

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR, Matematikai Intézet



Gellér Barnabás

HÁROMSZÖGKÖZÉPPONTOK BARICENTRIKUS KOORDINÁTÁI

Matematika BSc szakdolgozat

2015

Témavezető:

Lakos Gyula

Az ELTE Geometriai Tanszék adjunktusa

The only angle to approach a problem from is the try-angle.

A problémák látószöge a próbálom-szög.

Anonymus

Do... Or do not. There is no try.

Tenni vagy nem tenni, nem próbálom.

Yoda¹

¹ Extragalaktikus szuperhős [25]

Előszó

Terünk egyszerűbb elemeit vagy testek egyszerűsített vázát gyakran síkok és egyenesek segítségével vizsgáljuk, hiszen így is kellően hű képet alkothatunk magukról a testekről. Még e kényelem folytán is találkozunk számos – eddig ismeretlen jelenséggel, melyek vizsgálata gyakran új, kevésbé általános szabályosságokat eredményez.

Idézzük fel, milyen csodálat övezhette a legegyszerűbb síkidomokat a görög filozófusok közt: minél inkább különbözőnek tűntek ezek a háromszögek, annál szabályosabb lett az őket körülvevő szabályhalmaz. Számtalan nézőpont megannyi eredményt adott ugyanarra, legyen szó a háromszög területéről, szögei és oldalai között levő összefüggésekről, a magasságvonalak közös metszéspontjáról vagy éppen arról, más sokszögek hogyan bonthatók fel háromszögekre.

Szakedolgozatom fő célja a háromszögekre közösen jellemző ismert speciális pontok bemutatása és ismeretlenek keresése. Elhelyezkedésük kvantifikálására egy hatékony rendszerezést ad a baricentrikus koordináta-rendszer, melyben távolságok helyett arányok mérőszámai azonosítják ezeket a pontokat és a háromszög síkjának egyeneseit. Adott pontok efféle arányszámainak vizsgálatakor számos pont kiemelkedik a többi közül, mint például az, melyben ezek az arányok azonosak; ahol az egyik a másik kettő összegével egyenlő, vagy éppen mind a háromszög oldalhosszainak segítségével egyszerűen kifejezhető. Természetesen van néhány pont, melyek már a középiskolai tanulmányok során is kihagyhatatlanul fontosak, ugyanakkor további összefüggések vizsgálatával igazolást nyer e pontok rendszerezésének szignifikanciája is.

Köszönöm Lakos Gyulának, témavezetőmnek, hogy előadásaival, konzultációival segített túljutni a bizonytalansági fázisokon; kellő információt adott, hogy felkeltse érdeklődésem a téma iránt és fel is dolgozhassam azt. További köszönettel tartozom családomnak, akik megértően fordultak hozzám a nehezebb pillanatokban is. Végül szeretném kiemelni Clark Kimberlinget, aki a témában szerzett könyvében [13] rendszerezni kezdte a háromszögek középpontokat és e pontok enciklopédiáját elérhetővé tette [23].

Tartalomjegyzék

Előszó	-3-
Tartalomjegyzék	-4-
1 Bevezetés	-6-
1.1 A koordináta-rendszerekről általában.....	- 6 -
1.2 A homogén koordináta-rendszerek.....	- 7 -
1.3 A baricentrikus koordináta-rendszer	- 8 -
1.4 A trilineárisokról	- 10 -
1.5 Általános pont baricentrikája.....	- 11 -
1.6 Egyenesek baricentrikus koordinátái.....	- 12 -
1.7 Illeszkedési tulajdonságok.....	- 13 -
2 Háromszöközpontok kiértékeléséhez szükséges tételek	- 14-
2.1 Osztóviszony, kettősviszony, harmonikus konjugált	- 14 -
2.2 Konkurrencia baricentrikával	- 15 -
2.3 Szögekre vonatkozó Ceva-tétel	- 16 -
2.4 Izotomikus konjugált.....	- 18 -
2.5 Izogonális konjugált	- 19 -
2.6 Apollóniosz-körök.....	- 20 -
3 Háromszöközpontok	- 21-
3.1 A háromszöközpont fogalma	- 21 -
3.2 $X(1)$ – Beírható kör középpontja	- 22 -
3.3 $X(2)$ – Súlypont	- 24 -
3.4 $X(3)$ – Körülírt kör középpontja	- 26 -
3.5 $X(4)$ – Magasságpont.....	- 28 -
3.6 $X(7)$ – Gergonne pont.....	- 30 -
3.7 $X(8)$ – Nagel pont	- 32 -
3.8 $X(6)$ – Szimmedián pont (Lemoine vagy Grebe pont)	- 33 -
3.9 $X(15), X(16)$ - Izodinamikus pontok	- 34 -
3.10 Az Euler-egyenes	- 36 -
3.11 A Nagel-egyenes	- 37 -
4 Kísérletek új pont felfedezésére	- 38-
4.1 Képletes középpontok	- 39 -
4.2 Konjugáltak keresése.....	- 40 -
4.3 Trial and error: $X(177)$ – Első félkörív pont	- 41 -
5 Kitekintés - Kvadrifigurák	- 42-

6	Függelék	-43-
6.1	Alapvető tételek.....	- 43 -
6.2	A 3.10-ben szereplő H, O baricentrikák normáltjai.....	- 44 -
6.3	Előzmény 6.4-hez és 6.5-höz	- 45 -
6.4	Az 1.3.5-ös tétel bizonyítása	- 46 -
6.5	Az 1.6.2-es tétel bizonyítása	- 47 -
6.6	Menelaosz-tétel	- 48 -
6.7	Ceva-tétel	- 49 -
6.8	Az Apollóniosz-kör létezésének bizonyítása	- 49 -
6.9	A 2.4.4 és 2.4.5-ös tételek bizonyítása.....	- 50 -
6.10	A 2.5.4 és 2.5.5-ös tételek bizonyítása.....	- 51 -
7	Felhasznált Irodalom	- 52 -
7.1	Elsődleges források:	- 52 -
7.2	Egyéb hivatkozások:	- 52 -

1 Bevezetés

1.1 A koordináta-rendszerekről általában

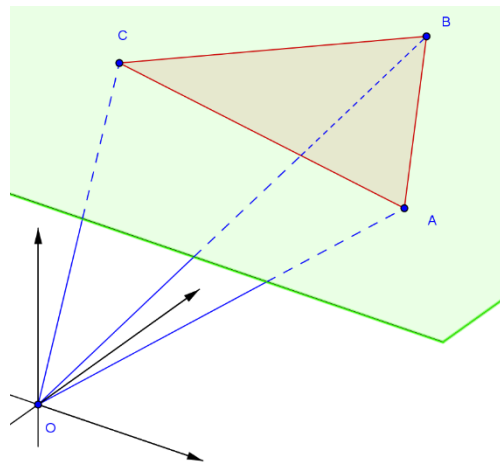
Olyan esetekben, amikor különböző testek, síkidomok geometriai sajátosságait szeretnénk leírni, előnyös egy olyan vonatkoztatási rendszert választanunk, melyben adatainkból a számunkra szükséges információt nyerhetjük ki. Ezek a rendszerek általában az elhelyezkedést leíró rendezett számtöbbségből állnak, melyek közül gyakran egy pontot, mint viszonyítási pontot (origó) emelhetünk ki.

Bár maga a ponthalmaz dimenziója is felosztja a különböző rendszereket, csoportosíthatjuk őket a koordináták mértéke és jellemzői szerint. Eszerint megkülönböztethetünk:

- *Affin koordináta-rendszereket*, melyekben a koordinátákat egy viszonyítási ponttól való vektortávolságként értelmezzük. Kiemelkedően fontos a Descartes-féle koordináta-rendszer úgy kettő, mint három dimenziós esetben;
- *Poláris koordináta-rendszereket*, ahol az origótól való távolságon kívül szögek segítségével adhatjuk meg adott pont koordinátáit (pl.: henger koordináta-rendszer, gömbi koordináta-rendszer);
- *Homogén koordináta-rendszereket*, ahol a koordináták inkább arány- illetve viszonzszámok, mintsem tényleges méretek;
- *További, speciális koordináta-rendszereket*, melyek bizonyos felületek vagy más térbeli elemek vizsgálatára szolgálnak, mint például a földrajzi vagy csillagászati koordináták.

1.2 A homogén koordináta-rendszerek

Habár Desargues már a 17. században írta a párhuzamos egyenesek végtelen távoli közös pontjáról és Jean-Victor Poncelet 1822-ben publikálta a projektív geometria megalapozásaként szolgáló *Értekezés az alakzatok projektív tulajdonságairól* [1] c. művét, elsőként August Ferdinand Möbius és Julius Plücker 1827/28-as tudományos munkáiban [2], [3] találunk példát olyan koordináta-rendszerekre, melyek segítségével a végtelen távol levő pontokat is véges számok kombinációjával ábrázolhatjuk.



1.1. ábra - A sík projektív értelmezései

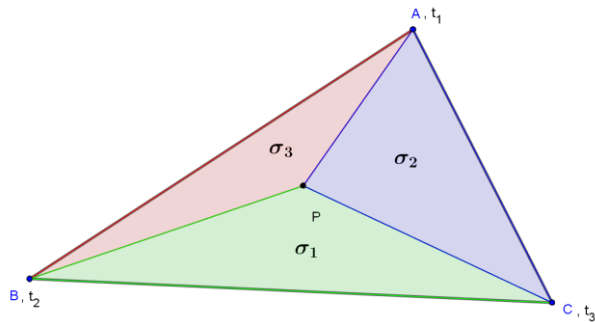
Plücker homogén koordinátái [4] lehetővé tették Poncelet paradoxonjának [9] feloldását, mely fő problémaköre az egymást metsző egyenesek „párhuzamosítása” közben „eltűnő” metszéspont helyzetének meghatározása volt. A projektív geometria szintetikus bevezetése során Poncelet említést tesz arról, hogy a párhuzamos egyeneseknek van metszéspontja s azt is tudjuk, hogy ez a pont a végtelenben van, mégsem azonosíthatjuk mindegyiket egy, „a végtelen pont”-ként, hiszen akkor a metsző egyenesek közös pontja is lenne, ami az alapvető geometriai elképzelések újragondolását tenné szükségessé. Ahogy ma ismeretes, a projektív geometriában ezeket az ideálisnak tekintett, végtelenben levő pontokat a rajtuk átmenő egyenesek közös irányával azonosítjuk és megjegyezzük, hogy két ellentétes irányú vektor esetén az általuk reprezentált ideális pontok egymással azonosak [21].

A megoldást szolgáltató koordináta-rendszer homogén elnevezése abból adódik, hogy ha egy tetszőleges pont koordinátáit ugyanazon nemnulla skalárral szorozzuk, az új koordináták ugyanazt a pontot adják. Hasonlóan homogén koordináta-rendszer a későbbiekben bemutatott baricentrikus és trilineáris koordináta-rendszer.

1.2.1 Definíció: A projektív sík rendszereit értelmezhetjük elemeinek ekvivalenciaosztályaival. \mathbb{R}^3 egy nemnulla elemére jelölje $(x_1, y_1, z_1) \sim (x_2, y_2, z_2)$, hogy létezik egy $\lambda \neq 0$, hogy $(x_1, y_1, z_1) = (\lambda x_2, \lambda y_2, \lambda z_2)$. Ekkor a fenti \sim egy ekvivalencia reláció és a projektív sík az $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ekvivalencia osztályai. Ha (x, y, z) egy \mathbf{p} osztály eleme, akkor ezek \mathbf{p} homogén koordinátái.

1.3 A baricentrikus koordináta-rendszer

A sík pontjainak efféle jellemzését August Ferdinand Möbius munkájaként tartjuk számon; az 1827-ben megjelent *Der barycentrische Calcul* [2] c. művében, ahol a rendszer bevezetésével egyben a kettősviszony fogalmáról is olvashatunk.



1.2. ábra - A baricentrikus koordináta-rendszer

1.3.1 Definíció: Legyenek x_1, x_2, x_3 egy nem elfajuló háromszög csúcsainak koordinátái a síkban. Ha a sík egy P pontjára teljesül, hogy $P = \frac{t_1 x_1 + t_2 x_2 + t_3 x_3}{t_1 + t_2 + t_3}$, ahol $t_1 + t_2 + t_3 \neq 0$, azaz P az A, B, C csúcsok t_1, t_2, t_3 súlyokkal képzett súlypontja, akkor P baricentrikus koordinátái $(t_1 : t_2 : t_3)_b$. A csúcsok koordinátái ekkor

$$x_1 = (1 : 0 : 0)_b, x_2 = (0 : 1 : 0)_b, x_3 = (0 : 0 : 1)_b.$$

Mint látható, egy pont efféle baricentrikus koordinátái homogének. Ahhoz, hogy adott ponthoz pontosan egy rendezett számtöbbs tartozzon, bevezetjük a normált baricentrikus koordinátákat a $\sum t_i = 1$ megszorítással. A különböző koordináták megkülönböztetése érdekében jelölje $(t_1, t_2, t_3)_b$ egy pont normált baricentrikus koordinátáit és $(t_1 : t_2 : t_3)_b$ ugyanazon pont általános baricentrikus koordinátáit [12].

1.3.2 Megjegyzés: Amennyiben csak nemnegatív súlyokat engedünk meg, az így leírható pontok halmaza a háromszög konvex burka, vagyis oldalai és az oldalakkal közrefogott terület.

A projektív sík hagyományos koordináta-rendszerére gondolhatunk, mint az i, j, k egymásra merőleges egységvektorokból, bázisvektorokként és egy - nem a síkon elhelyezkedő - megválasztott viszonyítási pontból álló vonatkoztatási rendszerre. A vizsgált sík azonosítható például a $z = 1$ egyenlettel megadott síkkal, míg az origó az $x = y = z = 0$ pont. A sík pontjait ekkor $(x : y : 1) = \left(\frac{x_1}{x_3} : \frac{x_2}{x_3} : 1\right)$ alakban írhatjuk fel, míg ideális pontról akkor beszélünk, ha az utolsó koordináta 0. A most bevezetett koordináta-rendszerben az ideális pontok értelmezéséhez a 0 koordinátaösszeg megengedése szükséges. Az így előálló $(t_1 : t_2 : t_3)_b$ pontok, ahol $t_1 + t_2 + t_3 = 0$ az ideális pontok, sőt ekkor ez a koordinátahármas egyben a $t_1 x_1 + t_2 x_2 + t_3 x_3$ eltolásvektort is reprezentálja.

Utóbbi megállapítás megértéséhez tekintsük a $P = (p_1, p_2, p_3)_b$ és $Q = (q_1, q_2, q_3)_b$ normált baricentrikus koordinátákkal adott pontokat és keressük azt a vektort, mely P -t Q -ba viszi. Ez nyilván a $\overrightarrow{PQ} = \langle q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3 \rangle_b$, hiszen $P + \overrightarrow{PQ} = Q$.

1.3.3 Észrevétel: Minthogy $\sum p_i = \sum q_i = 1$, a vektorok koordinátaösszegére 0 adódik.

1.3.4 Következmény: Egyrészt $A = (1,0,0)_b$, továbbá $B = (0,1,0)_b$, így $\overrightarrow{AB} = \langle -1,1,0 \rangle_b$.

Későbbi fejezetekben láthatjuk, hogy egyenesek merőlegességét ellenőrizhetjük az őket reprezentáló vektorok segítségével, most viszont megmutatjuk, hogy egy vektor hosszát is könnyen számíthatjuk ezekből a koordinátákból.

1.3.5 Tétel²: A $\overrightarrow{PQ} = \langle x, y, z \rangle_b$ vektor hosszára

$$|\overrightarrow{PQ}|^2 = -a^2yz - b^2xz - c^2xy,$$

ahol a, b, c az alapháromszög megfelelő oldalainak hossza.

(Ez a speciális kvadratikus alak tehát megadja a koordináta-rendszerünkben az euklideszi metrikát.)

1.3.6 Következmény: Az $\overrightarrow{AB} = \langle -1,1,0 \rangle_b$ vektor hossza c , hiszen

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = -a^2 \cdot 0 - b^2 \cdot 0 - c^2 \cdot (-1) = c^2.$$

1.3.7 Kiegészítés: Ha a csúcsokban elhelyezett súlyok helyett a háromszög három részre bontásakor létrejövő kisebb háromszögek ($\Delta PBC, \Delta PCA, \Delta PAB$) területeinek euklideszi mértékét tekintjük és jelöljük $\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c$ alakban, – összegük, az ΔABC háromszög területe pedig legyen σ , - akkor a $(\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c)$ számhármast a P pont ΔABC háromszögre vonatkozó *areális koordinátáinak* nevezzük. A $\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c$ értékek pozitívak, ha az általuk reprezentált háromszögek irányítása az ΔABC háromszöggel megegyező és negatív ellenkező esetben. Amennyiben a háromszög terület $\sigma = 1$ egység, egy pont areális (vagy területi) koordinátái megegyeznek annak normált baricentrikus koordinátaival [19].

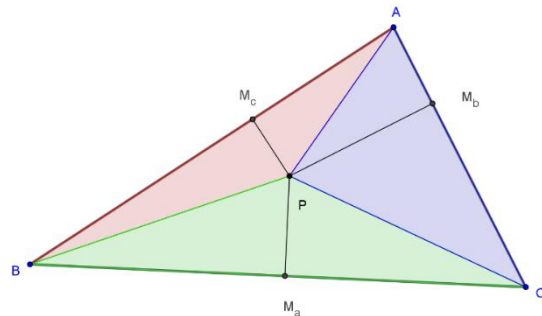
További kényelmi elnevezésként bevezetem a *baricentrika* kifejezést, mely a sík egy pontjának általános baricentrikus koordinátáit jelenti, valamint az A, B, C az alapháromszög csúcsait, a, b, c a megfelelő oldalak hosszát, α, β, γ pedig a háromszög belső szögeit jelöli.

² A tétel bizonyítása és a szükséges előzmények megtalálhatóak a függelékben.

1.4 A trilineárisokról

A baricentrikus koordináta-rendszer mellett gyakran használunk egy másik – hasonlóan homogenizálható – koordináta-rendszert, melyet *trilineáris koordináta-rendszernek* nevezünk. Bevezetése Plücker 1830-as művétől [4] datálható. Míg a baricentrikus koordináták esetében egy pontnál tulajdonképpen azt vizsgáltuk, hogy az alapháromszög csúcaiban milyen súlyokkal egyensúlyozhatjuk ki a háromszöget, a trilineáris koordinátáknál e súlyokat az oldalegyeneseken értelmezzük homogén eloszlásban.

Miként a baricentrikus koordináták euklideszi értelmezéséhez az areális koordinátákon keresztül jutottunk el, a trilineáris koordinátákat is hasonlóan definiálhatjuk:



1.3. ábra - A trilineáris koordináta-rendszer

1.4.1 Definíció: Tekintsük a P pont merőleges vetületeit az $\triangle ABC$ háromszög oldalaira és legyenek ezek rendre M_a, M_b, M_c . A háromszög oldalai a síkot két-két részre bontják. Adott $|PM_x|$ távolság előjelét aszerint határozzuk meg, hogy a szóban forgó oldalegyenes melyik felén található, azaz abban az esetben, amikor a háromszöggel azonos oldalán szerepel, legyen a távolság pozitív, másik esetben negatív. Az ily módon előállított három előjeles euklideszi mérték arányát nevezzük valódi trilineáris koordinátáknak. Ezzel a módszerrel a sík minden pontját egyértelműen írhatjuk fel.

1.4.2 Észrevétel: Könnyen látható, hogy egy pont trilineárisa és baricentrikája között oldalszoros multiplikatívitas figyelhető meg, azaz ha egy pont trilineáris koordinátái $(x:y:z)_t$, akkor baricentrikája $(ax:by:cz)_b$. Az átalakítás nyilván a másik irányba is megtehető. Mivel a két koordináta-rendszer közötti átváltás meglehetősen egyszerű, adott pontok koordinátázását érdemes csak az egyikben kiszámolni, majd átváltani a másikba.

1.4.3 Megjegyzés: Természetesen a baricentrikus koordináta-rendszerhez hasonlóan a trilineárisok is kiterjeszthetők a projektív síkra, a korábban bemutatott lineáris kombinációhoz és kikötésekhez hasonló eszközökkel, de a terjedelemre való tekintettel szakdolgozatomban erre mélyebben nem térek ki.

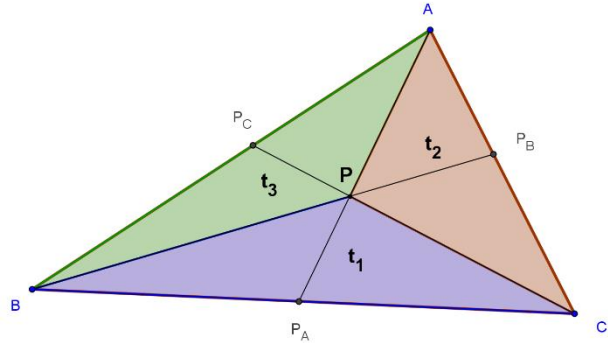
1.5 Általános pont baricentrikája

Vizsgáljuk meg, miként írható fel egy tetszőleges \mathbf{P} pont a csúcsok vektorainak segítségével. Legyenek az A, B, C csúcsokba mutató vektorok rendre $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$ és fejezzük ki a csúcsokból \mathbf{P} -re állított transzverzálisok oldalakkal való metszéspontjait (rendre P_A, P_B, P_C), továbbá jelöljük t_1, t_2, t_3 -mal a \mathbf{P} két-két csúcspárral alkotott háromszögeinek területét. Mivel

$$\frac{T(ABP)}{T(CAP)} = \frac{t_3}{t_2} = \frac{T(ABP_A)}{T(CAP_A)},$$

ezért a BC oldalt a P_A metszéspont szintén $\frac{t_3}{t_2}$ arányban osztja fel. Ebből adódóan egy csúccsal szemközti metszéspont koordinátái felírhatóak például

$$P_A = \frac{t_2 \hat{b} + t_3 \hat{c}}{t_2 + t_3}$$



1.4. ábra - Egy pont baricentrikája

alakban. Miután ismerjük az A csúcs és a P_A metszéspontok koordinátáit, \mathbf{P} kifejezéséhez az AP, PP_A szakaszok arányára van szükségünk. Erről tudjuk, hogy azonos a ΔCAP_A háromszög CP transzverzálisával való felbontásakor keletkező két kisebb háromszög területének arányával, azaz $\frac{CP}{CP_A} = \frac{T(CAP)}{T(CPP_A)}$. Mivel, $T(\Delta CAP) = t_2$, míg $T(\Delta CPP_A) = t_1 \frac{t_2}{t_2+t_3}$, a ΔBCP háromszögben megállapított $\frac{BP_A}{P_A C}$ aránnyal egybekötött $\frac{T(BP_A P)}{T(P_A C P)}$ arányosság szerint. A kifejezést átrendezve tetszőleges \mathbf{P} pont távolsága A -tól illetve P_A -tól $\frac{t_2+t_3}{t_1}$ arányban fekszik.

1.5.1 Következmény:

$$\hat{p} = \frac{t_1 \hat{a} + t_2 \hat{b} + t_3 \hat{c}}{t_1 + t_2 + t_3}.$$

1.5.2 Észrevétel: Az ΔABC BP és CP szakaszokkal való felbontását tekintve azonnal adódik, hogy ΔBCP aránya a fennmaradó részhez $\frac{t_2+t_3}{t_1} = \frac{AP}{PP_A}$.

1.5.3 Megjegyzés: A fent leírt vizsgálat nem tér ki külső \mathbf{P} pont esetére, de könnyen meggondolható, hogy ilyenkor a kis háromszögek területét negatív előjellel véve e pontok koordinátái diszjunktak a belső- és határpontok koordinátáitól [11].

1.6 Egyenesek baricentrikus koordinátái

A pontok ábrázolásával hasonló módon jellemezhetjük a sík egyeneseit is baricentrikus koordinátákkal. A hagyományos projektív koordináta-rendszerben (i, j, k) bázisvektorok) egy $(x_1 : x_2 : x_3)$ pont pontosan akkor illeszkedik az $(a_1 : a_2 : a_3)'$ egyenesre, ha $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$, tehát $(a_1 : a_2 : a_3)'$ kijelöl egy lineáris $\mathbf{2}$ -alteret \mathbb{R}^3 -ban. A baricentrikus koordináta-rendszerben hasonlóan azt mondjuk, hogy egy $(t_1 : t_2 : t_3)_b$ pont akkor illeszkedik az $(a_1 : a_2 : a_3)'_b$ egyenesre, ha $a_1t_1 + a_2t_2 + a_3t_3 = 0$, tehát megjegyezzük: a pont és egyenes illeszkedése ekvivalens jelzővektoraik skalárszorzatának nullításával.

Míg korábban az $(1 : 0 : 0)'$, $(0 : 1 : 0)'$ és $(0 : 0 : 1)'$ rendre a sík két koordináta-tengelyét (x, y) és az ideális egyenest adta meg, most ezek a háromszög a , b és c oldalainak egyeneseit reprezentálják. Ennek ellenőrzésére tekintsük például az $A = (1 : 0 : 0)_b$ és $B = (0 : 1 : 0)_b$ csúcsok illeszkedését a c oldalt reprezentáló $(0 : 0 : 1)'_b$ egyenesre. Könnyen látható, hogy a csúcsok vektorainak skalárszorzata az oldallal mindkét esetben 0, így $(0 : 0 : 1)'_b$ nem lehet más, mint az A, B csúcsok által kijelölt egyenes, azaz a c oldal.

1.6.1 Kiegészítés: A $c = (0 : 0 : 1)'_b$ oldal egyenese felírható $x_3 = 0$ egyenlet formájában, hiszen pontosan az ezt teljesítő $(x_1 : x_2 : 0)_b$ pontok illeszkednek rá.

Az egyenesek közötti összefüggések közül kiemelkedik az a vizsgálat, hogy két egyenes egymásra merőleges-e. Ennek ellenőrzésére használhatjuk az egyenesek irányvektorait.

1.6.2 Tétel³: Legyenek $\overrightarrow{PQ} = \langle x_1, y_1, z_1 \rangle_b$ és $\overrightarrow{MN} = \langle x_2, y_2, z_2 \rangle_b$, ekkor

$$\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{MN} \Leftrightarrow a^2(y_1z_2 + z_1y_2) + b^2(z_1x_2 + x_1z_2) + c^2(x_1y_2 + x_2y_1) = 0.$$

1.6.3 Megjegyzés: Az egyenlet rövid tanulmányozásából arra következtethetünk, hogy vektorok merőlegességére akkor is fennáll a fenti ekvivalencia, ha ezek nem egység-hosszúak, hanem „csak irányok”, hiszen az egyenlet bal oldalán minden tényező a két vektor egyes koordinátáinak szorzataként áll elő, melyekből – ha $\overrightarrow{PQ} = \lambda \langle x_1, y_1, z_1 \rangle_b$ és $\overrightarrow{MN} = \mu \langle x_2, y_2, z_2 \rangle_b$ – a $\lambda\mu$ konstans kiemelhető.

³ A tétel bizonyítása és a szükséges előzmények megtalálhatóak a függelékben.

1.7 Illeszkedési tulajdonságok

Ebben a rövid fejezetben pontok és egyenesek egymásra való illeszkedéséről tesztek néhány megállapítást a teljesség igénye nélkül.

1.7.1 Tétel: *A projektív sík ideális egyenesének baricentrikus koordinátái*
$$(a : a : a)'_b = (1 : 1 : 1)'_b.$$

Bizonyítás: A két koordinátahármas egyenlősége a rendszer homogenitásából következik. Vizsgáljuk meg, hogy egy $(t_1 : t_2 : t_3)$ pont mikor illeszkedik erre az egyenesre. A skalárszorzat definíciója alapján pontosan akkor, ha $t_1 + t_2 + t_3 = 0$, mely egyenletet pontosan az ideális pontok baricentrikái elégítik ki.

1.7.2 Megjegyzés: Amennyiben a koordinátázást az affín sík elemeire szeretnénk korlátozni, a szükséges kikötés az, hogy az egyenes koordinátái nem lehetnek mindhárman azonosak.

1.7.3 Tétel: *Az $[x]_b = (x_1 : x_2 : x_3)_b$ és $[y]_b = (y_1 : y_2 : y_3)_b$ egymástól különböző pontokra illeszkedő egyenes $[x \times y]'_b$.*

Bizonyítás: $[x]_b$ illeszkedik $[x \times y]'_b$ -re, mivel $\mathbf{x}(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = -\mathbf{y}(\mathbf{x} \times \mathbf{x}) = 0$ és analóg módon $[y]_b$ is illeszkedik $[x \times y]'_b$ -re, mivel $\mathbf{y}(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = \mathbf{x}(\mathbf{y} \times \mathbf{y}) = 0$.

1.7.4 Tétel: *Az $[\mathbf{u}]'_b = (u_1 : u_2 : u_3)'_b$ és $[\mathbf{v}]'_b = (v_1 : v_2 : v_3)'_b$ egyenesek közös metszéspontja $[\mathbf{u} \times \mathbf{v}]_b$.*

Bizonyítás: 1.7.3-mal analóg módon.

1.7.5 Tétel: *Az $[x]_b, [y]_b, [z]_b$ páronként különböző pontok akkor és csak akkor illeszkednek egy egyenesre, ha $\mathbf{x}\mathbf{y}\mathbf{z} = 0$.*

Bizonyítás: Az $[x]_b, [y]_b$ pontokra illeszkedő egyenes $[x \times y]'_b$, melyre $[z]_b$ illeszkedik, ha $\mathbf{z}(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = 0 = (\mathbf{x} \times \mathbf{y})\mathbf{z}$.

1.7.6 Tétel: *Az $[\mathbf{u}]'_b, [\mathbf{v}]'_b, [\mathbf{w}]'_b$ egyenesek akkor és csak akkor tartoznak egy sugársorhoz, ha $\mathbf{u}\mathbf{v}\mathbf{w} = 0$.*

Bizonyítás: 1.7.5-tel analóg módon.

2 Háromszögek középpontok kiértékeléséhez szükséges tételek

2.1 Osztóviszony, kettősviszony, harmonikus konjugált

Adott háromszögek középpontok vizsgálatakor, illetve egymással való összevetésük esetén számos szabályosságot állapíthatunk meg bizonyos távolságok arányának ismeretében, ezért először definiálunk néhány szükséges fogalmat a további tételek kimondásához.

2.1.1 Definíció: Egy egyeneshez tartozó A, B, C pontok osztóviszonya $(ABC) = \frac{AC}{CB}$, ahol AC és CB a két-két pont előjeles távolsága, azaz $AC = |\overrightarrow{AC}|$ és $CB = |\overrightarrow{CB}|$.

2.1.2 Megjegyzés: A baricentrikus koordináta-rendszer homogenitásából következően általában szakaszoknak nem konkrét távolságát számoljuk, hanem csak ezek arányát kvantifikáljuk, ezért kiváltképp praktikus, ha tételeket is ezek segítségével tudunk kimondani

2.1.3 Definíció: Egy egyenesre illeszkedő A, B, C, D pontok kettősviszonya

$$(ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)}.$$

2.1.4 Definíció: Gyakori eset, hogy $(ABCD) = -1$. Ekkor azt mondjuk, hogy A, B, C, D harmonikus pontnégyes, illetve C a D pont harmonikus konjugáltja az A, B pontokra nézve.

2.1.5 Megjegyzés: Ilyenkor nyilván $(ABC) = -(ABD)$, továbbá C az AB szakaszon belül helyezkedik el, míg D ezen kívül.

2.1.6 Megjegyzés: Amennyiben a harmonikus konjugáltat az $(ABC) = -(ABD)$ egyenlőséggel definiáljuk, értelmezhető például az $(ABB) = 0 = -(ABB)$ eset is.

2.1.7 Kiegészítés: Egy D ideális pont esetén alkalmazható az $(ABD) = -1$ konvenció, valamint gondoljuk meg, hogy az AB szakasz C felezőpontjára $(ABC) = 1$, tehát egy szakasz felezőpontjának harmonikus konjugáltja éppen az egyenes ideális pontja.

2.1.8 Megjegyzés: Az eddig tett megállapításokból következtethetünk arra, hogy a harmonikus konjugáció tulajdonképpen az inverzviszony egydimenziós esete, ahol az AB szakaszra, mint a gömb átmérőjére tekintünk.

2.2 Konkurrencia baricentrikával

A háromszögek középpontok létezésének bizonyítására jellemző, hogy a baricentrikus koordináták ismerete nélkül, pusztán az oldalakat kettéválasztó pontokkal – illetve e felbontások arányával – állapítjuk meg, hogy valóban egy ponton átmenő transzverzálisok metszéspontjai. Ennek ellenőrzésére kézenfekvő lehetőséget biztosít a síkgeometriában Ceva tételeként ismert összefüggés, mely szinte adódik a baricentrikus koordináta-rendszer definíciójából.

2.2.1 Tétel: Szükséges és elégséges feltétel ahhoz, hogy az AP_A, BP_B, CP_C – egymással nem párhuzamos - egyenesek egy pontban messék egymást az, hogy

$(ABP_C)(BCP_A)(CAP_B) = 1$, tehát

$$\frac{AP_C}{P_CB} \cdot \frac{BP_A}{P_AC} \cdot \frac{CP_B}{P_BA} = 1,$$

ahol az A, B, C, P_A, P_B, P_C páronként különböző pontok.

Bizonyítás⁴: Tekintsünk vissza arra az összefüggésre, hogy a P_A, P_B, P_C pontok az oldalakat a másik két oldalhoz tartozó háromszögek területének (vagy a csúcsokban elhelyezett súlyok) arányában osztják fel és ez alapján írjuk át az egyenletet:

$$\frac{t_2}{t_1} \cdot \frac{t_3}{t_2} \cdot \frac{t_1}{t_3} = 1.$$

Gondoljuk meg továbbá, hogy tetszőleges t_1, t_2, t_3 hármas a baricentrikus koordináta-rendszer definíciójából következően egyértelműen meghatározza a sík egy adott pontját, melyen keresztül a csúcsokból pontosan egy-egy egyenes megy át, így a P_A, P_B, P_C pontok is egyértelműek.

2.2.2 Kiegészítés: A 2.1.7-ben tett konvenció alapján D ideális pont esetén $(ABD) = -1$, így a tétel kiterjeszhető olyan esetekre is, ahol két egyenes párhuzamos egymással, így kapva a Ceva-tétel általános alakját, mely tetszőleges egyenesek sugársorhoz való tartozásához ad könnyen ellenőrizhető feltételt.

2.2.3 Megjegyzés: Hasonlóan értelmezhetnénk az $(ABB) = 0$ esetet is, de erre a Ceva-tételt nem mondjuk ki.

2.2.4 Definíció: Amennyiben több egyenes egy pontban metszi egymást, azt mondjuk, hogy ezek az egyenesek konkurrensek.

⁴ A szokásos bizonyítás és a Menelaosz-tétel megtalálható a függelékben.

2.3 Szögekre vonatkozó Ceva-tétel

Az oldalakra felírt Ceva-tétel alkalmazhatóságán felbuzdulva más összefüggéseket is találhatunk. Némiképp kézenfekvőnek tűnik az a következtetés, hogy ha az egyenesek közös pontjának létezését jellemezni tudjuk az oldalakat metsző pontok elhelyezkedésével, talán az oldalak közti szögek felbontásai is hasonló eredményt indukálnak. Az erre vonatkozó tétel kimondásához azonban definiálnunk kell három egyenes osztóviszonyát, amihez továbbá szükségünk van a szögek irányításának értelmezésére is. E témakör tanulmányozásához segítségül szolgált Verhóczy László jegyzete [18], ahol a definíciók általános alakjai szerepelnek, melyek az alábbiakban szereplő konkrét esetekből általánosíthatóak.

2.3.1 Definíció: Egy irányítással rendelkező síkon a háromszög szokásos jelöléseivel a b és a oldalak által bezárt irányított γ szög előjele pozitív, ha a b oldalt reprezentáló CA irányított félegyenes megfelelő irányú, γ szögű forgatás az a oldalt reprezentáló CB irányított félegyenesbe viszi. A továbbiakban hasonlóan értelmezzük két tetszőleges egyenes irányított szögét. (A sík irányítása a metszéspont körüli forgás irányát is kijelöli; a γ szöget a $(-\pi, \pi)$ intervallumon értelmezzük, így az elfajuló eseteket nem vizsgáljuk.)

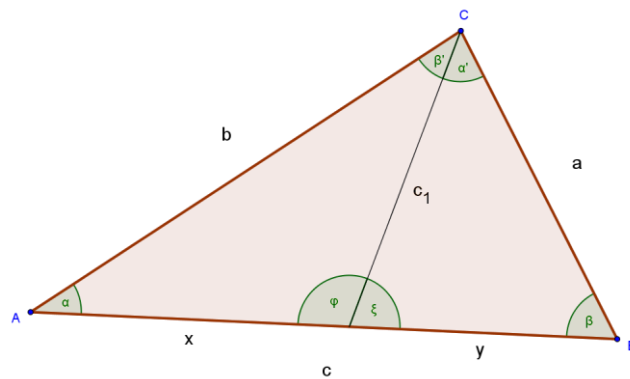
2.3.2 Definíció: Egy sugársorhoz tartozó három egyenes osztóviszonya

$$(abc_1) = \frac{\sin ac_1 \sphericalangle}{\sin c_1 b \sphericalangle}.$$

2.3.3 Tétel: Az osztóviszonyra

$$(abc_1) = \frac{\sin ac_1 \sphericalangle}{\sin c_1 b \sphericalangle} = \frac{y}{x} \cdot \frac{b}{a},$$

ahol x és y a c oldal c_1 egyenessel való felbontása.



2.1. ábra - Egyenesek osztóviszonya

Bizonyítás: Jelölje $ac_1 \sphericalangle$ és $c_1 b \sphericalangle$ irányított szögeket $\pi - \beta'$, $\pi - \alpha'$ és a $c_1 c$ metszéspontban található belső kiegészítő szögeket φ és ξ az ábrán látható módon. A szinusztétel kétszeri felírásából $\sin \beta' = \frac{x}{b} \sin \varphi$ és $\sin \alpha' = \frac{y}{a} \sin \xi$. Mivel $\sin \varphi = \sin \xi$, így $\frac{\sin \beta'}{\sin \alpha'} = \frac{y}{x} \cdot \frac{b}{a}$. Ezen szögek szinuszaik pedig egyenlők a tételben szereplőkkel.

2.3.4 Megjegyzés: Mivel $(BAC_1) = \frac{y}{x}$, az oldalakra vonatkozó osztóviszonyra

$$(abc_1) = (BAC_1) \frac{b}{a} = \frac{1}{(ABC_1)} \cdot \frac{b}{a},$$

ezért az osztóviszonyok szorzatára a következő adódik:

$$(abc_1)(bca_1)(cab_1) = \frac{1}{(ABC_1)(BCA_1)(CAB_1)}.$$

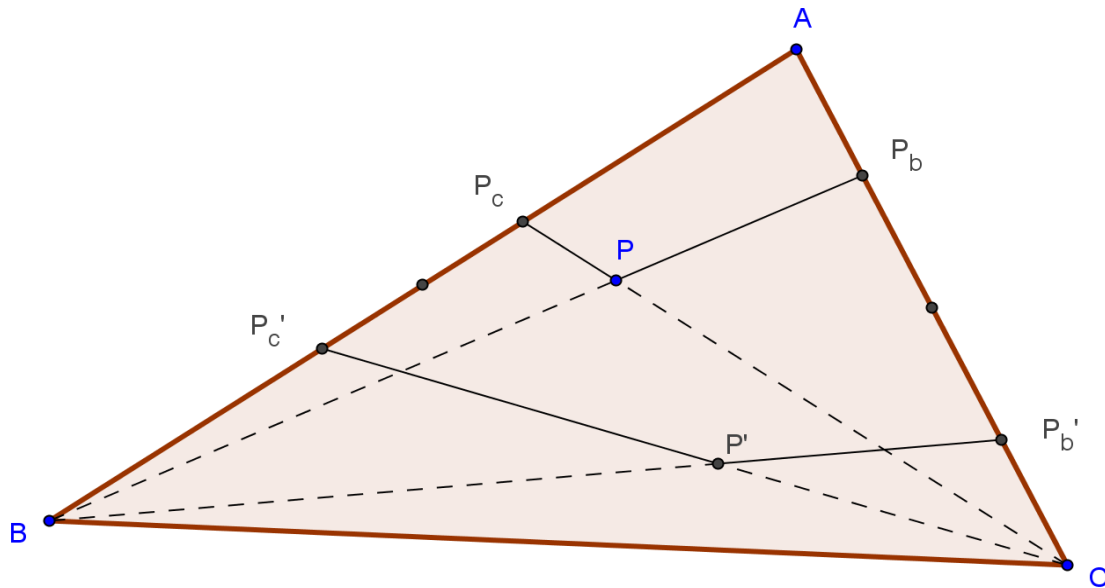
2.3.5 Tétel: Az a_1, b_1, c_1 csúcsokon átmenő egyenesek egy ponton mennek át vagy párhuzamosak akkor és csak akkor, ha $(abc_1)(bca_1)(cab_1) = 1$.

Bizonyítás: Az oldalakra felírt Ceva-tételben szereplő szorzat reciproka pontosan ugyanakkor 1, amikor maga a szorzat is, arról viszont már tudjuk, hogy ekvivalens az egyenesek konkurenciájával.

2.3.6 Megjegyzés: Az egybevágó egyenesek esetét itt sem diszkutáljuk.

2.3.7 Definíció: Amennyiben három pont egy egyenesen helyezkedik el, azt mondjuk, hogy ezek a pontok kollineárisak.

2.4 Izotomikus konjugált



2.2. ábra – Izotomikus konjugált

2.4.1 Definíció: Egy P pont izotomikus konjugáltja az ΔABC háromszögre tekintettel P' , mely az AP, BP, CP szakaszok oldalakkal való metszéspontjának (P_a, P_b, P_c) oldalfelező pontra vett tükörképéből (P'_a, P'_b, P'_c) formált, AP'_a, BP'_b, CP'_c szakaszok közös metszéspontja.

2.4.2 Tétel: A definícióban AP'_a, BP'_b, CP'_c szakaszok egy pontban metszik egymást.

Bizonyítás: Az AC oldalon a P_b pont (ACP_b) osztóviszonyt határoz meg. Ugyanígy adódik (BAP_c) és (CBP_a), valamint ezekre igaz, hogy $(ACP_b)(BAP_c)(CBP_a) = 1$, a Ceva-tétel miatt. A konjugáció során keletkező (ACP'_b) osztóviszony (ACP_b) reciproka; a másik két oldalon szereplő osztóviszonyokra analóg állítás érvényes, tehát

$$(ACP'_b)(BAP'_c)(CBP'_a) = \frac{1}{(ACP_b)(BAP_c)(CBP_a)} = 1.$$

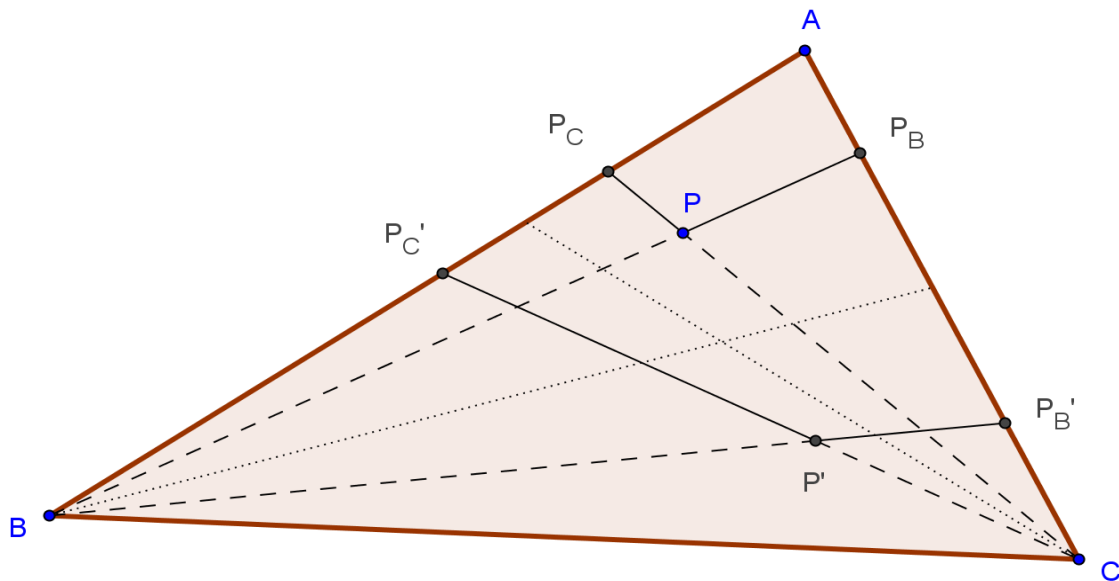
2.4.3 Megjegyzés: A definícióból következik, hogy az izotomikus konjugáció két egymás utáni elvégzése az eredeti pontot adja, vagyis involúció, továbbá a háromszög belső pontjait belső pontokba viszi. Külső pont esetén a konjugált lehet ideális pont is, de a bizonyításban felhasznált Ceva-tétel korábban említett kiterjesztésével ez feloldható.

2.4.4 Tétel⁵: Ha $P = (\alpha : \beta : \gamma)_t$, akkor izotomikus konjugáltja $P_{ISOT} = \left(\frac{1}{a^2\alpha} : \frac{1}{b^2\beta} : \frac{1}{c^2\gamma} \right)_t$.

2.4.5 Tétel⁵: Ha $P = (t_1 : t_2 : t_3)_b$, akkor izotomikus konjugáltja $P_{ISOT} = \left(\frac{1}{t_1} : \frac{1}{t_2} : \frac{1}{t_3} \right)_b$.

⁵ A tételek bizonyítása megtalálható a függelékben.

2.5 Izgonális konjugált



2.3. ábra - Izgonális konjugált

2.5.1 Definíció: Egy P pont izgonális konjugáltja az ΔABC háromszögre tekintettel P' , ha az AP, BP, CP szakaszok azonos csúcsból kiinduló szögfelező egyenesekre vett tükörképük (AP', BP', CP') metszéspontja.

2.5.2 Tétel: A konjugáció során kapott AP', BP', CP' szakaszok konkurrensek.

Bizonyítás: Tekintsük a B csúcson áthaladó BA, BC, BP irányított szakaszoknak megfelelőenett egyenesek (cab_1) osztóviszonyát. A három csúcsból felírt osztóviszonyokra a szögekre vonatkozó Ceva-tétel miatt $(cab_1)(bca_1)(abc_1) = 1$. A konjugáció elvégzésekor a (cab'_1) osztóviszony (cab_1) reciproka, hiszen a szögfelezőre való tükrözés tulajdonképpen megcseréli egymással a szakaszok közti két szöget. Node, ekkor

$$(cab'_1)(bca'_1)(abc'_1) = \frac{1}{(cab_1)(bca_1)(abc_1)} = 1.$$

2.5.3 Megjegyzés: 2.4.3-hoz hasonlóan ez a konjugáció is involúció, belső pontokat belsőbe visz és az ideális pontok eseteinek problémája a szögekre vonatkozó Ceva-tétel elfajuló esetekre való kiterjesztésével feloldható.

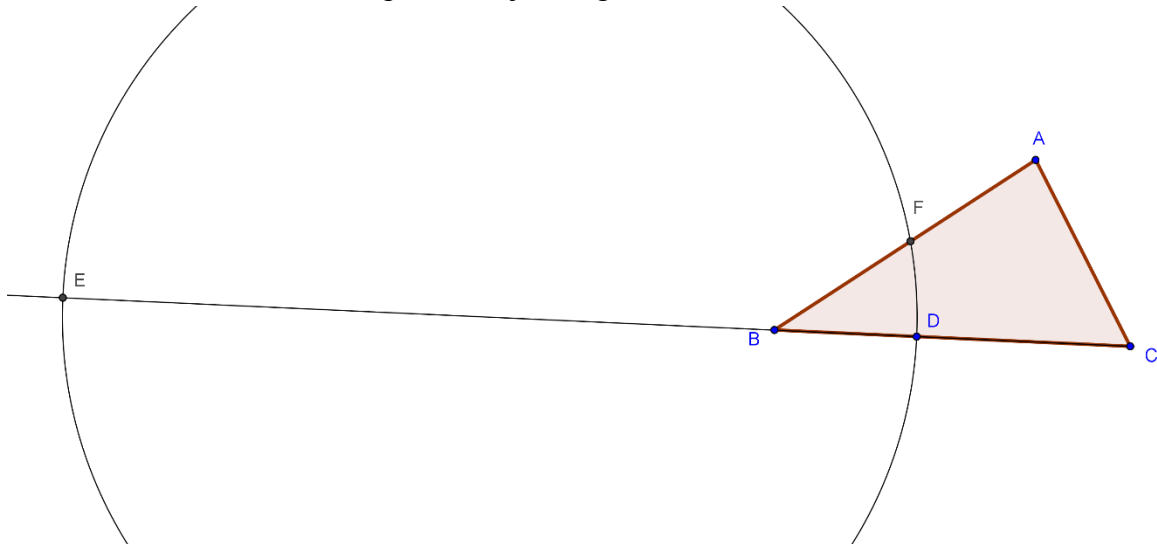
2.5.4 Tétel⁶: Ha $P = (\alpha : \beta : \gamma)_t$, akkor izgonális konjugáltja $P_{ISOG} = \left(\frac{1}{\alpha} : \frac{1}{\beta} : \frac{1}{\gamma}\right)_t$.

2.5.5 Tétel⁶: Ha $P = (t_1 : t_2 : t_3)_b$, akkor izgonális konjugáltja $P_{ISOG} = \left(\frac{a^2}{t_1} : \frac{b^2}{t_2} : \frac{c^2}{t_3}\right)_b$.

⁶ A tételek bizonyítása megtalálható a függelékben.

2.6 Apollóniosz-körök

Az alább definiált körökre szükségünk lesz a következő fejezetben tárgyalt $X(15)$ és $X(16)$ pontok értelmezéséhez és egyben e körök közös metszéspontjairól is kimondunk állításokat, most viszont csak e körök alapvető tulajdonságaival ismerkedünk.



2.4. ábra - Apollóniosz-kör

2.6.1 Definíció⁷: Az Apollóniosz-kör olyan pontok halmaza, melyek távolsága két adott ponttól azonos arányú, azaz $Kör_{Ap} = \{P \mid BP:CP = m:n\}$, ahol B, C az adott pontok és $m:n$ e pontoktól vett távolságok aránya. Abban az esetben, ha $m = n$ az Apollóniosz-kör az A, B pontok által meghatározott felezőmerőlegessé fajul.

2.6.2 Kiegészítés: Az Apollóniosz-kör speciális esetei, amikor egy $\triangle ABC$ háromszög esetén két-két csúcstól mérjük a távolságokat az egyik oldalon és ezek arányát a másik két oldal aránya szerint vesszük. Ekkor a háromszög Apollóniosz-köreiről beszélünk.

Szerkesztés: Tekintsük az A ponton átmenő Apollóniosz-kört. E kör BC oldalegyenesre illeszkedő egyik pontja a BC szakaszt $\frac{BA}{AC}$ arányban osztja, így az A csúcsban vett belső szögfelező által kimetszett pont (N_1). A BC szakaszt az N_1 ponthoz közelebbi csúcs irányában meghosszabbítva, majd az A csúcsban vett külső szögfelezőt megszerkesztve adódik az N_2 pont. N_1N_2 szakaszra, mint átmérőre kört rajzolva látható, hogy a körön rajta van az A pont. Hasonló eljárással megszerkeszthetjük a B és C csúcsokon áthaladó Apollóniosz-köröket is.

2.6.3 Megjegyzés: $AB = AC$ esetén az A csúcsban vett Apollóniosz-kört a szögfelező egyenesként azonosítjuk, mely ilyenkor egyben az a oldal felezőmerőlegese.

⁷ Az állítást, mely szerint a definícióban megadott P pontok valóban kört alkotnak, a függelékben bizonyítom.

3 Háromszögek középpontok

Ebben a fejezetben definiálom a háromszögek középpont fogalmát és a középiskolai tanulmányok során is megkerülhetetlen pontok mellett továbbiakat mutatok be. Míg előbbieknél az a hangsúlyos, hogy e pontok ismertetése, létezésük elemi bizonyítása sokszor hosszabb és körülményesebb, mint a szakdolgozatban bevezetett koordináta-rendszerek használata esetén, későbbieknél inkább tulajdonságaikat, egymás közti összefüggéseiket tárgyalom részletesebben.

3.1 A háromszögek középpont fogalma

Habár e pontok univerzális értelmezéséhez számos szemléletmód alapján eljuthatunk, így különböző definíciókat adhatunk, Kimberling rendszerező munkájának tiszteletéül az általa adott bevezetést [13] követem, mely a következő:

3.1.1 Definíció: Legyenek egy háromszög szögei (vagy oldalhosszai) adottak. Egy P pont háromszögek középpont, ha baricentrikáját az $(f(\alpha, \beta, \gamma) : g(\alpha, \beta, \gamma) : h(\alpha, \beta, \gamma))_b$ függvényhármast adja meg úgy, hogy ezek egymás ciklikus rotáltjai, méghozzá a következőképp:

$$g(\alpha, \beta, \gamma) = f(\beta, \gamma, \alpha);$$

$$h(\alpha, \beta, \gamma) = f(\gamma, \alpha, \beta);$$

$$f(\alpha, \gamma, \beta) = f(\alpha, \beta, \gamma);$$

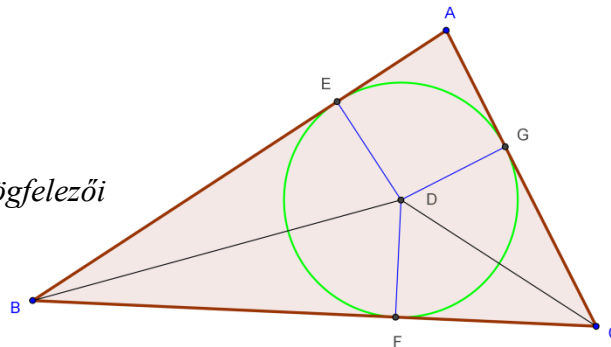
Továbbá, ha P felírása $(u(a, b, c) : u(b, c, a) : u(c, a, b))_b$ alakú, akkor u homogén az a, b, c , tekintetében. (A fent szereplő első feltétel és a szinusztétel miatt ilyen u létezik.)

3.1.2 Megjegyzés: A háromszögek középpontok efféle definíciójából következik, hogy egy p pont baricentrikájának első koordinátája tulajdonképpen mindhárom koordinátát megadja. Mivel általában ezeket a középpontokat szögfüggvények és/vagy oldalak segítségével adjuk meg, az első koordinátából a többit úgy írhatjuk fel, hogy az $\{a, b, c\}$ és $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ hármasokon az első koordinátában szereplőket rendre a következőkkel helyettesítjük.

3.2 X(1) – Beírható kör középpontja

Már időszámításunk előtt évszázadokkal sokan foglalkoztak a háromszögek különböző tulajdonságaival. Megfigyelték, hogy bárhogy rajzolnak egy háromszöget és benne a szögfelező egyeneseket, utóbbiak mindig egy pontban metszik egymást. Ez a metszéspont azonos távolságra van a háromszög mindegyik oldalától, s minthogy a pont a háromszög belsejében helyezkedik el, egyben a háromszögbe írható kör középpontja kell legyen s létezése egyértelmű.

3.2.1 Tétel: Tetszőleges háromszög szögfelezői egy pontban metszik egymást.



3.1. ábra - A beírható kör

Bizonyítás⁸: Legyen $\triangle ABC$ az adott háromszög, melybe kört szeretnénk írni. Felezzük meg az $\angle ABC$ -t, $\angle ACB$ -t a BD , CD egyenesekkel és legyen ezek metszéspontja D . Bocsássuk ebből a pontból AB -re, BC -re, valamint CA -ra rendre a DE , DF , DG merőlegeseket.

Mivel az $\angle ABD$ megegyezik $\angle CBD$ -gel, és a $\angle BED$ derékszög is egyenlő a $\angle BFD$ derékszöggel, így $\triangle EBD$ és $\triangle FBD$ két olyan háromszög, melyben páronként egyenlő két-két szög és egy-egy oldal, a közös BD , amelyik az egyenlő szögek egyikével szemben fekszik; tehát a többi oldal is páronként egyenlő; egyenlő tehát DE a DF -fel. Ugyanígy DG is egyenlő DF -fel. E három szakasz tehát, DE , DF és DG egymással egyenlő.

A D középpontú kör tehát a többi ponton is át fog menni és érinti az AB , BC , CA egyeneseket, mivel az E , F , G pontoknál levő szögek derékszögek. Ha ugyanis átszelné őket, akkor a kör átmérőjére a végpontjában emelt merőleges a körön belül haladna; erről viszont tudjuk, hogy lehetetlen; nem szeli tehát át a D középpontú és a DE , DF , DG távolságok egyikével rajzolt kör az AB , BC , CA egyeneseket; érinti tehát őket és az $\triangle ABC$ -be beírt kör lesz.

Bizonyítás másképp: A belső szögfelező a szemközti oldalt a két másik oldal arányával azonos arányban osztja fel, így a három oldalra felírt osztóviszony szorzatára adódik a konstans 1 megoldás, amiből a Ceva-tétel miatt következik, hogy a szögfelezők sugársorhoz tartoznak a D metszésponttal, mint súlyponttal, s minthogy ez a háromszögnek mindig belső pontja, a párhuzamossági eseten kívül esik.

⁸ Euklidész bizonyítása nyomán [6].

Ahhoz, hogy e kör középpontjának koordinátáit meghatározhassuk, tekintsük a háromszög oldalaitól vett távolságokat és vizsgáljuk e hosszak arányát. Könnyen látható, hogy a beírható kör esetében ezek a távolságok pontosan az r sugárral azonosak mindhárom esetben, tehát arányuk $(1:1:1)_t$, továbbá, ha meg kívánjuk őrizni a pontos távolságokat, azaz valódi trilineárisokkal szeretnénk jellemezni a szóban forgó pontot, akkor ezt az $(r:r:r)_t$ számhármast adjuk.

Mivel a kisebb háromszögek adott oldalához tartozó magassága egységesen a beírható kör sugara, adódik, hogy a területek arányai $(a:b:c)_b$. A szinusztétel alkalmazásával pedig meggyőződhetünk arról, hogy ez az arányosság azonos a $(\sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma)_b$ aránnyal. A későbbiekben felhasználjuk, ezért itt megjegyezzük, hogy e pont normált baricentrikája nyilván $\frac{1}{2s}(a:b:c)_b$

3.2.2 Kiegészítés: Felvetődhet a kérdés, vajon mekkora a beírható kör sugara. Ezen r hossz meghatározásához írjuk fel előbb a kis és a fő háromszög területének összefüggését, miszerint $T(ABC) = T(AOB) + T(BOC) + T(COA)$. Mivel egy-egy kisháromszög területét az alap és magasságának szorzatából számolhatjuk, átrendezve az egyenletet és kiemelve r -t eljutunk a $2T(ABC) = r(a + b + c)$ összefüggésig, melyből r -re adódik:

$$r = \frac{2T(ABC)}{a + b + c} = \frac{T(ABC)}{s},$$

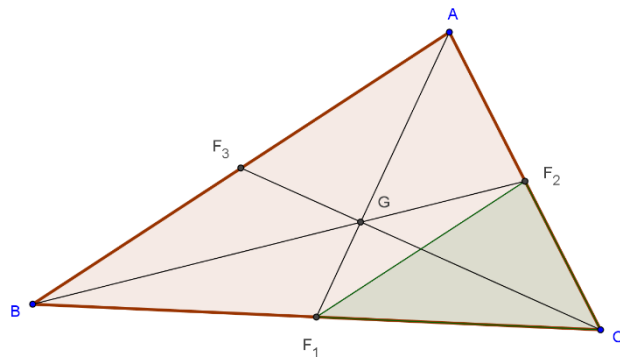
ahol s a félkerület.

3.2.3 Megjegyzés: Mivel a szögfelezőket az önmagukra való tükrözés helyben hagyja, $X(1)$ izogonális konjugáltja önmaga.

3.3 X(2) – Súlypont

A szögfelezők közös metszéspontjának ismeretén felbuzdulva Euklidész és elődei tovább vizsgálták olyan pontok után kutatva, melyek szintén a csúcsokból azonos módon meghatározott egyenesek közös metszéspontjai. Felismerték, hogy a háromszög súlyvonalai szintén egy pontban találkoznak, a súlypontban.

3.3.1 Tétel: *A háromszög súlyvonalai egy pontban, a súlypontban metszik egymást, és ez a pont a súlyvonalakat 2:1 arányban osztja.*



3.2. ábra - A súlypont

Bizonyítás⁹: Vegyük az $\triangle ABC$

háromszöget, és tekintsük az c oldallal párhuzamos középvonalat! Jelölje ennek végpontjait F_1 és F_2 ! Ekkor az F_1F_2C háromszög hasonló lesz az $\triangle ABC$ háromszöghöz, és a hasonlóság aránya 1:2.

Az AF_1 és a BF_2 súlyvonalak metszéspontja O . $\triangle ABG$ és $\triangle F_1F_2G$ hasonló, mert szögeik egyenlők. Mivel az F_1F_2 középvonal párhuzamos a c oldallal, és hossza annak hosszának fele, ez a hasonlóság szintén 1:2 arányú. Tehát G harmadolja a súlyvonalakat, és a hosszabb rész a csúcs felé esik.

Mivel ez bármely két súlyvonallal elvégezhető, az összes súlyvonal egy pontban metszi egymást. Ez a pont a súlypont.

Bizonyítás másképp: A súlyvonalak tulajdonságából következik, hogy minden oldalra a csúcsok és a súlyvonal pontjának osztóviszonya 1, tehát a három szorzata is 1, így igaz a Ceva-tétel, továbbá a súlyvonalak párhuzamossága is kizárható.

A felosztás arányának igazolása az előző bizonyítás szerint megtehető.

⁹ Reiman István nyomán [10].

A súlypont baricentrikus koordinátáinak kiszámolásához csupán egy trigonometrikus azonosságot kell használnunk. Tekintsük ugyanis a súlyvonalak szemközi oldallal bezárt kisebb szögeit, jelölje ezeket rendre $\delta_a, \delta_b, \delta_c$. Minthogy a háromszög adott oldalához tartozó magasságvonalra $m_a = s_a \sin \delta_a$, ezért a háromszög területére $T(ABC) = \frac{1}{2} x s_x \sin \delta_x$, tetszőleges $x \in \{a, b, c\}$ esetén. Továbbá a súlypont és az adott oldal által jellemezhető kisebb háromszögekre, például $T(CGB) = \frac{1}{6} a s_a \sin \delta_a = \frac{1}{3} T(ABC)$.

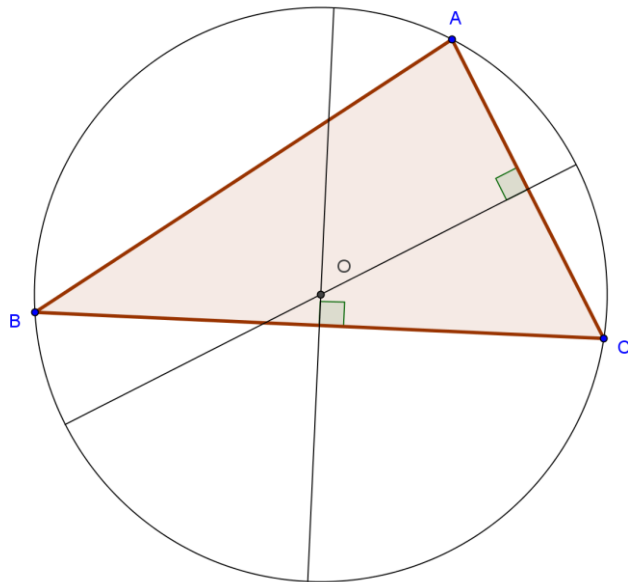
Vegyük észre, hogy ezt az arányosságot abból is láthattuk volna, hogy a fentebbi bizonyításban használt összefüggés alapján a kisebb háromszögek a súlyvonalak harmadolásából következően a nagyháromszög területének harmadai. Ebből azonban következik, hogy mindegyik kicsi háromszög azonos területű, tehát a súlypont baricentrikus koordinátái $(1: 1: 1)_b$, normált baricentrikája pedig $\frac{1}{3} (1: 1: 1)_b$ Trilineárisa ezekből adódóan $\left(\frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}\right)_t$ vagy éppen $(bc: ca: ab)_t$.

3.3.2 Megjegyzés: Mivel a felezőpontokat az önmagukra való tükrözés helyben hagyja, $X(2)$ önmagának az izotomikus konjugáltja.

3.4 X(3) – Körülírt kör középpontja

Kevés eltéréssel, hogy az emberiség eljutott annak igazolására, hogy bármely háromszögbe írható belső kör, azt is vizsgálták, vajon a körülírható kör létezése is ennyire általános-e. Minthogy e kör tulajdonsága az, hogy a középpontja azonos távolságban van a háromszög csúcsaitól, kézenfekvő ötlet, hogy az oldalfelező merőlegesek metszéspontjaként gondoljunk rá.

3.4.1 Tétel: *Tetszőleges háromszög oldalfelező merőlegesei egy pontban metszik egymást és ez a pont a háromszög köré írt kör középpontja.*



3.3. ábra - A körülírt kör

Bizonyítás: A fenti ábrán szereplő két oldalfelező merőleges metszéspontjától a B és C csúcsok, valamint az A és C csúcsok is azonos távolságra vannak, mivel az oldalfelező merőleges minden pontja azonos távol van a két csúctól.

Ez a metszéspont tehát rajta van a harmadik oldalfelező merőlegesen is, mivel pontosan az az egyenes tartalmazza a sík azon pontjait, melyek az A és B csúcsoktól azonos távolságra esnek és a másik két felezőmerőleges metszéspontjának vizsgálatakor éppen azt állapíthattuk meg, hogy metszéspontjuk mindhárom ponttól azonos távolságra van.

Bizonyítás másképp: A $\triangle BCO$ egyenlőszárú háromszögben $\angle OBC = \angle BCO := \tau$ és hasonlóan $\angle OAB = \angle ABO := \varphi$, valamint $\angle OCA = \angle CAO := \omega$. Jelölje továbbá l_A, l_B, l_C az O -n áthaladó transzverzális egyeneseket. Ekkor az oldalakra vonatkozó osztóviszonyokra $(acl_B)(bal_C)(cbl_A) = \frac{\sin \tau}{\sin \varphi} \cdot \frac{\sin \omega}{\sin \tau} \cdot \frac{\sin \varphi}{\sin \omega} = 1$ adódik, tehát az l_A, l_B, l_C egyenesek egy pontban metszik egymást. Látható, hogy ez derék- és tompaszögű háromszögek esetén is érvényesül.

E pont vizsgálatakor és koordinátázásakor érdemes felhasználnunk a kerületi és középponti szögek közötti összefüggést, nevezetesen, hogy utóbbi előbbinek kétszerese. Ezen kívül megfigyelhető még, hogy a $\triangle BCO$ esetén $BO = OC = R$, hiszen az oldalfelező merőleges két egyforma kis háromszögre bontja azt. Jelölje F_a a BC oldal felezőpontját. Ekkor a $\triangle BF_aO$ háromszögben az F_aOB szög azonos a CAB -gel, és a BO szakasz hossza kifejezhető $R = \frac{a}{2\sin\alpha}$ alakban, ahol α jelöli a vizsgált szöget.

Ahhoz, hogy a háromszög O pontjának trilineáris koordinátáit felírassuk, az $F_aO : F_bO : F_cO$ arányra van szükségünk. Adott oldal vizsgálatánál ez a magasság kifejezhető $F_aO = R \cos \alpha$ alakban s ugyanígy a többi oldal esetén is. Általános trilineárisként tehát a körülírt kör középpontjára $(\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma)_t$ adható meg.

A baricentrikus koordináták kiszámolásához legegyszerűbben úgy juthatunk, ha a háromszög területére vonatkozóan két oldal és az általuk közrezárt szög kapcsolatából származó tételt írjuk fel, nevezetesen az egyik kis háromszögre kapjuk, hogy $T(BCO) = \frac{R^2 \sin 2\alpha}{2}$. Az analóg területképleteket általánosan egyszerűsítve előáll $(\sin 2\alpha : \sin 2\beta : \sin 2\gamma)_b$, mely így $X(3)$ baricentrikája.

3.4.2 Következmény: Mivel $F_aO = R \cos \alpha$ és $T(BCO) = \frac{R^2 \sin 2\alpha}{2}$, ezért

$$\cos \alpha = \frac{R \sin 2\alpha}{a};$$

$$R = \frac{a}{2 \sin \alpha} = \frac{abc}{4T(ABC)}.$$

Ebből adódóan a magasságpont egy másik baricentrikája $(a \cos \alpha : b \cos \beta : c \cos \gamma)_b$.

3.4.3 Következmény: Minthogy $r = \frac{T(ABC)}{s}$, megállapíthatóak:

$$rR = \frac{abc}{4s};$$

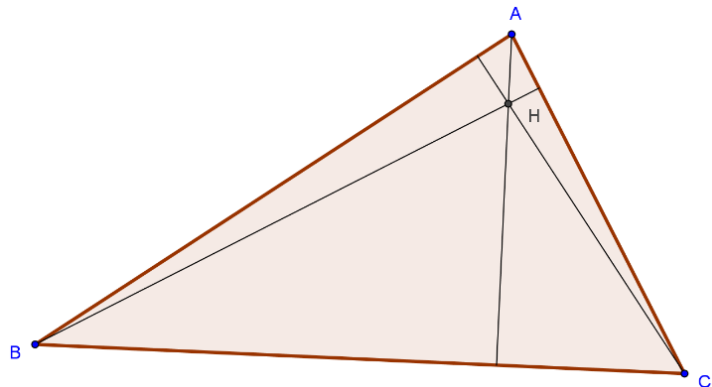
$$1 = \frac{abc}{4srR};$$

$$abc = 4srR.$$

3.5 X(4) – Magasságpont

Szintén ókori felfedezés a háromszög magasságvonalai közti hasonló összefüggés.

3.5.1 Tétel: *A háromszög magasságvonalai egy pontban metszik egymást.*



3.4. ábra - A magasságpont

Bizonyítás: A szemközti oldalakkal párhuzamosakat húzva a csúcsokon keresztül olyan nagy háromszöget kapunk, aminek az eredeti háromszög oldalai lesznek a középvonalai, hiszen ez a háromszög az eredetin kívül három másik – azzal egybevágó, vele páronként paralelogrammát alkotó – háromszögből áll. A nagy háromszög oldalfelező merőlegesei – melyekről már tudjuk, hogy egy pontban találkoznak - megegyeznek a kis háromszög magasságvonalaival, amik eszerint ugyancsak egy pontban metszik egymást.

Bizonyítás másképp: Hegyesszögű háromszög esetén a magasságvonalak a háromszög oldalait a csúcsok között metszik, ilyenkor az oldalakra felírt osztóviszony pl. az AB oldal esetén $(ABP_C) = \frac{AP_C}{P_CB} = \frac{tg \beta}{tg \alpha}$. Mindhárom oldalra felírva az osztóviszonyokat, szorzatuk konstans 1, tehát a Ceva-tétel alapján egy pontban metszik egymást.

Hasonlóan vizsgálható a tompaszögű háromszögek esete is. Feltehető, hogy $\alpha > \frac{\pi}{2}$. Ilyenkor két magasságvonal is a háromszögön kívül metszi az oldalegyeneseket, azonban itt az osztóviszonyok $(ABP_C) = \frac{tg \beta}{tg(\pi-\alpha)} = -\frac{tg \beta}{tg \alpha}$ alakban állnak elő, a szorzatban a két negatív arány előjelei egymást kioltják és a korábban igazolt esethez jutunk.

A derékszögű háromszög eseténél az osztóviszonyokat csak további konvenciók segítségével értelmezhetnénk, azonban könnyen látható, hogy ilyenkor az egymásra merőleges oldalak metszéspontjaként értelmezett csúcs lesz a háromszög magasságpontja, melyen definíció szerint az ehhez a csúcshoz felírt magasságvonal is áthalad.

A magasságpont trilineáris koordinátáit a fenti bizonyításban felhasznált azonosságból vezethetjük le, amely szerint $OP_A = P_A C \cdot ctg \beta$, ahol $P_A C = b \cos \gamma$, ily módon a trilineáris koordináták rendre $(b ctg \beta \cos \gamma, c ctg \gamma \cos \alpha, a ctg \alpha \cos \beta)_t$, melyek a három szög koszinuszának szorzatával egyszerűsítve és a szinusztétel alkalmazva a $(sec \alpha : sec \beta : sec \gamma)_t$ homogén koordinátákat adják.

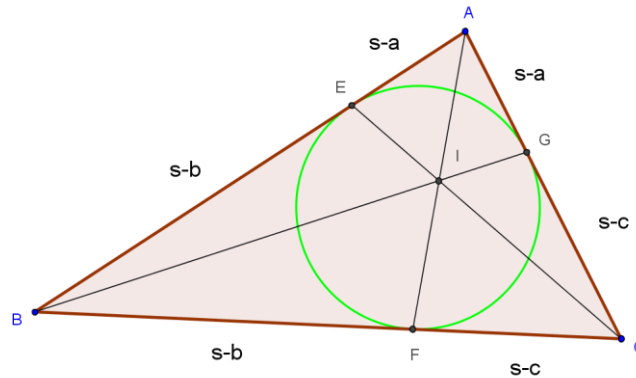
Felhasználva, hogy egy pont baricentrikus koordinátái annak trilineárisainak oldalakkal való szorzata, valamint a szinusztétel szerinti – oldalak és velük szemközti szögek szinuszai között fennálló – aránnyal egyszerűsítve adódik $(tg \alpha : tg \beta : tg \gamma)_b$, mint a magasságpont baricentrikája. Ez természetesen a derékszögű eset miatt „instabil”, azonban átírhatjuk a következőképpen is: a koordinátákat egységesen a három szög koszinuszának szorzatával és az adott oldal és szemközti szög szinuszának arányával szorozva előálló „stabil” baricentrika a magasságpontra $(a \cos \beta \cos \gamma : b \cos \alpha \cos \gamma : c \cos \alpha \cos \beta)_b$.

3.5.2 Észrevétel: Minthogy $sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$, a körülírt kör középpontjának és a magasságpontnak trilineárisaiból látható, hogy e két pont egymás izogonális konjugáltja. Természetesen ez a baricentrikus koordinátákkal is igazolható, mivel $(\tan \alpha : \tan \beta : \tan \gamma)_b$ izogonális konjugáltja $\left(\frac{a^2 \cos \alpha}{\sin \alpha} : \frac{b^2 \cos \beta}{\sin \beta} : \frac{c^2 \cos \gamma}{\sin \gamma}\right)_b$, melyre alkalmazva a $\cos \alpha = \frac{R \sin 2\alpha}{a}$ helyettesítést $\left(\frac{aR \sin 2\alpha}{\sin \alpha} : \frac{bR \sin 2\beta}{\sin \beta} : \frac{cR \sin 2\gamma}{\sin \gamma}\right)_b$ adódik, itt viszont $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$ skalár, akárcsak R , így ezek szorzatával egyszerűsíthetünk és megkapjuk a $(\sin 2\alpha : \sin 2\beta : \sin 2\gamma)_b$ alakot, mely $X(3)$ baricentrikája.

3.6 X(7) – Gergonne pont

Egy háromszög beírható körének megszerkesztésekor előálló oldalérintő pontok egy további háromszögeközéppontot eredményeznek, mely e pontokat a szemközti csúcsokkal összekötő egyenesek metszéspontjaként áll elő.

3.6.1 Tétel: *Tetszőleges háromszög beírható körének oldalérintési pontjain áthaladó – szemközti csúcspontokból indított – transzverzálisok egy pontban metszik egymást.*



3.5. ábra - A Gergonne pont

Bizonyítás: Vegyük észre, hogy egy adott csúcsból a két szomszédos érintőpontig tartó oldalszakasz hossza egyenlő, hiszen ezek egyazon körhöz vett érintőszakaszok. Jelölje ezeket rendre \hat{a} , \hat{b} , \hat{c} . Ekkor az oldalakra felírható a következő egyenletrendszer:

$$\begin{cases} \hat{a} + \hat{b} = c \\ \hat{b} + \hat{c} = a \\ \hat{c} + \hat{a} = b \end{cases}$$

Ebből adott érintési szakaszra adódik:

$$\hat{a} = \frac{b + c - a}{2} = s - a,$$

ahol s a félkerület. Ezzel az eljárással minden oldalszakasz kifejezhető az ábrán látható módon. A tételben meghatározott pont létezését ellenőrizzük a Ceva-tétel segítségével, mely $\frac{s-b}{s-c} \cdot \frac{s-c}{s-a} \cdot \frac{s-a}{s-b} = 1$ miatt teljesül. Minthogy az érintési pontok mindig a háromszög konvex burkában helyezkednek el, a párhuzamossági esettől eltekinthetünk.

A koordináták kiszámolásához emlékezzünk vissza, miként írtuk fel egy oldalt ismert arányban felosztó pont koordinátáit. Eszerint az ábrán szereplő – A csúccsal szemközti oldalon fekvő – F pontra $\frac{(s-c)B+(s-b)C}{s+a}$ adódik, melybe a csúcsok ismert baricentrikáit behelyettesítve és $s + a$ -val – mint skalárral - szorozva kapjuk, hogy

$$F = (0 : s - c : s - b)_b.$$

Ez természetesen a többi oldalon szereplő ponttal is elvégezhető, így például a B csúccsal szemközti G pontra

$$G = (s - c : 0 : s - a)_b$$

koordinátákat kapjuk. Kihhasználva, hogy két ponton átmenő egyenes baricentrikája a pontok koordinátáinak vektoriális szorzatával azonos, adódik

$$AF = (0 : -(s - b) : s - c)'_b \text{ és } BG = (s - a : 0 : -(s - c))'_b,$$

melyek természetesen nem a szakaszokat, hanem a nekik megfeleltetett egyeneseket jelölik. Az I -vel jelölt Gergonne pont baricentrikáját ekkor könnyedén meghatározhatjuk, mint e két egyenes metszéspontja, tehát $I = AF \times BG$, azaz

$$I = (-(s - b)(s - c) : -(s - a)(s - c) : -(s - a)(s - b))_b,$$

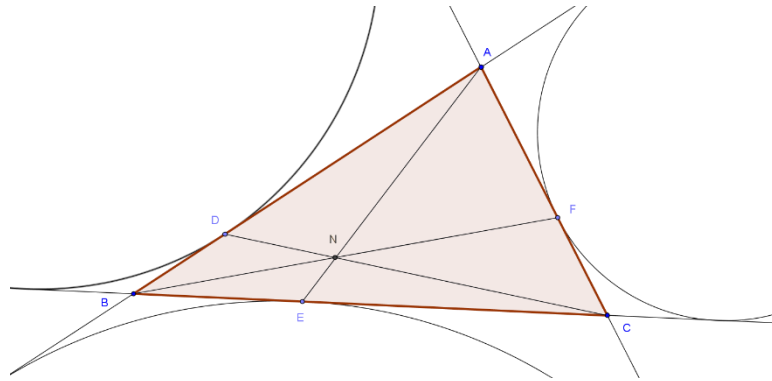
egyszerűsítve $I = \left(\frac{1}{s-a} : \frac{1}{s-b} : \frac{1}{s-c}\right)_b$. A pont trilineáris koordinátáit ebből levezetve

$\left(\frac{bc}{s-a} : \frac{ac}{s-b} : \frac{ab}{s-c}\right)_t$ alakban adhatjuk meg.

3.7 X(8) – Nagel pont

A Gergonne ponthoz tartozó definícióhoz hasonlóan megfigyelhető, hogy a külső érintőkörök talppontjaihoz vett transzverzálisok is egy pontban metszik egymást, ez a háromszög Nagel pontja.

3.7.1 Tétel: Egy háromszög külső érintőköreinek talppontjában vett szemközti csúcsponi transzverzálisai egy pontban metszik egymást.



3.6. ábra - A Nagel pont

Bizonyítás: Tekintsük az A csúcs esetét, ahol a vele szemközti külső érintőkör által meghatározott szakaszokat vizsgáljuk. Ezen kör és az a oldal érintési pontja legyen E , illetve a két másik oldalt érintő pontok B' és C' aszerint, hogy az AB vagy AC oldalt érinti. A külső pontból vett érintőszakaszok egyenlősége miatt $BB' = BE$ és $CC' = CE$. Jelöljük ezeket a távolságokat \hat{b} , \hat{c} -pal, továbbá az AE távolságot \hat{a} -pal. Ekkor a következő egyenletrendszerhez jutunk:

$$\begin{cases} \hat{b} + \hat{c} = a \\ \hat{a} - \hat{b} = c \\ \hat{a} - \hat{c} = b \end{cases}$$

Innen adódnak a következők:

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \frac{a + b + c}{2} = s; \\ \hat{b} &= \frac{a + b - c}{2} = s - c; \\ \hat{c} &= \frac{a - b + c}{2} = s - b. \end{aligned}$$

Megállapítható tehát, hogy az a oldalt a külső érintőkör $\frac{s-c}{s-b}$ arányban osztja fel. Analóg módon számolható a fennmaradó két oldalon levő osztóviszony is. Ezen arányok szorzatára konstans 1 megoldás áll fenn, így a Ceva-tételből következik a tétel igazolása.

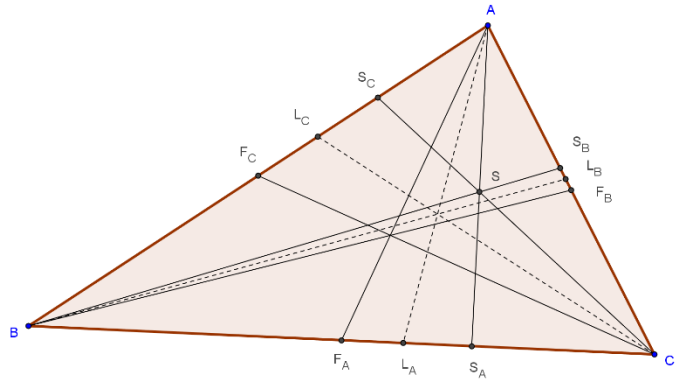
3.7.2 Észrevétel: A belső kör talppontja az a oldalt $\frac{s-b}{s-c}$ arányban bontotta fel, most pont fordított arányban kaptunk felbontást, így megállapítható, hogy $X(7)$ és $X(8)$ izotomikus konjugáltak. Ez alapján a Nagel pont baricentrikus koordinátái $(s - a : s - b : s - c)_b$, normálva $\left(\frac{s-a}{s}, \frac{s-b}{s}, \frac{s-c}{s}\right)_b$, míg trilineárisa például $\left(\frac{s-a}{a} : \frac{s-b}{b} : \frac{s-c}{c}\right)_t$.

3.8 X(6) – Szimmedián pont (Lemoine vagy Grebe pont)

E háromszögeközéppont az izogonális konjugáció hozománya, azonban a pont bemutatása előtt definiáljuk a szimmedián fogalmát.

3.8.1 Definíció: A háromszög egy csúcsához tartozó szimmedián az adott csúcshoz tartozó súlyvonal megfelelő szögfelezőre való tükrözöttje.

3.8.2 Tétel: Egy háromszög szimmediánjai egy pontban metszik egymást, ez a szimmedián pont.



3.7. ábra - A szimmedián pont

Bizonyítás: Minthogy a súlyvonalak konkurrensak és a szimmediánok ezek izogonális konjugáltjai, ezek is egy pontban metszik egymást.

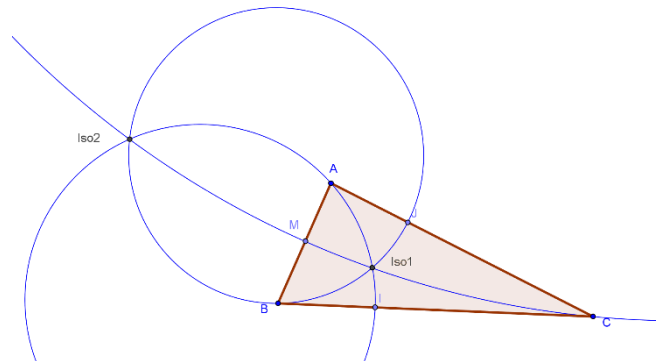
Mivel a súlypont trilineárisa $(\frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c})_t$, így a szimmedián ponté $(a : b : c)_t$, továbbá a súlypont baricentrikája $(1 : 1 : 1)_b$, ezért a szimmedián ponté $(a^2 : b^2 : c^2)_b$.

Most, hogy a legalapvetőbb háromszögeközéppontok koordinátáit kiszámoltuk, két további olyan pontot fogunk megvizsgálni, melyek szoros összefüggésben vannak egymással és egy háromszög - előző fejezetben ismertetett Apollóniosz-köreivel. Ezután pedig az eddig bemutatott háromszögeközéppontok közötti kollineációkról és adott ponthármasok egymástól való távolságáról olvashatunk.

3.9 X(15), X(16) - Izodinamikus pontok

Megfigyelhető, hogy egy háromszög csúcsain átmenő Apollóniosz-körök általában két közös metszésponttal rendelkeznek.

3.9.1 Definíció: Egy $\triangle ABC$ nem szabályos háromszög izodinamikus pontjai a csúcsokat érintő Apollóniosz-körök két közös metszéspontja. Szabályos háromszög esetén az egyetlen izodinamikus pont a súlypont.



3.8. ábra - Az izodinamikus pontok

A két metszéspont megkülönböztetése a későbbi 3.9.4-es tételből egyértelmű lesz, most csak vizsgáljuk meg a 3.8-as és 3.9-es ábrát, illetve gondoljuk meg, hogy létezésük az Apollóniosz-körök 2.6.1-es definíciójából következik. Már e pontok „keletkezése” is speciálisabb az eddig tárgyaltakénál, de egy még izgalmasabb tétel mondható ki róluk:

3.9.2 Tétel: Az izodinamikus pontokból a háromszög oldalaira vett merőlegesek által kijelölt három pont által alkotott háromszög mindig szabályos.

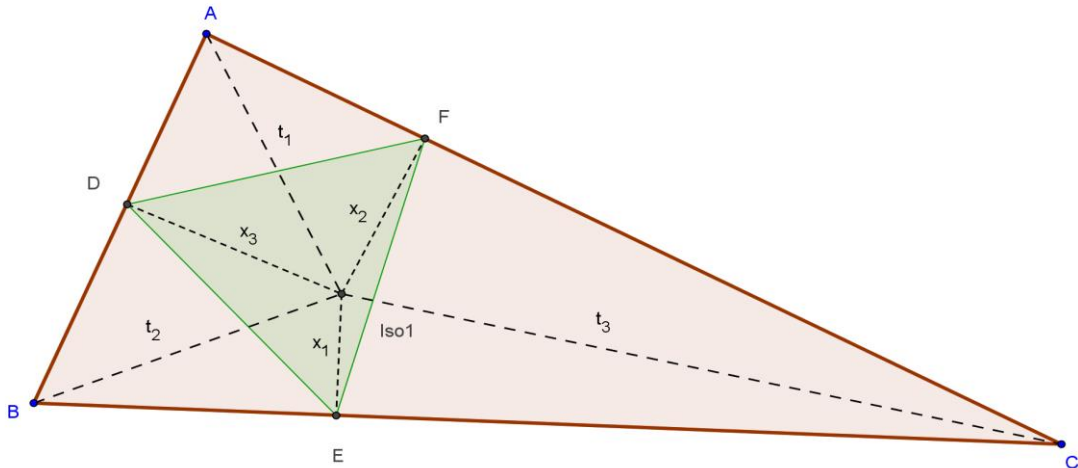
Bizonyítás: Jelölje az első izodinamikus pontot I (3.8-as ábrán $Iso1$). Tekintsük a $BEID$ húrnégyszöget, melyben $\angle BEI = \alpha$ és $\angle IDB = \alpha$ egyaránt $\frac{\pi}{2}$. Ebből következik, hogy BI mindkét derékszögű háromszög átfogója, így a négyszög bármely 3 csúcsából előálló háromszög köré írt körének átmérője. Az $\triangle EBD$ háromszögben felírva az általános szinusztételt adódik $2R_1 = BI = \frac{ED}{\sin \beta}$. Analóg módon a $CFIE$ húrnégyszögben $2R_2 = CI = \frac{EF}{\sin \gamma}$. Vizsgáljuk meg, milyen feltételek mellett teljesül $EF = ED$.

$$EF = ED \Leftrightarrow \frac{BI}{EI} = \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} = \frac{AB}{AC}.$$

Ez azonban pontosan akkor igaz, ha I rajta van az A csúcson átmenő Apollóniosz-körön. Hasonló érveléssel arra jutunk, hogy azon pontok, melyekből az oldalakra vett merőlegesek metszéspontjai szabályos háromszöget adnak, mindegyik Apollóniosz-körön rajta kell legyenek, tehát pontosan az izodinamikus pontok.

Kiegészítés: A külső-, illetve másik izodinamikus pont esete hasonlóan bizonyítható.

3.9.3 Érdekeség: A háromszög izodinamikus pontjaira való inverziók a háromszöget szintén szabályos háromszögekbe viszik.



3.9. ábra - Az első izodinamikus pont

3.9.4 Tétel: $X(15)$ és $X(16)$ trilineárisai: $\left(\sin\left(\alpha \pm \frac{\pi}{3}\right) : \sin\left(\beta \pm \frac{\pi}{3}\right) : \sin\left(\gamma \pm \frac{\pi}{3}\right)\right)_t$

Bizonyítás¹⁰: Tekintsük a belső pont esetét és vizsgáljuk a $BIC\alpha$ szöget, ahol I az első izodinamikus pontot jelöli. Az I-beli szögekből

$$\begin{aligned} BIC\alpha &= 2\pi - (BIA\alpha + AIC\alpha) \\ &= 2\pi - (\pi - BAI\alpha - ABI\alpha) - (\pi - CAI\alpha - ICA\alpha) \\ &= \alpha + (DEI\alpha + FEI\alpha) = \alpha + \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Az utolsó egyenlőség abból adódik, hogy $DBEI$ és $FIEC$ húrnégyszögek, ahol DI és FI a B, E -ből, illetve az E, C -ből azonos szakaszban látszanak, valamint kihasználtuk, hogy a $\triangle DEF$ háromszög szabályos.

A trilineárisok kiszámolásához írjuk fel $\triangle IBC$ és $\triangle ICA$ területének kétszeresét és számoljuk ezek arányát:

$$2T(IBC) = x_1 BC = t_2 t_3 \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right);$$

$$2T(ICA) = x_2 CA = t_3 t_1 \sin\left(\beta + \frac{\pi}{3}\right).$$

$$\text{Így} \quad \frac{x_1 BC}{x_2 CA} = \frac{t_2 \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)}{t_1 \sin\left(\beta + \frac{\pi}{3}\right)};$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(\beta + \frac{\pi}{3}\right)},$$

$$\text{mivel} \quad \frac{BC}{CA} = \frac{t_2}{t_1}.$$

Tulajdonképpen az első izodinamikus pontot a trilineárisában szereplő $\left(+\frac{\pi}{3}\right)$ miatt hívjuk elsőnek, és a másikat másodiknak. A második izodinamikus pontra adott trilineáris hasonló számolással igazolható, továbbá a pontok baricentrikus koordinátái az oldalakkal való szorzással számolhatóak.

¹⁰ Roger A. Johnson bizonyításának nyomán [5].

3.10 Az Euler-egyenes

Amennyiben az alapvető háromszögeközéppontokat egyszerre ábrázoljuk, közülük három, a súlypont, a magasságpont és a körülírt kör középpontja láthatóan egy egyenesen helyezkedik el. Ugyan ezek kollinearitását ellenőrizhetnénk koordinátáik vegyesszorzatával, azonban most egy ennél erősebb állítást fogunk igazolni, némiképp kevesebb számolással

3.10.1 Tétel: *Tetszőleges ΔABC háromszög magasságpontja (H), súlypontja (G) és körülírt körének középpontja (O) egy egyenesre – az Euler-egyenesre – esnek ebben a sorrendben úgy, hogy $OH = 3OG$, vagyis a G súlypont a HO szakaszt 2:1 arányban osztja.*

Bizonyítás: Elegendő belátnunk a következőt:

$$3G = H + 2O,$$

hiszen egy egyenes bármely pontja előáll két meghatározott pontjának súlyozásaként.

$$P = tQ + (1 - t)R; \quad G = \frac{1}{3}H + \frac{2}{3}O.$$

Tekintsük a vizsgált pontok normált baricentrikájának függvényeit¹¹:

$$\begin{aligned} f_G &= \frac{1}{3}; \\ f_H &= \frac{Ra}{rs} \cos \beta \cos \gamma; \\ f_O &= \frac{Ra}{rs} \cos \alpha. \end{aligned}$$

Az egyenletbe behelyettesítve:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{Ra}{rs} (\cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha); \\ 1 &= \frac{Ra}{rs} \cdot \frac{bc}{4R^2} = \frac{abc}{4srR} = 1. \end{aligned}$$

3.10.2 Megjegyzés: Felhasználtuk, hogy

$$\cos \beta \cos \gamma = \cos(\beta + \gamma) + \sin \beta \sin \gamma = -\cos \alpha + \frac{bc}{4R^2},$$

valamint a 3.4.3 következményt.

¹¹ A H, O középpontok normált baricentrikus koordinátáinak kiszámolása megtalálható a függelékben.

3.11 A Nagel-egyenes

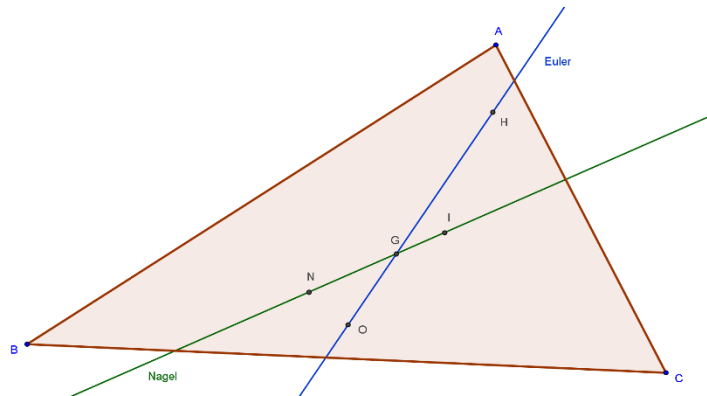
Az előző fejezetben prezentált Euler-egyeneshez tartozó pontok közötti összefüggés mintájára egy másik egyenest is felfedezhetünk, hasonló arányokkal.

3.11.1 Tétel: Tetszőleges ΔABC háromszög beírható körének középpontja (I), súlypontja (G) és Nagel-pontja (N) egy egyenesre – a Nagel-egyenesre – esnek ebben a sorrendben úgy, hogy $IN = 3IG$, vagyis a G súlypont az NI szakaszt 2:1 arányban osztja.

Bizonyítás: Elegendő belátnunk, hogy $3G = N + 2I$.

A pontok normált függvényei:

$$\begin{aligned} f_G &= \frac{1}{3}; \\ f_N &= \frac{s-a}{s}; \\ f_I &= \frac{a}{2s}. \end{aligned}$$



3.10. ábra - Az Euler- és Nagel-egyenesek

Az egyenletbe behelyettesítve:

$$1 = \frac{a}{s} + \frac{s-a}{s} = \frac{s}{s}.$$

3.11.2 Kiegészítés: Amennyiben csak azt szeretnénk vizsgálni, hogy ezek a pontok valóban egy egyenesre esnek, elég az 1.7.5-ös tételt alkalmaznunk, nevezetesen:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ s-a & s-b & s-c \end{bmatrix} = b(a-c) + a(c-b) + c(b-a) = 0.$$

Az efféle bizonyítás az Euler-egyenesre meglehetősen körülményes, mivel

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a \cos \alpha & b \cos \beta & c \cos \gamma \\ a \cos \beta \cos \gamma & b \cos \alpha \cos \gamma & c \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix} &= bc \left(\frac{\cos \beta}{\cos \gamma} - \frac{\cos \gamma}{\cos \beta} \right) + ac \left(\frac{\cos \gamma}{\cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} \right) + ab \left(\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} - \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \right) = \\ &= b^2 \frac{b^2 - a^2 - c^2}{c^2 - a^2 - b^2} - c^2 \frac{c^2 - a^2 - b^2}{b^2 - a^2 - c^2} + c^2 \frac{c^2 - b^2 - a^2}{a^2 - b^2 - c^2} - a^2 \frac{a^2 - b^2 - c^2}{c^2 - b^2 - a^2} + a^2 \frac{a^2 - b^2 - c^2}{b^2 - c^2 - a^2} - b^2 \frac{b^2 - c^2 - a^2}{a^2 - c^2 - b^2} = \\ &= a^2 \tau^2 (\omega - \varphi) + b^2 \varphi^2 (\tau - \omega) + c^2 \omega^2 (\varphi - \tau) = \sum_{cikl} a^2 \tau^2 (\omega - \varphi), \end{aligned}$$

ahol $\tau = a^2 - b^2 - c^2$, $\varphi = b^2 - c^2 - a^2$, $\omega = c^2 - a^2 - b^2$.

4 Kísérletek új pont felfedezésére

E fejezet célja különböző módszereket mutatni új pontok keresésére, azonban először bemutatom a Kimberling által publikált metódust arra, hogy ellenőrizzük egy – feltételezésünk szerint új – pontról, hogy szerepel-e a háromszögműközpontok enciklopédiájában.

Tegyük fel, hogy a pont az affin síkban helyezkedik el és a pont koordinátái valósak.

Amennyiben az adott pont baricentrikával adott, mint $X = (u:v:w)_b$, írjuk fel $X = \left(\frac{u}{a}:\frac{v}{b}:\frac{w}{c}\right)_t$ alakban, majd normáljuk, így a pont $X = (x,y,z)_t$ alakban írható fel.

Számoljuk ki a kx számot, ha $k = \frac{2T(ABC)}{ax+by+cz}$.

A háromszögműközpontok enciklopédiájában (továbbiakban ETC) az $(a,b,c) = (13,6,9)$ referenciaháromszögre minden dokumentált háromszögműközpontra kapott kx szám táblázatba van szedve, s minthogy ez a szám egyértelmű, könnyedén ellenőrizhető, hogy elképzeléseink egy új pont megtalálásáról helytállóak-e.

4.0.1 Megjegyzés: A fenti kx szám egyértelműsége a háromszögműközpontok definíciójával és a szám jelentésével magyarázható. Egyrészt belátható, hogy ez a kx tulajdonképpen az adott X pont távolsága a referenciaháromszög BC oldalegyenesétől, másrészt pedig meggondolható, hogy az oldalegyenesekkel párhuzamos egyeneseken a háromszögműközpont függvényének értelmezése miatt, közülük pontosan egy szerepelhet rajta. (Ez mindaddig fennáll, míg az ideális pontokat nem értelmezzük háromszögműközpontokként.)

4.0.2 Megjegyzés: Az adott $(13,6,9)$ oldalhosszú háromszögre $2T(ABC) = 8\sqrt{35}$.

4.1 Képletes középpontok

Talán a legkézenfekvőbb módszer új pontokat keresni, ha tetszőleges polinommal adunk meg koordinátákat. Alább egy már meglévő és egy új pont találatára láthatunk példát

4.1.1 Sikertelen találat: A szimmedián pont koordinátáihoz hasonlóan tekintsük például a következő baricentrikát:

$$(b^2 + c^2 : c^2 + a^2 : a^2 + b^2)_b.$$

Az $(a, b, c) = (13, 6, 9)$ behelyettesítéssel a következő normált trilineáris koordinátákat adja:

$$\left(\frac{81}{661}, \frac{375}{661}, \frac{205}{661}\right)_b.$$

Továbbá $k = \frac{1322\sqrt{35}}{1287}$, így $xk = \frac{352\sqrt{35}}{2829} = 0,74468137 \dots$

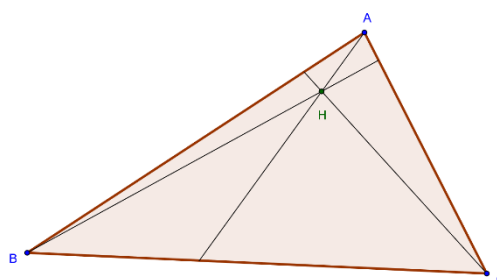
Az ETC táblázatában rákeresve erre a számra megtaláljuk, hogy $X(141)$ a „kitalált” háromszögműközpont, melyet a szimmedián pont komplementének neveznek.

4.1.2 Sikeres találat: Az előző ponthoz hasonlóan tekintsük a következő baricentrikát:

$$(b^4 + c^2 : c^4 + a^2 : a^4 + b^2)_b.$$

Az $(a, b, c) = (13, 6, 9)$ behelyettesítéssel a következő normált trilineáris koordinátákat adja:

$$\left(\frac{729}{30317}, \frac{131235}{515389}, \frac{371761}{515389}\right)_b.$$



4.1. ábra - A Hórusz pont

Továbbá $k = \frac{515389\sqrt{35}}{536796}$, így $xk = \frac{1377\sqrt{35}}{59644} = 0.1365844 \dots$

Mivel az ETC táblázatában ilyen kezdetű szám nincsen, arra a következtetésre juthatunk, hogy az eddig dokumentált 7586 háromszögműközpont között nem szerepel a fent megadott pont, így definiálhatjuk, mint új háromszögműközpont.

4.1.3 Definíció: A $H = (b^4 + c^2 : c^4 + a^2 : a^4 + b^2)_b$ pont a háromszög *Hórusz pontja*.

4.1.4 Megjegyzés: Természetesen a fenti módszer alapján rendkívül egyszerűen generálható rengeteg pont, ugyanakkor csekély az esélye, hogy ezek speciális tulajdonsággal rendelkezzenek.

4.2 Konjugáltak keresése

Az új pontok egy másik megközelítése, ha már meglévő pontok valamely konjugáltjaként tekintünk rá. Tudjuk, hogy bármely háromszögműközpont izogonális, izotomikus vagy éppen harmonikus konjugáltja két másik pontra szintén háromszögműközpont, illetve számos más – már definiált és még nem bevezetett – konjugált is értelmezhető. Szerencsére az ETC-ben a pontoknál feltüntetik, amennyiben egy másik pont valamilyen konjugáltjaként is ismeretes és az az intuíciónk, hogy így nehéz új pontot találni.

Bemutattuk például, hogy a Nagel pont izotomikus konjugáltja a Gergonne pont, de vajon mi ennek izogonális konjugáltja? Minthogy a Nagel pont $(b + c - a : c + a - b : a + b - c)_b$, izogonális konjugáltja nyilván $\left(\frac{a^2}{b+c-a} : \frac{b^2}{c+a-b} : \frac{c^2}{a+b-c}\right)_b$. Ez a pont az ETC-ben $X(56)$ -tal azonosítható, tehát nem találtunk olyan gyorsan új pontot. Meggondolható azonban, hogy mi történik, ha ennek a pontnak vesszük most az izotomikus konjugáltját.

4.2.1 Észrevétel: Egy $P = (x : y : z)_b$ pont izogonális konjugáltjának izotomikus konjugáltja, illetve izotomikus konjugáltjának izogonális konjugáltja $P_X = (a^2x : b^2y : c^2z)_b$ alakban áll elő, azaz a két konjugálás egymás utáni elvégzése egy projektív transzformáció.

$X(56)$ izotomikus konjugáltja $(a^2(b + c - a) : b^2(c + a - b) : c^2(a + b - c))_b$, melyre $kx_{13,6,9} = 0,7137729 \dots$, így ez az $X(55)$ -ös háromszögműközpont, továbbá ez a Gergonne pont izogonális konjugáltja is.

4.2.2 Érdekeség: A fentebb tárgyalt $X(55)$ és $X(56)$ pontok azon középpontos hasonlóságok centrumai, melyek a háromszög beírt és hozzáírt körét egymásba viszik.

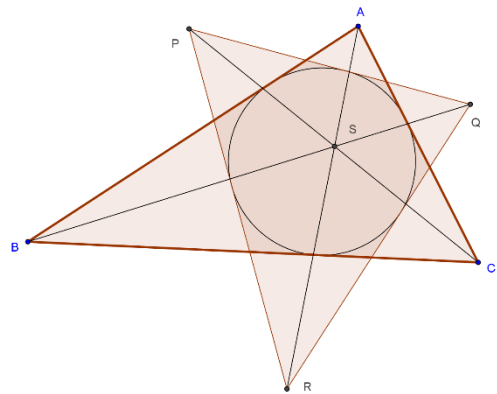
4.2.3 Megjegyzés: Látható, hogy az izogonális és izotomikus konjugáltakkal – megfelelő sorrendben elvégezve – egy háromszögműközponttól három másik ponthoz könnyen eljutunk, további pontok felfedezéséhez azonban vagy más konjugációkat is számításba vesszünk, vagy más úton próbálunk eljutni.

4.3 Trial and error: X(177) – Első félkörívpon

A legkézenfekvőbb módszer a keresésre, ha különböző ötletektől vezérelve próbálgatással igyekszünk új pontot felfedezni. Ehhez kifejezetten hasznos egy olyan dinamikus szerkesztőszoftver, mint az általam használt GeoGebra®.

A háromszöközéppontok szerkesztésekor megfigyeltem, hogy a háromszög beírható köréhez érintőháromszög rajzolható olyan módon, hogy a szögfelező egyenesek és a beírható kör első érintkezési pontjaiban érintőket húzok. E felfedezés arra ösztönzött, hogy tovább vizsgáljam ezt a háromszöget. Több háromszög grafikus szerkesztéséből arra a következtetésre jutottam, hogy ennek az érintőháromszögnek csúcsait az alapháromszög megfelelő csúcsaival összekötve a három összekötő egyenes egy pontban metszi egymást.

4.3.1 Tétel és definíció: Legyen A', B', C' a szögfelezők és a beírható kör első találkozási pontjai. A szögfelezőkre állított merőlegesek A', B', C' -ben létrehoznak egy ΔRQP háromszöget. Ekkor az AR, BQ, CP egyenesek konkurrensak az S pontban.



4.2. ábra - Az első félkörívpon

Miközben több irányból is igyekeztem feltevésem igazolni, de mindannyiszor akadályba ütköztem, Kimberling 1994-es cikkét olvasva [8] észrevettem, hogy az akkor még Y_3 -nak keresztelt középpont definíciója megegyezik az általam felfedezni vélt új pontéval. Azóta az enciklopédia egységessége érdekében ez a pont az $X(177)$ nevet viseli és a következő baricentrikus és trilineáris függvényekkel rendelkezik:

$$f_{X(177)} = \left(\left(\cos \frac{\beta}{2} + \cos \frac{\gamma}{2} \right) \sec \frac{\alpha}{2} \right)_t = \left(\left(\cos \frac{\beta}{2} + \cos \frac{\gamma}{2} \right) \sec \frac{\alpha}{2} \sin \alpha \right)_b.$$

E függvények már egy számítógépes program termékei, de céljaim között szerepel, hogy ezekhez elemi úton jussak el, azonban ez már nem képezi szakdolgozatom részét.

4.3.2 Kiegészítés: A 4.3.1-ben definiált pont egyértelmű létezése tulajdonképpen a Menelaosz-tétellel bizonyítható; e bizonyítást 1987-ben G. R. Veldkamp adta, mely megtekinthető [7]-ben.

5 Kitekintés - Kvadrifigurák

A háromszögek középpontok tanulmányozása során végig az a szemlélet érvényesül, hogy a háromszög csúcsainak (vagy oldalainak) ismeretében speciális pontokat keresünk, melyek – néhány kivételtől eltekintve – minden háromszög esetén egyértelműen léteznek és a háromszög adataival „könnyen” kifejezhetők és/vagy speciális tulajdonsággal rendelkeznek.

Miközben új pontokat kerestem, nem hagyott nyugodni a gondolat, hogy az effajta rendszerezés kiterjeszhető-e összetett sokszögekre vagy akár több dimenziós esetekre is. Szembetűnő ugyanis, hogy beszélünk húrnégyszögek körülírt körének középpontjáról, valamint számos tudományos kísérlet és számolás során értelmezzük testek súlypontját.

Ezt az általánosítási irányelvet képviseli Chris van Tienhoven munkája [22], a Kvadrifigurák enciklopédiája, melyben négyszögek Kimberlingéhez hasonló rendszerezését teremti meg. A háromszögek tanulmányozásához képest jelentős eltérés, hogy egy négyszögre nem igaz, hogy 4 adattal egyértelműen reprezentálható; illetve további probléma, hogy a koordináta-rendszert milyen módon terjesszük ki rájuk. A megoldás egyszerűsége rendkívül elegáns. Egyrészt, legyen egy háromszög három csúcsa a már jól ismert $(1:0:0)$, $(0:1:0)$, $(0:0:1)$ és válasszuk a negyedik pontot tetszőleges $(p:q:r)$ alakban. Másrészt tehetjük ezt olyan módon, hogy az alap referenciaháromszög helyett a $(p:q:r)$ pont által meghatározott külső csúcsérintő háromszög csúcsait vesszük, melyek ily módon $(-p:q:r)$, $(p:-q:r)$, $(p:q:-r)$ alakúak.

A kvadrifigurák vizsgálata során olyan összefüggéseket vehetünk észre, minthogy a négy csúcsból egyet-egyét kiválasztva, a fennmaradó három csúcsból álló háromszögre vett izogonális konjugáltjával összekötve a négy egyenes egy pontban metszi egymást (QA. P4). Ezután már talán meg sem lepődünk, ha kiderül, hogy az izotomikus konjugáltjaival való analóg műveletek szintén négyszögek középpontot adnak (QA. P5).

A középpontok témakörében elmélyülve megfogalmazódott a sejtésem, hogy miként a háromszögek segítségével kiterjeszhetjük négyszögekre a megfigyeléseket, úgy további n -szögekre is van lehetőség „általánosítani” ezeket a jellemzőket, ezért szeretném, ha a későbbiekben időm és lehetőségem nyílna ennek a felépítésnek tanulmányozására, sőt azt is szeretném vizsgálni, hogy miként négyszögekre, úgy tetraéderre vagy más – elsősorban konvex - testekre is készíthető hasonlóan összetett, mégis letisztult „modell”.

6 Függelék

6.1 Alapvető tételek

Az itt található tételekre általánosan sok esetben hivatkozom, a szakdolgozatom eddigi fejezeteiben ezeket közismertnek tekintem és tulajdonképpen bizonyos pontoknál, tételeknél igazolom, de most a tényleges bizonyításokat közlöm.

6.1.1 Szinusz-tétel: Az $\triangle ABC$ háromszög oldalaira és szögeire a következő teljesül:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R.$$

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy a háromszög hegyesszögű és tekintsük a háromszög köré írt kört és vizsgáljuk valamely oldalához – például c -hez – vett $\triangle OAB$ háromszöget. Itt $\angle BOA = 2\gamma$. Vegyük ennek a szögnek a szögfelezőjét és írjuk fel a c oldal két részének hosszát, így $c = 2R \sin \gamma$.

6.1.2 Koszinusz-tétel: Az $\triangle ABC$ háromszög szögeire:

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2bc}.$$

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy a háromszög hegyesszögű. Ekkor a háromszög b oldalához tartozó magassága $m_b = a \sin \gamma$, valamint ennek talppontjától a C csúcsig levő oldalszakasz hossza $a \cos \gamma$, ekkor a másik szakasz $b - a \cos \gamma$. Írjuk fel a c oldalra a Pitagorasz-tételt:

$$\begin{aligned} c^2 &= (a \sin \gamma)^2 + (b - a \cos \gamma)^2; \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma. \end{aligned}$$

Itt felhasználtuk, hogy $\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma = 1$.

Megjegyzés: A derék- vagy tompaszögű háromszögek esete hasonlóan bizonyítható.

6.2 A 3.10-ben szereplő H, O baricentrikák normáltjai

6.2.1 A H magasságpont egy baricentrikája $(a \cos \beta \cos \gamma : b \cos \alpha \cos \gamma : c \cos \alpha \cos \beta)_b$.

A koszinusz-tételt felírva $a \cos \beta \cos \gamma = \frac{1}{4abc} (a^2 + c^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)$, így

$$H = ((a^2 + c^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2) : (a^2 + b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2) : (b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + c^2 - b^2))_b.$$

A koordináták összegére

$$\begin{aligned} \sum_{cikl} ((a^2 + c^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)) &= 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - a^4 - b^4 - c^4 = \\ &= (a + b + c)(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) = 16s(s - a)(s - b)(s - c) = 16T^2 = 16r^2s^2. \end{aligned}$$

Tehát a magasságpont normált koordinátafüggvénye:

$$f_H = \frac{1}{16r^2s^2} (c^2 + a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2).$$

A koszinusz-tétel másik irányából pedig következik egy ekvivalens formula, így H baricentrikája:

$$H = \frac{R}{rs} (a \cos \beta \cos \gamma, b \cos \alpha \cos \gamma, c \cos \alpha \cos \beta)_b.$$

6.2.2 Az O körülírt kör középpontjának egy baricentrikája $(a \cos \alpha : b \cos \beta : c \cos \gamma)_b$.

A koszinusz-tételt felírva $a \cos \alpha = \frac{a}{2bc} (b^2 + c^2 - a^2) = \frac{1}{2abc} a^2 (b^2 + c^2 - a^2)$, így

$$O = (a^2(b^2 + c^2 - a^2) : b^2(a^2 + c^2 - b^2) : c^2(a^2 + b^2 - c^2))_b.$$

A koordináták összegére

$$\sum_{cikl} (a^2(b^2 + c^2 - a^2)) = \sum_{cikl} ((a^2 + c^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)) = 16r^2s^2.$$

Így az O pont normált koordinátafüggvénye:

$$f_O = \frac{1}{16r^2s^2} (a^2(b^2 + c^2 - a^2)).$$

A koszinusz-tétel másik irányából pedig következik egy ekvivalens formula, így O baricentrikája:

$$O = \frac{R}{2rs} (a \cos \alpha, b \cos \beta, c \cos \gamma)_b.$$

6.3 Előzmény 6.4-hez és 6.5-höz

A következő fejezetekben bizonyított tételekhez előbb szükséges további megállapításokat tennünk a baricentrikus vektorokkal kapcsolatban.

6.3.1 Definíció: Legyenek \vec{u} és \vec{v} vektorok, ekkor ezek skalárszorzata

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |u||v| \cos \theta,$$

ahol θ a két vektor által bezárt szög.

A skalárszorzat a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

1. $\vec{u} \cdot \vec{u} = |u|^2$;
2. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ akkor és csak akkor, ha $\vec{u} \perp \vec{v}$;
3. A skalárszorzat kommutatív, disztributív és asszociatív.

6.3.2 Megjegyzés: Tetszőleges P pont helyvektora értelmezhető, mint egy 0-ként jelölt hivatkozási pontból P -be mutató $\vec{P} = \overrightarrow{OP}$ vektor.

6.3.3 Tétel: Legyen adott az $\triangle ABC$ O súlyponttal és legyen $\vec{O} = \vec{0}$ mint referenciapont.

Ekkor nyilván $|\vec{A}| = |\vec{B}| = |\vec{C}| = R$, illetve

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = R^2;$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = R^2 - \frac{c^2}{2}.$$

A különböző csúcsok vektorainak skalárszorzataira ciklikusan hasonló képlet adódik.

Bizonyítás: A definíció szerint $\vec{A} \cdot \vec{B}$ skalárszorzatra

$$\begin{aligned} &= |\vec{A}||\vec{B}| \cos(\angle AOB); \\ &= R^2 \cos(\angle AOB); \\ &= R^2 (1 - 2 \sin^2(\angle AOB)); \\ &= R^2 (1 - 2 \sin^2 \gamma); \\ &= R^2 - \frac{1}{2} (2R \sin \gamma)^2; \\ &= R^2 - \frac{c^2}{2}. \end{aligned}$$

Felhasználva a 3.4.2-es következményt.

6.3.4 Kiegészítés: A baricentrikus koordináták lehetővé teszik, hogy a sík bármely pontját $x\vec{A} + y\vec{B} + z\vec{C}$ alakban írjuk le. Ily módon a sík minden vektora, egyenese is előáll, mint $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ lineáris kombinációja.

6.4 Az 1.3.5-ös tétel bizonyítása

A jelen és 6.5-ös fejezetben szereplő tételek bizonyítása során felírt egyenletekben alkalmazunk egy ciklikus összeadás függvényt, melyet a következőképpen definiálhatunk:

6.4.1 Definíció: Egy kifejezés ciklikus összegén a kifejezés tagjainak a rákövetkezőjével való megfeleltetések által adott kifejezések összegét értjük, ahol a ciklusok rendre az $\{a, b, c\}$, $\{x_i, y_i, z_i\}$, $\{\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}\}$ halmazok elemeit cserélik a rákövetkezőkkel. Például:

$$\sum_{cikl} (x_1 + b)\vec{C} = (x_1 + b)\vec{C} + (y_1 + c)\vec{A} + (z_1 + a)\vec{B}.$$

Emlékeztetőül újra kimondjuk a bizonyítandó tételt.

1.3.5 Tétel: A $\overline{PQ} = \langle x, y, z \rangle_b$ vektor hosszára

$$|\overline{PQ}|^2 = -a^2yz - b^2xz - c^2xy = -\sum_{cikl} c^2xy.$$

Bizonyítás: A skalárszorzat definíciójából

$$\overline{PQ} \cdot \overline{PQ} = |\overline{PQ}|^2,$$

másrészt pedig felírható $\overline{PQ} = (x\vec{A} + y\vec{B} + z\vec{C})$ alakban, tehát

$$\overline{PQ}^2 = x^2\vec{A} \cdot \vec{A} + y^2\vec{B} \cdot \vec{B} + z^2\vec{C} \cdot \vec{C} + 2(xy\vec{A} \cdot \vec{B} + xz\vec{A} \cdot \vec{C} + yz\vec{B} \cdot \vec{C});$$

$$\overline{PQ}^2 = \sum_{cikl} x^2\vec{A} \cdot \vec{A} + 2 \sum_{cikl} xy\vec{A} \cdot \vec{B}.$$

$\vec{A} \cdot \vec{A} = \vec{B} \cdot \vec{B} = \vec{C} \cdot \vec{C} = R^2$ és $\vec{A} \cdot \vec{B} = R^2 - \frac{c^2}{2}$, $\vec{A} \cdot \vec{C} = R^2 - \frac{b^2}{2}$, $\vec{B} \cdot \vec{C} = R^2 - \frac{a^2}{2}$, ezért

$$\overline{PQ}^2 = R^2 \left(\sum_{cikl} x^2 + 2 \sum_{cikl} xy \right) - \sum_{cikl} c^2xy;$$

$$\overline{PQ}^2 = R^2 \left(\sum_{cikl} x \right)^2 - \sum_{cikl} c^2xy.$$

Itt pedig használjuk ki, hogy $\sum_{cikl} x = 0$, a vektorokra tett 1.3.3 -as észrevétel alapján, így adódik a tételben megadott egyenlőség.

6.5 Az 1.6.2-es tétel bizonyítása

Emlékeztetőül újra kimondjuk a bizonyítandó tételt.

1.6.2 Tétel: Legyenek $\overline{PQ} = \langle x_1, y_1, z_1 \rangle_b$ és $\overline{MN} = \langle x_2, y_2, z_2 \rangle_b$, ekkor

$$\overline{PQ} \perp \overline{MN} \Leftrightarrow a^2(y_1z_2 + z_1y_2) + b^2(z_1x_2 + x_1z_2) + c^2(x_1y_2 + x_2y_1) = 0;$$

$$\overline{PQ} \perp \overline{MN} \Leftrightarrow \sum_{cikli} (c^2(x_1y_2 + x_2y_1)) = 0.$$

Bizonyítás: 6.3.3 alapján tekintsük az $\vec{O} = \vec{0}$ esetet és használjuk ki, hogy merőleges vektorok esetén skalárszorzatuk 0, azaz elégséges megmutatnunk, hogy

$$\overline{PQ} \cdot \overline{MN} = (x_1\vec{A} + y_1\vec{B} + z_1\vec{C})_b \cdot (x_2\vec{A} + y_2\vec{B} + z_2\vec{C})_b = 0.$$

A szorzatot kibontva, majd a 6.3-ban alkalmazott átírásokat elvégezve és átrendezve

$$\sum_{cikli} (x_1x_2\vec{A} \cdot \vec{A}) + \sum_{cikli} ((x_1y_2 + x_2y_1)\vec{A} \cdot \vec{B}) = 0;$$

$$\sum_{cikli} (x_1x_2R^2) + \sum_{cikli} \left((x_1y_2 + x_2y_1) \left(R^2 - \frac{c^2}{2} \right) \right) = 0;$$

$$R^2 \left(\sum_{cikli} (x_1x_2) + \sum_{cikli} (x_1y_2 + x_2y_1) \right) = \frac{1}{2} \sum_{cikli} (c^2(x_1y_2 + x_2y_1));$$

$$R^2 * \sum_{cikli} (x_1) * \sum_{cikli} (x_2) = \frac{1}{2} \sum_{cikli} (c^2(x_1y_2 + x_2y_1)).$$

A bal oldalon szereplő ciklikus összegek 1.3.3 miatt 0, így adódik

$$0 = \frac{1}{2} \sum_{cikli} (c^2(x_1y_2 + x_2y_1)),$$

ami pontosan a tételben megfogalmazott bilineáris forma.

6.6 Menelaosz-tétel

6.6.1 Tétel: Tetszőleges ΔABC háromszög olyan MEN egyenesére, mely átszeli a CA, BC oldalakat (a csúcsoktól különböző M, E pontokban), ekvivalensek a következők:

Az egyenes metszi az AB oldal meghosszabbított egyenesét (N) $\Leftrightarrow \frac{AM}{MC} \cdot \frac{CE}{EB} \cdot \frac{BN}{NA} = -1$.

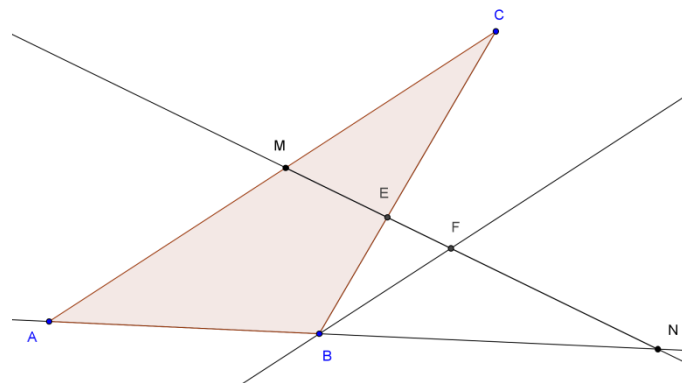
Bizonyítás: Tekintsük az AC oldallal párhuzamos, B -n átmenő egyenes metszéspontját az MEN egyenessel (F). ΔANM hasonló a ΔBNF háromszöggel, valamint ΔMEC is hasonló ΔEBF -gel, azaz oldalai hányadosai is egyenlők, pontosabban:

$$\frac{AM}{BF} = \frac{AN}{BN} \text{ és } \frac{CE}{EB} = \frac{MC}{BF}.$$

Vegyük e két egyenlet szorzatát:

$$\frac{AM}{BF} \cdot \frac{CE}{EB} = \frac{AN}{BN} \cdot \frac{MC}{BF};$$

$$\frac{AM}{MC} \cdot \frac{CE}{EB} \cdot \frac{BN}{AN} = 1.$$



6.1. ábra - A Menelaosz-tétel

Itt azonban $AN = -NA$, tehát

$$\frac{AM}{MC} \cdot \frac{CE}{EB} \cdot \frac{BN}{NA} = -1.$$

A másik irány bizonyításához tegyük fel, hogy az előzően megállapított MEN egyenesre igaz az osztóviszonyok szorzatára vonatkozó egyenlőség, de E nincs rajta az MN egyenesen. Ekkor létezik egy E' pont, mint az MN és BC egyenesek metszéspontja, melyre a tétel másik iránya alapján $\frac{AM}{MC} \cdot \frac{CE'}{E'B} \cdot \frac{BN}{NA} = -1$, azaz

$$\frac{AM}{MC} \cdot \frac{CE'}{E'B} \cdot \frac{BN}{NA} = \frac{AM}{MC} \cdot \frac{CE}{EB} \cdot \frac{BN}{NA}.$$

Tehát $\frac{CE'}{E'B} = \frac{CE}{EB} \Rightarrow \frac{CE'}{E'B} + 1 = \frac{CE}{EB} + 1$, azaz $\frac{CE' + E'B}{E'B} = \frac{CE + EB}{EB} \Rightarrow \frac{CB}{E'B} = \frac{CB}{EB}$,
így $E'B = EB$, vagyis $E = E'$.

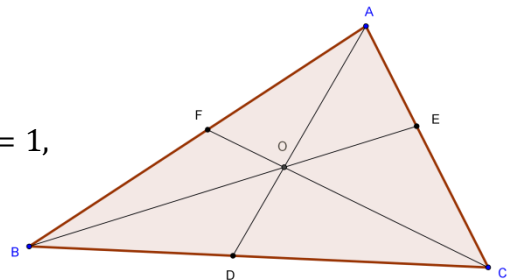
6.7 Ceva-tétel

6.7.1 Tétel: Az $\triangle ABC$ háromszögben az AD, BE, CF egyenesek akkor és csak akkor konkurrenszek egy (O) pontban, ha

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1,$$

másképpen, ha

$$(ABF)(BCD)(CAE) = 1.$$



6.2. ábra - A Ceva-tétel

ahol $(XYZ) = \frac{XZ}{ZY}$ hányadosként szereplő osztóviszony.

Bizonyítás: $\triangle ABE$ és $\triangle BCE$ -re felírt Menelaosz-tétel szorzataként adódik a konkurrenciából következő egyenlőség iránya, a bizonyítás másik fele a Menelaosz-tétel bizonyításához hasonlóan.

6.7.2 Megjegyzés: Természetesen a tételben szereplő D, E, F pontok a csúcsoktól különbözőek.

6.8 Az Apollóniosz-kör létezésének bizonyítása

Feltehető, hogy a 2.6.1-es definícióban $\frac{m}{n} > 1$ és P nincs a BC egyenesén. Tudjuk, hogy egy háromszög valamely csúcsából induló szögfelezője a szemközti oldalegyenest a két másik oldal arányában metszi, azaz a metszéspont távolsága a két másik csúcstól azonos arányú.

Tekintsük a $\triangle PBC$ háromszög P -ből vett szögfelezőit és jelöljük a BC szakasszal vett metszéspontjait P_i -vel és P_e -vel. Világos, hogy e pontokra teljesül az állítás, továbbá a BC egyenes más pontjára nem. Mivel tetszőleges – a feltételt teljesítő – P pont esetén a szögfelezők merőlegesek egymásra, valamint ugyanazon P_i, P_e pontokat adják, e pontok rajta lesznek a $P_i P_e$ átmérőjű Thálesz-körön.

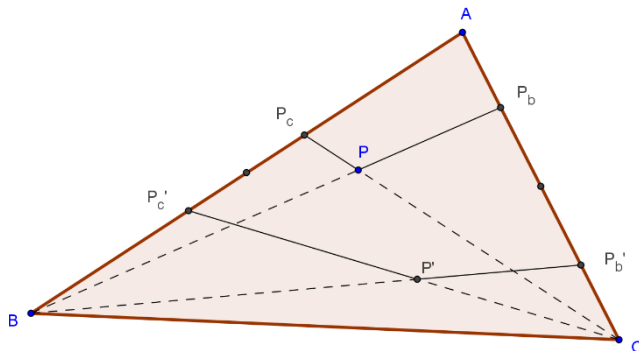
Ha e Thalész-kör tetszőleges P pontjára teljesül, hogy PP_i és PP_e a PBC háromszög szögfelezői, azaz $\frac{BP}{CP} = \frac{BP_i}{P_i C} = \frac{BP_e}{P_e C} = \frac{m}{n}$, kész vagyunk. Tegyük fel, hogy PBC szögfelezőinek BC oldalegyenessel vett metszéspontjai $\{P'_i, P'_e\} \neq \{P_i, P_e\}$, vagyis $\frac{BP'_i}{P'_i C} = \frac{BP'_e}{P'_e C}$. Vegyük észre, hogy amennyiben ez az arány eltér a fentebbi $\frac{m}{n}$ -től, akkor a $P_i P_e$ szakasz tartalmazza $P'_i P'_e$ -t és fordítva. Ekkor viszont a $P_e P P_i$ tartalmazza $P'_e P P'_i$ -et vagy fordítva, node mindkettőről tudjuk, hogy derékszögek, így ellentmondásra jutottunk.

6.9 A 2.4.4 és 2.4.5-ös tételek bizonyítása

2.4.5 Tétel: Ha $P = (t_1 : t_2 : t_3)_b$,

akkor izotomikus konjugáltja

$$P_{ISOT} = \left(\frac{1}{t_1} : \frac{1}{t_2} : \frac{1}{t_3} \right)_b.$$



6.3. ábra - Az izotomikus konjugált

Bizonyítás: Jelölje P_b és P_c rendre az AC és AB egyeneseken keletkező metszéspontokat a P -n átmenő transzverzálisokkal és hasonlóan P'_b és P'_c a P' -n átmenő transzverzálisokkal, ekkor az 1.5-ös fejezetben taglaltak szerint tudjuk:

$$\frac{1}{(CAP_b)} = (ACP_b) = \frac{t_3}{t_1} \text{ és } (ABP_c) = \frac{t_2}{t_1}, \text{ így } \frac{(ACP_b)}{(ABP_c)} = \frac{t_3}{t_2},$$

ezért

$$\frac{(ACP'_b)}{(ABP'_c)} = \frac{(CAP_b)}{(BAP_c)} = \frac{t_1}{t_3} \cdot \frac{t_2}{t_1} = \frac{t_2}{t_3} = \frac{1/t_3}{1/t_2};$$

innen és a ciklikusságból pedig adódik a tételbeli formula.

2.4.4 Tétel: Ha $P = (\alpha : \beta : \gamma)_t$, akkor izotomikus konjugáltja $P_{ISOT} = \left(\frac{1}{a^2\alpha} : \frac{1}{b^2\beta} : \frac{1}{c^2\gamma} \right)_t$.

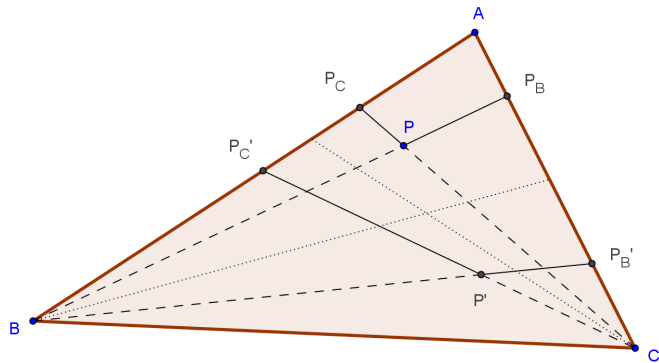
Bizonyítás: A trilineáris és baricentrikus koordináták közötti konverzió értelmében $P = (\alpha : \beta : \gamma)_t = (a\alpha : b\beta : c\gamma)_b$, ennek konjugáltja $P_{ISOT} = \left(\frac{1}{a\alpha} : \frac{1}{b\beta} : \frac{1}{c\gamma} \right)_b$, melyből a fordított irányú konverzió elvégzésekor pontosan a tételben szereplő formula adódik.

6.10 A 2.5.4 és 2.5.5-ös tételek bizonyítása

2.5.5 Tétel: Ha $P = (t_1 : t_2 : t_3)_b$,

akkor izogonális konjugáltja

$$P_{ISOG} = \left(\frac{a^2}{t_1} : \frac{b^2}{t_2} : \frac{c^2}{t_3} \right)_b.$$



6.4. ábra - Az izogonális konjugált

Bizonyítás: Legyen P_B és P_C rendre az AC és AB egyeneseken keletkező metszéspontokat a P -n átmenő transzverzálisokkal és hasonlóan P'_B és P'_C a P' -n átmenő transzverzálisokkal, továbbá jelölje $BAP\alpha = \delta$ és $PAC\alpha = \varepsilon$, ekkor az 1.5-ös fejezetben taglaltak szerint ismert az alábbi összefüggés:

$$(CBP_A) = \frac{T(\Delta PCA)}{T(\Delta PAB)} = \frac{t_2}{t_3},$$

ekkor azonban

$$(CBP_{A'}) = \frac{T(\Delta P'CA)}{T(\Delta P'AB)} = \frac{b}{c} \cdot \frac{P'P'_B}{P'P'_C} = \frac{b}{c} \cdot \frac{\sin \delta}{\sin \varepsilon} = \frac{b}{c} \cdot \frac{PP_C}{PP_B} = \frac{b^2}{c^2} \cdot \frac{T(\Delta PAB)}{T(\Delta PCA)} = \frac{b^2/t_2}{c^2/t_3}$$

s minthogy ez ciklikusan bármely két oldalon elvégezhető, adódik a tétel állítása.

2.5.4 Tétel: Ha $P = (\alpha : \beta : \gamma)_t$, akkor izogonális konjugáltja $P_{ISOG} = \left(\frac{1}{\alpha} : \frac{1}{\beta} : \frac{1}{\gamma} \right)_t$.

Bizonyítás: A trilineáris és baricentrikus koordináták közötti konverzió értelmében

$P = (\alpha : \beta : \gamma)_t = (a\alpha : b\beta : c\gamma)_b$, ennek konjugáltja $P_{ISOG} = \left(\frac{a^2}{a\alpha} : \frac{b^2}{b\beta} : \frac{c^2}{c\gamma} \right)_b =$

$\left(\frac{a}{\alpha} : \frac{b}{\beta} : \frac{c}{\gamma} \right)_b$, melyből a fordított irányú konverzió elvégzésekor pontosan a tételben szereplő formula adódik.

7 Felhasznált Irodalom

7.1 Elsődleges források:

- [1] Jean-Victor Poncelet - [Traité des Propriétés Projectives des Figures](#), Bachelier, Paris, 1822.
- [2] August F. Möbius - [Der Barycentrische Calcul](#), Verlag von Johann Ambrosius Barth, Lipcse, 1827.
- [3] Julius Plücker - [Analytisch-geometrische Entwicklungen](#), G. D. Baedeker, Essen, 1828.
- [4] Julius Plücker - Über ein neues Koordinatensystem, Crelles J. Bd., 1830.
- [5] Roger A. Johnson - [Modern Geometry](#), University of Wisconsin, Madison, WI, 1929.
- [6] Eukleidész - [Elemek](#), Mayer Gyula fordítása, Gondolat Kiadó, Budapest, 1983.
- [7] Clark Kimberling & G. R. Veldkamp - [Problem 1160 and Solution](#), *Crux Math.* 13, 298-299, 1987.
- [8] Clark Kimberling - [Central Points and Central Lines in the Plane of a Triangle](#), *Math. Mag.* 67, 163-187, 1994.
- [9] Pierre Beaudry - [The Paradox of the Poncelet Vanishing Point](#), *The New Federalist*, 08/25, 09/1, 10/20, 1997.
- [10] Reiman István - [Geometria és Határterületei](#), Szalay Könyvkiadó és Kereskedőház Kft., Kisújszállás, 1999.
- [11] Scharnitzky Viktor - [Vektorgeometria és lineáris algebra](#), Nemzedékek Tudása Kiadó, Budapest, 1999.
- [12] Paul Yiu - [Introduction to the Geometry of the Triangle](#), Florida Atlantic University, Boca Raton, FL, 2001.
- [13] Clark Kimberling - [Triangle centers and central triangles](#), University of Manitoba, Winnipeg, 2001.
- [14] Szemjon Grigorjevics Gingyikin - [Történetek fizikusokról és matematikusokról](#), Typotex Kiadó, Budapest, 2003.
- [15] Kovács Zoltán - [A geometria alapjai](#), Nyíregyházi Főiskola, Nyíregyháza, 2003.
- [16] Roger A. Johnson - [Advanced Euclidean Geometry](#), Dover Publications, New York, NY, 2007.
- [17] Zachary Abel - [Barycentric Coordinates](#), nem publikált, 2007.
- [18] Verhóczy László - [Projektív Geometria](#), ELTE Geometriai Tanszék, Budapest, 2010.
- [19] Kiss Sándor - [Koordinátageometriai módszerek összehasonlító elemzése...](#), Debreceni Egyetem, Debrecen, 2010.
- [20] Evan Chen & Max Schindler - [Barycentric Coordinates in Olympiad Geometry](#), MIT, Cambridge, MA, 2012.
- [21] Moussong Gábor - [Geometria](#), ELTE Geometriai Tanszék, Budapest, 2013.

7.2 Egyéb hivatkozások:

- [22] Chris van Tienhoven - Encyclopedia of Quadri-Figures - <http://chrisvantienhoven.nl/index.php/mathematics/encyclopedia>
- [23] Clark Kimberling - Encyclopedia of Triangle Centers - <http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html>
- [24] Eric W. Weisstein - MathWorld - <http://mathworld.wolfram.com>
- [25] George Lucas - A Birodalom visszavág - <http://www.imdb.com/character/ch0000015/quotes>