EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

A FEUERBACH-KÖR VIZSGÁLATA SÍKON ÉS GÖMBÖN

SZAKDOLGOZAT

Készítette: Illésné Weeber Ágnes

Matematika BSc

Tanári szakirány

Konzulens: Lénárt István

Témavezető: Rózsahegyiné Dr. Vásárhelyi Éva

Matematikatanítási és Módszertani Központ

Budapest

2015

Bevezetés és köszönetnyilvánítás

„Az elemi geometria tanulmányozása során
az első igazán izgalmas dolog ez a kör.”

Daniel Pedoe (1910-1998)

Szakdolgozatomban a Kilenc-pont körét fogom vizsgálni, mind a síkon, mind a gömbfelszínen. Ezen kör vizsgálata komplex látásmódot igényel, ugyanis az elemi geometriai összefüggéseken kívül több geometriai bizonyítási módszer ismeretére (elemi geometria, vektorgeometria, inverzió, centrális vetítés, sztereografikus projekció, gömbi inverzió, trigonometria) is szükség van a témakör során megfogalmazott állítások megértéséhez.

A síkháromszög oldalainak felezőpontjait, magasságvonalainak talppontjait és a magasságpontját a csúcsaival összekötő szakaszok felezőpontjait tartalmazó kör tulajdonságaival sok neves (angol, francia, német, svájci, ír) matematikus foglalkozott a XVIII-XIX. század során. Ez látszik a kör sokféle elnevezéséből is: Hat-pontú kör, Tizenkét-pontú kör, n-pontú kör mellett nevezték még Euler-körnek, Feuerbach-körnek, Terquem-körnek, és a kör helyzetére való tekintettel a „középre írt” körnek (il circolo medioscritto), valamint a „középső” körnek is. Számos tanulmányt publikáltak arról, hogy a háromszög fent felsorolt nevezetes pontjai valamennyien egy kör kerületére esnek, valamint vizsgálták e kör további tulajdonságait (sugara, középpontja, nevezetes köröket érintő tulajdonsága). 1822-ben Feuerbach bizonyította először a róla elnevezett tételt, miszerint a síkbeli háromszög Feuerbach-köre érinti a beírt és hozzáírt köröket. A század második felében Hart mondta ki azt, hogy a háromszög oldalait körívekkel helyettesítve, a síkbeli háromszögnek megfeleltethető módon őket érintő beírt és hozzáírt köröket érinti egy negyedik kör. (Mackay, [11]) Ez előfutára a gömbháromszögek esetén ugyanígy fennálló összefüggésnek.

A gömbháromszögekről először az elsőéves Geometria 1. haladó tárgy előadásán hallottam, és eléggé felkeltette az érdeklődésemet ahhoz, hogy később jelentkezzem a „Nem-euklideszi geometriák az iskolában” című kurzusra. Ennek keretében hol arról győződtem meg, mennyire hasonló a sík és a gömb geometriája, hol pedig ennek ellenkezőjéről, mindenesetre nagyon tetszett ez a fajta összehasonlító elemzés, így hamar eldöntöttem, hogy amennyiben lehetséges, erről szóló szakdolgozatot szeretnék írni.

Dolgozatomat egy tömör, lényegre törő geometriai bevezetéssel kezdeném, hogy ezáltal ki tudjam emelni a síkbeli és gömbi geometria hasonlóságait és különbségeit.

Ezután a háromszög Feuerbach-körön szereplő nevezetes pontjait fogom vizsgálni a síkon és a gömbön, majd különböző bizonyításokat fogok bemutatni a síkháromszög kilenc pontjának egy körre illeszkedését illetően. Ezt a Feuerbach-kör tulajdonságainak felsorolása követi, így szó lesz a Feuerbach-tételről is. Megvizsgálom a beírt és hozzáírt körök középpontjainak egymáshoz fűződő viszonyát is, melyek ortocentrikus négyszöget határoznak meg. Szót ejtek a Feuerbach-kör és a kúpszeletek egy összefüggéséről. Ezután áttérek a gömbi vizsgálódásra, mely során dolgozatom érdekes fordulatot vesz majd, hiszen a gömbön – bár lehetséges a síkon megtalált pontok gömbi megfelelőit definiálni – a kilenc pont nem illeszkedik egy körre. Ellenben, a gömbön is létezik egy bizonyos kör, amely a gömbháromszögek beírt és hozzáírt köreinek érintését illetően analóg a Feuerbach-körrel: a Hart-kör. Bizonyítom Hart-tételét a síkon és a gömbön is, kitérek a Hart-kör leglényegesebb tulajdonságaira, végül megvizsgálom a gömbháromszögekre felosztott gömbfelület beírt köreinek egymáshoz való viszonyát.

Úgy gondolom, leendő tanárként a Feuerbach-kör vizsgálatával egy olyan témakört sikerült választanom, amely beépíthető az iskolai tananyagba, mert érdekessége vonzó lehet a matematika iránt egyébként nem annyira érdeklődő tanulók számára is. Tipikus esete a „minden mindennel összefügg" helyzetnek, ami annyira szép a matematikában, geometriai szemléletessége pedig ezt még látványosabbá teszi. A gömbi geometria által kívánt szemléletmód pedig nagyon provokatív a szó legpozitívabb értelmében: vitát generál, és gondolkozásra késztet. Ezek, úgy gondolom, nemcsak a matematikában, hanem minden tudományban segítségünkre lehetnek.

Bevezetőm végéhez érve pedig nagy szeretettel köszönöm elsősorban Lénárt István tanár úrnak, hogy általa bepillantást nyerhettem a gömbi geometriába, és az első perctől gondosan támogatta a szakdolgozatom elkészülését. Nemcsak szakmailag, hanem emberileg is nagyon sokat tanultam tőle, amit a későbbiekben mindenképp kamatoztatni szeretnék. Köszönöm Rózsahegyiné Dr. Vásárhelyi Éva tanárnőnek, hogy elvállalta a dolgozatom belső konzulensi szerepét. Továbbá köszönettel tartozom Bircher Nóra barátnőmnek, aki segített a számítógépes rajzok elkészítésében, valamint férjemnek és szüleimnek, akik kisfiam mellett is lehetővé tették számomra, hogy időt szakítsak a dolgozat elkészültére.

Tartalomjegyzék

1. Geometriai áttekintés

Dolgozatomat a továbbiakban felhasznált geometriai alapfogalmak összefoglalásával kezdem (Lénárt, [10]).

Megjegyzés: A gömbfelület belső geometriáját vizsgáljuk, amely nem függ a gömb sugarától.

	SÍK	**GÖMB**
Legegyszerűbb alakzat	Síkbeli pont	Gömbi pont
Síkbeli egyenes vonal és gömbi főkör:	Két pont egyértelműen meghatároz egy egyenest. Az egyenesnek nincs középpontja. Két pont két végtelen félegyenesre és egy véges szakaszra osztja a végtelen egyenes vonalat. Két pont között a legrövidebb út az egyenes szakasz, e mentén mérhető a pontok távolsága. A síkbeli távolságméréshez tetszőleges egyenes szakaszt választhatunk egységül. Két pont távolságának nincs felső korlátja.	Két nem átellenes pont egyértelműen meghatároz egy gömbi főkört, a legnagyobb gömbi kört, melyet a gömbi geometria egyenesének tekintünk. A gömbi főkörnek két középpontja van, ezek a gömbi főkörnek, mint egyenesnek pólusai. A főkör ezen átellenes pontpár polárisa. Két pont két főkörívre osztja a véges főkört. Két gömbi pont között a legrövidebb út a két lehetséges gömbi főkörív közül a rövidebbik. E mentén mérhetjük a két pont távolságát. A teljes főkör hosszát 360°-nak definiáljuk. Félfőkörívnek (meridiánnak) nevezzük a főkör két átellenes pontja közé eső szakaszt, melynek hossza 180°.
Két egyenes /gömbi főkör kölcsönös helyzete; közös pontjai	Egybeeső – végtelen sok közös pont Metsző – egy közös pont Párhuzamos – nincs közös pont	Egybeeső – végtelen sok közös pont Metsző – két közös (átellenes) pont Párhuzamos egyenesek nincsenek.
Merőlegesség	Két merőleges egyenes a síkot négy végtelen, egybevágó tartományra bontja és négy derékszöget határoznak meg. Két metsző egyenesnek nincs közös merőlegese. Két párhuzamos egyenesnek végtelen sok közös merőlegese van.	Két merőleges főkör a gömbfelületet négy véges, egybevágó gömbi tartományra bontja és így nyolc derékszöget határoznak meg. Két különböző főkörnek csak egyetlen közös merőlegese van.

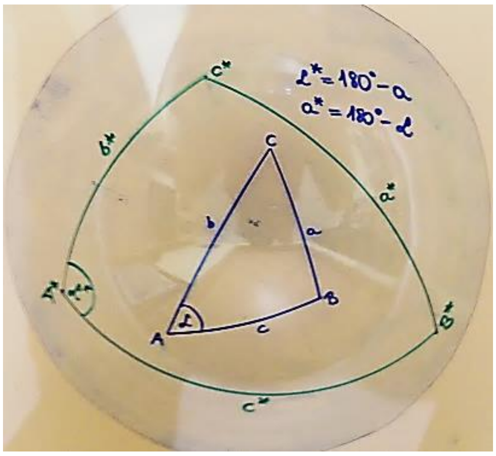
<table>
<tr><td>Szög, szögmérés</td><td>A síkot az egy pontból induló két félegyenes két, nem korlátos tartományra bontja, melyeket szögtartományoknak nevezünk. A síkbeli szögmérés egysége az egyenesszög 180-ad része. Megegyezés alapján két félegyenes által bezárt szög a két szögtartomány közül a nem nagyobbik.</td><td>Egy adott pontból induló két gömbi félegyenes a pont átellenes pontjában is metszi egymást, így a gömbfelületet két zárt tartományra bontja, ezeket nevezzük szögtartományoknak. A gömbi szögméréshez kihasználjuk, hogy a gömbi szög nagysága egyenesen arányos a szög átellenes pontpárjához tartozó poláris egyenesből a szögszárak által kimetszett szakasszal. Megegyezés alapján két gömbi félfőkörív által bezárt szög a két szögtartomány közül a nem nagyobbik.</td></tr>
<tr><td>Kétszög</td><td>A síkon két oldalú zárt sokszög nem létezik.</td><td>A gömbi szögtartomány zárt, a főkörök a kiindulóponttal átellenes pontban ismét metszik egymást, így gömbkétszöget határoznak meg.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Kör</td><td colspan="2">Adott ponttól egyenlő távolságra lévő pontok halmaza.</td></tr>
<tr><td>Ez a feltétel egyetlen pontra teljesül, ez a kör középpontja. Sugár: a körvonal tetszőleges pontját a kör középpontjával összekötő szakasz hossza, r. Nincs legnagyobb kör, egy kör sugara tetszőlegesen nagy lehet. Nincs egyenessel egybevágó kör.</td><td>Ez a feltétel két gömbi pontra teljesül, így a gömbi körnek két középpontja van. Ezek a gömb átellenes pontjai. Gömbi sugár: a körvonal tetszőleges pontját a kör középpontjaival összekötő gömbi főkörívek hossza, rendre r, illetve 180°-r. A legnagyobb gömbi kör a gömbi főkör, melynek sugara 90°. Így a gömbön van olyan kör, amely egybevágó az egyenes gömbi megfelelőjével.</td></tr>
<tr><td>Érintő körök</td><td colspan="2">Két kör érinti egymást, ha a középpontjaik távolsága a sugaraik összegével / különbségével egyenlő.</td></tr>
</table>

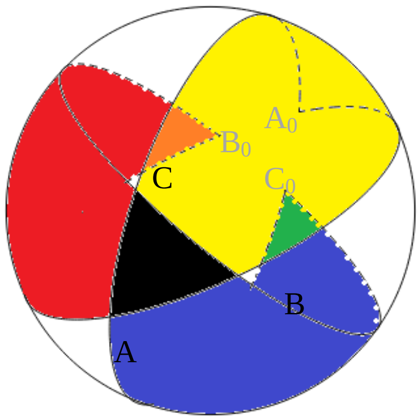
Háromszögek	Három pont, mint csúcspont, egyértelműen meghatározza a háromszöget.	A gömbön három pont, mint csúcspont, nem egyértelműen határozza meg a gömbháromszöget, mert minden két (nem átellenes) pontot két különböző főkörív köt össze. Az egyértelműség érdekében válasszuk minden esetben a pontokat összekötő rövidebb főköríveket, ezek az ún. Euler-háromszögek.
Háromszögek csoportosítása szögeik szerint	A háromszög belső szögeinek összege 180°, így a síkon hegyes-hegyes-hegyes, hegyes-hegyes-derék illetve hegyes-hegyes-tompaszögű háromszögek vannak	A gömbháromszög belső szögeinek összege 180° és 540° között lehet, így a gömbön minden lehetséges kombináció előfordul.

A gömbháromszögek további, a szakdolgozat során szóba kerülő tulajdonságai:

Minden ABC gömbháromszögnek egyértelműen létezik A*B*C* polárháromszöge. Ennek előállításához minden gömbi oldalegyenesnek vesszük azt a pólusát, mely a háromszöggel azonos félgömbre esik, ez a három pont mint csúcspont határozza meg a polárháromszöget. A gömbháromszög polárháromszögének polárháromszöge az eredeti gömbháromszög.

Minden gömbháromszögnek három kiegészítő háromszöge van, melyek mindegyike gömbkétszöggé egészíti ki a gömbháromszöget. Minden így kapott gömbháromszögnek, valamint az eredetinek is van egy-egy tükörképi párja, ez a nyolc gömbháromszög lefedi az egész gömböt.





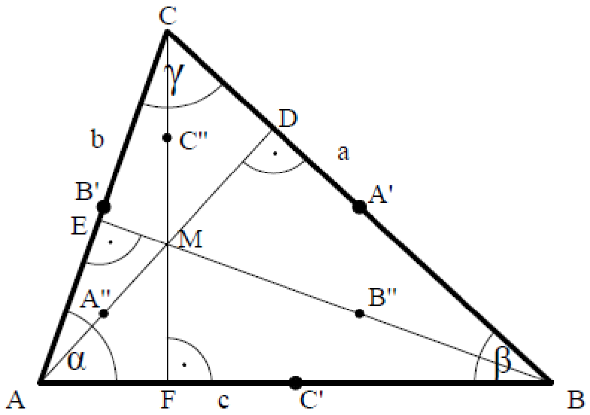
2. A Feuerbach-kör pontjai

2.1. A síkon, különböző háromszögek esetén

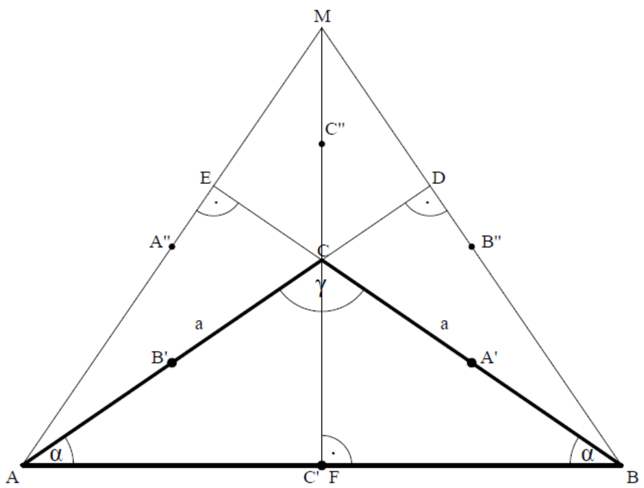
Állítás: *A háromszög három oldalfelező pontja, a magasságpontot a három csúccsal összekötő szakaszok három felezőpontja és a három magasság talppontja egy körön helyezkedik el.*

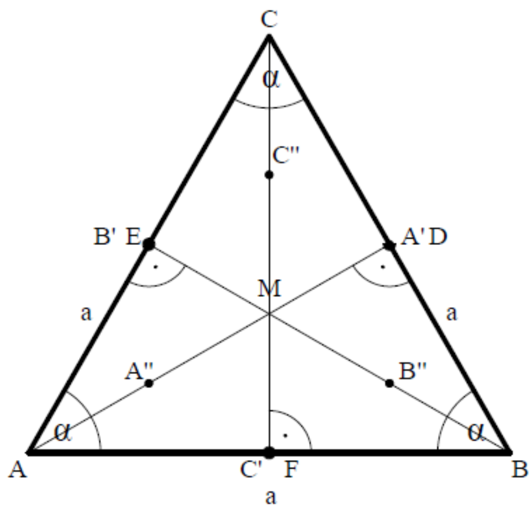
Oldalfelező pontokat jelöljük *A’, B’, C’*-vel, a magasságpontot a csúcsokkal összekötő szakaszok felezőpontjait *A”, B”, C”*-vel, a magasság-talppontokat *D, E, F*-fel.

Általános háromszögek esetén ez kilenc különböző pontot ad:

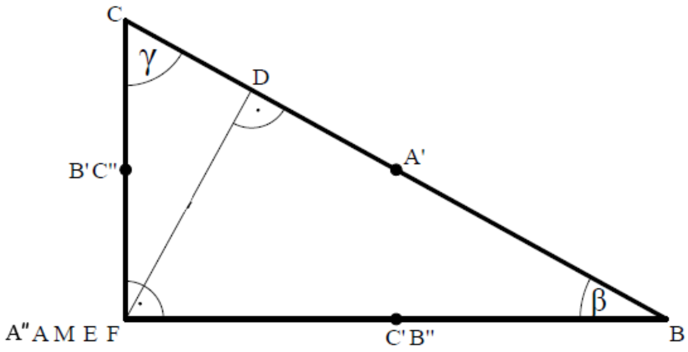


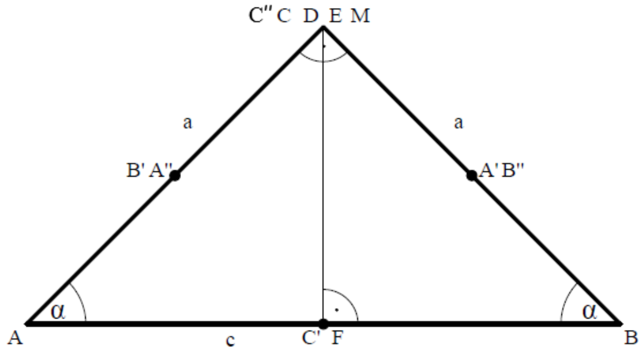
Egyenlőszárú háromszögeknél az alap felezőpontja és az ezen nyugvó magasság-talppont egybeesése miatt nyolc, szabályos háromszögnél hasonló okból hat ponttal számolhatunk:





A derékszögű háromszögeknél a derékszögű csúcs lesz a magasságpont, így a kilenc pont ötre redukálódik. Legkevesebb pontot az egyenlőszárú derékszögű háromszög ad.





2.2. A gömbön

Vizsgáljuk gömbháromszögek esetén is ezeket a pontokat.

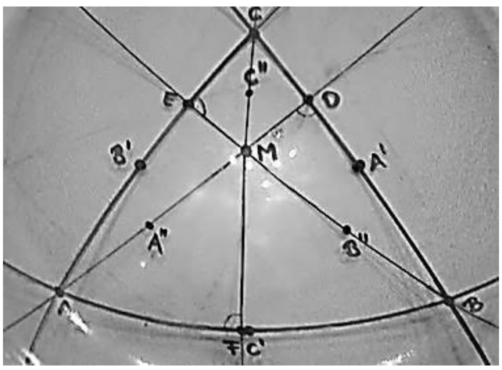
Oldalfelező pontok: a síkbelivel azonos módon definiálhatók, jelöljük ezeket is *A', B', C'*-vel.

Magasságvonalak, magasságpont:

Síkbeli háromszögnél bármely oldalegyeneshez egyetlen magasságvonal tartozik, a gömbön azonban, ha az oldal valamely póluspontján keresztül kell merőlegest húznunk, akkor bármely egyenes merőleges lesz az eredeti oldalegyenesünkre.

Így tehát, ha a gömbháromszög kétszeresen, vagy háromszorosan derékszögű, akkor végtelen sok magasságpontja van: kétszeresen derékszögű háromszög esetén az alapegyenes valamennyi pontja, háromszorosan derékszögű háromszög esetén a teljes gömbfelület bármely pontja. A többi esetben az egy-egy csúcson átmenő magasságvonalak egyértelműen meghatározhatók, és egy pontpárban: a háromszög magasság-pontpárjában metszik egymást. Vegyük magasságpontunknak a háromszöggel azonos félgömbre eső pontot a kettő közül.

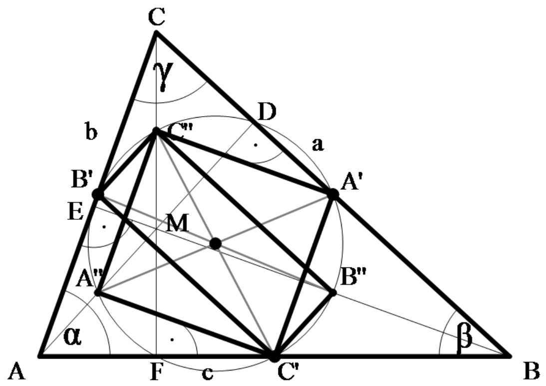
Ez alapján a magasságpontot a csúcsokkal összekötő szakaszok felezőpontját jelöljük *A", B", C"*-vel, a magasságvonalak talppontjait pedig *D, E, F*-fel.



3. A Feuerbach-kör létezésének bizonyítása

Eddigi jelöléseinket felhasználva, és a háromszög köré írt kör középpontját *O*-val jelölve:

I. Elemi geometriai módszerrel (Coxeter, [2]):



B'C' és *B"C"* párhuzamos *BC*-vel, *B'C"* és *B"C'* párhuzamos *AM*-mel a párhuzamos szelők tételének megfordítása alapján. Mivel *AM* merőleges *BC*-re, ezért *B'C'B"C"* téglalap. Ugyanígy *C'A'C"A"* is téglalap. Így *A'A"*, *B'B"* és *C'C"* ugyanazon kör átmérői. Az ezek fölé az átmérők fölé rajzolt *D, E, F* csúcsú szögek derékszögűek, ezért szintén rajta vannak ezen a körön a Thálesz tétel megfordítása miatt.□

Állítás: *Vegyük a háromszög kilenc* (bizonyítandóan a Feuerbach-körre illeszkedő) *pontját, magasságpontját és körülírt körét. Tükrözzük a háromszög magasságpontját a kilenc pontra. A kapott pontok a háromszög körülírt körére illeszkednek.*

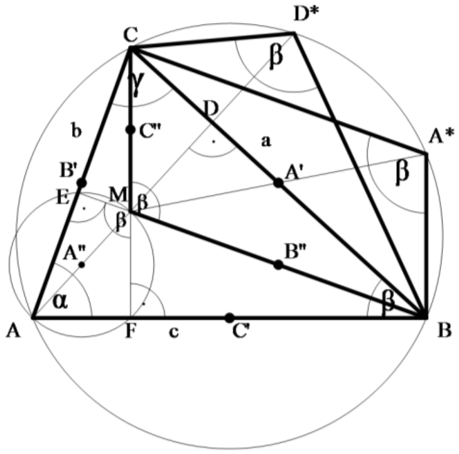
Bizonyítás: A tételt elegendő belátni egy megfelelő ponthármasra is, mert ennek alapján a tétel már a többi pontra is bizonyítható.

II. Húrnégyszögek segítségével (Vígh, [17]):

Természetesen a csúcsot a magasságponttal összekötő szakaszok felezőpontjára tükrözve a magasságpontot, a csúcspontot kapjuk, ami rajta van a körülírt körön, tehát ezzel három pontnak a körülírt körre való illeszkedését már be is bizonyítottuk.

Vegyük az *A"* középpontú, *AA"* sugarú kört, melynek tehát átmérője az *AM* szakasz. Erre a körre illeszkedik az *E* és *F* magasságtalppont, hiszen az *AM* átmérő alattuk derékszögben látszik. Így egy *AEMF* húrnégyszöget kaptunk meg, melynek *E* és *F* csúcsnál lévő szöge derékszög, *A*-nál lévő szöge legyen α, *M*-nél β. $\alpha + \beta = 180°$.

Azt kell bebizonyítanunk, hogy *M*-et *A'* oldalfelezőpontra, és *D* magasságtalppontra tükrözve a kapott csúcsoknál (*A'**, *D**) lévő szögek is β nagyságúk, mert ekkor *ABA'*C* és *ABD*C* négyszögek is húrnégyszögek.



Nézzük a *CMB* csúcsnál fekvő szöget, ez szintén β lesz, hiszen ez *EMF* szög csúcsszöge. Mivel *MD* merőleges *BC*-re, ezért *MBD*C* négyszög deltoid lesz, amelynek tehát *BMC* és *BD*C* szöge egyenlő, mindkét esetben β. Így *D** rajta van a körülírt körön. Az *A'* oldalfelezőpontra történő tükrözéskor pedig paralelogrammát kapunk, mert az átlók felezik egymást. Ez esetben szemközti szögei egyenlőek, vagyis *BA'*C* szög is β. Így a vizsgált pontok a körülírt körre illeszkednek, a Feuerbach-kört pedig megkaphatjuk a körülírható körből a magassásgpontra, mint középpontra vonatkozó ½ arányú kicsinyítéssel.□

III. Vektorok segítségével (Kiss, [8]):

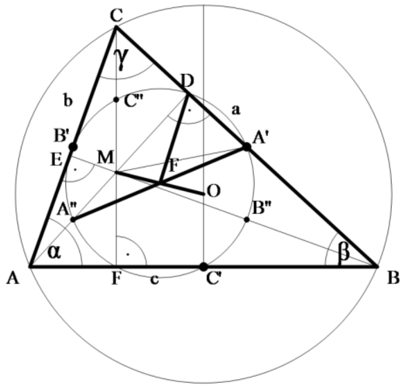
Legyen *O* pont a vonatkoztatási pontunk. Így *OA*=**a**, *OB*=**b**, *OC*=**c**. Tudjuk, hogy a körülírt kör középpontjából a magasságpontba mutató vektor: $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}.$ Az *O*-ból a Feuerbach-kör középpontjába, vagyis *F*-be mutató vektor **f**= $\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{2}}$. Legyen *OA'*=**a'**, *OA''*=**a''**, *OD*=**d**, ahol *D* felezi az *MD** szakaszt, *D** a körülírt körre illeszkedik (előző bizonyítás)**.** Mivel egy kör húrjának felezőmerőlegese átmegy a kör középpontján, ezért *D* helyvektora $\boldsymbol{d}=\frac{a+d^*}{2}+\frac{b+c}{2}$. A következő pontok az *F* középpontú, $\frac{R}{2}$ sugarú körre illeszkednek, ahol *R* a körülírt kör sugara.

Oldalfelezőpontok: $|\boldsymbol{f}-\boldsymbol{a}'|=\left|\frac{a+b+c}{2}\right|-\left|\frac{b+c}{2}\right|=\left|\frac{a}{2}\right|=\frac{R}{2}$

Magasságtalppontok: $|\boldsymbol{f}-\boldsymbol{d}|=\left|\frac{a+b+c}{2}\right|-\left|\frac{a+b+c+d^*}{2}\right|=\left|\frac{-d^*}{2}\right|=\frac{R}{2}$

A csúcsot a magasságpontokkal összekötő szakaszok felezőpontjai:

$|\boldsymbol{f}-\boldsymbol{a}"| = \left|\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}}{2}\right| - \left|\frac{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})+\boldsymbol{a}}{2}\right| = \left|\frac{-\boldsymbol{a}}{2}\right| = \frac{\boldsymbol{R}}{2}$. □



IV. Szintén vektorokkal bizonyítja állításunkat a következő megoldás (Hajós, [5]):

Használjuk eddigi jelöléseinket. Indítsuk most is *O*-ból a helyvektorokat. Ekkor $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$, az *MO* szakasz felezőpontja legyen *F*.

Az *F*-ből *A'*-be mutató vektor $\boldsymbol{a'}-\boldsymbol{f}=\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2}-\frac{a+b+c}{2}=\frac{-a}{2}$, az innen *A"*-be mutató vektor $\boldsymbol{a}"-\boldsymbol{f}=\frac{m+c}{2}-\frac{m}{2}=\frac{a}{2}$. Tehát *A'* és *A"* biztosan rajta van az *F* középpontú körön, és ennek egy átmérője, mivel ellentétes előjelű, de azonos nagyságú vektorok mutatnak beléjük. *D* pontból az *A'A"* szakasz derékszög alatt látszik, így Thálesz tétele miatt rajta kell lennie ezen a körön. Így mindhárom pont rajta van, és hasonló módon ez a másik két ponthármasról is belátható.□

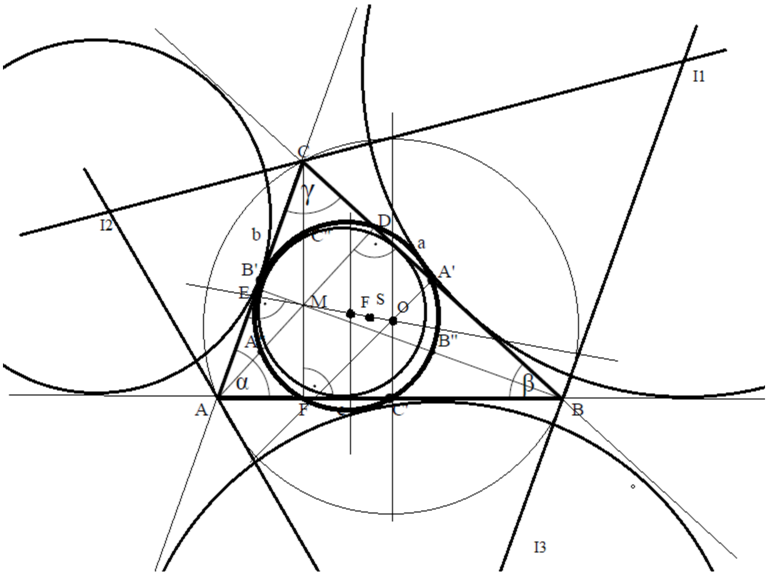
4. A Feuerbach-kör tulajdonságai

4.1. A bizonyításokból következtethető tulajdonságok

Az itt felsorolt állítások bizonyításának részletezésétől eltekintünk.

- A Feuerbach-kör középpontja illeszkedik az *OM* Euler-egyenesre, amely áthalad a háromszög magasságpontján, körülírható körének középpontján, Feuerbach-körének középpontján, illetve a súlypontján.
- A Feuerbach-kör középpontja felezi az *OM* szakaszt.
- A Feuerbach-kör sugara fele a háromszög körülírt körének sugarának.

- Beláthatjuk, hogy a körülírt kör bármely pontját a magasságponttal összekötő szakasz felezőpontja illeszkedik a Feuerbach-körre, hiszen:
- E kört megkaphatjuk a körülírható körből a magassásgpontra, mint középpontra vonatkozó ½ arányú kicsinyítéssel.



4.2. A Feuerbach-kör beírt és hozzáírt köröket érintő tulajdonsága: A Feuerbach-tétel

Állítás: *A Feuerbach-kör érinti a háromszög beírt és hozzáírt köreit.*

A háromszög beírt körének azt a kört nevezzük, amely a háromszög mindhárom oldalát belülről érinti. Ehhez szükséges, hogy oldalaitól egyenlő távolságra legyen a középpontja, amit úgy kaphatunk meg, ha vesszük a háromszög szögfelezőinek metszéspontját.

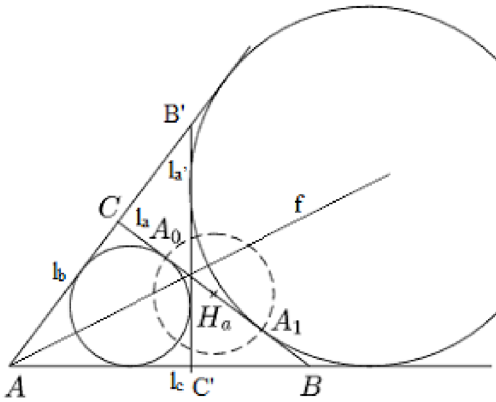
A hozzáírt kör a háromszög egyik oldalát, valamint a másik két oldalának meghosszabbítását érinti. Ezen körök középpontját megkaphatjuk, ha vesszük az egyik belső szögfelező, és a háromszög másik két szögéhez tartozó külső szögfelezők metszéspontját.

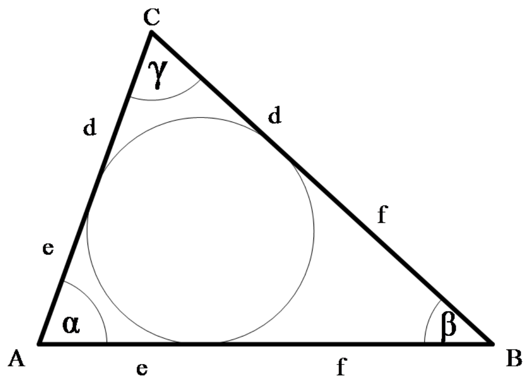
A tételt inverzió segítségével fogom bizonyítani, a transzformáció érintkezéstartó tulajdonságát kihasználva.

Inverziót egy O középpontú, k sugarú kör ad meg, és tetszőleges P (O-tól különböző) pont erre a körre vonatkozó inverzét úgy kaphatjuk meg, hogy az OP félegyenes egy olyan pontját választjuk P'-nek, melyre teljesül az $|OP|\cdot|OP'|=k^2$ egyenlet.

Bizonyítás (Füredi, [3]): *ABC* háromszög $\mathcal{B}$ beírt körének és $\mathcal{H}$ hozzáírt körének érintési pontja az *a* oldalon legyen rendre A_0 és A_1, *f* pedig legyen a körök közös szimmetriatengelye, vagyis az *A* csúcsnál lévő szög belső szögfelezője. E köröknek 4 közös érintője van, l_a, l_b, l_c és l_a', ahol l_a' l_a *f*-re vonatkozó tükörképe. Ha *B* és *C* csúcsot is tükrözzük *f* félegyenesre, akkor *B'* és *C'* l_a'-re illeszkedik.

$|CA_0|=s-c$ és $|BA_1|=s-c$, ahol *s* a háromszög félkerülete. Ezért az A_0A_1 szakasz hossza $|a-2(s-c)|=|c-b|$. Legyen e szakasz (és ezzel együtt az oldal) felezőpontja H_a.





K=a+b+c=2d+2e+2f
s=d+e+f
d=s-c=d+e+f- (e+f)

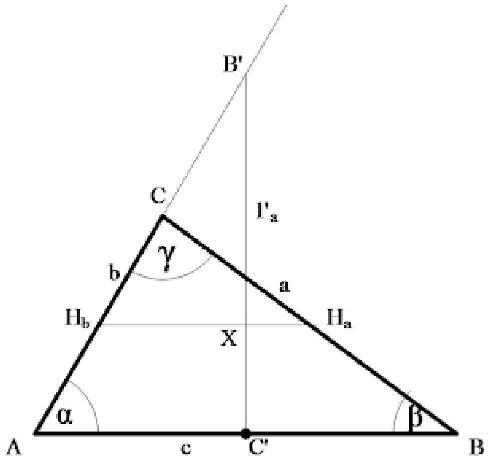
Tegyük fel, hogy $b\neq c$ és jelölje *i* az A_0A_1 átmérőjű körre vonatkozó inverziót. Ekkor $i(A_0)=A_0$, $i(A_1)=A_1$, $i(l_a)=l_a$, mert az alapkör pontjai fixpontok, illetve a póluson áthaladó egyenes is invariáns.

A póluson át nem haladó kör inverze ugyanilyen kör, így $i(\mathcal{B})=\mathcal{B}$, mert az inverzió érintkezéstartó, vagyis $i(\mathcal{B})$, a beírt kör inverze érinti $i(l_a)$-t az $i(A_0)$ pontban. Így $\mathcal{B}$ képe önmaga. Szintén teljesül, hogy $i(\mathcal{H})=\mathcal{H}$, mert a hozzáírt kör inverze érinti az $i(l_a)$-t az $i(A_1)$ pontban.

Lássuk be, hogy $i(l_a')=\mathcal{F}$, vagyis a Feuerbach-kör.

Gondolkodjunk visszafelé! A Feuerbach-kör pontjai közé tartoznak az oldalfelező pontok, így H_a is. Vagyis, $\mathcal{F}$ képe egyenes lesz, hiszen a póluson áthaladó kör inverze a póluson át nem haladó egyenes. Azt kell belátnunk, hogy H_b és H_c képei is az l_a' egyenesre kerülnek (mivel három pont egyértelműen meghatároz egy kört), ahol H_b és H_c a további oldalfelezőpontokat jelölik. Nézzük meg a H_b-t, H_c ezzel analóg lesz.

Legyen X a H_bH_a és $B'C'$ egyenesek metszéspontja.



Ekkor $B'H_bX$ háromszög hasonló $B'AC'$ háromszöghöz (szögeik egyenlőek, hiszen a H_bH_c középvonal párhuzamos az AC' oldallal), így felírható az alábbi összefüggés:

$$|H_bX| = |AC'| \cdot \frac{|H_bB'|}{|AB'|} = |AC'| \cdot \frac{|AB'|-|AH_b|}{|AB'|} = b\frac{c-\frac{b}{2}}{c}$$

Ha itt $c-\frac{b}{2}$ negatív, akkor X a $[H_bH_a]$ szakaszon kívül esik. Kapjuk, hogy $|H_bX| < \frac{c}{2}$, és így X a $[H_aH_b)$ félegyenesre kerül. Továbbá,

$$|H_bH_a| \cdot |XH_a| = |H_bH_a|(|H_bH_a| - |H_bX|) = \frac{c}{2}\left(\frac{c}{2} - b\frac{c-\frac{b}{2}}{c}\right) = \frac{1}{4}(c-b)^2,$$

ahol $|c\text{-}b|$ volt az inverzió alapkörének átmérője, vagyis teljesül az $|OP|\cdot|OP'|=k^2$ összefüggés, tehát $i(H_b) = X$, így $i(H_b)$ illeszkedik l_a'-re. Ugyanígy teljesül $i(H_c)$ esetén is az illeszkedés l_a'-re.

Így $i(\mathcal{F})=l_a'$. Mivel l_a' $\mathcal{B}$ és $\mathcal{H}$ közös érintője, így $\mathcal{F}$ közös érintőköre ezen körök képének. $\mathcal{H}$ helyett más hozzáírt kört is vehetünk, így $\mathcal{F}$-ről bebizonyítható, hogy mind a négy érintő kört érinti.□

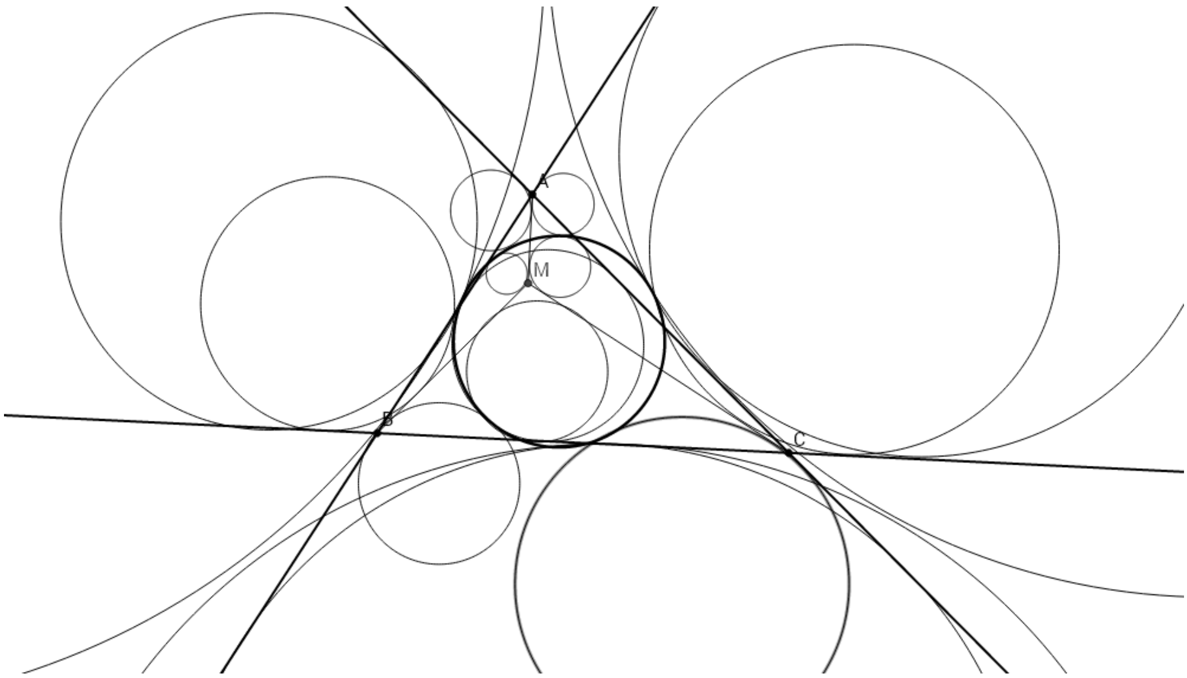
4.3. Ortocentrikus négyszögek és a Feuerbach-kör

Ha négy síkbeli pontot páronként hat különböző egyenessel köthetünk össze, akkor az így kapott összekötő egyenesek a *teljes négyszög oldalai*, az eredeti pontjaink pedig ennek *csúcsai*. *Szemközti oldalak*nak nevezzük a közös csúccsal nem rendelkező oldalakat, *átlós pontok*nak pedig a szemközti oldalak metszéspontjait.

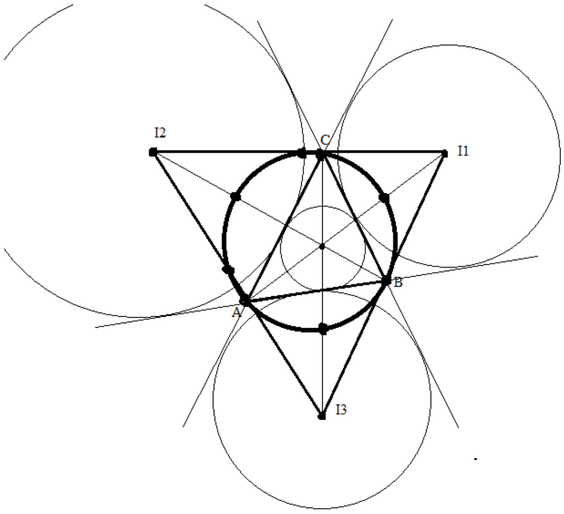
Ha egy teljes négyszög két-két szemközti oldala páronként merőleges egymásra, akkor a teljes négyszög fennmaradó két oldala is merőleges egymásra: ezt *ortocentrikus négyszög*nek nevezzük.

Ortocentrikus négyszöget határoznak meg a (nem derékszögű) háromszög csúcsai és a magasságpont. *Egy ortocentrikus négyszög bármely csúcsa a megmaradó három csúcs által alkotott háromszög magasságpontja* (Coxeter, [2]).

A Feuerbach-körre vonatkozóan: egy ortocentrikus négyszögből alkotott bármely háromszög Feuerbach-köre ugyanaz lesz, ugyanis a teljes négyszög oldalfelező pontjai és az átlóspontjai (a magasságok talppontjai) egy körön vannak. A Feuerbach-kör érintő tulajdonságát kihasználva pedig belátható, hogy így ezen kör érinti az *ABC*, *ABM*, *ACM*, *BCM* háromszögek beírt és hozzáírt köreit, tizenhat kört.



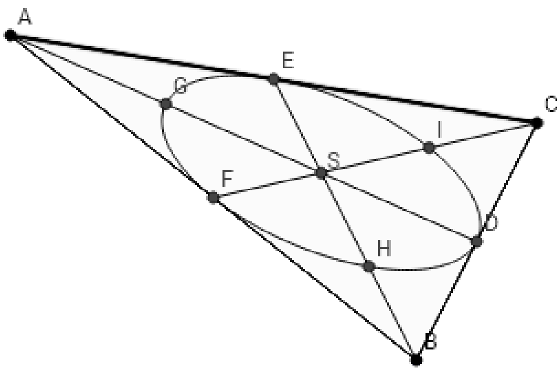
További érdekesség, hogy a háromszög hozzáírt köreinek középpontjai és beírt körének középpontja is ortocentrikus négyszöget határoznak meg, mert a háromszög szögeinek belső és külső szögfelezői merőlegesek egymásra. Így itt is teljesül, hogy a hozzáírt körök középpontjaiból alkotott háromszög magasságpontja a beírt kör középpontja, magasságvonalainak talppontjai pedig az eredeti háromszög csúcsai, így Feuerbach-köre az eredeti háromszögünk körülírt köre. Sőt, bármely beírt és hozzáírt körök középpontjai közül választott három pontból, mint csúcspontból, összeállított háromszög Feuerbach-köre a kezdeti háromszög körülírható köre lesz.

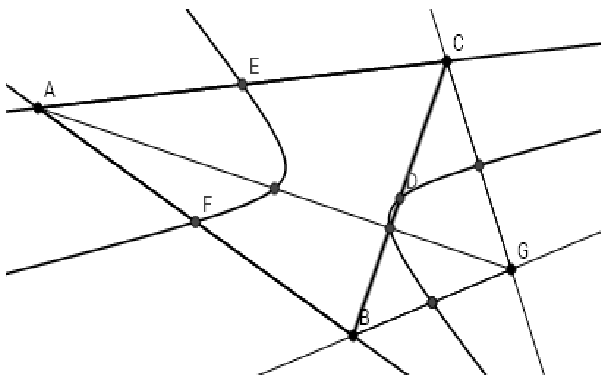


4.4. Feuerbach-kör és kúpszeletek

A Feuerbach-kör ábrája a magasságpont helyzetének változtatásával megváltozik. A magasságpontot súlyponttal helyettesítve a Steiner-ellipszist kapjuk, mely tehát a háromszög oldalfelezőpontjain és a súlypontot a csúcsokkal összekötő szakaszok felezőpontjain áthaladó, a háromszög súlypontjával egybeeső középpontú ellipszis. Ugyanígy ellipszist ad, ha a háromszög valamely belső pontját választjuk eddigi magasságpontunk helyett.

Ha a magasságpont helyett a háromszög egy külső pontjának segítségével határozzuk meg az oldalfelező pontokon kívül vett további hat pontot, a kilenc pont egy hiperbolára esik (Reiman, [13]).

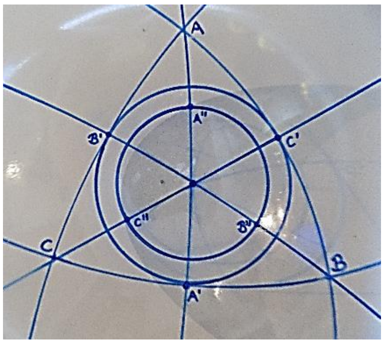


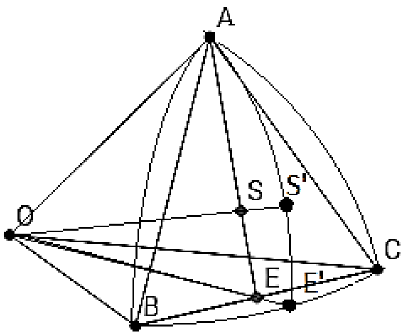


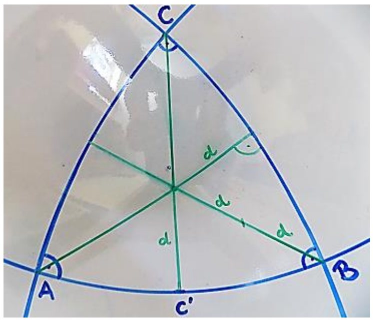
5. A Feuerbach-kör vizsgálata a gömbön

Vizsgáljuk az oktáns kilenc azon pontját, amely a síkon a Feuerbach-körre esik.

Az itteni nevezetes pontok eltérően viselkednek a síkháromszögben megszokottaktól. Az oldalfelező pontok köré írt kör – melynek meg kéne egyeznie a Feuerbach-körrel – a háromszög beírt körével esik egybe. (Ez a síkon is így van szabályos háromszög esetén.) A szimmetriatengelyek metszéspontját a csúcsokkal összekötő szakaszok felezőpontjai viszont egy ennél kisebb sugarú körre illeszkednek.







Ennek egy lehetséges magyarázatához definiáljuk a *centrális projekciót*:

Centrális projekció során tekintünk egy nyílt félgömböt, melynek egyetlen teljes egészében tartalmazott főkörét elhagyjuk (hogy az euklideszi térben maradjunk). Veszünk egy ezzel a főkörrel párhuzamos, de arra nem illeszkedő *S* síkot, és a gömb középpontját, *O*-t, a vetíteni kívánt *P* ponttal összekötve a *CP* egyenes és *S* sík metszéspontja, *P*' lesz a *P* pont képe. Ezen transzformáció illeszkedéstartó.

Bizonyítás (1): Ahhoz, hogy az *A*' és *A*" pontok ugyanazon körre illeszkedjenek, a körök közös középpontjának a csúcs és az oldalfelező pont közti szakaszt harmadolnia kéne a csúcstól távolabb. Ez a síkbeli háromszög súlypontjára teljesül, a gömbháromszög súlyvonalai pedig a síkháromszög súlyvonalainak centrális vetületei (Lados, [9]), de metszéspontjuk, a súlypont harmadoló tulajdonsága nem teljesül, mert a vetítés nem aránytartó.□

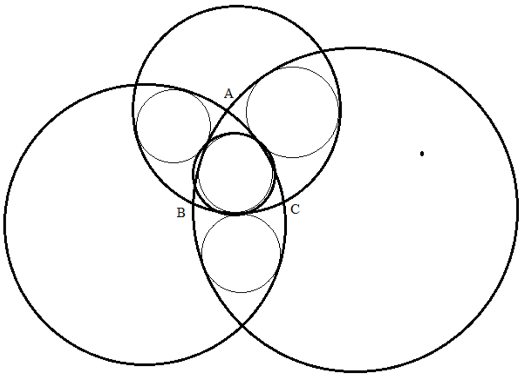
Bizonyítás (2): Gömbi szinusz-tétellel is bizonyítható, hogy a vizsgált pontok nem kerülnek egy körre. A Feuerbach feltevés szerint a d szakaszok egyenlő hosszúak a 3. ábrán. Ekkor felírható a következő összefüggés: $\frac{\sin d}{\sin 45°} = \frac{\sin 2d}{\sin 90°}$, melyből $\sqrt{2}\sin d = 2\sin d \cos d$, így $d = 45°$. Ez azonban lehetetlen, mert $3d = 90°$.□

6. A Hart-kör

Hamilton bizonyította elsőként azt, hogy a gömbháromszög oldalfelező pontjai köré írt kör nem érinti a gömbháromszög beírt vagy valamely hozzáírt körét, kivéve, ha egyenlő szárú háromszögről van szó (Hart, [6]). Ezért Hart vizsgálni kezdte, hogy van-e olyan kör a gömbön, melyre a síkbeli Feuerbach-kör érintő tulajdonsága teljesül.

A gömbi Hart-tétel a Feuerbach-tétellel analóg állítás, amely azt mondja ki, hogy *a gömbön létezik egy kör, mely érinti a gömbháromszög beírt és hozzáírt* (vagyis a háromszög kiegészítő háromszögeinek beírt) *köreit.*

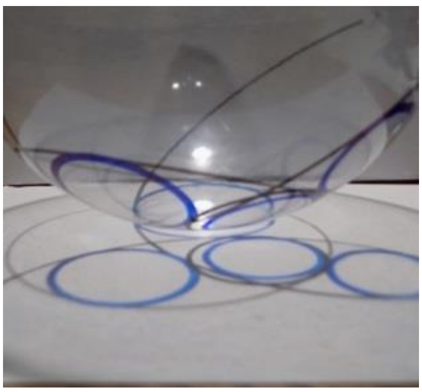
Ennek bizonyítása előtt vizsgáljuk a síkbeli Hart-tételt, mely azt mondja ki, hogy *a háromszög oldalait körívekkel helyettesítve, a síkbeli háromszögnek megfeleltethető módon őket érintő beírt és hozzáírt köröket érinti egy negyedik kör.*



Ha ezt belátjuk, akkor a gömbön is teljesül, hogy a három körvonal által határolt ívgömbháromszög beírt és hozzáírt köreit érinti egy negyedik kör, hiszen ez a *sztereografikus projekció* körtartó tulajdonságával bizonyítható.

A sztereografikus projekció és a bizonyításhoz felhasznált tulajdonságai (Horváth,[7]):

Vegyünk egy *r* gömbfelületet és rajta *S* pontot, valamint egy *S*-en keresztül a gömbhöz húzható érintősíkkal párhuzamos π vetítősíkot. Ha a *P* pont *S*-től különböző pontja a gömbnek, akkor a *P* pont *S*-ből való centrális vetülete π-re megadja *P*'-t, így egyértelmű megfeleltetést létrehozva a gömb- és a síkfelület pontjai között, kivéve magát az *S* pontot.



(1) *A gömbfelület S-en átmenő köreinek sztereografikus vetülete egyenes és a π sík minden egyenese egy S-en átmenő gömbi kör sztereografikus képe.*

(2) *Az r gömbfelület S-en át nem menő k köreinek sztereografikus vetülete π-n kör és a π sík minden köre az r gömbfelület S-en nem átmenő gömbi körének sztereografikus vetülete.* Ezeket az állításokat nem bizonyítjuk.

Ezen tulajdonságok használata elegendő a gömbi bizonyításhoz.□

Az alapállítást Coolidge bizonyítása segítségével látjuk be (Coolidge, [1]).

Ehhez szükségünk lesz a *gömbi inverzió* megadására (Vad, [16]):

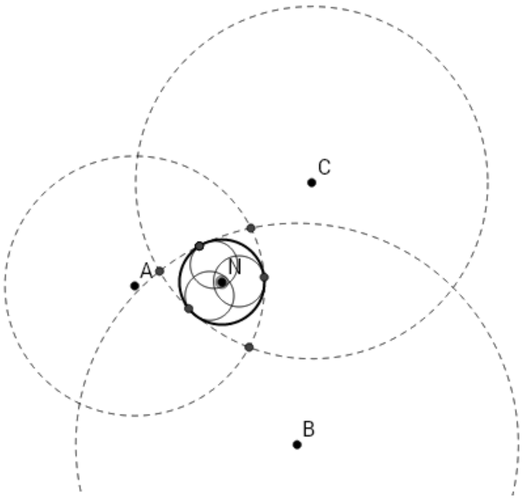
Legyen adott *G* gömb egy tetszőleges *l* köre, a gömbi inverzió alapköre és a gömb középpontján átmenő *S* sík. Az *S* sík és a gömbfelület metszeteként előálló *k* főkörhöz tartozó pólus legyen *P*.

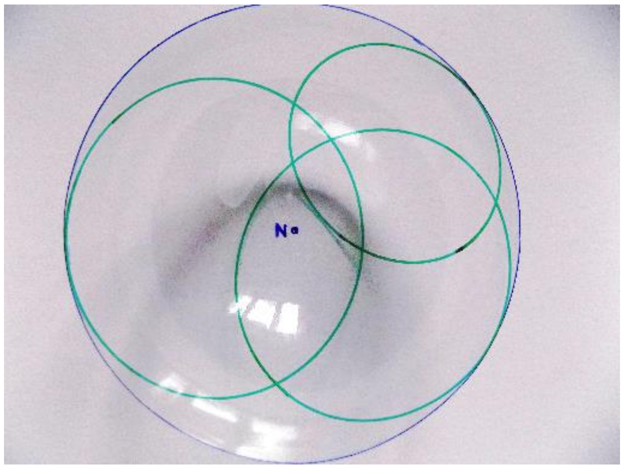
A gömbfelület tetszőleges *X* pontjának gömbi inverzének meghatározásához először vegyük a gömb pontjainak a *P* pólusú, *S*-re vetített sztereografikus képét, *v(X)*-et. Az *l* kör képe attól függően, hogy *P*-n átmegy, vagy nem, *S* síkbeli egyenes vagy kör lesz.

- Ha *v(l)* egyenes, akkor a síkon vesszük a pontok ezen egyenesre vonatkozó tükörképét, $i \circ v(X)$-et, majd sztereografikusan visszavetítjük (az előző sztereografikus projekció inverz transzformációjával) a gömbfelületre a kapott pontokat, így $v^{-1} \circ i \circ v(X)$-et kapjuk.
- Ha *v(l)* kör, akkor erre a körre vesszük $i \circ v(X)$-et, vagyis a síkbeli inverzét a gömbi pontok előbbiekben kapott sztereografikus képének, majd visszavetítjük sztereografikusan a gömbre az így kapott pontokat, így $v^{-1} \circ i \circ v(X)$-et kapjuk.

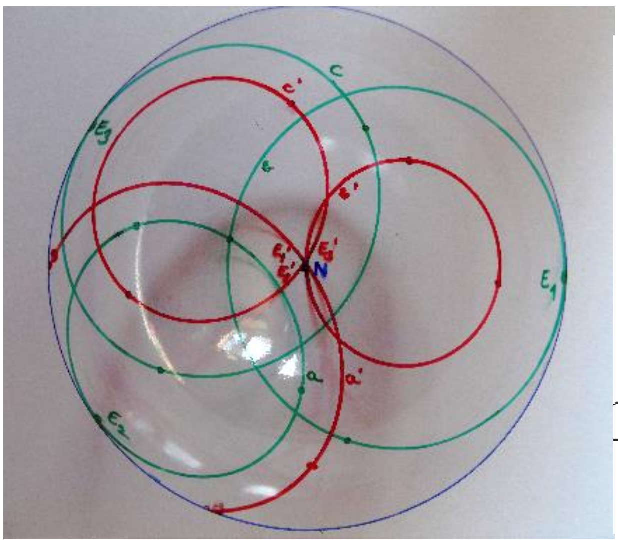
Lássuk a bizonyítást, melynek lényege, hogy a köríveket egyenesekké transzformálja, így a bizonyítás visszavezet a Feuerbach-tételhez (Coolidge, [1]):

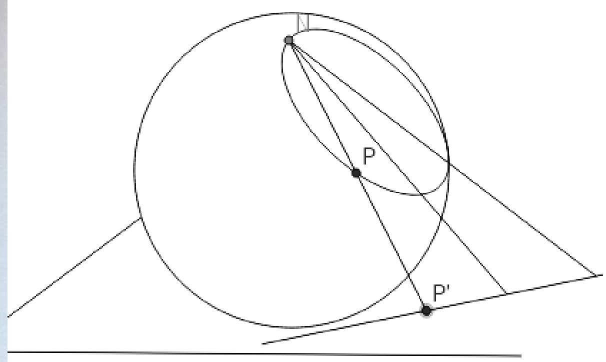
Legyen a, b, c az a három kör, mely a háromszöget alkotja, *d* a beírt kör. Legyen *N* egy pont ezen *d* kör (függőleges) tengelyén, annak középpontjától sugár távolságra. Vegyük az *N* középpontú, *d*-n átmenő gömbi inverziót. Ehhez először vegyük a a, b, c körök inverz köreit a *d*-re, majd a sztereografikus vetítés inverz transzformációjának megfelelően vetítsük arra a gömbre, melyen *N* az északi sark és *d* az egyenlítő. Az inverzió érintkezéstartó tulajdonságát kihasználva az egyenlítőt érinteni fogják E_1, E_2, E_3 pontokban az a, b, c körök így kapott képei.





Majd a pólus-poláris összefüggésnek megfelelően minden főkört helyettesítünk annak északi-félgömbre eső pólusával. Ez a transzformáció kört körbe visz, érintő kört érintő körbe. Az *a,b,c* köröket két választott pontjukba húzható érintőfőkörök pólusai, és az E_1, E_2, E_3 képe, *N* köré írt körök adják. Vizsgált köreink így kapott képei áthaladnak az északi sarkon. Ismételt *N* középpontú sztereografikus vetítéssel az *N* ponton átmenő körök síkbeli egyenesek lesznek, ami a Feuerbach-tételhez vezet minket, amelyre már bizonyítottuk állításunkat. □





A gömbháromszögekre vonatkozó következő bizonyítás Casey-től származik (Todhunter-Leathem, [15]).

A bizonyítás értelmezéséhez szükség van az alábbi definíciók, tételek kimondására, melyek bizonyításától eltekintünk:

(1) Definíció: *Kör és egyenes által bezárt szög*ön azt a hajlásszöget értjük, amelyet az egyenes, és a kör és egyenes metszéspontjában a körhöz húzott érintő határoz meg. Ugyanígy a gömbön is, a főkör és a kör metszéspontjában érintőt húzunk a körhöz, és vesszük a főkör és az érintő főkörének hajlásszögét.

(2) Állítás: *A gömbháromszögbe írhatunk olyan kört, amely a három oldalnak megfelelő főkört adott szögekben metszi.*

(3) Definíció: *Két kör érinti egymást,* ha egyetlen közös metszéspontjuk van. Ez akkor fordul elő, ha a sugaraik különbsége vagy összege megegyezik a középpontjaik távolságával, ekkor rendre *belülről,* illetve *kívülről* érintik egymást.

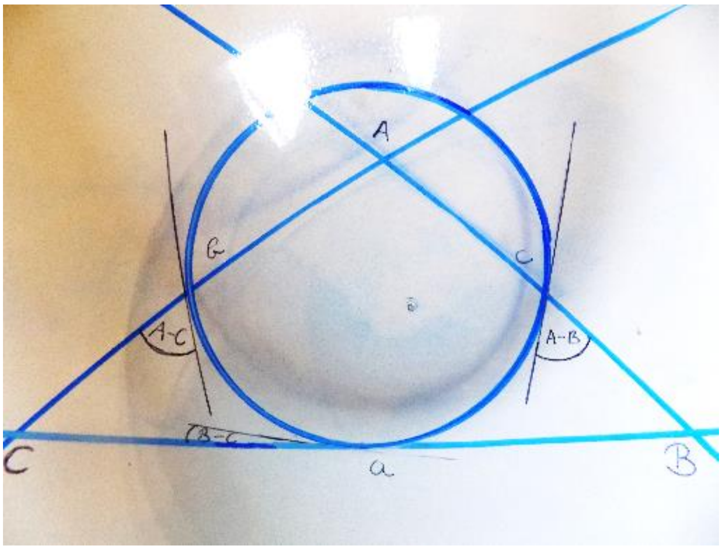
(4) Definíció: Egy kör *antipodális köré*nek nevezzük a kör középpontjával átellenes középpontú, és azzal azonos sugarú kört.

(5) Jelölés:*(b,c),(c,a) és (a,b)* rendre a *b,c*, *c,a* és *a,b* főkörök által bezárt szöget jelöli

(6) Állítás: *Ha az a, b, c főkörök érintenek egy kört, egy másik kört pedig α, β, γ szögekben metszenek (ebben a sorrendben), akkor ha a következő szorzatok közül bármely kettőnek az összege megegyezik a harmadikkal, akkor vagy a két kör belülről érinti egymást, vagy a mindhárom főkörívet érintő kör antipodálisa kívülről érinti a másik kört.*

$$(1)\colon \sin\tfrac{1}{2}\alpha \sin\tfrac{1}{2}(b,c); \qquad (2)\colon \sin\tfrac{1}{2}\beta \sin\tfrac{1}{2}(c,a)\,; \qquad (3)\colon \sin\tfrac{1}{2}\gamma \sin\tfrac{1}{2}(a,b)$$

Bizonyítás: Vegyünk egy *A*, *B*, *C* csúcsokkal és szögekkel adott háromszöget, amelyben feltesszük, hogy *A* nem kisebb *B*-nél, *B* nem kisebb *C*-nél. Legyen A_0, B_0, C_0 rendre az *A*, *B*, *C* pontok átellenese. Vegyünk egy kört, *H*-t, amely *a*-t, *b*-t, és *c*-t (amelyek a gömbháromszög oldalait meghatározó főkörök) *B-C, A-C,* illetve *A-B* szögben metszi, ebben a sorrendben.



Ezután, mivel *(b,c)* = *π-A, (c,a)* =*π-B* és *(a,b)*=*π-C*, így az (1), (2), (3) szorzatokat felírhatjuk, majd átírhatjuk a következő alakokba:

$$(1)\colon \sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}(b,c) \qquad (2)\colon \sin\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}(c,a) \qquad (3)\colon\colon \sin\frac{1}{2}\gamma\sin\frac{1}{2}(a,b)$$

$$(1)\colon \sin\frac{1}{2}(B-C)\sin\frac{1}{2}(\pi-\mathrm{A}) \qquad (2)\colon \sin\frac{1}{2}(A-C)\sin\frac{1}{2}(\pi-\mathrm{B}); \qquad (3)\colon \sin\frac{1}{2}(A-B)\sin\frac{1}{2}(\pi-\mathrm{C})$$

$$(1)\colon \sin\frac{1}{2}(B-C)\cos\frac{1}{2}A \qquad (2)\colon \sin\frac{1}{2}(A-C)\cos\frac{1}{2}B \qquad (3)\colon \sin\frac{1}{2}(A-B)\cos\frac{1}{2}C$$

melyek, felhasználva a $2cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot sin\frac{\alpha-\beta}{2} = sin\alpha - sin\beta$ összefüggést, valamint hogy $S = \frac{A+B+C}{2}$, rendre egyenlőek lesznek a következő összegekkel:

$$(1)\colon \frac{1}{2}\left(2sin\frac{(S-C)-(S-B)}{2}2cos\frac{(S-C)+(S-B)}{2}\right) = \frac{1}{2}(\sin(S-C)-\sin(S-B))$$

$$(2)\colon \frac{1}{2}\left(2sin\frac{(S-C)-(S-A)}{2}2cos\frac{(S-C)+(S-A)}{2}\right) = \frac{1}{2}(\sin(S-C)-\sin(S-A))$$

$$(3)\colon \frac{1}{2}\left(2sin\frac{(S-B)-(S-A)}{2}2cos\frac{(S-B)+(S-A)}{2}\right) = \frac{1}{2}(\sin(S-B)-\sin(S-A))$$

Ezek, átalakíthatóak a következő alakú kifejezésekké:

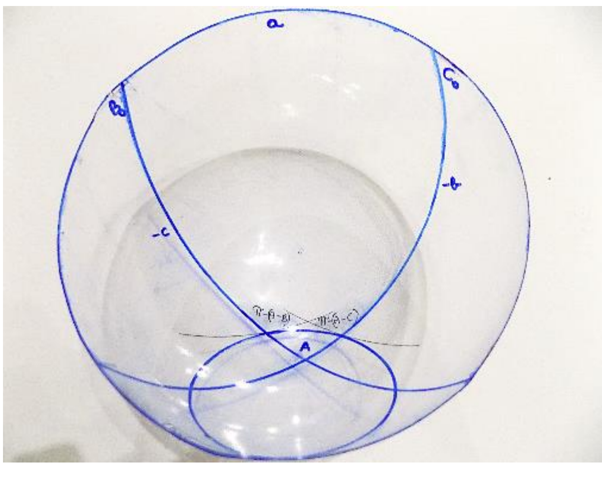
$$(1)\colon -\tfrac{1}{2}\sin(S-B)+\tfrac{1}{2}\sin(S-C) \quad (2)\colon \tfrac{1}{2}\sin(S-C)-\tfrac{1}{2}\sin(S-A)$$

$$(3)\colon -\tfrac{1}{2}\sin(S-A)+\tfrac{1}{2}\sin(S-B)$$

ahol az első és a harmadik kifejezés értéke egyenlő a másodikkal. Tehát *H* vagy belülről érinti a gömbháromszög beírt körét, vagy kívülről az antipodális körét.

Ha egyenlő oldalú háromszöget vizsgálunk, azt találjuk, hogy a beírt kör és a *H* kör egybeesnek, tehát a feltételek közül az előbbi teljesül.

Most vegyük az A,B_0,C_0 által alkotott háromszöget, mely *a*, -*b és* –*c* főkörök által határolt.



Ugyanez a H kör a főköröket B-C, π-$(A$-$C)$ és π-$(A$-$B)$ szögekben metszi. Így a szorzatok felírhatóak majd átírhatóak a következő alakokba:

$$(1)\colon \sin\frac{1}{2}\alpha \sin\frac{1}{2}(-b,-c) \qquad (2)\colon \sin\frac{1}{2}\beta \sin\frac{1}{2}(-c,a); \qquad (3)\colon \sin\frac{1}{2}\gamma \sin\frac{1}{2}(a,-b)$$

$$(1)\colon \sin\frac{1}{2}(B-C)\cos\frac{1}{2}A \qquad (2)\colon \cos\frac{1}{2}(A-C)\sin\frac{1}{2}B \qquad (3)\colon \cos\frac{1}{2}(A-B)\sin\frac{1}{2}C$$

amik rendre egyenlőek lesznek a következő kifejezésekkel,

$$(1)\colon -\tfrac{1}{2}\sin(S-B)+\tfrac{1}{2}\sin(S-C) \quad (2)\colon \tfrac{1}{2}\sin(S-C)+\tfrac{1}{2}\sin(S-A)$$

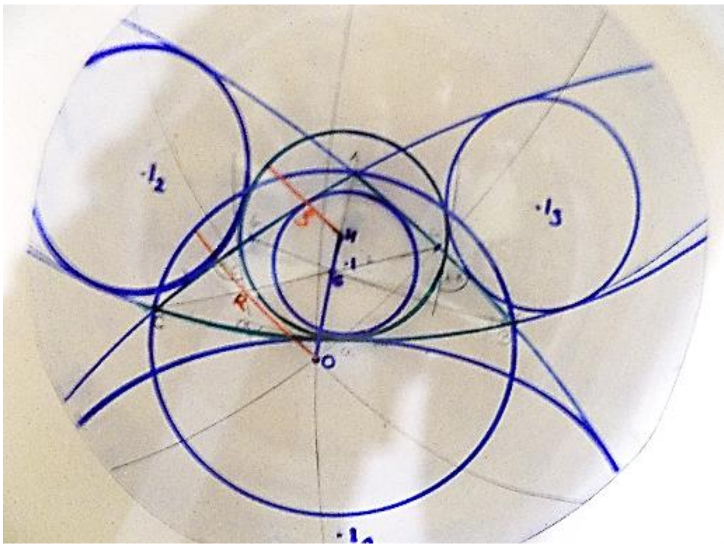
$$(3)\colon \frac{1}{2}\sin(S-A)+\frac{1}{2}\sin(S-B)$$

ahol az első és a harmadik kifejezés értéke ismét megegyezik a másodikéval.

Tehát H vagy belülről érinti az AB_0C_0 gömbháromszög beírt körét, vagy kívülről az antipodális körét, ami nem más, mint az A_0BC gömbháromszög beírt köre, vagyis ABC egyik kiegészítő háromszögének beírt köre.

Ha azt a speciális esetet vesszük, melyben ABC egyenlő oldalú, láthatjuk, hogy a második állítás teljesül.

Ugyanezt az érvelést kiterjesztve a A_0BC_0, és az A_0B_0C-re azt kapjuk, hogy a H belülről érinti az ABC beírt körét, és kívülről az ABC háromszög kiegészítő háromszögeibe írt köröket. Így a kezdeti segédtételekre hagyatkozva Hart tétele bebizonyításra került, H-t pedig a Hart-kör elnevezés illeti.□



7. A Hart-kör tulajdonságai

Bizonyítás nélkül álljon itt a Hart-kör néhány tulajdonsága (Todhunter-Leathem, [15]):

7.1. A Hart-kör sugara

Salmon nevéhez fűződik az a következtetés, mely szerint a gömbháromszög Hart-körének sugara (ρ) és körülírt körének sugara (R) közötti összefüggés a következő: $\rho = \frac{1}{2}$ tg R.

7.2. A Hart-kör középpontja

Legyen *O* a magasságvonalak metszéspontja (a magasságpont), *G* a súlyvonalak metszéspontja (súlypont), *H* pedig a Hart-kör középpontja. Ekkor *O*, *G* és *H* egy főkörre illeszkednek.

7.3. A Hart-kör és a gömbháromszög oldalainak metszéspontjai

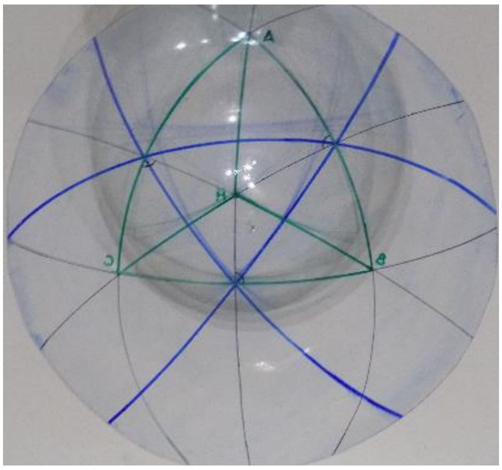
A Hart-kör és a gömbháromszög oldalainak metszéspontjait U_1, U_2, U_3- mal, és V_1, V_2, V_3-mal jelölve, egy végtelen sugarú gömbön vizsgálva a háromszögünket (tehát síkháromszögek esetében), AU_1, BU_2, CU_3 metszéspontja a háromszög magasságpontja, AV_1, BV_2, CV_3 metszéspontja pedig a háromszög súlypontja. Így, ha a háromszög síkbeli, U_1, U_2, U_3 a magasságtalppontoknak, V_1, V_2, V_3 pedig az oldalfelező pontoknak feleltethető meg, amely hat pont, természetesen, a Feuerbach-körön fekszik.

Ugyanígy, síkbeli esetben a gömbön felírt tgρ = $\frac{1}{2}$ tgR összefüggés ρ = $\frac{1}{2}$R-re módosul, ami szintén a Kilenc pont körének sajátossága.

Ezek a példák kiválóan mutatják a Hart- és a Feuerbach-kör közötti analógiát.

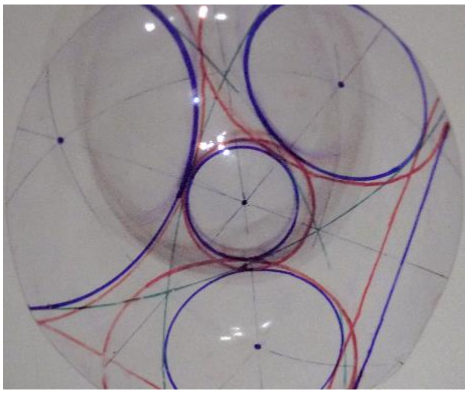
7.4. Ortocentrikus összefüggések a gömbön és a Hart-kör

A síkháromszögekhez hasonlóan a gömbháromszögek csúcsai és magasságpontja is ortocentrikus négyszöget határoznak meg, hiszen teljesül, hogy az így meghatározott teljes négyszög szemközti oldalai páronként merőlegesek egymásra. A gömbháromszögnek és polárháromszögének magasságvonalai megegyeznek, így magasságpontjuk is. Így ezen polárháromszög csúcsai és a magasságpont ortocentrikus pontnégyest adnak (Takács, [14]).



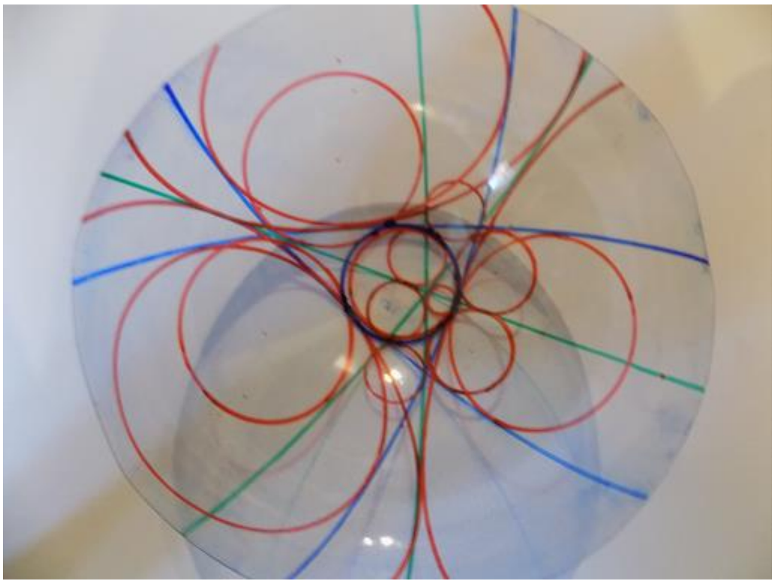
Az is teljesül a gömbön, hogy a háromszög magasságvonalai megegyeznek a talpponti háromszögének szögfelezőivel. Így a gömbháromszög beírt és hozzáírt köreinek középpontjai is ortocentrikus négyszöget határoznak meg a szögfelezők egymásra való merőlegessége miatt. A háromszög polárháromszöge, és a talpponti háromszög polárháromszöge megőrzi ezt a tulajdonságot.

Továbbá érdekes összefüggés a gömbön, hogy mivel egyetlen háromszög oldalegyeneseit meghosszabbítva nyolc gömbháromszöget határozhatunk meg a gömbön, így ha ennek a nyolc gömbháromszögnek vesszük a beírható köreit, azzal mindegyiknek megkapjuk a hozzáírt köreit is. Így megrajzolhatunk nyolc Hart-kört is egy gömbfelületen.



Négy szomszédos kört kiválasztva egy háromszög beírt, és ugyanennek a háromszögnek a kiegészítő háromszögeinek beírt körei közül, ezen körök középpontjai minden esetben ortocentrikus négyszöget határoznak meg. Sőt, csupán az egy csúcsból induló szögfelezők egymásra való merőlegességéből belátható, hogy bármely négy szomszédos kör középpontjára igaz az állítás. Ez az összefüggés kihasználja a gömbfelület végességét, és így a síkbeli esetnél könnyebben megfogható tételhez jutunk.

Végül fogalmazzunk meg egy sejtést: ahogy a síkon is, a gömbön is teljesülhet, hogy az ortocentrikus pontnégyesekből alkotható háromszögeknek megegyezik a Hart-köre, így e kör érinti az így kapott háromszögek beírt és kiegészítő háromszögeinek beírt köreit, 16 kört.



8. Összefoglalás

Dolgozatomban összehasonlítottam a síkbeli Feuerbach-, a síkbeli és a gömbi Hart-kört, valamint tulajdonságaikat. Ezen körök közös tulajdonsága az, hogy érintik a háromszög beírt és hozzáírt köreit. A Feuerbach-körre ezen kívül kilenc nevezetes pont illeszkedik, sugara fele a háromszög körülírt körének sugarának, középpontja nemcsak illeszkedik a háromszög Euler-egyenesére, hanem felezi is a háromszög körülírt középpontja és magasságpontja közti szakaszt. A gömbi Hart-kör sugara a gömbháromszög körülírt körének sugarának tangensével arányos, középpontja pedig illeszkedik a gömbháromszög Euler-egyenesére. Az oldalakkal való metszéspontjairól elmondhatjuk, hogy végtelen határátmenettel megfeleltethetőek a Feuerbach-kör kilenc pontjával.

Továbbá kitértem azokra az ortocentrikus pontnégyesekre, melyek a szóban forgó körök vizsgálata során előfordultak, hiszen a síkon ezen pontnégyesekből alkotható háromszögek Feuerbach-köre megegyezik, amely sejtésem a gömbön is megfogalmazásra került. Megemlítettem a síkon a Feuerbach-kör és a kúpszeletek közti összefüggések egyikét is.

A bizonyításokhoz többféle módszert alkalmaztam, hogy ezáltal összekapcsoljam őket, amivel a matematika összefüggésrendszerét kívántam megmutatni.

A témakör a szakdolgozat előrehaladtával egyre kimeríthetetlenebbnek tűnt, így csak a témámhoz legszorosabban tartozó információk megragadására törekedtem. A kezdeti ötletelés során sok alkalmam nyílt a gömbön önállóan kísérletezni a Lénárt-gömbkészlet segítségével, és így keresni a felmerülő kérdéseimre a szakirodalom válaszát. Ez egy nagyon izgalmas, és a sejtéseim önálló megfogalmazására remek lehetőség volt, ami sokszor vakvágányra vezetett, ám így is hasznos tapasztalatnak éltem meg. Gömbi rajzaim is e készlet segítségével készültek, míg a gépi rajzok autocad és geogebra programmal.

Remélem, hogy szakdolgozatommal sikerült megmutatnom, hogy „Az elemi geometria tanulmányozása során az első igazán izgalmas dolog ez a kör.”

Irodalomjegyzék

[1] **COOLIDGE**, Julian Lowell: *A simple proof of Hart's theorem* in The American Mathematical Monthly, Vol. 23, No. 1 (Jan., 1916), pp. 14-15 http://www.jstor.org/stable/2972134?seq=2#page_scan_tab_contents

[2] **COXETER,** H.S.M.: *A geometriák alapjai*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973, pp 35-36

[3] **FÜREDI** Zoltán: *A Feuerbach-kör érinti az érintő köröket* c. KÖMAL cikke, 2004. (http://www.komal.hu/cikkek/2004-05/furedi/furedi.h.shtml)

[4] **GÜLCH** Bernadett: *A szögfogalom kiépítése különböző geometriai rendszerekben* c. szakdolgozata, Matematika Tanári Szak, 2009 (Témavezető: Lénárt István)

[5] **HAJÓS** György: *Bevezetés a geometriába*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1962, pp. 151-155, 303

[6] **HART**, Andrew:*Extension of Terquem's theorem respecting the circle which bisects three sides of a triangle* in Quarterly journal Vol. IV, 1861 p. 260 http://gdz.sub.uni-goettingen.de/dms/load/img/?PPN=PPN600494829_0004&DMDID=DMDLOG_0054&LOGID=LOG_0057&PHYSID=PHYS_0273

[7] **HORVÁTH** Jenő: *Sztereografikus projekció és alkalmazásai*. ELTE Sokszorosítóüzem, Budapest, 1980

[8] **KISS** György: Geometria I. haladó előadásai a 2012/2013-as tanév tavaszi félévben

[9] **LADOS** Bence Ferenc: *Néhány háromszögekkel kapcsolatos tétel bizonyítása a gömbön: A súlypont és a területfelező vonalak vizsgálata síkon és gömbön* c. szakdolgozata, Matematika BSc, 2014 (Konzulens: Lénárt István)

[10] **LÉNÁRT** István: *Sík és gömb – összehasonlító kísérletek síkon és gömbön a Lénárt-gömb készlet segítségével* (1996)

[11] **MACKAY**, J.S.: *History of theNine-pointCircle*. 1892

[12] **MARKÓ** Zoltán: *Középiskolai tanulmányok alapján átismétlendő, illetve önállóan feldolgozandó anyag / Geometria*. (http://www.math.bme.hu/~marzol/gimigeo.pdf), amely forrásként **REIMAN** István: *Geometria és határterületei* c. könyvet is megjelölte

[13] **REIMAN** István: *Az elemi síkgeometria és a kúpszeletek elméletének egy kapcsolatáról*. http://matekold.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Reiman_Istvan/Feuerbach/Feuerbach-2.html

[14] **TAKÁCS** Zsófia: *A sík- és gömbháromszögek néhány nevezetes vonala és pontja* c. szakdolgozata, Matematika BSc szakdolgozat, tanári szakirány, 2013 (Konzulens: Lénárt István)

[15] **TODHUNTER – LEATHEM**: *Sphericaltrigonometry – For the use of colleges and schools*, Chapter XI: *Hart's theorem.* 1914, London (http://babel.hathitrust.org/cgi/pt?id=osu.32435075835157;view=1up;seq=7)

[16] **VAD** Szilvia: *Szerkesztés a gömbi geometriában*, Matematika Alapszak szakdolgozat, tanári szakirány, 2010 (Konzulens: Dr. Moussong Gábor)

[17] **VÍGH** Viktor: *Egy előadás a kirándulásról – Érdekességek elemi háromszög-geometriából* c. 2009-es Huhn András Díj átadójára készült népszerűsítő előadása (http://www.math.u-szeged.hu/~vigvik/huhnandras.pdf)