EÖTVÖS LÓRÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

HÁLÓK A KÖZÉPISKOLÁBAN

Szakdolgozat

Készítette:

KISZI GERGELY

Témavezető:

KORÁNDI JÓZSEF

2015

Bevezetés

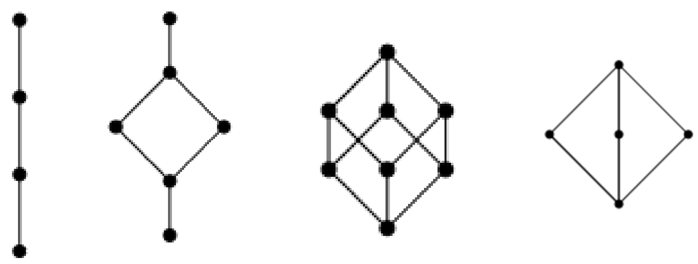
Egyetemi tanulmányaink során az algebra keretében megismerkedtünk olyan algebrai struktúrákkal, mint például csoportok, testek, gyűrűk. Szakdolgozatomban is egy algebrai struktúrát szeretnék bemutatni, a hálót, valamint azt, hogy a hálók hol mindenhol jelennek meg a középiskolában, annak ellenére, hogy nem tanítják ezt. Egy matematika tanár képes kell legyen az egyes egyszerű feladatokat nem csak megérteni, és megértetni, hanem azt valamilyen módon összekapcsolni olyan fogalmakkal melyeket nem nevezünk ott nevén. Gyakran a diákok észreveszik a hasonlóságot a különböző témakörű anyagokban, és rá is kérdeznek az összefüggésekre. Az egyik ilyen hasonlóság a halmazelmélet és a matematikai logika között van, és ez összeköthető azzal, hogy mind a kettőnek rengeteg köze van a hálókhoz. Ahhoz azonban hogy eljussunk az összefüggés miértjéig meg kell néznünk az egész struktúrát az elejétől. A dolgozatomban lesznek olyan tételek, amiket későbbiek folyamán nem használunk fel, viszont segíti a háló szerkezetének pontosabb megértését. Az általános hálóelméleti tételek mellett a moduláris- valamint a disztributív hálók kapnak jelentős szerepet, továbbá kitérek a Boole-algebrára is. Szakdolgozatom végén összefoglalásként olyan példákat elemzek, mint például a tér altereiből- vagy például a tér konvex halmazaiból képezett háló, és ezekhez feladatokat, melyeket a középiskolás diákok meg tudnak oldani.

Háló

Definíció: Azt a kétműveletes algebrai struktúrát, melynek mind a két művelete kommutatív, asszociatív, továbbá érvényes az elnyelési tulajdonság, hálónak nevezzük. Ezt a két műveletet ∨ (legkisebb felső korlát, vagy unió) és ∧ (legnagyobb alsó korlát vagy metszet) jelöli. A hálókat nyomtatott nagy betűvel jelöljük.

A műveletek tulajdonságait gyakran hálóaxiómáknak nevezzük, és hogy a későbbi tételek bizonyítását megkönnyítsük, érdemes őket megszámozni:

1. $x \vee y = y \vee x,\ \forall x, y \in A\ esetén$
2. $x \wedge y = y \wedge x\ ,\ \forall x, y \in A\ esetén$
3. $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z,\ \forall x, y, z \in A\ esetén$
4. $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z\ \forall x, y, z \in A\ esetén$
5. $x \vee (x \wedge y) = x, \forall x, y \in A\ esetén$
6. $x \wedge (x \vee y) = x,\ \forall x, y \in A\ esetén$



Hálók

A következő tételben egy olyan állítást fogok leírni és bizonyítani, amit elég gyakran szoktunk felhasználni, amikor el szeretnénk dönteni egy 2 művelettel ellátott halmazról, hogy háló-e.

<u>**Tétel**</u>: A háló műveletei idempotensek, azaz:

$$\forall x \in A \Leftrightarrow\ x \wedge x = x \text{ és } x \vee x = x$$

Bizonyítás: Ahogy az előbbi bizonyításban, itt is csak az egyik esetet fogjuk bebizonyítani a másik eset bizonyítása ehhez hasonlóan. Használjuk az 5. hálóaxiómát kiindulási alapként, azaz:

$$\forall x, y \in A\ x \vee (x \wedge y) = x$$

Vegyük minkét oldalnak az x-szel vett legnagyobb alsó korlátját:

$$[x \vee (x \wedge y)] \wedge x = x \wedge x$$

A ∧ művelet kommutativitása miatt:

$$x \wedge [x \vee (x \wedge y)] = x \wedge x$$

Így már jól látható a 6. axióma, a ∧ elnyelési tulajdonsága miatt tehát

$$x = x \wedge x \square$$

A háló definiálására van egy másik lehetőség is.

Definíció Rendezési relációnak egy reflexív, tranzitív és antiszimmetrikus kétváltozós relációt értünk egy nem üres halmazon. Ezt a már megszokott ≤ jellel jelöljük.

Definíció: Egy P nem üres halmaz részben rendezett, ha értelmezve van egy ≤ kétváltozós reláció melyre teljesül, hogy:

1. $\forall x \in P, x \leq x$
2. $x \leq y$ és $y \leq z$ akkor $x \leq z$
3. ha $x \leq y$ és $y \leq x$ akkor $x = y$

Vegyünk egy részben rendezett halmaznak egy X részhalmazát, tehát $X \subset P$. Azt mondjuk, hogy $p \in P$ egy alsó korlátja X-nek amennyiben $\forall x \in X$ esetén $p \leq x$. Ezek közül az alsó korlátok közül a legnagyobb alsó korlátot inf(X) jelöléssel látjuk el. Természetesen ehhez hasonló módon a felső korlát és a legkisebb felső korlát is megnevezhető, jele sup(X). Viszont nem minden részben rendezett halmaznak létezik legnagyobb felső-, illetve legnagyobb alsó korlátja, azonban ha létezik legkisebb eleme, akkor az nullelemesnek, ha pedig létezik legnagyobb eleme, akkor egységelemesnek hívjuk. Részben rendezések esetében beszélhetünk még fedésekről is.

Definíció: Amennyiben adott $x, y \in P$ részben rendezett halmaz, azt mondjuk, hogy y fedi x-et ha $x < y$ és $\nexists z \in P$ hogy $x < z < y$. Jelölése: $x \prec y$

Állítás: Ha egy részben rendezett *P* halmaznak bármely két elemének van legnagyobb alsó-, illetve legkisebb felső korlátja a *P* halmazban, akkor ebből a halmazból hálót lehet képezni, és

$$\forall x, y \in P\ x \vee y = \sup(x, y)\,, x \wedge y = \inf(x, y).$$

Bizonyítás: Az nyilván való, hogy az így definiált egyenletekben az x és y sorrendje tetszőleges, tehát teljesül az asszociativitás. A kommutatív tulajdonság is nyilván való, hiszen: $\sup\big(y, \sup(y, z)\big) = \sup(\sup(x, y)\,, z)\ \ \forall x, y, z \in P$ elemekre teljesül.

Vizsgáljuk meg a hálók 5. és 6. axiómáját is, az elnyelési tulajdonságot $(x, y \in P)$.

$$\sup(x, \inf(x, y)) = x$$

Ha $x \leq y$ akkor $\inf(x, y) = x$, és $\sup(x, x) = x$. Ha $x > y$ akkor $\inf(x, y) = y$, viszont $\sup(x, y) = x$. Hasonló képen belátható a 6. axióma is.□

Állítás: Egy *P* háló tetszőleges részhalmazának van szuprémuma és infimuma, akkor:

$$\sup(p_1, p_2 \ldots, p_N) = p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_N$$

$$\inf(p_1, p_2 \ldots, p_N) = p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_N$$

Bizonyítás: Ahhoz, hogy ezek az egyenlőségek igazak legyenek, két dolgot kell belátni.

1. $\forall i = 1..N\,,\ p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_N \leq p_i$
2. $k \leq\ p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_N, ahol\ k \in P\ és$ alsó korlát.

Vizsgáljuk meg először azt, amikor a $p_1, és\ p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_N$ metszetét. Mivel a hálóknál a ∧ asszociatív ezért, a sorrend tetszőleges, majd alkalmazzuk a kommutatív tulajdonságot.

$$p_1 \wedge (\ p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_N) = (p_1 \wedge p_1) \wedge (p_2 \wedge \ldots \wedge p_N)$$

Mivel $p_1 \wedge p_1 = p_1$ az idempotens tulajdonság miatt, megkaptuk hogy

$$p_1 \wedge (\ p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_N) = p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_N.$$

Ebből az egyenletből következik, hogy a $p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_N$ tényleg egy p_1-nél kisebb elem. Mivel azonban a tagok felcserélhetőek, ezért ezt bármely tetszőleges p_i-vel meg tudjuk csinálni, tehát:

$$p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_N \leq p_i.$$

A korlátokról tudjuk, hogy $\forall i = 1 \ldots N,\ k \wedge p_i = k.$ Vizsgáljuk meg k és $p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_N$ metszetét:

$$k \wedge (p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_N) = (k \wedge p_1) \wedge (p_2 \wedge \ldots \wedge p_N) = (k \wedge p_2) \wedge (p_3 \wedge \ldots \wedge p_N) = \cdots = k \wedge p_n = k$$

Természetesen meg kéne még vizsgálni a $p_1 \vee p_2 \vee \ldots p_n$, viszont ugyan ezen az elven működik, csak azt használjuk fel, hogy hogy a $p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_N$ egy p_i-nél nagyobb elem, és $k \vee p_1$, (k itt mos felső korlát).□

Általános hálótételek

A háló axiómákban jól látható, hogy a ∧ és a ∨ műveleteket felcserélve kapott képlet is része az axiómarendszerünknek. Ezért a műveleteket egymás duálisainak nevezzük.

Tétel: Minden hálóra teljesül, hogy:

$$\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathrm{A}\ \mathrm{x} \wedge \mathrm{y} = \mathrm{x} \ \leftrightarrow \mathrm{x} \vee \mathrm{y} = \mathrm{y}$$

Bizonyítás: A tétel bizonyítását csak az egyik irányba nézzük meg, mivel rendkívül hasonló módon történik.

Tegyük fel tehát hogy

$$\mathrm{x} \vee \mathrm{y} = \mathrm{y}$$

Vegyük most mind az egyenlet mind a két oldalának a x-szel vett legnagyobb alsó korlátját.

$$(\mathrm{x} \vee \mathrm{y}) \wedge \mathrm{x} = \mathrm{y} \wedge \mathrm{x}$$

Az egyenlőség jobb oldalán a tagokat felcserélhetjük (a 2. hálóaxióma miatt), továbbá az egyenletünk bal oldalán a 6. axióma, azaz a metszet elnyelési tulajdonsága miatt x-szel egyenlő, tehát megkaptuk a kívánt összefüggést az egyik oldalra:

$$\mathrm{x} = \mathrm{x} \wedge \mathrm{y} \square$$

Definíció: Vegyük *A* nem üres halmazt. *R* részhalmazát az *A* részhalmazának hívjuk, ha *R* hálót alkot az *A*-beli ∧ és ∨ műveletekre.

Tétel: Az A háló R részhalmazát az A részhálójának nevezzük, ha a műveletek zártak az R halmazban, azaz:

$$\forall x, y \in R \; esetén \; x \wedge y \in R \text{ és } x \vee y \in R$$

Ennek a tételnek az egyik legkézenfekvőbb következménye, hogy minden háló részhálója önmagának, valamint hogy az egyelemű részhalmaz is részháló, elvégre a háló minden elemére teljesül, hogy. $x = x \wedge x$ és $x = x \vee x$. Ezeket a részhálókat triviális részhálóknak nevezzük.

Tétel: $\forall x, y, z \in A$ esetén

$$(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) \leq (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x)$$

Bizonyítás: $x \wedge y \leq x \vee y$, $x \wedge z \leq x \vee y$, $z \wedge y \leq x \vee y$ mindegyike teljesülni fog. Ebből adódóan a $(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x)$ –nek egy felső korlátja lesz az $x \vee y$. Ugyan így ez elmondható $y \vee z$ és $z \vee x$ kifejezésekről is. Ezeknek a felső korlátoknak a metszete is felső korlátja lesz a $(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x)$ kifejezésnek.□

Definíció:: Ha $(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) = (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x)$ egyenlőség teljesül valamely $x, y, z \in A$ akkor $med(x, y, z) = (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x)$ jelölést használjuk rá és az *x,y,z* mediánsának nevezzük.

Speciális Hálók

A továbbiakban olyan hálókat, továbbá azokhoz kapcsolódó tételeket fogok leírni, melyekre az axiómák mellett valami egyéb tulajdonság is teljesül.

Komplementumos hálók

Elsőként vegyük a legegyszerűbb hálót, a láncot. Láncnak (L), az olyan részben rendezéseket nevezzük melyek trichotóm, azaz $\forall x, y \in L, x \leq y$ vagy $x \geq y$. Az azzal a különleges tulajdonsággal rendelkezik, hogy bármely két elemet kiválasztva az egyik a két elem legnagyobb alsó korlátja lesz, míg a másik a két elem legkisebb felső korlátja lesz, azaz

$$\forall x, y \in A, x < y \leftrightarrow x \wedge y = x, x \vee y = y$$

Definíció: Ha egy A háló minden részhálójának van legkisebb alsó, illetve legnagyobb felső korlátja, teljes hálónak nevezzük. Az A háló legnagyobb alsó korlátját 0_A, míg a legkisebb felső korlátjukat 1_A jelekkel tüntetjük ki.

- Az A-t alulról korlátos hálónak nevezzük, ha $\exists x \in A$ hogy $\forall y \in A$ esetén $x \wedge y = x$, és itt az x egy alsó korlát.
- Az A-t felülről korlátos hálónak nevezzük, ha $\exists x \in A$ hogy $\forall y \in A$ esetén $x \vee y = x$ és az x-et felső korlátnak hívjuk.
- Az A-t korlátos hálónak nevezzük, ha alulról és felülről is korlátos.

Definíció: Adott L háló és R,T részháló. Az R és T metszetén azt a részhálót értjük, melynek elemi mind a R-nek és T-nek eleme. Az R és T egyesítésén azt a K legkisebb hálót értjük, melyik $K \subset L$és $T \subset K$ és $R \subset K$.

Definíció: R korlátos háló, akkor azt a R' hálót melyre teljesül, hogy a két háló metszete a háló legkisebb eleme és a két háló egyesítése a háló legnagyobb eleme, azaz $\mathrm{R} \wedge \mathrm{R}' = 0_R$ és $\mathrm{R} \vee \mathrm{R}' = 1_R$ az R háló komplementumának, vagy kiegészítő hálójának nevezzük. Egy A korlátos hálónak egy x elemét komplementumos elemnek nevezzük, ha létezik legalább egy komplementuma, és egyértelműen komplementumosnak, ha csak egy ilyen létezik.

Definíció: Az A hálót komplementumosnak hívjuk, ha minden részhalmaza komplementumos, illetve ha minden részhalmaz egyértelműen komplementumos, akkor a hálót is egyértelműen komplementumosnak nevezzük.

Ahhoz hogy tovább haladjunk a relatív komplementumos hálók definíciójához, meg kell ismerni az mit is jelent egy hálónak az intervalluma. Az intervallum fogalmával már 9. osztályban megtanítják a valós számok halmazán. A mostani definíció nagyon hasonlít az akkorira, csak most általánosabban beszélünk róla. Persze, felfogható a valós számok halmaza, mint egy nem korlátos lánc, ami meg, tudjuk, egy speciális háló, így ez a meghatározás szintén megfeleltethető a középiskolai definíciónak.

Definíció: Adott A háló intervallumán azt az [a,b] halmazt értjük,melyre

$$[a, b] = \{x \mid x \in A, a \leq x \leq b\}.$$

Egy intervallum minden $a, b (\in A)$ esetén korlátos részháló lesz, ha $a \leq b$ hiszen részháló és van legnagyobb alsó és legkisebb felső korlátja. továbbá bármely két elemre is teljesül ez. Abban az esetben ha $a = b\ akkor\ [a, a]$ az egyelemű háló lesz, valamint ha a $a = 0_A\ és\ b = 1_A$ akkor a [a,b] a teljes A hálót fogja jelenteni.

Definíció: Adott A háló, és $x, y, p \in A$ és $x \leq p \leq y$ akkor q a p relatív komplementuma x és y elemekre nézve, ha $q \in A$ és $p \wedge q = x$ és $p \vee q = y$. Ebben az esetben a q-t a p elem a [x,y] intervallumbeli relatív komplementumának nevezzük.

Definíció: Egy háló relatív komplementumos ha mindem intervalluma komplementumos. Másként úgy is megfogalmazhatjuk, hogy egy A háló relatív komplementumos, ha minden $x \leq y \in A$ esetén a [x,y] intervallum relatív komplementumos.

Disztributív hálók

Definíció: Azt mondjuk, hogy egy A háló disztributív, ha

$$\forall x, y, z \in A\ (x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z) és\ (x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z).$$

Állítás: A két egyenlet ekvivalens egymással, azaz

$$\forall x, y, z \in A (x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z) \leftrightarrow (x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$$

Bizonyítás: Tegyük fel hogy $(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z)$ teljesül. Tudjuk, hogy $x \wedge z \in A$, tehát

$$(x \wedge y) \vee c = (x \vee c) \wedge (y \vee c)$$

$$c = x \wedge z$$

Behelyettesítve az egyenletünkbe:

$$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = (x \vee (x \wedge z)) \wedge (y \vee (x \wedge z))$$

Az elnyelési tulajdonság miatt:

$$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = x \wedge (y \vee (x \wedge z))$$

Továbbá $y \vee (x \wedge z) = (x \wedge z) \vee y$ a asszociatív tulajdonság miatt, és itt felhasználjuk a disztributív tulajdonságot, amit feltettünk.

$$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = x \wedge ((y \vee x) \wedge (y \vee z))$$

A ∧ kommutatív, majd az elnyelési azonosságot alkalmazva tehát

$$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = (x \wedge (y \vee x)) \wedge (y \vee z)$$

$$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = x \wedge (y \vee z)$$

Ezzel tehát bebizonyítottuk, hogy a 1. egyenlőségből levezethető a 2. is azaz, hogy a ∧ művelet disztributív a ∨-ra nézve. A Dualitás elve miatt a másik oldali bizonyítás elhagyható, hiszen minden tételben a ∧ és a ∨ felcserélhető.□

Mivel a disztributivitás az axiómákból nem vezethető le, ezért nem igaz, hogy minden háló disztributív. Később példát is fogunk látni nem disztributív hálóra.

<u>Tétel (Egyszerűsítési szabály)</u>: Adott A disztibutív háló és $x, y, p \in A$,

$$p \wedge x = p \wedge y \text{ és } p \vee x = p \vee y \ \rightarrow x = y$$

Bizonyítás: írjuk fel az elnyelési azonosságot x-re és y-ra is

$$x = x \vee (x \wedge p) \text{ és } y = y \vee (y \wedge p)$$

Itt behelyettesíthetünk a tételben feltett egyenletek segítségével ($p \wedge x = p \wedge y$).

$$x = x \vee (y \wedge p) \text{ és } y = y \vee (x \wedge p)$$

Itt használjuk fel hogy a hálónk disztributív:

$$x = (x \vee y) \wedge (x \vee p) \text{ és } y = (y \vee x) \wedge (y \vee p)$$

majd megint a feltétel segítségével alakítsuk az egyiket ($p \vee x = p \vee y$):

$$x = (x \vee y) \wedge (x \vee p) = (y \vee x) \wedge (y \vee p) = y□$$

Ebből persze következik, hogy:

Tétel: a disztributív hálók bármely elemének csak egy relatív komplementuma van akármelyik őt tartalmazó intervallumban. Legyen ugyanis A disztributív háló, melynek elemei $x \leq p \leq y$. Ekkor ha a, b a relatív komplementumok akkor teljesül hogy és $a \wedge p = x, b \wedge p = x$ és $p \vee a = y,\ p \vee b = y$. Viszont az egyszerűsítési szabály értelmében ez csak akkor fordulhat elő ha $a = b$, tehát a egyértelműen relatív komplementumosak a disztributív hálók.

Tétel (De Morgan–azonosságok): Ha egy A korlátos, disztributív háló bármely 2 elemének van komplementuma, akkor a két elem komplementumának metszete egyenlő az egyesítés komplementumával. A dualitás elve miatt persze a fordítva is igaz az állítás, azaz két elem komplementumának egyesítése egyenlő a metszet komplementumával:

$$\forall x, y \in A, (x \wedge y)' = x' \vee y' \text{ és } (x \vee y)' = x' \wedge y'$$

Bizonyítás: A bizonyításban először érdemes megvizsgálni, hogy valóban komplementuma-e a $x \vee y$ a $x' \wedge y'$ nek.

$$(x \vee y) \vee (x' \wedge y') = [(x \vee y) \vee x'] \wedge [(x \vee y) \vee y'] = [y \vee (x \vee x')] \wedge [x \vee (y \vee y')] = 1_A$$

$$(x \wedge y) \vee (x' \vee y') = [(x \wedge y) \wedge x'] \vee [(x \wedge y) \wedge y'] = [y \wedge (x \wedge x')] \vee [x \wedge (y \wedge y')] = 0_A$$

Ebből észrevehető, hogy ezek jó komplementumok, továbbá azt is tudjuk, hogy disztributív hálóknak bármely eleméhez csak egy komplementum tartozhat, tehát az egyetlen megoldás ez lesz.□

Ebből a tételből már levezethető, hogy a komplementum képzés egy rendezésfordító leképezés, hiszen:

$$\forall x \leq y, x = x \wedge y$$

$$x' = (x \wedge y)' = x' \vee y'$$

Amiből meg egyértelműen következik, hogy $x' \geq y'$.

Tétel: A háló disztributív akkor és csak akkor, ha bármely három elemének létezik mediánsa.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy A disztributív. Ekkor:

$$(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) = \big((x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee z\big) \wedge \big((x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee x\big)$$

Felhasználva az elnyelési azonosságot:

$$\big((x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee z\big) \wedge \big((x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee x\big) = \big((x \wedge y) \vee z\big) \wedge ((y \wedge z) \vee x)$$

Disztributivitás miatt:

$$\big((x \wedge y) \vee z\big) \wedge \big((y \wedge z) \vee x\big) = [(x \vee z) \wedge (z \vee y)] \wedge [(y \vee x) \wedge (z \vee x)] = (x \vee z) \wedge (z \vee y) \wedge (y \vee x)$$
$$= med(x, y, z).$$

Most megnézzük a ← irányt. Legyen $x = x \wedge (x \vee y) \wedge (x \vee z), xyz \in A$.

$$x \wedge (y \vee z) = x \wedge (x \vee y) \wedge (x \vee z) \wedge (z \vee y) = x \wedge (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x)$$
$$= (x \wedge y \wedge z) \vee [(x \wedge z) \vee (x \wedge y)] = (x \wedge z) \vee (x \wedge y)$$

Hiszen $(x \wedge y \wedge z) \leq [(x \wedge z) \vee (x \wedge y)]$m tehát tényleg igaz, hogy $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge z) \vee (x \wedge y)$.□

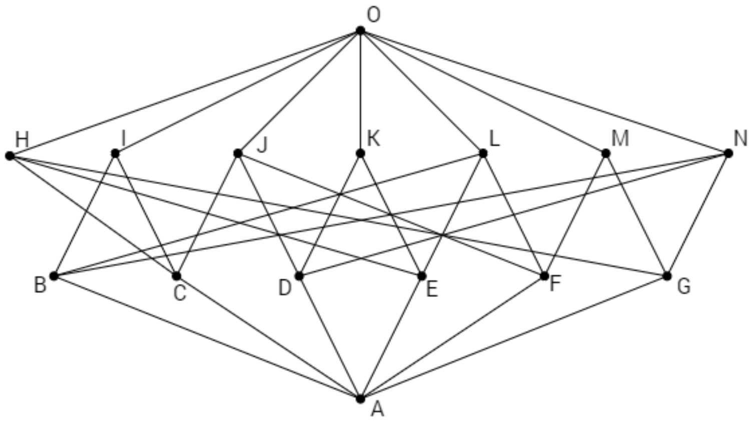
Partíciók

Nézzük meg az *A* legalább egyelemű halmaznak az osztályait. Hozzunk létre egy rendezést az osztályozások között.

Definíció: Legyen két partíciónk (α_1, α_2) és azt mondjuk, hogy a $\alpha_1, < \alpha_2$ ha α_1 minden osztálya része az α_2 valamelyik osztályának.

Definíció: Egy legalább egy elemű *A* halmaz partíciói teljes hálót alkotnak, amit az *A* partícióhálójának nevezünk. Ennek a hálónak a legnagyobb alsó korlátja, amikor az *A* minden eleme külön osztályba szerepel, a legkisebb felső korlátja, pedig amikor *A* minden eleme egy osztályban van.

Ennek a hálónak a tulajdonságait vizsgáljuk meg egy példa segítségével. Ábrázoljuk a négy elemű halmaznak a partíció hálóját.



$O = \{1,2,3,4\}$
$N = \{1,2,3\}, \{4\}$
$M = \{1,4\}, \{2,3\}$
$L = \{1,2,4\}, \{2\}, \{3\}$
$K = \{1,3\}, \{2,4\}$
$J = \{1,3,4\}, \{2\}$
$I = \{1,2\}, \{3,4\}$
$H = \{1\}, \{2,3,4\}$
$G = \{1\}, \{2,3\}, \{4\}$
$F = \{1,4\}, \{2\}, \{3\}$
$E = \{1\}, \{2,4\}, \{3\}$
$D = \{1,3\}, \{2\}, \{4\}$
$C = \{1\}, \{2\}, \{3,4\}$
$B = \{1,2\}, \{3\}, \{4\}$
$A = \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}$

4 elemű halmaz osztályozási hálója

Egyértelmű hogy ez a háló komplementumos, hiszen ha az ábrán látható *B*={1,2}{3}{4} partíciót nézzük, akkor annak komplementuma a *D*={1,3}{2}{4}, és a *H*={1}{2,3,4} is, tehát tényleg komplementumos, csak nem egyértelműen. Disztributív-e ez a háló? Szintén csak a példából vegyünk három elemet. Legyen ez a három elem *B*={1,2}{3}{4}, a *J*={1,3,4}{2} és az *M*={1,4}{2,3}.

$$(\{1,2\}\{3\}\{4\} \vee \{1,3,4\}\{2\}) \wedge \{1,4\}\{2,3\} = \{1,2,3,4\} \wedge \{1,4\}\{2,3\} = \{1,4\}\{2,3\}$$

$$\begin{aligned}(\{1,2\}\{3\}\{4\} \wedge \{1,4\}\{2,3\}) \vee (\{1,3,4\}\{24\} \wedge \{1,4\}\{2,3\}) &= \{1\}\{2\}\{3\}\{4\} \vee \{1,4\}\{2\}\{3\} \\ &= \{1,4\}\{2\}\{3\} \neq \{1,4\}\{2,3\}\end{aligned}$$

Tehát a válasz az, hogy ez nem disztributív háló.

Moduláris hálók

Definíció: Egy A háló moduláris ha:

$$\forall x, y, z \in A, x \leq z \ \rightarrow (x \vee y) \wedge z = x \vee (y \wedge z)$$

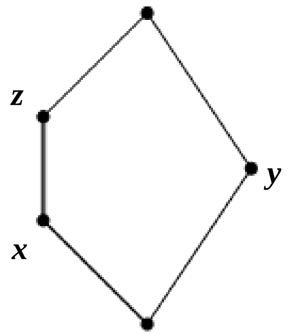
<u>Dedekind–tétel</u>: Egy háló moduláris akkor és csak akkor, ha nincsen az N_5 hálóval izomorf részhálója.

Bizonyítás: Tegyük fel hogy a háló (*A)* moduláris. Ekkor mivel a hálóműveletek zártak, minden részhálónak is modulárisnak kell lennie. Vizsgáljuk meg a $\forall x, y, z \in N_5, x \leq z$ elemeket N_5 hálóban. $x \vee y = 1_{N_5}, és\ y \wedge z = 0_{N_5}$. Ebből már következik, hogy:

$$(x \vee y) \wedge z = 1_{N_5} \wedge z = z$$

$$x \vee (y \wedge z) = x \vee 0_{N_5} = x$$

$x \neq z$ tehát az N_5 nem moduláris, továbbá nem lehet részháló sem.



N_5 *háló* $, x \leq z$

A bizonyítás másik felében tegyük fel, hogy az *A* háló nem moduláris. Ekkor igaz, hogy van olyan $x \leq z, y \in A$, hogy $x \vee (y \wedge z) < (x \vee y) \wedge z$. Vizsgáljuk meg azt az $N = \{a, a', b, c, c'\}$ halmaz hálót alkot-e, ahol $a = y \wedge z, a' = x \vee a, b = y, c = x \vee y$ és $c' = z \wedge c$. Mivel $a \leq a' \leq c' \leq c$, valamint az $a \leq b \leq c$ ezért ezek láncok, így zártak a háló műveletekre. Abban az esetben ha $c' \wedge b, c' \vee b, a' \wedge b, a' \vee b$ is a háló elemei, akkor egy N_5

$$c' \wedge b = \left(z \wedge (x \vee y)\right) \wedge y = y \wedge (x \vee y) \wedge z = y \wedge z = a$$

Mivel $a \leq a' \wedge b \leq c' \wedge b = a,$ hiszen $a \leq a' \leq c' \leq c$, ezért $a' \wedge b = a$ szintén egy *N*-beli elem.

$$a' \vee b = \left(x \vee (z \wedge y)\right) \vee y = y \vee (y \wedge z) \vee x = y \vee x = c$$

$c = a' \vee b \leq c' \vee b \leq c$ egyenlőségből következik, hogy $c' \vee b = c$. Tehát a $\wedge, \vee$ műveletek zártak a *N*-ben, tehát tényleg háló ($N < A$). Az így keletkező *N* azonban nem moduláris háló, és izomorf N_5-tel, ugyanis ez az egyetlen 5 elemből álló, nem moduláris háló.□

Elsőként azt szeretném megmutatni, hogy minden disztributív háló moduláris. Ebben a bizonyításban csak azt használjuk ki, hogy $x \vee z = z\ a\ x < z$ miatt $x \vee (y \wedge z) =$

$(x \vee y) \wedge (x \vee z) = (x \vee y) \wedge z$ és meg is kaptuk, hogy minden disztributív háló moduláris. Az is triviális hogy minden moduláris háló részhálója is moduláris, elvégre, a 2 művelet zárt minden hálóban.

A következő tételekben olyan szükséges és elégséges feltételeket fogok ismertetni és bebizonyítani, ami egy hálóról eldönti, hogy az moduláris-e vagy sem.

Tétel: Egy *A* háló moduláris akkor és csak akkor ha

$$\forall x, y, z \in A \; esetén, x \vee \big(y \wedge (x \vee z)\big) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

Bizonyítás: ● Moduláris akkor $x \leq p$ és $p = (x \vee z)$ akkor a $(x \vee y) \wedge p = x \vee (y \wedge p)$ egyenlőségbe behelyettesítve megkapjuk, hogy:

$$(x \vee y) \wedge (x \vee z) = x \vee \big(y \wedge (x \vee z)\big)$$

● Ha teljesül rá az egyenlet a hálóban, és ha ez mellé még feltesszük, hogy $x \leq z$, akkor visszafele gondolkodva megkapjuk azt, hogy $(x \vee y) \wedge p = x \vee (y \wedge p)$, azaz hogy moduláris a háló.□

Ennek a tételnek az alkalmazása elég sok számolást venne igénybe, hiszen még ábráról leolvasva is meg kell vizsgálni minden elem-hármast, számolással pedig ez még tovább tartana,viszont ez már egy könnyen leprogramozható feladat. A következő tétel használata tehát sok esetben hatásosabbnak bizonyulhat.

Tétel: Egy *A* háló moduláris, akkor és csak akkor ha, $x \leq z \; esetén \; \exists med(x, y, z)$.

Bizonyítás:

Vizsgáljuk meg a $(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x)$ kifejezést. $z \wedge x = x,$ hiszen $x \leq z$. $(x \wedge y) \vee (z \wedge x) = x$, hiszen $x \wedge y \leq \; x$. Így az alábbi egyenlőséget kapjuk:

$$(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) = x \vee (y \wedge z)$$

Hasonló elgondolással $z \vee x = z$ és $(z \wedge y) \vee (z \wedge x) = z$.

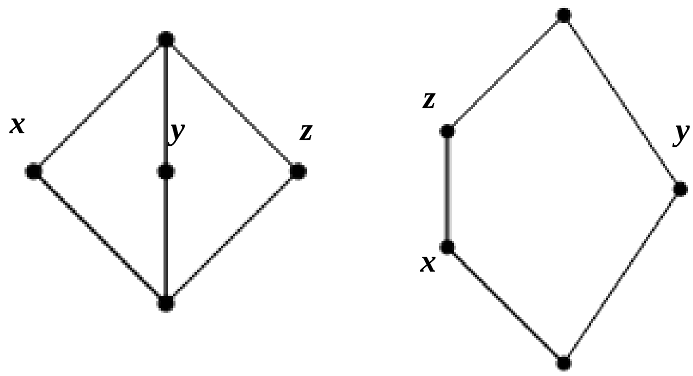
$$(x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x) = (x \vee y) \wedge z$$

Az így kapott egyenlőségek jobb oldalai akkor és csak akkor lesznek egyenlők, ha a bal oldalon található kifejezések is egyenlők.□

<u>Birkhoff–tétel</u>: Egy háló akkor és csak akkor disztributív, ha nincs a M_3 és az N_5 hálóval izomorf részhálója.

Bizonyítás:

Először lássuk be hogy az M_3 és az N_5 nem disztributívak.



M_3 és az N_5

M_3 esetén vegyük a $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$. Itt a $x \vee y = 1_{M_3}$ és $x \wedge z = y \wedge z = 0_{M_3}$ és tovább számolva megkapjuk, hogy $1_{M_3} \wedge z \neq 0_{M_3} \vee 0_{M_3}$,tehát az M_3 nem disztributív. Az N_5 esetén vegyük ugyanúgy, mint az előbb a $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$ egyenletet. $x \vee y = 1_{N_5}$, $x \wedge z = x$, $y \wedge z = 0_{N_5}$ tehát megkaptuk, hogy $1_{N_5} \wedge z = x \vee 0_{N_5}$, ami természetesen nem igaz hiszen $z \neq x$. Mivel egy disztributív háló minden részhálója disztributív, ezért az is kiderül, hogy az M_3 *és az* N_5 egy disztributív hálónak sem lehet részhálója. A bizonyítás egyik felével kész vagyunk, most már csak a visszafele irányt kell bebizonyítani.

Legyen *A* egy moduláris, nem disztributív háló. Válasszunk k 3 elemet a hálóból (*p*,*q*,*r*), hogy $\nexists med(p, q, r)$. Ebből következik, hogy, $u = (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$, $v = (p \vee q) \wedge (p \vee r) \wedge (q \vee r)$ esetén $u < v$. Mivel a háló moduláris, ezért $x = u \vee (p \wedge v) = (u \vee p) \wedge v, y = u \vee (q \wedge v) = (u \vee q) \wedge v$ és $z = u \vee (r \wedge v) = (u \vee r) \wedge v$ egyenlőségek teljesülni fognak. Vizsgáljuk meg a $N = \{u, x, y, z, v\}$ halmazt, hogy hálót alkotnak-e.

$$x = (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee (q \wedge r) \vee [p \wedge (p \vee q) \wedge (p \vee r) \wedge (q \vee r)]$$

Egyszerűsítsük le az egyenlőséget annak a segítségével, hogy $p∨q \geq p, p∨r \geq p$ és $p∧(q∨r) \geq p∧r, p∧(q∨r) \geq p∧q$. Ebből következik, hogy: $x = (q∧r)∨p∧(q∨r)$.Hasonló gondolatmenettel a $y = (p∧r)∨q∧(p∨r)$. Vizsgáljuk ennek a *x,y* egyesítését.

$$x∨y = (q∧r)∨p∧(q∨r)∨(p∧r)∨q∧(p∨r)$$

Tudjuk továbbá, hogy $q∧r \leq q∧(p∨r)$ és $p∧r \leq p∧(q∨r)$, amiből az alábbi egyenlőséget kapjuk:

$$x∨y = (p∧(q∨r))∨(q∧(p∨r))$$

Most használjuk fel, hogy moduláris a háló, ugyanis $p∧(q∨r) \leq p \leq (p∨r)$ elemekre teljesül a feltétel.

$$x∨y = ((p∧(q∨r))∨q)∧(p∨r) = (q∨(p∧(q∨r)))∧(p∨r)$$

Alkalmazzuk ismét a moduláris tulajdonságot, csak a $q \leq q∨r, p$ elemekre.

$$x∨y = \big((p∨q)∧(q∨r)\big)∧(p∨r) = (p∨q)∧(p∨r)∧(q∨r) = v$$

Dualitás elve miatt az is igaz lesz, hogy $x∧y = u$. Továbbá szimmetrikusan adtuk meg a *x,y,z* elemeket, tehát bármelyik kettőnek a metszete *u*, és egyesítse *v*. Mivel minden 5 vagy annál kevesebb elemű moduláris, nem disztributív háló izomorf M_3-mal, ezért ha a *N* nem disztributív, akkor van a *A* hálónak M_3-mal izomorf részhálója. Ha disztributív lenne az *N*, akkor teljesülne hogy:

$$x = x∨u = x∨(y∧z) = (x∨y)∧(x∨z) = v$$

$$x = x∧v = x∧(y∨z) = (x∧y)∨(x∧z) = u$$

A két egyenletből megkaptuk, hogy $v = u$, ami meg ellentmond annak, hogy $v > u$, tehát nem lehet az *N* disztributív, tehát $N \cong M_3$.□

<u>**Intervallumizomorfizmus-tétel**</u>: Minden moduláris hálóra teljesül, hogy,

$$\forall x, y \in A\ , [y, x∨y] \cong [y∧x, x]$$

Bizonyítás: Vezessünk be 2 leképezést, $\mu_1(p) = p∨y$ és $\mu_2(p) = p∧x$. Így a $\mu_1([x∧y, x]) = [y, x∨y]$ és $\mu_2([y, x∨y]) = [y∧x, x]$.Természetesen ezek rendezéstartó leképezések. Mivel a hálón moduláris, ezért ha $y \leq p \leq x∨y$ akkor $\mu_1 \circ \mu_2(p) =$

$(p \wedge x) \vee y = p \wedge (x \vee y) = p$. Mivel a 2 leképezésünk (μ_1, μ_2) rendezéstartó és létezik inverze is mind a kettőnek, ezért ezek izomorfizmusok. Mivel az izomorfizmusok kölcsönösen egyértelmű leképezések, amik rendezéstartók, ezért $[y, x \vee y] \cong [y \wedge x, x]$, hiszen létezik μ izomorfizmus hogy $\mu([y, x \vee y]) = [y \wedge x, x]$□

Egyszer már definiált láncnak nézzük meg egy másik, az előzővel egyenértékű definícióját, ami a láncot mint sorozatot értelmezi.

Definíció: Adott A háló és $x \leq y \in A$ azt az $\forall n_i \in A$ sorozatot láncnak nevezzünk, amire igaz, hogy:

$$x = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = y$$

Itt az x és y közötti lánc, melynek hossza n. Abban az esetben, ha igaz a sorozatra hogy $x_i \prec x_{i+1}$ $0 \leq i < n$, akkor az n számot az [x,y] intervallum hosszának nevezzük, mivel ez a leghosszabb lánc a két pont között. Jelölése: $\delta(x, y) = n$.

<u>**Jordan–Dedekind-tétel**</u>: Egy A moduláris háló, melynek két eleme $x \leq y$ és $\delta(x, y) = n$ akkor minden lánc hossza a két elem között legfeljebb n hosszúságú, valamint az is igaz, hogy ha egy lánc hossza n, akkor az egy maximális lánc, továbbá minden lánc kiegészíthető úgy, hogy n hosszúságú legyen.

Definíció: Adott A háló, ami nullelemes, továbbá moduláris. Egy $x \in A$ dimenzióján azt a számot értjük, amely a [0,x] intervallumban található maximális lánc hosszával egyenlő, azaz $d(x) = \delta(0, x)$. A d függvényt a háló dimenziófüggvényének nevezzük. Amennyiben minden elem dimenziója legfeljebb $n \in \mathbb{N}$, akkor azt mondjuk, hogy a háló véges magasságú.

<u>**Tétet:**</u> Adott A nullelemes, moduláris háló, és $x, y \in A$, $d(x) = n, d(y) = m\,; m, n \in \mathbb{N}$ akkor

$$d(x \vee y) = d(x) + d(y) - d(x \wedge y)$$

Bizonyítás: Először is nézzük a $d(x) = \delta(0, x)$. A [0,x] intervallum felbontható úgy, hogy $[0, x \wedge y] + [x \wedge y, x]$ egyesítése, tehát megkaptuk, hogy

$$d(y) = \delta(0, x \wedge y) + \delta(x \wedge y, x) = d(x \wedge y) + \delta(x \wedge y, x)$$

$$\delta(x \wedge y, x) = d(x) - d(x \wedge y)$$

Valamint hasonló módon felbonthatjuk a $[0, x \vee y]$ intervallumot is:

$$d(x \vee y) = \delta(0, y) + \delta(y, x \vee y) = d(y) + \delta(y, x \vee y)$$

Itt felhasználva az Intervallumizomorfizmus-tételt:

$$d(x \vee y) = \delta(0, y) + \delta(y, x \vee y) = d(y) + \delta(\mathrm{x} \wedge \mathrm{y}, \mathrm{x})$$

Itt a két felső egyenletet behelyettesítve megkapjuk hogy:

$$d(x \vee y) = d(y) + \ d(x) - d(x \wedge y)$$

<u>Tétel</u>: A komplementumos moduláris hálók relatív komplementumos hálók.

Bizonyítás: A komplementumos moduláris háló, $x, y, p \in A$ és $x \leq p < y$ úgy, hogy p komplementumos elem, komplementuma q. Mivel a hálónk moduláris, ezért létezik egy $a = (x \vee q) \wedge y = x \vee (q \wedge y)$. Vizsgáljuk meg a és p metszetét.

$$p \wedge (x \vee q) \wedge y = \ (x \vee q) \wedge (y \wedge p) = \ (x \vee q) \wedge p$$

Először a 2. axiómát felhasználva rendezzük a formulát, majd pedig a $p \leq y$ tulajdonságra hivatkozva jutottam erre. Viszont a hálónk moduláris, továbbá teljesül az is, hogy $x \leq p$ így definíció alapján

$$(x \vee q) \wedge p = x \vee (q \wedge p)$$

Felhasználva azt, hogy a p és a q komplementumosak (tehát metszetük 0_A), azt kapjuk, hogy:

$$p \wedge a = x \vee 0_A = x$$

Amennyibe ehhez hasonló módon számolva megkapjuk, hogy az a és p egyesítése:

$$p \vee (x \vee q) \wedge y = \ (p \vee x) \vee (q \wedge y) = \ (p \vee q) \wedge y$$

$$p \vee a = y \wedge 1_A = y$$

Ezzel a két egyenlettel megkaptuk a relatív komplumentumát a *p*-nek, tehát a hálón relatív komplementumos, hiszen ez bármely [x, y] intervallumra elmondható.□

Boole-algebra

A Boole-algebra gyakran a hálók ismerete nélkül kerül szóba, hiszen lehet definiálni, mint egy legalább kételemű halmaz, azon értelmezett ∧ (gyakran „és") valamint a ∨ („vagy") kétváltozós művelettel, amelyekre teljesül az asszociativitás, a kommutativitás, továbbá teljesülnek az elnyelési azonosságok, és a műveletek disztributívak egymásra nézve. Értelmezett továbbá $'\neg'$ vagy $()'$ egyváltozós művelet amit komplementumot képez. A hálók ismeretében azonban bevezethető egy új definíció is.

Definíció: A legalább kételemű, komplementumos disztributív hálót Boole-algebrának nevezzük.

Mindamellett hogy a Boole-algebrában a műveletek asszociatívak, kommutatívak és érvényesül az elnyelési tulajdonság is, továbbra is idempotensek maradnak a műveletek és a De–Morgan azonosságok is igazak.

Az egyik legismertebb Boole-algebra, az egy *X* halmaz részhalmazaiból, mint elemekből képzett struktúra, ahol a két művelet az ∩ és a ∪. Ekkor, mint látni fogjuk a legkisebb elem az üres halmaz, a legnagyobb pedig maga az X halmaz.

Tétel: Egy tetszőleges *X* halmaz összes részhalmazának halmaza az ∩ és a ∪ műveletekkel Boole-algebrát alkotnak.

Bizonyítás: Legyen *X* a kiindulási halmaz, és jelölje *X* összes halmazának halmazát *P(X)*

$$\forall x, y \in P(X), x \cap y = \{a \mid a \in X \text{ } és \text{ } [a \in x \text{ } és \text{ } a \in y]\}$$

$$\forall x, y \in P(X), x \cup y = \{a \mid a \in X \text{ és } [a \in x \text{ } vagy \text{ } a \in y]\}$$

Ezek a definíciók alapján a hálóaxiómákról triviális, hogy teljesül az asszociativitás, a kommutativitás és az elnyelési azonosság is. Vizsgáljuk meg, hogy komplementumos a háló:

$$\forall x \in P(X), \exists y \in P(X), x \cap y = 0 \text{ } és \text{ } x \cup y = 1$$

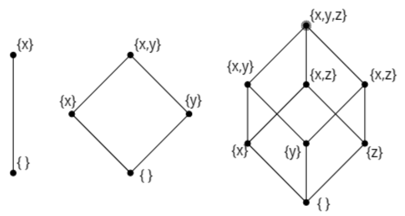
Válasszuk ki úgy *y*, hogy legyen minden elem benne, ami nincs benne az *x*-ben. Így tehát biztos, hogy van *x*-nek komplementuma, és tovább, ez minden részhalmazra igaz, tehát a hálónk komplementumos.

$$(x \wedge y) \vee z = \{a \mid a \in X \text{ és } [(a \in x \text{ és } a \in y) \text{ vagy } a \in z]\}$$

Azaz vagy eleme a *z*-nek, vagy az *x* és *y* közös elemei között szerepel.

$$(x \vee z) \wedge (y \vee z) = \{a \mid a \in X \text{ és } [(a \in x \text{ vagy } a \in z) \text{ és } (a \in y \text{ vagy } a \in z)]\}$$

De hát ez szintén tartalmazza az összes elemet, ami benne van *z*-ben, és az össze benne lévő elemnek egyaránt benne kell, hogy legyen az *x*-ben és van *y*-ban is. Tehát megkaptuk, hogy ez egy disztributív háló.□



$1, 2, 3$ *elemű halmaz részhalmazaiból képzett hálók*

Boole-algeb a matematika logika használja, ahogy a 0-hoz a hamis, míg a 1-hez az igaz.

Tétel: $H = \{0,1\}$ és $H^K = \{0,1\}^K$, az így keletkezett hatvány izomorf az előbb látható *P(K)*-val. Legyen továbbá $\forall x, y \in H^K$:

$$a \vee b = \{(h_1, h_2, \dots, h_n),\ h_i = 1 \text{ ha } a_i = 1 \text{ vagy } b_i = 1, (1 \le i \le n) \text{ külöben } 0\}$$

$$a \wedge b = \{(h_1, h_2, \dots, h_n),\ h_i = 1 \text{ ha } a_i = 1 \text{ és } b_i = 1, (1 \le i \le n) \text{ külöben } 0\}$$

Bizonyítás: Létrehozunk egy rendezéstartó bijekciót. Legyen $K = \{k_1, k_2, \dots k_n\}$, továbbá $\mu: P(K) \to H^K, h \in P(K), \mu(h) = \{(h_1, h_2, \dots, h_n),\ h_i = 1 \text{ ha } k_i \in n, 1 \le i \le n$ különben 0}. Mivel $\mu(x \cup y) = \mu(x) \vee \mu(x)$ és $\mu(x \cap y) = \mu(x) \wedge \mu(y)$, valamint a μ definíciójából látható hogy $\mu(x)' = \mu(x')$ tehát tényleg igaz hogy a két háló izomorf.□

Az eseményalgebra is Boole-algebra. Az alaphalmazunk, az eseményterünk, elemei az események, és az azon értelmezett három művelet az unió (ahol legalább az egyik teljesül), a metszet (ahol mind a kettő teljesül), és létezik az események ellentettje is (komplementum), ami pontosan akkor következik be, ha az esemény nem. Az unióra és a metszetre teljesül, hogy asszociatív, kommutatív, idempotens, tehát valóban az így létrejött struktúra egy háló. Az komplementum miatt, ahogy a neve is mutatja, ez egy komplementumos háló. Mivel azonban minden elemnek csak egy ellentettje van, azért ezek ráadásul egyértelműen komplementumos hálók lesznek. A disztributivitás is teljesül, hiszen az eseményteret fel lehet fogni halmazként, és azoknak a részhalmazai az események. Azt meg már beláttuk, hogy a halmazok részhalmazai disztributív hálót alkotnak, ez itt is teljesülni fog.

Középiskolai előfordulás:

Már a szakdolgozatom elején említettem, hogy a középiskolában gyakran jelennek meg a hálók. Az egyik legkönnyebben megérthető példát, a halmazok részhalmazaiból képzett struktúrát már megvizsgáltuk, és kiderült, hogy egy komplementumos disztributív hálóról beszélünk, tehát igaz az is hogy relatív komplementumos.

Legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös

Már tanulmányai elején a diákok megismerkednek a legkisebb közös többszörös, és a legnagyobb közös osztó fogalmával, viszont jelöljük az előbbit ∧-vel, míg az utóbbit ∨-val. Ezeknek a kiszámítására a pontos képlet a következő Adott $A, B \in \mathbb{Z}$ és

$$A = \prod_{1}^{\infty} p_i^{\alpha_i}\ , B = \prod_{1}^{\infty} p_i^{\beta_i}\ ahol\ \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{Z}(\forall i = 1,2,..)\ \text{és}\ p_i =\ i.\ prím.$$

$$A \vee B = \prod_{1}^{\infty} p_i^{\max(\alpha_i,\beta_i)}, A \wedge B = \prod_{1}^{\infty} p_i^{\min(\alpha_i,\beta_i)}.$$

A számelmélet alaptétele miatt, bőven elég a hatványkitevőket vizsgálnunk. A műveletek definíciójából egyértelműen látszik, hogy kommutatív, hiszen a minimum-, és a maximumválasztásnál a sorrend tetszőleges. Természetesen az asszociatív tulajdonság is teljesülni fog mind a 2 műveletre, hiszen szintén csak a hatványkitevőt vizsgálva:

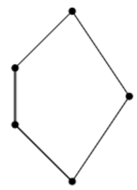
$$\max(\max(\alpha_i, \beta_i), \gamma_i) = \max(\alpha_i, max(\beta_i, \gamma_i))\ teljesül(minimra\ szintén)$$

A hálók 5. és 6 axiómáját is egyszerű belátni (csak az 5-re írom fel részletesen).

$$A \vee (A \wedge B) = \prod_{1}^{\infty} p_i^{\max(\alpha_i, \min(\alpha_i,\beta_i))}$$

Felhasználva a minimumválasztásnak tulajdonságát, hogy az $\alpha_i \geq \min(\alpha_i, \beta_i)$, megkapjuk ennek a 2 elemnek a maximuma mindig α_i, és így $A \vee (A \wedge B) = A$ is teljesüni fog, ezzel belátva, hogy tényleg hál. Érdekességképpen meg lehet vizsgálni azt, hogy mit is jelent például az $A \wedge B = A$ egyenlőség. Abban az esetben, ha ez teljesül, akkor igaz lesz, hogy egymásnak többszörösei, továbbá hogy az $A|B$.

Vizsgáljuk meg ezt a hálót, hogy disztributív-e. Ennek a bizonyítása során Birkhoff-tételt használjuk fel, ami kimondja, hogy akkor és csak akkor lehet a háló disztributív, ha nincs N_5-tel izomorf részháló. Azt pedig nagyon könnyű látni, hogy nem létezik N_5-tel izomorf háló. Indirekt tegyük fel, hogy létezik ilyen részháló: Ekkor igaz, hogy ebben a hálóban $a \leq c$ tehát $a|c$. De hát akkor $a \vee b | c \vee b$ is teljesülnie kéne, tehát, akkor $a \vee b$ is eleme kellene, hogy legyen a hálónak. Tehát a hálónk disztributív. Azonban ez a háló nem véges tehát nem komplementum a háló. Az M_3 létezésének kizárása rendkívül hasonló módon történik, és megkapjuk a Birkhoff-tétel miatt, hogy a hálónk moduláris.



Azt a végtelen hálót nem igazán vizsgáljuk,viszont ennek a részhálói már a középiskolás tananyagban előkerül. Arról a hálóról van most szó, ahol prímeket adunk meg, és a háló elemeit azok számok alkotják, amelyek kisebbek, mint a prímek legkisebb közös többszörösei, és osztói annak. Ezt ahelyett, hogy ismételten végig mennék az axiómákon és úgy bizonyítanám be, hogy tényleg háló, ahelyett inkább azt kéne látni, hisz ez tulajdonképpen egy Boole-háló, mégpedig azért, mert nyugodtan felírhatjuk ide is a $K = \{0,1\}^n$-be vivő bijekciót. Ezzel együtt tehát itt már igaz lesz, hogy disztributív, komplementumos a hálónk.

Feladatokat a középiskolásoknak ebben a témakörben érdemes két féle módon is adni. Egyrészt kiszámoltatni velük, bizonyos elemeket, a másik pedig hogy ábrázoltatjuk a hálókat. Azáltal hogy maguk számolják ki az adatokat, és maguk készítenek egy hálót, gyakran jobban megértik az anyagot, mintsem a tanár elmutogatja nekik. Egyik ilyen feladat például hogy kiszámoltatjuk a 1326-nak az összes osztóját. Az általános módszer az ilyen jellegű feladatoknál a prímtényezős felbontás, majd a kapott prímek kombinálása. A tapasztaltabb diákok kihasználják már azt is, hogy osztók helyett beszélhetünk osztó párokról, tehát azt hogy ez a háló egyértelműen komplementumos.

Hálók a geometriában

Hálók azonban a geometriában is megtalálhatók. Legyenek az alaphalmazunk elemei a tér pontjai, egyenesei, síkjai, maga a tér, és az üres halmaz. A két művelet pedig legyen a metszet($\wedge$), azaz és a projekció($\vee$). A metszet az a már jól ismert definíció, tehát a közös pontok által alkotott alterei, projekció alatt pedig a két elem pontjait tartalmazó legszűkebb alteret értjük. Természetesen itt is teljesül az asszociativitás és a kommutativitás, valamint az elnyelési tulajdonságot csak a definíciókból egyszerűen végiggondolva megkapjuk. Vizsgáljuk meg a disztributivitást is. Azt szeretnénk belátni, hogy:

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

Ennek cáfolására keressünk ellenpéldát. Legyen $az,\ b,\ c$ három páronként kitérő egyenes. Ebben a helyzetben, $a \wedge (b \vee c)$ kifejezés az a egyenest adja vissza, hiszen $b \vee c$ az egész teret fogja jelenteni, hiszen kitérőek, és a tér és egy egyenes metszete egy egyenes. A másik oldalon viszont az üres halmaz van, hiszen az $(a \wedge b) = \emptyset\ és\ (a \wedge c) = \emptyset$ hiszen kitérők. Üres halmazok projekciója is üres halmaz, és megkaptuk, $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = \emptyset$. Tehát még egy olyan példa, ami nem disztributív,hiszen a dualitás elve miatt, ha ez az eset nem igaz, akkor a másik eset is hibás. Viszont ez a háló komplementumos mégpedig a következőképpen:

- a tér komplementuma az üres halmaz, a tér egyértelműen komplementumos
- egy tetszőleges sík komplementuma egy olyan *P* pont a térben, ami nincs rajta a síkon, vagy egy vele párhuzamos egyenes vagy sík. Látható, hogy végtelen sok ilyen pont van.
- egy egyenes komplementuma, egy kitérő egyenes, vagy egy, az egyenessel párhuzamos sík.
- egy pont komplementuma, egy sík, nem tartalmazza magát a pontot.
- Az üres halmaz komplementuma a tér. Egyértelműen komplementumos.

Egy kicsit kilépve a középiskolai anyag világából, vizsgáljuk meg a projektív teret. Legyen ugyan az a 2 művelet, ugyan azokkal az elemekkel, mint az előbb, csak bővítsük ki az ideális ponttokkal, egyenesekkel és síkokkal. Az hogy ez is háló az ugyanúgy belátható, mint az előbb, viszont a komlementum területén már változik a helyzet egy helyen. Ugyanis az egyenes komplementuma minden olyan egyenes, ami kitérő és nem párhuzamos vele, valamint síknak a komplementuma a nem rajta egy fekvő pont. Általános értelemben itt sem lesz disztributív a háló, viszont vizsgáljuk meg, úgy ha feltesszük, hogy $a, b, c \in$ P $a \leq c$ is teljesül.

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

Ilyenkor az $a\wedge(b\vee c) = a$ hiszen $a \in b\vee c$, valamint felhasználva a kommutativitást és az elnyelési azonosságoz:

$$(a\wedge b)\vee(a\wedge c) = (a\wedge b)\vee a = a\vee(a\wedge b) = a$$

Vizsgáljuk meg, hogy moduláris-e a hálónk.

$$\forall a, b, c \in \mathrm{P}\ a \leq c\ \rightarrow (a\vee b)\wedge c = a\vee(b\wedge c)$$

Itt azt a tanult tételt fogjuk alkalmazni, amelyik kimondja 2 altér projekciójáról, hogy úgy áll elő, hogy az összes olyan egyenest vesszük, aminek létezik pontja, ami illeszkedik a 2 altérre (egy ilyen egyenes jele $(A, B)\ ahol, A \in a, B \in$ b). Válasszunk egy tetszőleges $P \in (a\vee b)\wedge c$ pontot, és azt fogjuk belátni, hogy ez biztos benne, lesz a $a\vee(b\wedge c)$ altérben is. A metszet azon legszűkebb altér, ami mind a 2 alteret tartalmazza, tehát:

$$P \in (a\vee b)\ \text{és}\ P \in c$$

De a projekciót feltudjuk, mint pontpárok, tehát $P \in (A, B)$ ahol, $A \in a, B \in b.$ Ha $P = A$, akkor természetesen igaz lesz, hogy $P \in a\vee(b\wedge c)$. Másrészről, ha $P \neq A$, tehát az A, B, P egy egyenesre illeszkednek. De ekkor vegyük észre, hogy a $B \in (A, P)$ is igaz lesz, amiből már látszik, hogy $B \in a\vee c = c$ a $a \leq c$ miatt. Mivel $B \in b$ és $B \in c$ ezért $B \in b\wedge c$ is igaz lesz. Mivel $A \in a, B \in b\wedge c$ így $P \in a\vee(b\wedge c)$ is teljesülni fog. Tehát a projektív tér altereink hálója moduláris.

Mivel a projektív sík elemeit a középiskolás anyag nem említi, ezért a feladatokban is erre kell hagyatkoznunk. Érdemes lehet felíratni a diákokkal egy-két összefüggést például:

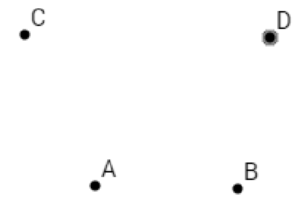
- egy egyenes és egy nem rajta fekvő P pont metszete
- egy sík és egy rajta fekvő-,vagy a síkkal párhuzamos egyenes projekciója.
- két sík metszete, projekciója, ha a két sík metsző

Konvex ponthalmazok

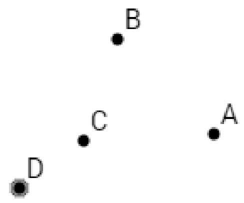
Az utolsó háló, amit megemlítenék még, az a tér konvex ponthalmazaiból épül fel. Megtanultuk, hogy azokra a k ponthalmazokra mondjuk hogy konvex, ha $\forall A, B \in k$ és $P \in [A, B] \rightarrow P \in k$, ahol az $[A, B]$ az A és B pontokat összekötő szakaszt értjük. Az egyik művelet legyen a szokásos metszet ($\wedge$), míg a másik a konvex burok ($\vee$), tehát a legszűkebb olyan konvex ponthalmaz, amely mindkét ponthalmaz elemeit tartalmazza.

Természetesen ezek zárt műveletek, hiszen a konvex burkot eleve úgy képezzük, hogy konvex legyen, továbbá a konvex halmazok metszete is konvex. Az hogy a metszet asszociatív, kommutatív az triviális. Abból a tételből, ami kimondja, hogy a tetszőleges véges sok konvex ponthalmaznak pontosan 1 darab konvex burka létezik, egyértelműen következik, hogy ez a művelet is asszociatív és kommutatív. Továbbá az elnyelési tulajdonságok is teljesülni fognak, hiszen a $a \subseteq (a \vee b)$ tehát $a = a \wedge (a \vee b)$ és ennek duálisa is igaz lesz. A disztributivitás cáfolására egy egyszer esetet vizsgáljunk meg. Legyen a, b *és* c páronként kitérő egyenesek, plusz tegyük fel még azt is, hogy nem párhuzamosak. Ilyenkor $b \vee c = \mathbb{R}^3$ és $a \wedge (b \vee c) = a$. Az egyenlet másik oldalán viszont $a \wedge b = \emptyset$ *és* $a \wedge c = \emptyset$, két üres halmaz konvex burka szintén üres halmaz.

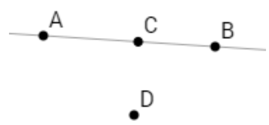
Az ehhez a témához kapcsolódó feladatok esetben sokkal inkább a rajzolás kap nagyobb szerepet, mintsem a számolás. Lehet például két párhuzamos egyenes konvex burát kérdezni, vagy két felrajzolt kör metszetét kérdezni. De pontok konvex burkának a kérdezése is nagyon hasznos lehet, például az alábbi esetek vizsgálatával:



1. ábra



2. ábra



3. ábra

Ezeknél a példák esetében az 1. ábra egy olyan pontnégyest mutat, aminek a konvex burka az a négyszög, melynek csúcsai a négy pont. A 2. ábra azt az esetet mutatja be amikor az egyik pont beleesik a maradék három pont konvex burkába. A harmadik meg hogy abban az esetben, amikor három pont kollineáris, azaz egy egyenesre esek, akkor a két szélső pontot érdemes vizsgálni.

Irodalom

Kiss Emil: Bevezetés az algebrába Typotex, Budapest 2007,

Kiss Emil: Bevezetés az algebrába, A gyakorlatok és a feladatok megoldásai Typotex, Budapest 2007

Dr. Szász Gábor:Hálóelmélet, Tankönyvkiadó Budapest, 1975

Pelikán József: Algebra (összeállította Gröller Ákos) ELTE TTK

Tartalom: