tetszőleges $A,\ B \in X$ pontok esetén, ahol $A',\ B'$ rendre az A és B pontok φ szerinti képeit jelöli.

2.1.2. Megjegyzés. Világos, hogy ha vesszük egy $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ vektornak a $\hat{\varphi}$ leképezés szerinti képét, akkor az nem függ az $\mathbf{u}$-t reprezentáló irányított szakasz megválasztásától.

Idézzük fel a vektortéren vett lineáris leképezés fogalmát.

2.1.3. Definíció. Legyen adott egy $\mu\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ leképezés a szabad vektorok terén. A μ *lineáris leképezés*, ha tetszőleges $\mathbf{u},\ \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén fennállnak a $\mu(\mathbf{u}) + \mu(\mathbf{v}) = \mu(\mathbf{u}+\mathbf{v})$ és $\mu(\lambda\mathbf{u}) = \lambda \cdot \mu(\mathbf{u})$ összefüggések. Amennyiben a μ lineáris leképezés bijektív, akkor *lineáris izomorfizmusnak* nevezzük.

A 2.1.1. Definíció alapján könnyen bizonyítható a következő állítás.

2.1.4. Állítás. *Legyen φ egy egybevágósági transzformáció. Ekkor az általa indukált $\hat{\varphi}\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ leképezés egy lineáris izomorfizmus.*

Az indukált lineáris leképezés mátrixa

Az egybevágóság megőrzi a szakaszok hosszát és bármely két vektornak a hajlásszögét. Emiatt igaz az alábbi állítás, amely azt mondja ki, hogy az indukált leképezés megőrzi a skaláris szorzat értékét, más szóval ortogonális.

2.1.5. Állítás. *Legyen $\varphi\colon X \to X$ egy adott egybevágóság. Ekkor az általa indukált $\hat{\varphi}$ leképezésre és tetszőleges $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ vektorokra $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \hat{\varphi}(\mathbf{u}), \hat{\varphi}(\mathbf{v}) \rangle$ teljesül.*

A koordináta-rendszer kapcsán már rögzítettünk egy $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ jobbrendszert alkotó ortonormált bázist a szabad vektorok terében. Legyen adott a $\varphi\colon X \to X$ egybevágóság által indukált $\hat{\varphi} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ lineáris izomorfizmus. Ekkor a 2.1.5. Állítás szerint $\hat{\varphi}(\mathbf{i})$, $\hat{\varphi}(\mathbf{j})$, $\hat{\varphi}(\mathbf{k})$ vektorok szintén egység hosszúak, és páronként ortogonálisak. Fejezzük ki ezeket az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ ortonormált bázisvektorok lineáris kombinációjaként:

$$\hat{\varphi}(\mathbf{i}) = a_{11}\mathbf{i} + a_{21}\mathbf{j} + a_{31}\mathbf{k}, \tag{2.1.1}$$

$$\hat{\varphi}(\mathbf{j}) = a_{12}\mathbf{i} + a_{22}\mathbf{j} + a_{32}\mathbf{k}, \tag{2.1.2}$$

$$\hat{\varphi}(\mathbf{k}) = a_{13}\mathbf{i} + a_{23}\mathbf{j} + a_{33}\mathbf{k}. \tag{2.1.3}$$

A lineáris kombinációs a_{qr} $(q, r = 1, 2, 3)$ együtthatók egy 3×3-as $\mathbf{A}$ mátrixot képeznek. A $\hat{\varphi}$ indukált leképezést az $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ 3×3-as négyzetes mátrix írja le az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ bázisra nézve.

Vegyünk egy $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ térbeli szabadvektort és a hozzá tartozó képvektort, ami $\hat{\varphi}(\mathbf{u}) = u'_1\mathbf{i} + u'_2\mathbf{j} + u'_3\mathbf{k}$. A 2.1.4. Állítás szerint $\hat{\varphi}$ lineáris leképezés, így az $\mathbf{u}$ vektor $\hat{\varphi}$ szerinti képére fennáll a $\hat{\varphi}(\mathbf{u}) = u_1\hat{\varphi}(\mathbf{i}) + u_2\hat{\varphi}(\mathbf{j}) + u_3\hat{\varphi}(\mathbf{k})$ összefüggés. Emiatt

$$u'_1\mathbf{i} + u'_2\mathbf{j} + u'_3\mathbf{k} = u_1\hat{\varphi}(\mathbf{i}) + u_2\hat{\varphi}(\mathbf{j}) + u_3\hat{\varphi}(\mathbf{k}).$$

teljesül. Egy vektortérben minden vektor egyértelműen áll elő a bázisvektorok lineáris kombinációjaként. Felhasználva a (2.1.1)–(2.1.2)–(2.1.3) egyenleteket:

$$\begin{aligned} u'_1\mathbf{i} + u'_2\mathbf{j} + u'_3\mathbf{k} =& u_1(a_{11}\mathbf{i} + a_{21}\mathbf{j} + a_{31}\mathbf{k}) + u_2(a_{12}\mathbf{i} + a_{22}\mathbf{j} + a_{32}\mathbf{k}) + \\ &+ u_3(a_{13}\mathbf{i} + a_{23}\mathbf{j} + a_{33}\mathbf{k}) = \\ =&(a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + a_{13}u_3)\mathbf{i} + (a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + a_{23}u_3)\mathbf{j} \\ &+ (a_{31}u_1 + a_{32}u_2 + a_{33}u_3)\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Az egyenlőség jobb és bal oldalán a megfelelő bázisvektorok együtthatói megegyeznek, így a $\hat{\varphi}(\mathbf{u})$ képvektor koordinátái a következő összefüggésekkel fejezhetőek ki:

$$u'_1 = a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + a_{13}u_3,$$

$$u_2' = a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + a_{23}u_3,$$
$$u_3' = a_{31}u_1 + a_{32}u_2 + a_{33}u_3.$$

Azonban a fenti egyenletek leírhatók egyetlen mátrixegyenlettel:

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}.$$

Az egyetemi tanulmányokban találkoztunk az alábbi fogalommal, amely szerepelni fog a következő állításban.

2.1.6. Definíció. Egy $n \times n$-es valós $\mathbf{A}$ mátrixot *ortogonálisnak* nevezünk akkor, ha $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}$, ahol $\mathbf{A}^T$ az $\mathbf{A}$ mátrix transzponáltját, és $\mathbf{I}$ az $n \times n$-es egységmátrixot jelöli.

2.1.7. Állítás. *Legyen $\varphi\colon X \to X$ egy egybevágósági transzformáció. Ha a $\hat{\varphi}$ indukált lineáris leképezést az $\mathbf{A}$ mátrix írja le az $\mathbf{e_1} = \mathbf{i}$, $\mathbf{e_2} = \mathbf{j}$, $\mathbf{e_3} = \mathbf{k}$ ortonormált bázisra nézve, akkor az $\mathbf{A}$ mátrix ortogonális.*

Bizonyítás. Legyen a $\mathbf{B}$ mátrix az $\mathbf{A}$ transzponált mátrixa. Így $b_{ij} = a_{ji}$. Jelölje $\mathbf{C}$ az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrixok szorzatát: $\mathbf{C} = \mathbf{BA}$. Mivel a $\hat{\varphi}(\mathbf{e_1})$, $\hat{\varphi}(\mathbf{e_2})$, $\hat{\varphi}(\mathbf{e_3})$ vektorok is egy ortonormált bázist alkotnak, a $\mathbf{C}$ mátrix koordinátáira fennáll:

$$\begin{aligned} c_{rs} &= a_{1s}b_{r1} + a_{2s}b_{r2} + a_{3s}b_{r3} \\ &= a_{1s}a_{1r} + a_{2s}a_{2r} + a_{3s}a_{3r} \\ &= \langle a_{1s}\mathbf{e_1} + a_{2s}\mathbf{e_2} + a_{3s}\mathbf{e_3},\ a_{1r}\mathbf{e_1} + a_{2r}\mathbf{e_2} + a_{3r}\mathbf{e_3} \rangle \\ &= \langle \hat{\varphi}(\mathbf{e_s}),\ \hat{\varphi}(\mathbf{e_r}) \rangle = \delta_{rs}. \end{aligned}$$

A fenti egyenletben δ_{rs} a Kronecker-szimbólumot jelöli, ami

$$\delta_{rs} = \begin{cases} 1, & \text{ha } r = s \\ 0, & \text{ha } r \neq s \end{cases}$$

Eszerint a $\mathbf{C}$ mátrix elemei a főátlóban 1, máshol pedig 0. Tehát fennáll $\mathbf{C} = \mathbf{I}$. Ezzel beláttuk, hogy az $\mathbf{A}$ mátrix ortogonális. $\square$

2.1.8. Megjegyzés. Mivel az $\mathbf{A}$ mátrix ortogonális, így $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}$. A determinánsokra vonatkozó szorzástételt alkalmazva $\det \mathbf{A}^T \cdot \det \mathbf{A} = \det \mathbf{I}$. Az $\mathbf{A}$ négyzetes, így $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^T$. Ezért a $(\det \mathbf{A})^2 = \det \mathbf{I} = 1$ összefüggéshez jutunk. Ebből az következik, hogy $\det \mathbf{A} = 1$ vagy $\det \mathbf{A} = -1$.

2.2. Az egybevágóság leírása mátrixegyenlettel

Az alábbi tétel arról szól, hogy egy egybevágóság esetében egy térbeli pont koordinátáiból hogyan lehet megkapni a képpont koordináta-hármasát.

2.2.1. Tétel. *Legyen adott egy $\varphi\colon X \to X$ egybevágósági transzformáció. A φ által indukált $\hat{\varphi}$ lineáris leképezést az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ alapvektorokra vonatkozóan írja le az $\mathbf{A}$ mátrix, továbbá az $O' = \varphi(O)$ képpont helyvektora legyen $\overrightarrow{OO'} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$. Vegyünk egy $P(x, y, z)$ térbeli pontot és annak P' képét. Ekkor a P' pont (x', y', z') koordináta-hármasával fennáll az*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \tag{2.2.1}$$

mátrixegyenlet.

Bizonyítás. Egy tetszőleges $P(x,\, y,\, z)$ pont $P'(x',\, y',\, z')$ képének koordinátáit szeretnénk meghatározni. Az $\overrightarrow{OP'}$ helyvektor felírható a bázisvektorok lineáris kombinációjaként:

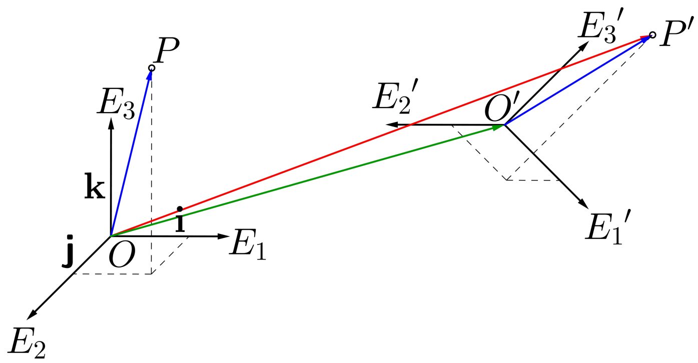
$$\overrightarrow{OP'} = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k}.$$

Az $\overrightarrow{OP'}$ előáll az $\overrightarrow{OO'}$ és $\overrightarrow{O'P'}$ vektorok összegeként, azaz teljesül

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P'}. \tag{2.2.2}$$

Az $\overrightarrow{O'P'}$ vektor az alábbi módon fejezhető ki:

$$\overrightarrow{O'P'} = \hat{\varphi}\left(\overrightarrow{OP}\right) = \hat{\varphi}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = x\hat{\varphi}(\mathbf{i}) + y\hat{\varphi}(\mathbf{j}) + z\hat{\varphi}(\mathbf{k}). \tag{2.2.3}$$



2.2.1. ábra. Egybevágóságok analitikus leírása

Írjuk fel az $\overrightarrow{OP'}$-t a (2.2.2) és a (2.2.3) egyenletek segítségével:

$$\overrightarrow{OP'} = \left(b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}\right) + \left(x\hat{\varphi}(\mathbf{i}) + y\hat{\varphi}(\mathbf{j}) + z\hat{\varphi}(\mathbf{k})\right).$$

Használjuk fel a (2.1.1)–(2.1.2)–(2.1.3) egyenleteket is. Ekkor

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OP'} =&(b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) + x(a_{11}\mathbf{i} + a_{12}\mathbf{j} + a_{13}\mathbf{k})+\\
&+ y(a_{21}\mathbf{i} + a_{22}\mathbf{j} + a_{23}\mathbf{k}) + z(a_{31}\mathbf{i} + a_{32}\mathbf{j} + a_{33}\mathbf{k})\\
=&(b_1 + xa_{11} + ya_{21} + za_{31})\mathbf{i} + (b_2 + xa_{12} + ya_{22} + za_{32})\mathbf{j}+\\
&+ (b_3 + xa_{13} + ya_{23} + za_{33})\mathbf{k}.
\end{aligned}$$

Az $\overrightarrow{OP'}$ helyvektor egyértelműen áll elő az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ bázisvektorok lineáris kombinációjaként. Ezért P' képpont koordinátáira teljesül:

$$\begin{aligned}
x' &= b_1 + a_{11}\,x + a_{21}\,y + a_{31}\,z,\\
y' &= b_2 + a_{12}\,x + a_{22}\,y + a_{32}\,z,\\
z' &= b_3 + a_{13}\,x + a_{23}\,y + a_{33}\,z.
\end{aligned}$$

A fenti három egyenlet pedig leírható az alábbi mátrixegyenlettel:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Tehát a φ egybevágóságot valóban a megadott (2.2.1) mátrixegyenlet írja le. □

A következő állítás szerint, ha veszünk egy $\mathbf{A}$ ortogonális mátrixot és egy $(b_1,\, b_2,\, b_3)$ számhármast, akkor a (2.2.1) egyenlettel meghatározott leképezés a térbeli pontok halmazán egy egybevágóság.

2.2.2. Állítás. *Legyen adott egy ortogonális* 3×3*-as* $\mathbf{A}$ *mátrix, továbbá egy* $(b_1,\, b_2,\, b_3)$ *számhármas. Vegyük most a térben azt a* $\varphi\colon X \to X$ *leképezést, ahol egy tetszőleges* $P(x, y, z)$ *pont* $\varphi(P) = P'$ *képe az a pont, melynek* (x', y', z') *koordinátáira fennáll az*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Ekkor a φ *leképezés egy egybevágósági transzformáció.*

Bizonyítás. Vegyük a $P_1(x_1,\, y_1,\, z_1)$ és $P_2(x_2,\, y_2,\, z_2)$ térbeli pontokat. A $\varphi(P_i) = P_i'$ képpontok $(x_i',\, y_i',\, z_i')$ koordinátáit $(i = 1, 2)$ most az

$$\begin{pmatrix} x_i' \\ y_i' \\ z_i' \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

mátrixegyenlet adja meg.

Azt fogjuk belátni, hogy az eredeti pontok távolságának négyzete megegyezik a képpontok távolságának négyzetével, tehát φ távolságtartó. Világos, hogy igaz az alábbi összefüggés:

$$\begin{aligned} d(P_1, P_2)^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = \\ &= \begin{pmatrix} x_2 - x_1, & y_2 - y_1, & z_2 - z_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

A $P_1',\ P_2'$ képpontok koordinátáira pedig teljesül:

$$\begin{pmatrix} x_2' \\ y_2' \\ z_2' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \\ z_1' \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} - \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}.$$

A távolságuk négyzete megegyezik a $\overrightarrow{P_1'P_2'}$ vektor hossznégyzetével:

$$d(P_1', P_2')^2 = \left|\overrightarrow{P_1'P_2'}\right|^2 = \begin{pmatrix} x_2' - x_1', & y_2' - y_1', & z_2' - z_1' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2' - x_1' \\ y_2' - y_1' \\ z_2' - z_1' \end{pmatrix}.$$

Felhasználva a fenti egyenleteket adódik:

$$d(P_1', P_2')^2 = \begin{pmatrix} x_2 - x_1, & y_2 - y_1, & z_2 - z_1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}.$$

Mivel $\mathbf{A}$ ortogonális mátrix, így $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$, és teljesül

$$d(P_1', P_2')^2 = \begin{pmatrix} x_2 - x_1, & y_2 - y_1, & z_2 - z_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix} = d(P_1, P_2)^2.$$

A P_1 és P_2 tetszőlegesen választott pontok voltak, így ezzel megmutattuk, hogy φ egy távolságtartó transzformáció. Már szó volt arról, hogy az $\mathbf{A}$ mátrix determinánsa 1 vagy -1. Ezért a Cramer-szabály alapján az is belátható, hogy φ egy bijektív leképezés. Ebből pedig már következik, hogy φ egy egybevágósági transzformáció. $\square$

2.3. Irányítástartó és irányításváltó egybevágóságok

Az alábbi definíció alapján a térbeli egybevágóságokat két osztályba lehet sorolni.

2.3.1. Definíció. Legyen adott egy $\varphi\colon X \to X$ térbeli egybevágósági transzformáció. Ha a $\hat{\varphi}$ indukált lineáris leképezés jobbrendszert alkotó vektorhármasokat jobbrendszert adó vektorhármasokba képez, akkor a φ egybevágóságot *irányítástartónak* nevezzük. Ha $\hat{\varphi}$ felcseréli a jobb- és balrendszert alkotó vektorhármasokat, akkor a φ egybevágóságot *irányításváltónak* mondjuk.

2.3.2. Állítás. *Legyen φ egy egybevágósági transzformáció, és a $\hat{\varphi}$ indukált lineáris leképezést leíró ortogonális mátrix* $\mathbf{A}$.

(1) *φ irányítástartó akkor és csak akkor, ha* $\det \mathbf{A} = 1$.

(2) *φ irányításváltó akkor és csak akkor, ha* $\det \mathbf{A} = -1$.

Bizonyítás. Az $\mathbf{A}$ mátrix oszlopaiban az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ bázisvektorok $\hat{\varphi}$ szerinti $\hat{\varphi}(\mathbf{i})$, $\hat{\varphi}(\mathbf{j})$, $\hat{\varphi}(\mathbf{k})$ képeinek a koordinátái szerepelnek. Egy mátrix determinánsa megegyezik az oszlopvektorainak vegyes szorzatával, vagyis $\det \mathbf{A} = \langle \hat{\varphi}(\mathbf{i}) \times \hat{\varphi}(\mathbf{j}),\ \hat{\varphi}(\mathbf{k}) \rangle$. Ezért $\hat{\varphi}(\mathbf{i})$, $\hat{\varphi}(\mathbf{j})$, $\hat{\varphi}(\mathbf{k})$ bázisvektorok jobbrendszert alkotnak akkor és csak akkor, ha $\det \mathbf{A} = 1$, illetve balrendszert alkotnak akkor és csak akkor, ha $\det \mathbf{A} = -1$. $\square$

2.4. Konkrét egybevágóságok indukált lineáris leképezései

Eltolás

Vegyünk egy $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ vektorral való ε eltolást, amely indukál egy $\hat{\varepsilon}$ lineáris leképezést. Világos, hogy $\hat{\varepsilon}$ az összes vektort önmagába képezi, vagyis $\hat{\varepsilon}$ megegyezik a $\mathcal{V}$ vektortér identikus leképezésével. Eszerint az $\hat{\varepsilon}$ leképezés mátrixa az egységmátrix, vagyis $\mathbf{A} = \mathbf{I}$.

Célszerű még megjegyezni azt is, hogy az eltolás egy irányítástartó egybevágóság, mivel $\det \mathbf{I} = 1$.

Síkra tükrözés

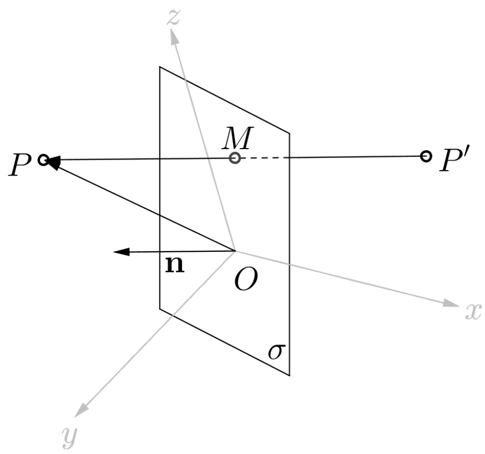
Legyen $\tau\colon X \to X$ tükrözés az O kezdőponton átmenő, az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ alapvektorok által kifeszített síkra, azaz a $z = 0$ síkra való tükrözés. Ekkor a $\hat{\tau}$ indukált leképezés helybenhagyja az $\mathbf{i}$ és $\mathbf{j}$ vektorokat, tehát $\hat{\tau}(\mathbf{i}) = \mathbf{i}$, $\hat{\tau}(\mathbf{j}) = \mathbf{j}$, valamint $\hat{\tau}(\mathbf{k}) = -\mathbf{k}$ teljesül. Tehát a $\hat{\tau}$ indukált lineáris leképezés mátrixa az $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Világos, hogy a síkra tükrözés irányításváltó, hiszen $\det\ \mathbf{A} = -1$.

Tetszőleges síkra tükrözés esete

Az alábbiakban azt vizsgáljuk, hogy hogyan lehet megadni az indukált lineáris leképezés mátrixát egy olyan síkra tükrözésnél, ahol ismert a sík $\mathbf{n} = n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k}$ normálvektora. A továbbiakban feltesszük, hogy az $\mathbf{n}$ egységvektor, vagyis $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$.

Könnyű belátni, hogy ha két sík párhuzamos egymással, akkor a rájuk történő tükrözések esetében az indukált lineáris leképezések azonosak. Vegyük tehát az O kezdőponton átmenő, és az $\mathbf{n}$-re merőleges σ síkot.

Legyen a τ egybevágóság a σ síkra tükrözés. Tükrözzünk egy tetszőleges $P(x, y, z)$ pontot a σ síkra, a képét jelölje $P'(x', y', z')$. Mivel most az O kezdőpont fixen marad, a $\hat{\tau}$ indukált leképezésre $\hat{\tau}(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OP'}$ teljesül.



2.4.1. ábra. Tetszőleges síkra tükrözés

Legyen M a $\langle P, P' \rangle$ egyenes és a σ sík metszéspontja. A tükrözés definíciójából adódik, hogy az MP és MP' szakaszok azonos hosszúságúak. Világos, hogy az $\overrightarrow{OP'}$ vektorra fennáll:

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} - 2\overrightarrow{MP}.$$

Az $\overrightarrow{MP}$ vektor az $\overrightarrow{OP}$-nek az $\mathbf{n}$-nel párhuzamos komponense. Ki tudjuk fejezni az $\overrightarrow{MP}$ vektort az $\mathbf{n}$ egységhosszú normálvektorral az $\overrightarrow{MP} = \langle \overrightarrow{OP}, \mathbf{n} \rangle \cdot \mathbf{n}$ kifejezés segítségével. Emiatt fennáll az

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} - 2\,\langle \overrightarrow{OP}, \mathbf{n} \rangle \cdot \mathbf{n}.$$

Két vektor pontosan akkor egyenlő, ha a koordinátáikból képzett oszlopmátrixok egyenlőek. Ily módon a fenti egyenlet szerint teljesül

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 2(n_1\,x + n_2\,y + n_3\,z) \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (1-2n_1^2)x - 2n_1n_2y - 2n_1n_3z \\ -2n_1n_2x + (1-2n_2^2)y - 2n_2n_3z \\ -2n_1n_3x - 2n_2n_3y + (1-2n_3^2)z \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1-2n_1^2 & -2n_1n_2 & -2n_1n_3 \\ -2n_1n_2 & 1-2n_2^2 & -2n_2n_3 \\ -2n_1n_3 & -2n_2n_3 & 1-2n_3^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Tehát azt kaptuk, hogy ha tükrözünk egy az $\mathbf{n}$ egységvektorra merőleges σ síkra, akkor a tükrözés által indukált $\hat{\tau}$ leképezés mátrixa $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1-2n_1^2 & -2n_1n_2 & -2n_1n_3 \\ -2n_1n_2 & 1-2n_2^2 & -2n_2n_3 \\ -2n_1n_3 & -2n_2n_3 & 1-2n_3^2 \end{pmatrix}$.

2.4.1. Megjegyzés. Vegyük észre, hogy a síkra tükrözés esetében az indukált leképezés $\mathbf{A}$ mátrixa szimmetrikus.

2.4.2. Példa. Nézzünk egy konkrét példát. Az $\frac{1}{\sqrt{6}}x - \frac{1}{\sqrt{6}}y + \frac{2}{\sqrt{6}}z = 0$ egyenletű síkra tükrözés által indukált leképezés mátrixa $\mathbf{A} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Tengely körüli elforgatás

Határozzuk meg a $\mathbf{k}$ bázisvektorral irányított z*-tengely* körüli, α szögű $\varrho\colon X \to X$ elforgatás által indukált $\hat{\varrho}$ lineáris leképezés mátrixát. Az α ez esetben is egy előjeles szögmérték, amelyre $-\pi < \alpha \leq \pi$.

Mint ismeretes, a $\pi/2$ szögű elforgatás az $\mathbf{i}$ vektort $\mathbf{j}$-be viszi, a $\mathbf{j}$ vektort pedig $-\mathbf{i}$ vektorba. Mivel $\mathbf{k}$ a tengely egy irányvektora, így $\hat{\varrho}(\mathbf{k}) = \mathbf{k}$, tehát $\mathbf{k}$-t helybenhagyja. Könnyű belátni, hogy a $\hat{\varrho}(\mathbf{i})$, $\hat{\varrho}(\mathbf{j})$ és $\hat{\varrho}(\mathbf{k})$ képvektorokra igazak a következők:

$$\begin{aligned} \hat{\varrho}(\mathbf{i}) &= \cos\alpha \cdot \mathbf{i} + \sin\alpha \cdot \mathbf{j} + 0 \cdot \mathbf{k} = \cos\alpha \cdot \mathbf{i} + \sin\alpha \cdot \mathbf{j}, \\ \hat{\varrho}(\mathbf{j}) &= \sin\alpha \cdot (-\mathbf{i}) + \cos\alpha \cdot \mathbf{j} + 0 \cdot \mathbf{k} = -\sin\alpha \cdot \mathbf{i} + \cos\alpha \cdot \mathbf{j}, \\ \hat{\varrho}(\mathbf{k}) &= 0 \cdot \mathbf{i} + 0 \cdot \mathbf{j} + 1 \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Ezen egyenletek szerint az α előjeles szögű z-tengely körüli elforgatás által indukált $\hat{\varrho}$ lineáris leképezést az $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix írja le.

2.4.3. Megjegyzés. Hasonlóan megkapható az x- és y-tengelyek körüli forgatások mátrixai melyek rendre:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \text{ és } \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

2.4.4. Megjegyzés. A tengely körüli ϱ elforgatás irányítástartó, hiszen az $\mathbf{A}$ mátrixra $\det \mathbf{A} = 1$ teljesül.

Vektoriális szorzás mint lineáris leképezés

A tetszőleges tengely körüli elforgatás által indukált lineáris izomorfizmus mátrixának meghatározásához szükségünk lesz a vektoriális szorzást mint lineáris leképezést leíró mátrixra. Rögzítsünk egy $\mathbf{w}(w_1, w_2, w_3)$ térbeli vektort, és legyen $\lambda\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ az a leképezés, amelyre $\lambda(\mathbf{v}) = \mathbf{w} \times \mathbf{v}$ tetszőleges $\mathbf{v}(v_1, v_2, v_3)$ vektor esetén. Írjuk fel a $\mathbf{w} \times \mathbf{v}$ vektoriális szorzatot koordinátákkal:

$$\mathbf{w} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (w_2v_3 - w_3v_2) \cdot \mathbf{i} - (w_1v_3 - w_3v_1) \cdot \mathbf{j} + (w_1v_2 - w_2v_1) \cdot \mathbf{k}$$

Ha a képvektorra vesszük a $\lambda(\mathbf{v}) = v_1'\mathbf{i} + v_2'\mathbf{j} + v_3'\mathbf{k}$ kifejezést, akkor a fenti egyenlet ekvivalens az alábbi mátrixegyenlettel:

$$\begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

Eszerint a vektoriális szorzást az $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{pmatrix}$ antiszimmetrikus mátrix írja le.

Tetszőleges tengely körüli elforgatás

Vegyünk egy t egyenest, amelyen az irányítást adja meg az egység hosszú $\mathbf{n}(n_1, n_2, n_3)$ irányvektor. Legyen ϱ a t tengely körüli $\alpha \in (-\pi, \pi]$ előjeles szögű elforgatás. Az alábbiakban meghatározzuk a $\hat{\varrho}$ indukált leképezés mátrixát. Feltesszük, hogy a t tengely áthalad a koordináta-rendszer kezdőpontján. Forgassuk el a $P(x, y, z)$ pontot t körül egy $\alpha \in (-\pi, \pi]$ előjeles szöggel. Jelöljük M-mel a P pont t egyenesre eső merőleges vetületét. Ismeretes, hogy az $\overrightarrow{OM}$ éppen az $\overrightarrow{OP}$ vektornak az $\mathbf{n}$-nel párhuzamos komponense, így $\overrightarrow{OM} = \langle \overrightarrow{OP}, \mathbf{n} \rangle \cdot \mathbf{n}$ teljesül.

Jelöljük σ-val a P pontot tartalmazó t-re merőleges síkot. Adjuk meg a $\mathcal{V}_\sigma$ altér egy bázisát a vektoriális szorzás segítségével. Az $\mathbf{n}$ és $\overrightarrow{OP}$ vektoriális szorzata egy olyan vektort ad, amely merőleges $\mathbf{n}$-re és $\overrightarrow{MP}$-re is. Emiatt az $\mathbf{n} \times \overrightarrow{OP}$ és $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OM}$ vektorok a $\mathcal{V}_\sigma$ altér egy bázisát adják. Világos, hogy az $\overrightarrow{MP}$ és $\mathbf{n} \times \overrightarrow{OP}$ vektorok merőlegesek egymásra és a hosszuk megegyezik.

A P pont $P' = \varrho(P)$ képét megkaphatjuk úgy is, hogy vesszük P-nek a σ síkbeli az M centrum körüli elforgatását az α előjeles szöggel. Ennek következtében a P' pont helyvektora kifejezhető az

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OM} + \cos\alpha\left(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OM}\right) + \sin\alpha\left(\mathbf{n} \times \overrightarrow{OP}\right)$$

alakban. Ha felhasználjuk az $\overrightarrow{OM}$ fenti kifejezését, akkor azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP'} &= \langle\overrightarrow{OP},\, \mathbf{n}\rangle \cdot \mathbf{n} + \cos\alpha\left(\overrightarrow{OP} - \langle\overrightarrow{OP},\, \mathbf{n}\rangle \cdot \mathbf{n}\right) + \sin\alpha\left(\mathbf{n} \times \overrightarrow{OP}\right)\\ &= \cos\alpha \cdot \overrightarrow{OP} + (1 - \cos\alpha) \cdot \langle\overrightarrow{OP},\, \mathbf{n}\rangle \cdot \mathbf{n} + \sin\alpha\left(\mathbf{n} \times \overrightarrow{OP}\right).\end{aligned}$$

A vektorok helyébe most írjuk be azok koordináta-hármasait. Eszerint teljesül

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} &= \cos\alpha \cdot \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} + (1-\cos\alpha)\cdot\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}\cdot\left((n_1, n_2, n_3)\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right) +\\ &+ \sin\alpha \cdot \begin{pmatrix}0 & -n_3 & n_2\\ n_3 & 0 & -n_1\\ -n_2 & n_1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Ismeretes, hogy a mátrixok szorzása asszociatív. Átzárójelezve a fenti egyenletet a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} &= \cos\alpha \cdot \mathbf{I} \cdot \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} + (1-\cos\alpha)\cdot\left(\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}\cdot(n_1, n_2, n_3)\right)\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} +\\ &+ \sin\alpha \cdot \begin{pmatrix}0 & -n_3 & n_2\\ n_3 & 0 & -n_1\\ -n_2 & n_1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Ebből már adódik, hogy

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} = \left[\cos\alpha \cdot \mathbf{I} + (1-\cos\alpha)\cdot\begin{pmatrix}n_1^2 & n_1n_2 & n_1n_3\\ n_1n_2 & n_2^2 & n_2n_3\\ n_1n_3 & n_2n_3 & n_3^2\end{pmatrix} + \right.$$

$$+\sin\alpha\cdot\begin{pmatrix}0 & -n_3 & n_2\\ n_3 & 0 & -n_1\\ -n_2 & n_1 & 0\end{pmatrix}\Bigg]\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}.$$

Ha bevezetjük az $\mathbf{N}=\begin{pmatrix}n_1^2 & n_1n_2 & n_1n_3\\ n_1n_2 & n_2^2 & n_2n_3\\ n_1n_3 & n_2n_3 & n_3^2\end{pmatrix}$ mátrixot, akkor a t tengely körüli α előjeles szögű elforgatásnál az indukált lineáris leképezést az alábbi egyenlet írja le

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}=\big(\cos\alpha\cdot\mathbf{I}+(1-\cos\alpha)\cdot\mathbf{N}+\sin\alpha\cdot\mathbf{S}\big)\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix},$$

ahol $\mathbf{S}$ a vektoriális szorzat mátrixa. Tehát a $\hat{\varrho}$ leképezés $\mathbf{F}$ mátrixa kifejezhető az alábbi egyenlettel:

$$\mathbf{F}=\cos\alpha\cdot\mathbf{I}+(1-\cos\alpha)\cdot\mathbf{N}+\sin\alpha\cdot\mathbf{S}.$$

2.4.5. Példa. Az $\mathbf{n}\,(2/3,\ -2/3,\ 1/3)$ irányvektorú tengely körüli $\alpha=\frac{\pi}{2}$ szögű elforgatás által indukált lineáris izomorfizmust az $\mathbf{F}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}4 & -7 & -4\\ -1 & 4 & -8\\ 8 & 4 & 1\end{pmatrix}$ mátrix írja le.

Csavarmozgás

Legyen ϱ az x-tengely körüli α előjeles szögű elforgatás, és $\mathbf{v}$ az x-tengellyel párhuzamos vektor. Ekkor definíció szerint a csavarmozgást a $\varrho_\alpha\circ\varepsilon_{\mathbf{v}}=\varepsilon_{\mathbf{v}}\circ\varrho_\alpha$ kompozíció adja meg. A csavarmozgás által indukált leképezést leíró mátrix a ϱ által indukált lineáris izomorfizmust leíró és az eltolás által indukált lineáris leképezést reprezentáló mátrixok szorzata,

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha\\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\cdot\mathbf{I}=\mathbf{I}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha\\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha\\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$$

Tehát a csavarmozgást ugyanaz a mátrix írja le, mint a csavarmozgás tengelye körüli forgatást.

Csúsztatva tükrözés

Legyen τ az origón átmenő, a $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ bázisvektorok által kifeszített $x=0$ síkra történő tükrözés, és $\mathbf{v}$ egy a síkkal párhuzamos vektor. Ekkor a csúsztatva tükrözés a $\tau\circ\varepsilon_{\mathbf{v}}=\varepsilon_{\mathbf{v}}\circ\tau$ szorzat. Mátrixa megegyezik $\hat{\tau}$-t és $\hat{\varepsilon}$-t leíró mátrixok szorzatával:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\mathbf{I}=\mathbf{I}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

A csúsztatva tükrözés mátrixa megegyezik a síkra tükrözést leíró mátrixszal.

Forgatva tükrözés

Legyen τ az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ bázisvektorok által kifeszített, az O-n áthaladó $z = 0$ síkra tükrözés és ϱ az z-tengely körüli α szögű forgatás. A tükrözve forgatás által indukált leképezés megegyezik a $\hat{\tau} \circ \hat{\varrho} = \hat{\varrho} \circ \hat{\tau}$ leképezéssel. Ekkor a kompozíció mátrixa a tényezők mátrixának szorzatával:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3. fejezet

A térbeli egybevágóságok osztályozása

3.1. Síkbeli ortogonális lineáris transzformációk

A térbeli egybevágóságági transzformációk osztályozása során alkalmazni fogjuk az ortogonális lineáris leképezéseket. Ebben a szakaszban a síkbeli ortogonális lineáris transzformációkat tárgyaljuk.

Vegyünk $\mathcal{V}$-ben egy 2-dimenziós $\mathcal{H}$ alteret. Legyen $\mu\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ egy ortogonális lineáris leképezés, ami azt jelenti, hogy $\langle \mu(\mathbf{u}), \mu(\mathbf{v}) \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ tetszőleges $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{H}$ vektorok esetén.

Legyen $\mathcal{H}$ egy ortonormált bázisa a $\mathbf{v_1},\ \mathbf{v_2}$ vektorok. Ekkor a bázisvektorok μ szerinti képei legyenek:

$$\mu(\mathbf{v_1}) = c_{11}\mathbf{v_1} + c_{21}\mathbf{v_2}, \qquad \mu(\mathbf{v_2}) = c_{12}\mathbf{v_1} + c_{22}\mathbf{v_2}.$$

Eszerint a μ ortogonális transzformációt a $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ mátrix írja le a $\mathbf{v_1},\ \mathbf{v_2}$ bázisvektorokra nézve.

Ismeretes, hogy a $\mathbf{C}$ mátrix ortogonális, vagyis teljesül $\mathbf{C}^T \cdot \mathbf{C} = \mathbf{I}$. Emiatt $\det \mathbf{C}$ értéke csakis 1 vagy -1 lehet. Az alábbiak során a μ leképezést és annak $\mathbf{C}$ mátrixát vizsgáljuk.

3.1.1. Állítás. *Ha a* $\mathbf{C}$ *mátrixra fennáll* $\det \mathbf{C} = 1$*, akkor létezik olyan* $\alpha \in (-\pi, \pi]$ *szög, hogy* $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

Bizonyítás. Alkalmazzuk most a mátrixra a $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ kifejezést. Mivel $\mathbf{C}$ determinánsa 1, a mátrix inverze $\mathbf{C}^{-1} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$. Írjuk fel a $\mathbf{C}^T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ transzponált mátrixot. A $\mathbf{C}$ ortogonális, tehát $\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}^T$. Ennek következtében $a = d$ és $b = -c$ teljesül, tehát

$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. A $\det \mathbf{C} = 1$ feltétel miatt $a^2 + b^2 = 1$. Ekkor viszont létezik egy olyan $\alpha \in (-\pi, \pi]$ szög, amelyre fennáll $a = \cos\alpha$ és $b = \sin\alpha$, vagyis $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$. □

3.1.2. Állítás. *Amennyiben* $\det \mathbf{C} = -1$ *teljesül, akkor léteznek olyan ortonormált* $\mathbf{e_1},\ \mathbf{e_2} \in \mathcal{H}$ *vektorok, hogy azokra fennáll* $\mu(\mathbf{e_1}) = \mathbf{e_1}$ *és* $\mu(\mathbf{e_2}) = -\mathbf{e_2}$.

Bizonyítás. Alkalmazva az előző állítás bizonyításában használt eljárást belátható, hogy ez esetben $\mathbf{C}$ előáll a $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ alakban, ahol az $a,\ b$ mátrixelemekre $a^2 + b^2 = 1$ igaz.

Határozzuk meg a $\mathbf{C}$ mátrix karakterisztikus polinomját, majd sajátértékeit.

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{C} - \lambda\mathbf{I}) = &\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & -a-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(-a-\lambda) - b^2 = \\ &= -\left(a^2 - \lambda^2\right) - b^2 = \lambda^2 - \left(a^2 + b^2\right) = \\ &= \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0.\end{aligned}$$

Eszerint μ sajátértékei 1 és -1. Legyen a $+1$-hez tartozó normált sajátvektor $\mathbf{e_1}$, -1-hez tartozó pedig $\mathbf{e_2}$. Ezekre tehát fennáll

$$\mu(\mathbf{e_1}) = \mathbf{e_1}, \quad \mu(\mathbf{e_2}) = -\mathbf{e_2}.$$

Mivel μ leképezés ortogonális, így teljesül

$$\langle \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2} \rangle = \langle \mu(\mathbf{e_1}), \mu(\mathbf{e_2}) \rangle = -\langle \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2} \rangle.$$

Innen viszont már adódik $\langle \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2} \rangle = 0$, tehát $\mathbf{e_1}$ és $\mathbf{e_2}$ merőlegesek egymásra.

Ezzel beláttuk az állítást. □

3.2. Térbeli ortogonális lineáris transzformációk

Legyen $\phi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ egy ortogonális lineáris leképezés, melynek az $\mathbf{i},\ \mathbf{j},\ \mathbf{k}$ bázisra vonatkozó mátrixa $\mathbf{A}$. Értelmezni lehet, hogy a ϕ transzformációt mikor mondjuk irányítástartó, illetve irányításváltó lineáris izomorfizmusnak. A ϕ-t akkor nevezzük irányítástartónak, ha jobbrendszert adó bázisokat jobbrendszert képező bázisokba képez. Ha ϕ a jobbrendszert adó bázisok osztályát a balrendszert képező bázisok osztályába viszi, akkor ϕ irányításváltó. Világos, hogy $\det \mathbf{A} = 1$ fennállása esetén ϕ irányítástartó, és a $\det \mathbf{A} = -1$ esetben irányításváltó.

3.2.1. Tétel. *Ha* $\det \mathbf{A} = 1$, *akkor van olyan* $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}$ *ortonormált bázis és olyan* $\alpha \in (-\pi, \pi]$ *szög, hogy* ϕ*-nek az arra vonatkozó mátrixa*

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A $\det \mathbf{A} = -1$ *esetben pedig van olyan* $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}$ *ortonormált bázis és olyan* $\alpha \in (-\pi, \pi]$ *szög, amelyben a* ϕ*-t leíró mátrix*

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bizonyítás. Az $\mathbf{A}$ mátrix 3×3-as, így a harmadfokú karakterisztikus polinomjának létezik (legalább egy) valós gyöke. Ezt a valós gyököt jelölje λ_0. Mivel ϕ ortogonális, azaz megőrzi a vektorok hosszát, fennáll $\lambda_0 = 1$ vagy $\lambda_0 = -1$.

Legyen $\mathbf{u}$ egy olyan egységvektor, amelyre $\phi(\mathbf{u}) = \lambda_0 \cdot \mathbf{u}$ teljesül, azaz $\mathbf{u}$ a λ_0-hoz tartozó normált sajátvektor. Jelölje $\mathcal{H}$ az $\mathbf{u}$ sajátvektorra merőleges vektorok 2-dimenziós alterét. Világos, hogy ϕ a $\mathcal{H}$ alteret önmagába képezi. A $\mathcal{H}$-nak egy ortonormált bázisa legyen $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}$.

Legyen ϕ-nek a $\mathcal{H}$-ra vett megszorítása $\mu\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$. Tekintsük a $\mathcal{H}$ bázisvektorainak μ szerinti képeit lineáris kombináció alakjában:

$$\mu(\mathbf{v_1}) = c_{11}\mathbf{v_1} + c_{12}\mathbf{v_2}, \qquad \text{és} \qquad \mu(\mathbf{v_2}) = c_{21}\mathbf{v_1} + c_{22}\mathbf{v_2}.$$

Eszerint μ-t a $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ mátrix írja le az $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}$ bázisvektorokra nézve.

A fentiek alapján a $\mathcal{V}$ vektortér $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{u}$ bázisára nézve ϕ mátrixa a $\widetilde{\mathbf{A}} = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{$\mathbf{C}$}} & 0 \\ & & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda_0 \end{array}\right)$ alakban áll elő. Az $\mathbf{A}$ determinánsára fennáll a $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{C} \cdot \lambda_0$ összefüggés. Ismeretes, hogy egy lineáris leképezés mátrixának determinánsa nem függ a bázis megválasztásától. Ennek következtében tehát fennáll $\det \mathbf{A} = \det \widetilde{\mathbf{A}}$. Vizsgáljuk elsőként azt az esetet, amikor $\det \mathbf{A} = 1$. Ekkor csak két lehetőség van.

1. eset $\det \mathbf{C} = 1$ és $\lambda_0 = 1$. Alkalmazzuk a 3.1.1. Állítást a $\mathbf{C}$ mátrixra. Ez alapján $\widetilde{\mathbf{A}}$ előáll a kívánt

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \left(\begin{array}{cc|c} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

alakban. A $\mathcal{V}$ vektortérben most az $\mathbf{e_1} = \mathbf{v_1}, \mathbf{e_2} = \mathbf{v_2}, \mathbf{e_3} = \mathbf{u}$ bázist alkalmaztuk.

2. eset $\det \mathbf{C} = -1$ és $\lambda_0 = -1$. Vegyük figyelembe a 3.1.2. Állítást. Eszerint vannak olyan $\mathbf{b_1}$ és $\mathbf{b_2}$ vektorok $\mathcal{H}$-ban, hogy azokra teljesül $\mu(\mathbf{b_1}) = \mathbf{b_1}$ és $\mu(\mathbf{b_2}) = -\mathbf{b_2}$. Alkalmazzuk most $\mathcal{V}$-ben az $\mathbf{e_1} = \mathbf{u}$, $\mathbf{e_2} = \mathbf{b_2}$, $\mathbf{e_3} = \mathbf{b_1}$ bázist. Ha vesszük ϕ mátrixát ezen bázisra vonatkozóan, akkor teljesül

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Az $\widetilde{\mathbf{A}}$ mátrix tehát most is a kívánt alakot veszi fel az $\alpha = \pi$ szög mellett.

A továbbiakban feltesszük, hogy fennáll $\det \mathbf{A} = -1$. Ekkor is csak két lehetőség van $\det \mathbf{C}$ és λ_0 értékeit nézve.

3. eset $\det \mathbf{C} = 1$ és $\lambda_0 = -1$. Ismét a 3.1.1. Állítást kell alkalmaznunk. Abból már következik, hogy ha $\mathcal{V}$-ben az vesszük az $\mathbf{e_1} = \mathbf{v_1}, \mathbf{e_2} = \mathbf{v_2}, \mathbf{e_3} = \mathbf{u}$ bázist, akkor arra nézve ϕ mátrixa

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \left(\begin{array}{cc|c} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

4. eset $\det \mathbf{C} = -1$ és $\lambda_0 = 1$. A 3.1.2. Állítást kell felhasználnunk. Eszerint vannak olyan $\mathbf{b_1}$ és $\mathbf{b_2}$ ortonormált vektorok $\mathcal{H}$-ban, hogy $\mu(\mathbf{b_1}) = \mathbf{b_1}$ és $\mu(\mathbf{b_2}) = -\mathbf{b_2}$. Alkalmazzuk most $\mathcal{V}$-ben az $\mathbf{e_1} = \mathbf{b_1}$, $\mathbf{e_2} = \mathbf{u}$, $\mathbf{e_3} = \mathbf{b_2}$ bázist. Erre nézve a ϕ mátrixa

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

lesz. Ez a mátrix is a tételben szereplő alakot veszi fel, ha az $\alpha = 0$ szöget tekintjük.

Ezzel beláttuk, hogy tényleg létezik olyan ortonormált bázis, amelynél ϕ mátrixa a kívánt speciális alakban áll elő. $\square$

3.3. Az osztályozási tétel

Az alábbiakban előbb az irányítástartó, majd az irányításváltó egybevágóságokat tárgyaljuk.

3.3.1. Tétel. *Legyen adott egy irányítástartó $\varphi\colon X \to X$ térbeli egybevágóság. Ekkor φ vagy eltolás, vagy tengely körüli elforgatás, vagy pedig csavarmozgás.*

Bizonyítás. Tekintsük a $\hat{\varphi}\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ indukált lineáris leképezést, amely ortogonális. Alkalmazzuk a 3.2.1. Tételt. Eszerint van olyan $\mathbf{e_1},\ \mathbf{e_2},\ \mathbf{e_3}$ ortonormált bázis és olyan α szög, hogy $\hat{\varphi}$-t ezen bázisra nézve az $\widetilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix írja le.

Vegyünk most a térben egy olyan derékszögű koordináta-rendszert, amelynek alapvektoraira fennáll $\mathbf{i} = \mathbf{e_1},\ \mathbf{j} = \mathbf{e_2}$ és $\mathbf{k} = \mathbf{e_3}$. Tehát az élvektoroknak válasszuk az $\mathbf{e_1},\ \mathbf{e_2},\ \mathbf{e_3}$ vektorokat. A 2.2.1. Tétel szerint ekkor a φ egybevágóságot az

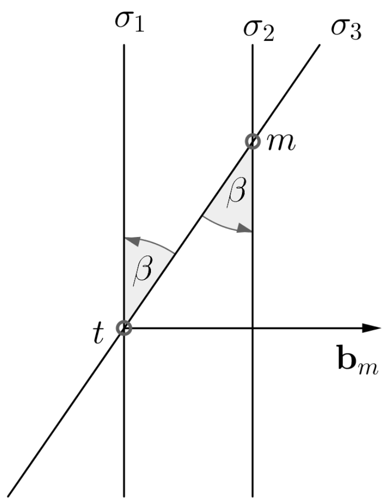
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

mátrixegyenlet írja le, amelyben (b_1, b_2, b_3) az $O' = \varphi(O)$ pont koordináta-hármasa.

Ha $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ igaz, vagyis $\alpha = 0$, akkor világos, hogy φ egy *eltolás* a $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ vektorral. Ha még $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ is teljesül, akkor a φ egybevágóság éppen az *identikus leképezés*.

Nézzük most az $\alpha \neq 0$ esetet. Vegyük azt a ϱ_t elforgatást, amelynek t tengelye éppen a $\mathbf{k}$ vektorral irányított z koordináta-tengely, és az elforgatás szöge α. A φ-t leíró mátrixegyenlet szerint φ megegyezik a ϱ_t elforgatás és a $\mathbf{b}$ vektorral való $\varepsilon_{\mathbf{b}}$ eltolás szorzatával, azaz $\varphi = \varepsilon_{\mathbf{b}} \circ \varrho_t$.

Írjuk fel a $\mathbf{b}$ vektort a t tengelyre merőleges $\mathbf{b}_m = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$ és az azzal párhuzamos $\mathbf{b}_p = b_3\mathbf{k}$ vektorok összegeként: $\mathbf{b} = \mathbf{b}_m + \mathbf{b}_p$. Így az $\varepsilon_{\mathbf{b}}$ kiváltható az $\varepsilon_{\mathbf{b}_p} \circ \varepsilon_{\mathbf{b}_m}$ eltolások szorzatával.



3.3.1. ábra. Irányítástartó térbeli egybevágóságok (Felülnézeti rajz)

Az 1.3.5. Állítás szerint $\varepsilon_{\mathbf{b}_m}$ és ϱ_t egybevágósági transzformációk felírhatóak két-két alkalmas síkra való tükrözés kompozíciójaként is. Legyen σ_1 az az O kezdőponton átmenő sík, amely merőleges $\mathbf{b}_m$-re, továbbá σ_2 az a vele párhuzamos sík, amely áthalad az $\frac{1}{2}\mathbf{b}_m$ helyvektorú ponton. Legyenek τ_1 és τ_2 tükrözések ezen párhuzamos síkokra. Ezekkel fennáll $\varepsilon_{\mathbf{b}_m} = \tau_2 \circ \tau_1$.

Vegyük még azt a harmadik, t-t tartalmazó σ_3 síkot, amelyre igaz, hogy a rá történő τ_3 tükrözésnek és τ_1-nek a szorzata megegyezik ϱ_t-vel, vagyis fennáll $\varrho_t = \tau_1 \circ \tau_3$. Az 1.3.5. Állítás alapján a σ_1 és σ_3 síkok β hajlásszögére teljesül a $\beta = |\alpha|/2$ összefüggés.

A fentiek alapján a φ egybevágóságra fennáll

$$\varphi = \varepsilon_{\mathbf{b}_p} \circ (\tau_2 \circ \tau_1) \circ (\tau_1 \circ \tau_3) = \varepsilon_{\mathbf{b}_p} \circ \tau_2 \circ (\tau_1 \circ \tau_1) \circ \tau_3.$$

Mivel a $\tau_1 \circ \tau_1$ szorzat az identikus leképezés, így teljesül $\varphi = \varepsilon_{\mathbf{b}_p} \circ \tau_2 \circ \tau_3$. Jelölje m a σ_2 és σ_3 síkok metszésvonalát. Ezt a t-vel párhuzamos m egyenest is irányítsuk a $\mathbf{k}$ egységvektorral. Az 1.3.5. Állítás alapján a τ_3 és τ_2 tükrözések szorzata megegyezik az m tengely körüli α szögű ϱ_m elforgatással. Ezzel pedig azt kaptuk, hogy a φ egybevágóság előáll a $\varphi = \varepsilon_{\mathbf{b}_p} \circ \varrho_m$ szorzat alakjában, ahol az eltolás $\mathbf{b}_p$ vektora párhuzamos az m tengellyel.

Világos, hogy amennyiben $\mathbf{b}_p = \mathbf{0}$, akkor igaz $\varphi = \varrho_m$, tehát φ egy *elforgatás*. Ha pedig $\mathbf{b}_p \neq \mathbf{0}$, akkor a φ egybevágóság egy *csavarmozgás*.

Ezzel beláttuk a tételt. □

3.3.2. Tétel. *Legyen adott egy irányításváltó $\varphi\colon X \to X$ egybevágósági transzformáció. Ekkor φ vagy síkra tükrözés, vagy csúsztatva tükrözés, vagy pedig forgatva tükrözés.*

Bizonyítás. Vegyük a φ egybevágóság által indukált a $\hat{\varphi}\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ lineáris leképezést a szabad vektorok terén. Használjuk fel a 3.2.1. Tételt. Eszerint van $\mathcal{V}$-ben olyan $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_3}$ ortonormált bázis és olyan α szög, hogy a $\hat{\varphi}$ leképezést ezen bázisra nézve az $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ mátrix írja le.

Ez esetben is vegyünk a térben egy olyan derékszögű koordináta-rendszert, amelynek alapvektoraira fennáll $\mathbf{i} = \mathbf{e_1}$, $\mathbf{j} = \mathbf{e_2}$ és $\mathbf{k} = \mathbf{e_3}$. A 2.2.1. Tétel szerint ebben a koordináta-rendszerben a φ egybevágóságot az

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \tag{3.3.1}$$

mátrixegyenlet írja le, ahol (b_1, b_2, b_3) számhármas adja a kezdőpont $O' = \varphi(O)$ képének a koordinátáit.

Tekintsük azt a speciális esetet, amikor $\alpha = 0$. Ekkor egy $P(x, y, z)$ pont P' képének koordinátáira fennáll:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Legyen most σ_1 a $z = 0$ egyenletű koordinátasík. A fenti egyenlet alapján φ megegyezik a σ_1 síkra történő τ_1 tükrözés és a $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ vektorral való $\varepsilon_{\mathbf{b}}$ eltolás szorzatával, vagyis fennáll $\varphi = \varepsilon_{\mathbf{b}} \circ \tau_1$. Bontsuk fel $\mathbf{b}$-t a σ_1 koordinátasíkkal párhuzamos $\mathbf{b_p} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$ és az arra merőleges $\mathbf{b_m} = b_3\mathbf{k}$ vektorok összegére. Vegyük most azt a σ_2 síkot, amelyik szintén merőleges $\mathbf{k}$-ra és áthalad az $\frac{1}{2}\mathbf{b_m}$ helyvektorú ponton. Jelölje τ_2 a σ_2 síkra tükrözést. Az 1.3.5. Állítás szerint fennáll $\varepsilon_{\mathbf{b_m}} = \tau_2 \circ \tau_1$. Ezek alapján teljesül

$$\varphi = (\varepsilon_{\mathbf{b}_p} \circ \varepsilon_{\mathbf{b}_m}) \circ \tau_1 = \varepsilon_{\mathbf{b}_p} \circ (\tau_2 \circ \tau_1) \circ \tau_1 = \varepsilon_{\mathbf{b}_p} \circ \tau_2 \circ (\tau_1 \circ \tau_1).$$

Mivel a $\tau_1 \circ \tau_1$ szorzat az identikus leképezés, a φ kifejezhető a $\varphi = \varepsilon_{\mathbf{b}_p} \circ \tau_2$ szorzat alakjában, ahol az eltolás $\mathbf{b}_p$ vektora párhuzamos a τ_2 tükrözés síkjával. Világos, hogy amennyiben $\mathbf{b}_p = \mathbf{0}$, akkor igaz $\varphi = \tau_2$, tehát φ egy *síkra tükrözés*. Ha pedig fennáll $\mathbf{b}_p \neq \mathbf{0}$, akkor a φ egybevágóság egy *csúsztatva tükrözés*.

Nézzük most azt az esetet, amikor az $\alpha \in (-\pi, \pi]$ előjeles szögre fennáll $\alpha \neq 0$. Először azt látjuk be, hogy ekkor a φ egybevágóságnak egyértelműen létezik fixpontja. Egy $C(x, y, z)$ pont fixpontja a (3.3.1) egyenlettel leírt φ-nek, ha koordinátái kielégítik az alábbi mátrixegyenletet:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Ez a mátrixegyenlet azonban ekvivalens a következő három egyenlettel:

$$\left.\begin{aligned} x &= x\cos\alpha - y\sin\alpha + b_1 \\ y &= x\sin\alpha + y\cos\alpha + b_2 \\ z &= -z + b_3 \end{aligned}\right\} \quad \text{átrendezve:} \quad \left.\begin{aligned} (\cos\alpha - 1)x - y\sin\alpha &= -b_1 \\ x\sin\alpha + (\cos\alpha - 1)y &= -b_2 \\ (-2)z &= -b_3 \end{aligned}\right\}$$

Ennek az egyenletrendszernek akkor és csak akkor létezik egyértelműen megoldása, ha az egyenletek baloldalán szereplő együtthatókból képzett $\mathbf{B} = \mathbf{A} - \mathbf{I}$ mátrix determinánsa *nem* 0. Számolással adódik, hogy

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha - 1 & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha - 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-2) \cdot \big((\cos\alpha - 1)^2 + \sin^2\alpha\big) =$$
$$= (-2) \cdot \big(\cos^2\alpha - 2\cos\alpha + 1 + \sin^2\alpha\big) = (-2) \cdot (2 - 2\cos\alpha) = -4 + 4\cos\alpha.$$

Mivel $\alpha \neq 0$, így $-4 + 4\cos\alpha \neq 0$, tehát a mátrix determinánsa *nem* 0. Így az egyenletrendszernek egyértelműen létezik megoldása, amely megkereshető a Cramer-szabály segítségével. Ez a megoldás adja meg φ egyetlen fixpontját. Eddig csak a koordináta-rendszer alapvektorait választottuk meg speciálisan, a kezdőpontra nem tettünk semmilyen kikötést. Toljuk most el a koordináta-rendszer origóját ebbe a C fixpontba, azaz legyen $O = C$. Ekkor $O' = O$ miatt a φ egybevágóságot ebben a koordináta-rendszerben az

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

mátrixegyenlet írja le. Látható, hogy ez az egyenlet azt az egybevágóságot adja, amely megegyezik a z-tengely körüli α szögű ϱ elforgatás és a $z = 0$ egyenletű koordinátasíkra való τ tükrözés szorzatával, vagyis $\varphi = \tau \circ \varrho$. Ez pedig azt jelenti, hogy φ egy *forgatva tükrözés*.

Ezzel beláttuk a kimondott tételt. $\square$

Az előző két állításunk eredményét az alábbi tételbe foglalhatjuk össze.

3.3.3. Tétel. (Osztályozási tétel) *Legyen adott egy $\varphi\colon X \to X$ térbeli egybevágósági transzformáció.*

(1) Ha φ irányítástartó egybevágóság, akkor φ vagy eltolás, vagy tengely körüli elforgatás, vagy pedig csavarmozgás.

(2) Ha φ irányításváltó egybevágóság, akkor φ vagy síkra tükrözés, vagy csúsztatva tükrözés, vagy pedig forgatva tükrözés.

4. fejezet

Térbeli hasonlóságok analitikus tárgyalása

4.1. Hasonlóságok alapvető tulajdonságai

Ebben a szakaszban áttekintjük a hasonlóságokkal kapcsolatos alapfogalmakat.

4.1.1. Definíció. Térbeli *hasonlósági transzformáción* (vagy *hasonlóságon*) olyan $\eta\colon X \to X$ bijektív leképezést értünk, ahol van olyan $\lambda > 0$ szám, hogy tetszőleges $A, B \in X$ pontokra $d(\eta(A),\, \eta(B)) = \lambda \cdot d(A,\, B)$ teljesül.

4.1.2. Megjegyzés. A fenti definícióban szereplő $\lambda > 0$ számot az η hasonlóság *arányának* nevezzük. Ha $\lambda = 1$, akkor η egy egybevágóság.

4.1.3. Megjegyzés. Ha $\eta_1,\, \eta_2$ hasonlóságok a $\lambda_1,\, \lambda_2$ arányokkal, akkor az $\eta_2 \circ \eta_1$ szorzat egy $\lambda_1 \cdot \lambda_2$ arányú hasonlóság.

4.1.4. Definíció. Legyen $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ két adott alakzat. Ezek egymással *hasonlóak*, ha létezik olyan $\eta\colon X \to X$ hasonlósági transzformáció, amelyre $\eta(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$.

4.1.5. Megjegyzés. Az $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ hasonló alakzatokat $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$-vel jelöljük.

A hasonlóságok között igen fontosak a középpontos hasonlóságok.

4.1.6. Definíció. Legyen adott egy $O \in X$ pont és egy $\lambda \neq 0$ szám. Az O centrumú λ arányú *középpontos hasonlóságon* vagy *nyújtáson* egy olyan $\kappa\colon X \to X$ leképezést értünk, ahol $\kappa(O) = O$ és egy tetszőleges O-tól különböző $P \in X$ pont $\kappa(P) = P'$ képére igazak a következők:

(1) A P' pontnak az origótól mért távolsága $d(O, P') = |\lambda| \cdot d(O,\, P)$.

(2) Ha $\lambda > 0$, akkor P' rajta van az O kezdőpontú P-n átmenő félegyenesen.

(3) Ha $\lambda < 0$, akkor P' azon az O kezdőpontú félegyenesen van, amely ellentétes irányú az O-ból kiinduló és P-n áthaladó félegyenessel.

4.1.7. Megjegyzés. Legyen $\kappa\colon X \to X$ egy O centrumú középpontos hasonlóság a λ előjeles aránnyal. Ekkor a κ^{-1} inverz leképezés is egy középpontos hasonlóság az O centrummal és az $1/\lambda$ aránnyal.

A középpontos hasonlóság alapvető tulajdonságait írja le a következő tétel. Ennek bizonyítása megtalálható a [4] jegyzet 43. oldalán.

4.1.8. Tétel. *Az O centrumú és $\lambda \neq 0$ előjeles arányú $\kappa\colon X \to X$ középpontos hasonlóságra igazak a következő állítások:*

(1) κ egy $|\lambda|$ arányú hasonlósági transzformáció.

(2) Egyenes, szakasz, sík κ szerinti képe rendre vele párhuzamos egyenes, szakasz illetve sík.

(3) Ha $\lambda > 0$, akkor κ egy félegyenest azzal megegyező irányú félegyenesbe visz. $\lambda < 0$ esetén egy félegyenest azzal ellentétes irányú félegyenesbe képez.

(4) κ megőrzi a szögek mértékét.

A következő fontos tételnél már a bizonyítást is megadjuk.

4.1.9. Tétel. *Minden $\eta\colon X \to X$ hasonlósági transzformáció előáll egy egybevágóság valamint egy középpontos hasonlóság szorzataként.*

Bizonyítás. Legyen az η hasonlóság aránya λ. Legyen adott a térben egy O pont. Jelölje κ az O centrumú λ arányú középpontos hasonlóságot. Vegyük a $\varphi = \kappa^{-1} \circ \eta$ leképezést. Ekkor a 4.1.7. és a 4.1.3. Megjegyzések szerint φ egy hasonlóság, melynek aránya $\lambda \cdot 1/\lambda = 1$. Vagyis φ egy *egybevágóság*. Ekkor

$$\kappa \circ \varphi = \kappa \circ (\kappa^{-1} \circ \eta) = (\kappa \circ \kappa^{-1}) \circ \eta = id \circ \eta = \eta$$

mivel $\kappa \circ \kappa^{-1}$ szorzat az identikus leképezés.

Ezzel beláttuk, hogy minden hasonlósági transzformáció előáll egy egybevágóság és egy középpontos hasonlóság szorzataként. $\square$

4.2. Hasonlósági transzformációk típusai

Bevezetünk néhány elnevezést a szorzatként adódó hasonlóságokra vonatkozóan.

4.2.1. Definíció. Legyen adva a térben egy σ sík, azon egy O pont és egy $\lambda > 0$ szám. Ha a $\tau\colon X \to X$ leképezés a σ síkra történő tükrözés és $\kappa\colon X \to X$ az O centrumú, λ arányú középpontos hasonlóság, akkor a $\kappa \circ \tau$ szorzatot *tükrözve nyújtásnak* nevezzük.

4.2.2. Megjegyzés. Könnyen látható, hogy $\tau \circ \kappa = \kappa \circ \tau$, így *nyújtva tükrözésnek* is nevezhetjük a leképzést.

4.2.3. Definíció. Legyen $\varrho\colon X \to X$ egybevágóság egy elforgatás egy t egyenes körül valamely α $(\alpha \neq 0)$ szöggel, továbbá κ legyen egy olyan középpontos hasonlóság egy λ $(\lambda \neq \pm 1)$ előjeles aránnyal, melynek centruma a t egyenesen van. Ekkor az elforgatás és a középpontos hasonlóság $\kappa \circ \varrho$ szorzatát *forgatva nyújtásnak* mondjuk.

4.2.4. Megjegyzés. A térbeli forgatva nyújtás esetében tehát a középpontos hasonlóság λ előjeles aránya negatív is lehet. A $\varrho \circ \kappa$ forgatva nyújtás egy olyan hasonlóság, melynek aránya $|\lambda|$. Igazolható, hogy fennáll $\varrho \circ \kappa = \kappa \circ \varrho$.

4.3. Hasonlóságok analitikus leírása

Egy hasonlósági transzformáció is megőrzi az egyenesek párhuzamosságát, tehát parallelogrammát parallelogrammába képez. Emiatt a hasonlóságokra is értelmezhető az indukált leképezés éppen úgy, mint az egybevágóságok esetében.

4.3.1. Definíció. Legyen $\eta\colon X \to X$ egy hasonlósági transzformáció. Az η által a szabadvektorok terén *indukált leképezésnek* azt a $\hat{\eta}\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ függvényt nevezzük, amely esetén tetszőleges $A, B \in X$ pontokra $\hat{\eta}\left(\overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{\eta(A)\eta(B)} = \overrightarrow{A'B'}$ teljesül, ahol A', B' rendre az A és B pontok η szerinti képeit jelöli.

4.3.2. Megjegyzés. A hasonlóság szögtartása alapján belátható, hogy az $\hat{\eta}\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ indukált leképezés egy olyan lineáris izomorfizmus, ahol bármely $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ vektorok skaláris szorzatára igaz az $\langle \hat{\varphi}(\mathbf{u}), \hat{\varphi}(\mathbf{v}) \rangle = \lambda^2 \cdot \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ összefüggés, ahol λ a hasonlóság aránya.

4.3.3. Megjegyzés. Ha κ egy középpontos hasonlóság a λ előjeles aránnyal, akkor tetszőleges $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ esetén $\hat{\kappa}(\mathbf{u}) = \lambda \mathbf{u}$ teljesül.

A továbbiakban feltesszük, hogy a térben adva van egy derékszögű koordináta-rendszer, melynek O a kezdőpontja és $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ az alapvektorai.

Legyen adott egy η hasonlóság a $\lambda > 0$ aránnyal. A 4.1.9. Tétel alapján az η egyértelműen felírható az $\eta = \kappa \circ \varphi$ szorzat formájában, ahol κ az O centrumú $\lambda > 0$ arányú középpontos hasonlóság és $\varphi = \kappa^{-1} \circ \eta$ egy térbeli egybevágóság. Világos, hogy az $\eta = \kappa \circ \varphi$ miatt az indukált leképezésekre fennáll $\hat{\eta} = \hat{\kappa} \circ \hat{\varphi}$. Tehát ha $\hat{\varphi}$-t az $\mathbf{A}$ mátrix írja le az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ bázisban, akkor az $\hat{\eta}$ mátrixa $\widetilde{\mathbf{A}} = \lambda \cdot \mathbf{A}$. Már tudjuk, hogy a φ egybevágóság (2.2.1) egyenlettel írható le, amelyben az $\mathbf{A}$ mátrix szerepel és a $\varphi(O)$ pont (b_1, b_2, b_3) koordinátái.

Ha viszont a $P^e = \varphi(P)$ pont koordinátái $(x^e,\, y^e\, z^e)$, akkor a $P' = \eta(P) = \kappa(P^e)$ képpont koordinátái $(\lambda\, x^e,\, \lambda\, y^e,\, \lambda\, z^e)$, mert a κ centruma éppen az O kezdőpont. Azt kaptuk, hogy egy $P(x,\, y,\, z)$ pont $P' = \eta(P)$ képének az $(x',\, y',\, z')$ koordinátáit az alábbi egyenlet adja meg:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x^e \\ y^e \\ z^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda b_1 \\ \lambda b_2 \\ \lambda b_3 \end{pmatrix}$$

Ha bevezetjük az $\widetilde{a}_{rs} = \lambda a_{rs}$ és $\widetilde{b}_r = \lambda b_r$ $(r, s = 1,\, 2,\, 3)$ jelölést, akkor a fenti egyenlet alapján kimondható a következő állítás.

4.3.4. Állítás. *Az η hasonlóságnál egy tetszőleges $P(x, y, z)$ pont P' képének (x', y', z') koordinátáit megadja az*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{a}_{11} & \widetilde{a}_{12} & \widetilde{a}_{13} \\ \widetilde{a}_{21} & \widetilde{a}_{22} & \widetilde{a}_{23} \\ \widetilde{a}_{31} & \widetilde{a}_{32} & \widetilde{a}_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \widetilde{b}_1 \\ \widetilde{b}_2 \\ \widetilde{b}_3 \end{pmatrix} = \widetilde{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \widetilde{b}_1 \\ \widetilde{b}_2 \\ \widetilde{b}_3 \end{pmatrix}$$

mátrixegyenlet, ahol $\widetilde{\mathbf{A}}$ az $\hat{\eta}$ indukált leképezés mátrixa és $(\widetilde{b}_1, \widetilde{b}_2, \widetilde{b}_3)$ az $O' = \eta(O)$ pont koordinátái.

4.3.5. Megjegyzés. Könnyen belátható, hogy $\widetilde{\mathbf{A}} \cdot \widetilde{\mathbf{A}}^T = \lambda^2 \cdot \mathbf{I}$.

4.4. Hasonlóságok osztályozása

Először azt igazoljuk, hogy ha egy hasonlóság nem egybevágóság, akkor annak van fixpontja.

4.4.1. Tétel. *Legyen adott egy olyan $\eta\colon X \to X$ hasonlóság a λ aránnyal, amely* nem *egybevágóság. Ekkor η-nak egyértelműen létezik fixpontja.*

Bizonyítás. Az η-t leíró mátrixegyenlet szerint egy $P(x,\, y,\, z)$ pontnál a $P'(x',\, y',\, z')$ képpont koordinátáira fennáll

$$\begin{aligned} x' &= \widetilde{a}_{11}x + \widetilde{a}_{12}y + \widetilde{a}_{13}z + \widetilde{b}_1, \\ y' &= \widetilde{a}_{21}x + \widetilde{a}_{22}y + \widetilde{a}_{23}z + \widetilde{b}_2, \\ z' &= \widetilde{a}_{31}x + \widetilde{a}_{32}y + \widetilde{a}_{33}z + \widetilde{b}_3. \end{aligned}$$

Vegyünk egy $C(c_1, c_2, c_3)$ pontot. A C pont akkor és csak akkor fixpont, ha a koordinátái kielégítik az alábbi lineáris egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned} x &= \widetilde{a}_{11}x + \widetilde{a}_{12}y + \widetilde{a}_{13}z + \widetilde{b}_1 \\ y &= \widetilde{a}_{21}x + \widetilde{a}_{22}y + \widetilde{a}_{23}z + \widetilde{b}_2 \\ z &= \widetilde{a}_{31}x + \widetilde{a}_{32}y + \widetilde{a}_{33}z + \widetilde{b}_3 \end{aligned}\right\} \quad \text{átrendezve:} \quad \left.\begin{aligned} (\widetilde{a}_{11} - 1)x + \widetilde{a}_{12}y + \widetilde{a}_{13}z &= -\widetilde{b}_1 \\ \widetilde{a}_{21}x + (\widetilde{a}_{22} - 1)y + \widetilde{a}_{23}z &= -\widetilde{b}_2 \\ \widetilde{a}_{31}x + \widetilde{a}_{32}y + (\widetilde{a}_{33} - 1)z &= -\widetilde{b}_3 \end{aligned}\right\}$$

Ennek az $x,\ y,\ z$ ismeretlenekre vonatkozó egyenletrendszernek egyértelműen létezik megoldása a Cramer-szabály szerint, ha az együtthatókból képzett $\mathbf{B}$ mátrix determinánsa *nem* 0. Vizsgáljuk meg a $\mathbf{B} = \widetilde{\mathbf{A}} - \mathbf{I}$ mátrix determinánsát. Az η-t felírhatjuk egy λ arányú κ középpontos hasonlóság és egy φ egybevágóság szorzataként.

Korábban beláttuk a a 3.2.1. Tételben, hogy a $\hat{\varphi}$ indukált lineáris izomorfizmust reprezentáló mátrix egy alkalmas $\mathbf{e_1},\ \mathbf{e_2},\ \mathbf{e_3}$ ortonormált bázisban speciális alakú lesz. Válasszuk meg az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ alapvektorokat úgy, hogy $\mathbf{i} = \mathbf{e_1},\ \mathbf{j} = \mathbf{e_2}$ és $\mathbf{k} = \mathbf{e_3}$. Így az $\hat{\eta}$ indukált leképezést reprezentáló mátrix az alábbiak egyike:

$$\begin{pmatrix} \lambda\cos\alpha & -\lambda\sin\alpha & 0 \\ \lambda\sin\alpha & \lambda\cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \pm\lambda \end{pmatrix}.$$

Eszerint a $\mathbf{B}$ mátrixra fennáll

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \lambda\cos\alpha - 1 & -\lambda\sin\alpha & 0 \\ \lambda\sin\alpha & \lambda\cos\alpha - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm\lambda - 1 \end{pmatrix}.$$

Számítsuk ki a $\mathbf{B}$ mátrix determinánsát.

1. eset $\begin{vmatrix} \lambda\cos\alpha - 1 & -\lambda\sin\alpha & 0 \\ \lambda\sin\alpha & \lambda\cos\alpha - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)\cdot((\lambda\cos\alpha - 1)^2 + (\lambda\sin\alpha)^2)$

Egy szorzat akkor és csak akkor 0, ha valamelyik tényezője 0. A $\lambda - 1 = 0$ egyenlőségből $\lambda = 1$ adódik, de ez nem következhet be, mert η nem egybevágóság.

Tegyük fel, hogy $(\lambda\cos\alpha - 1)^2 + (\lambda\sin\alpha)^2 = 0$. A $\lambda > 0$ miatt ez csak úgy teljesülhet, hogy $\sin\alpha = 0$, vagyis $\cos\alpha = \pm 1$. Ekkor pedig fennáll $\lambda - 1 = 0$, amiből ismét adódik $\lambda = 1$, ami most nem állhat fenn.

2. eset Teljesen hasonlóan az előző esethez azt kapjuk, hogy a determináns akkor és csak akkor 0, ha $\lambda = 1$. Ez viszont nem lehetséges, mert η nem egybevágóság.

Tehát a $\mathbf{B}$ együtthatómátrix determinánsa sosem 0. Így egyértelműen létezik megoldása az egyenletrendszernek, amely megkereshető a Cramer-szabályt alkalmazva.

Ezzel beláttuk, hogy egyértelműen létezik fixpontja az η hasonlóságnak. $\square$

Definiáljuk, hogy egy hasonlósági transzformációt mikor mondunk irányítástartónak, illetve irányításváltónak.

4.4.2. Definíció. Legyen adott egy $\eta\colon X \to X$ hasonlóság. Ha az $\hat{\eta}$ indukált lineáris leképezés a jobbrendszert alkotó vektorhármasokat jobbrendszert adó vektorhármasokba képez, akkor az η hasonlósági transzformációt *irányítástartónak* nevezzük. Ha $\hat{\eta}$ felcseréli a jobb- és balrendszert alkotó vektorhármasokat, akkor a η-t *irányításváltónak* mondjuk.

4.4.3. Megjegyzés. Az η hasonlóság akkor irányítástartó, ha a $\hat{\eta}$ indukált leképezést leíró $\widetilde{\mathbf{A}}$ mátrix determinánsa pozitív. Ha a determináns negatív, akkor az η irányításváltó.

4.4.4. Megjegyzés. Legyen κ egy középpontos hasonlóság a λ előjeles aránnyal. A $\lambda > 0$ esetben a κ irányítástartó, a $\lambda < 0$ esetben irányításváltó.

4.4.5. Tétel. *Legyen adva egy olyan $\eta\colon X \to X$ hasonlóság a λ aránnyal, amely nem egybevágóság és nem középpontos hasonlóság. Ekkor az η egy forgatva nyújtás.*

Bizonyítás. A 4.4.1. Tétel szerint az η hasonlóságnak pontosan egy fixpontja van. Legyen ez a fixpont C. Két esetet különböztetünk meg.

1. eset Tegyük fel, hogy az η irányítástartó. Vegyük a κ középpontos hasonlóságot a C centrummal és a λ aránnyal. $\lambda > 0$ miatt κ és κ^{-1} irányítástartó hasonlóságok. Ekkor a $\kappa^{-1}\circ\eta = \varphi$ transzformáció egy olyan egybevágóság, amely szintén irányítástartó. Mivel a φ-nek a C fixpontja, így φ nem lehet eltolás vagy csavarmozgás. Ezért a φ egy elforgatás egy a C ponton átmenő t tengely körül. Látható, hogy $\kappa \circ \varphi = \kappa \circ (\kappa^{-1} \circ \eta) = (\kappa \circ \kappa^{-1}) \circ \eta = \eta$, vagyis η valóban egy forgatva nyújtás.

2. eset Legyen az η hasonlóság irányításváltó.

Vegyük most azt a κ középpontos hasonlóságot, amelynek C a centruma és az előjeles aránya $-\lambda$. Mivel most κ^{-1} és η egyaránt irányításváltó, a $\varphi = \kappa^{-1} \circ \eta$ egybevágósági transzformáció irányítástartó lesz. Emiatt, akárcsak az előbbi esetben, φ egy elforgatás lesz egy t tengely körül. Hasonlóan kapjuk, hogy igaz $\eta = \kappa \circ \varphi$, tehát η egy forgatva nyújtás.

Ezzel beláttuk a tételt. $\square$

4.4.6. Megjegyzés. Az irányításváltó hasonlóságok tehát olyan forgatva nyújtások, amelyeknél a középpontos hasonlóság előjeles aránya negatív.

4.4.7. Megjegyzés. A tükrözve nyújtások is előállnak forgatva nyújtásként úgy, hogy az elforgatás szöge éppen π.

Végül kimondjuk a térbeli hasonlóságokra vonatkozó osztályozási tételt, ami következik az előbbi tételből.

4.4.8. Tétel. (Osztályozási tétel) *Legyen $\eta\colon X \to X$ egy hasonlósági transzformáció a térben. Ekkor az η vagy egy egybevágóság, vagy egy középpontos hasonlóság, vagy pedig egy forgatva nyújtás.*

Irodalomjegyzék

[1] Freud Róbert: *Lineáris algebra*, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2006.

[2] Hajós György: *Bevezetés a geometriába*, Nemzeti Tankönyvkiadó Rt., Budapest, 1999.

[3] Reiman István: *A geometria és határterületei*, Gondolat Kiadó, Budapest, 1986.

[4] Verhóczki László: *Euklideszi geometria*, Budapest, 2012, elektronikusan elérhető jegyzet http://www.cs.elte.hu/geometry/vl/EukGeoJe.pdf