Egyenlőtlenségek versenyfeladatokban: az analízis segít

Szakdolgozat

Írta: Kőhalmi Krisztina

Matematika BSc

Témavezető:

Besenyei Ádám

Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Budapest

2014

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A szakdolgozatomban középiskolai diákok számára kiírt versenyfeladatsorok egyenlőtlenségekkel kapcsolatos példáival foglalkozunk, amelyekre többféle megoldást mutatunk, néhány kivételtől eltekintve, főleg az analízis témakörén belül. Példákat veszünk a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok, a Nemzetközi Matematikai Diákolimpia és az Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny feladatai közül. Az alapvető célkitűzés az volt, hogy minél több, érdekesebb és változatosabb megoldást mutassunk be, olyan megoldási lehetőségeket és technikákat, amelyek nemcsak a diákok, de a tanárok számára is kihívást jelentenek. Vannak köztük olyan megoldások is, amelyek magasabb szintet képviselnek, mint amit ezeken a versenyeken megkívánnak, de egy pedagógus számára segítséget adhatnak egy könnyebb, elegánsabb megoldás megtalálásához.

A dolgozatban négy feladatot tárgyalunk, mindegyiket külön fejezetben. Az egyes feladatokra három különböző megoldást mutatunk, így a tizenkét megoldással egy változatos képet kaphatunk egyenlőtlenségek megoldási módszereiről. Az első fejezetben egy KöMaL feladattal foglalkozunk, amelyet differenciálszámítás és integrálszámítás segítségével, majd a Jensen-egyenlőtlenségre alapozva oldunk meg. A második feladat a Nemzetközi Matematikai Diákolimpiák egyik feladata, első megoldásában egy ügyes helyettesítéssel, a másodikban számtani és mértani közepekkel, a harmadik megoldásban pedig többváltozós szélsőérték-kereséssel találkozhatunk. A harmadik fejezet szintén egy diákolimpiai feladat megoldásaival foglalkozik, ahol egy Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenséget, egy súlyozott közepeket és egy Csebisev-egyenlőtlenséget használó feladatmegoldást mutatunk. A negyedik, egyben utolsó feladat a 2013/2014. évi OKTV döntőjén szerepelt. Elsőként valószínűségekkel, majd teljes indukcióval, és végül függvényvizsgálat segítségével oldjuk meg. A feladatmegoldásokban további érdekes egyenlőtlenségek is előbukkannak, mint például a Milne-egyenlőtlenség a KöMaL feladat második megoldása kapcsán, vagy a rendezési-egyenlőtlenség a Csebisev-egyenlőtlenség bizonyítása során, valamint a Nesbitt-egyenlőtlenség az egyik olimpiai feladat megoldásában.

1. fejezet

KöMaL 2012. május

A Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok 2012. májusi számában tűzték ki az alábbi feladatot.

1.1. Feladat. (KöMaL B. 4461.) Legyen $p \geq 2$ valós szám. Bizonyítsuk be, hogy ekkor tetszőleges x, y, z és v nemnegatív valós számokra

$$(x+y)^p + (z+v)^p + (x+z)^p + (y+v)^p \leq x^p + y^p + z^p + v^p + (x+y+z+v)^p\,. \tag{1.1}$$

1.1. Megoldás differenciálszámítás segítségével

Ebben a megoldásban a következő tételt fogjuk alkalmazni.

1.2. Tétel. *Legyen $f\colon [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, amely differenciálható $(a,+\infty)$-en, továbbá $f(a) \geq 0$ és $f'(x) \geq 0$ minden $x \in (a,+\infty)$ esetén. Ekkor $f \geq 0$ az $[a,+\infty)$ intervallumon.*

Bizonyítás. A feltételekből következően f monoton növekvő függvény $[a,+\infty)$-en, ezért $f(x) \geq f(a)$ minden $[a,+\infty)$-beli x-re, vagyis $f \geq 0$ az $[a,+\infty)$ intervallumon. □

Térjünk most rá az 1.1. Feladat megoldására. Rögzített y, z és v nemnegatív számok esetén értelmezzük az $f_{y,z,v}\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ függvényt az alábbi módon:

$$f_{y,z,v}(x) = x^p + y^p + z^p + v^p + (x+y+z+v)^p - (x+y)^p - (z+v)^p - (x+z)^p - (y+v)^p\,.$$

Nyilvánvaló, hogy f folytonos a $[0,+\infty)$ intervallumon, hiszen hatványfüggvények összege. Megmutatjuk, hogy f kielégíti az 1.2. Tétel feltételeit. Az első lépésben belátjuk, hogy $f_{y,z,v}(0) \geq 0$, majd második lépésben azt igazoljuk, hogy $f'_{y,z,v}(x) \geq 0$ minden pozitív x számra. Ekkor az 1.2. Tétel alapján $f_{y,z,v}(x) \geq 0$ minden nemnegatív x számra, ami éppen a feladat egyenlőtlensége.

1. lépés. Az $f_{y,z,v}(0) \geq 0$ összefüggés azt jelenti, hogy

$$y^p + (z+v)^p + z^p + (y+v)^p \leq y^p + z^p + v^p + (y+z+v)^p\,,$$

ami egyszerűsítés után a következő alakot ölti:

$$(z+v)^p + (y+v)^p \leq v^p + (y+z+v)^p\,. \tag{1.2}$$

Rögzített $y \geq 0$ esetén tekintsük a $\lambda \geq 0$ valós számokon értelmezett

$$g_y\left(\lambda\right) = (y+\lambda)^p - \lambda^p$$

folytonos függvényt. Megmutatjuk, hogy g_y monoton növő, és így $z+v \geq v$ alapján $g_y(z+v) \geq g_y(v)$ (ahol valójában ismét az 1.2. Tételt használjuk). Világos módon

$$g_y'\left(\lambda\right) = p((y+\lambda)^{p-1} - \lambda^{p-1}),$$

ezért $g_y'(\lambda) \geq 0$ minden λ és y nemnegatív számok és $p \geq 1$ esetén, tehát g_y valóban monoton növő függvény.

2. lépés. Most belátjuk, hogy

$$f_{y,z,v}'(x) = px^{p-1} + p(x+y+z+v)^{p-1} - p(x+y)^{p-1} - p(x+z)^{p-1} \geq 0$$

minden pozitív x értékre. Mivel a feladat feltevése szerint $p \geq 2$, így $q := p-1 \geq 1$ teljesül. Ekkor némi átrendezés után a bizonyítandó $f_{y,z,v}'(x) \geq 0$ összefüggés így alakul:

$$x^q + (x+y+z+v)^q \geq (x+y)^q + (x+z)^q. \tag{1.3}$$

Használjuk most az előző lépésben bevezetett g_y függvényt p helyett a $q \geq 1$ kitevővel:

$$g_y\left(\lambda\right) = (y+\lambda)^q - \lambda^q.$$

Láthattuk, hogy $g_y(z+v) \geq g_y(v)$, ebbe v helyére x-et helyettesítve kapjuk, hogy

$$(x+y)^q + (x+z)^q \leq x^q + (x+y+z)^q.$$

Mivel $v \geq 0$, így

$$x^q + (x+y+z)^q \leq x^q + (x+y+z+v)^q,$$

ezért az (1.3) egyenlőtlenség már adódik, vagyis $f_{y,z,v}'(x) \geq 0$ minden pozitív x számra.

Láthatjuk tehát, hogy $f_{y,z,v}(0) \geq 0$ minden nemnegatív x-re és $f_{y,z,v}'(x) \geq 0$ minden pozitív x számra, ezért az 1.2. Tétel alapján $f_{y,z,v}(x) \geq 0$ minden nemnegatív x értékre.

1.2. Megoldás integrálszámítás alkalmazásával

Egy kifejezés nemnegativitásának igazolása úgy is történhet, hogy egy megfelelő intervallumon vett határozott integrálként írjuk fel és az integrandus nemnegativitását látjuk be (hiszen nemnegatív integrálható függvény Riemann-integrálja is nemnegatív). Ezt fogjuk alkalmazni a KöMaL feladat alábbi megoldásában, amelynek során az (1.1) egyenlőtlenséget 0-ra rendezzük, majd a kapott kifejezést határozott integrálként állítjuk elő, az integrandusról pedig a következő lemma segítségével látjuk be, hogy nemnegatív.

1.3. Lemma. *Ha a, b, c, d nemnegatív számok, amelyekre $a + c > 0$ és $b + d > 0$, továbbá $p \geq 1$ valós szám, akkor*

$$(a + b + c + d)^{p-2}(a + b)(c + d) \geq (a + c)^{p-2}ac + (b + d)^{p-2}bd. \tag{1.4}$$

Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $p = 1$ és $ad = bc$, valamint ha $p > 1$ és $a = b = 0$, vagy $c = d = 0$.

Bizonyítás. Lássuk először a $p = 1$ esetet! Ekkor a bizonyítandó egyenlőtlenség alakja

$$\frac{(a + b)(c + d)}{a + b + c + d} \geq \frac{ac}{a + c} + \frac{bd}{b + d}, \tag{1.5}$$

vagyis

$$\frac{(a + b)(c + d)}{(a + b + c + d)} - \frac{ac}{a + c} - \frac{bd}{b + d} \geq 0.$$

Ebből közös nevezőre hozás és kissé hosszadalmas algebrai átalakítások után (megfelelő odafigyeléssel) kapjuk, hogy

$$\frac{(ad - bc)^2}{(a + b + c + d)(a + c)(b + d)} \geq 0.$$

Mivel ekvivalens átalakítások során egy triviálisan igaz állításhoz jutottunk, így az (1.5) egyenlőtlenség is érvényes. Az is látható, hogy $p = 1$ esetén pontosan akkor áll fenn egyenlőség, ha $ad = bc$. A $p > 1$ eset bizonyításához írjuk át az (1.4) egyenlőtlenség jobb oldalát a következő alakba:

$$(a + c)^{p-2}ac + (b + d)^{p-2}bd = \frac{ac}{a + c}(a + c)^{p-1} + \frac{bd}{b + d}(b + d)^{p-1}.$$

Ha az alapot növeljük, akkor a $p - 1 > 0$ kitevőjű hatvány is nő, így

$$\frac{ac}{a + c}(a + c)^{p-1} + \frac{bd}{b + d}(b + d)^{p-1} \leq \left(\frac{ac}{a + c} + \frac{bd}{b + d}\right)(a + b + c + d)^{p-1}, \tag{1.6}$$

ahol az (1.5) egyenlőtlenség alapján

$$\left(\frac{ac}{a + c} + \frac{bd}{b + d}\right)(a + b + c + d)^{p-1} \leq \frac{(a + b)(c + d)}{a + b + c + d}(a + b + c + d)^{p-1}. \tag{1.7}$$

Mindezek alapján $p > 1$ esetén

$$(a+c)^{p-2}ac + (c+d)^{p-2}bd \le (a+b)(c+d)(a+b+c+d)^{p-2}.$$

Ez pedig éppen az (1.4) egyenlőtlenség. Egyenlőség csak akkor áll fenn, ha az (1.6) és az (1.7) egyenlőségekben egyenlőség teljesül, vagyis $ad = 0$ és $bc = 0$.

1.4. *Megjegyzés.* Az (1.5) egyenlőtlenséget szokás Milne-egyenlőtlenségnek is nevezni. Valójában úgy is írhatjuk, hogy $H(a+b, c+d) \ge H(a,c) + H(b,d)$, ahol H két pozitív szám harmonikus közepét jelöli.

□

Térjünk most rá a KöMaL feladat megoldására. A bizonyítandó egyenlőtlenség

$$(x+y)^p + (z+v)^p + (x+z)^p + (y+v)^p \le x^p + y^p + z^p + v^p + (x+y+z+v)^p\,,$$

azaz

$$\begin{aligned} K := {} & (x+y+z+v)^p + x^p + y^p + z^p + v^p \\ & - (x+y)^p - (x+z)^p - (z+v)^p - (y+v)^p \ge 0. \end{aligned}$$

Ha az $x = z = 0$ és $y = v = 0$ feltételek közül legalább az egyik teljesül, akkor nyilvánvalóan $K = 0$. Feltehető tehát, hogy $x + z > 0$ és $y + v > 0$. A Newton–Leibniz-tétel szerint

$$b^p - a^p = [x^p]_a^b = \int_a^b p x^{p-1} dx. \tag{1.8}$$

Ezt használjuk fel a K különbség határozott integrál alakba való átírásához. Tekintsük az $F(s) = (x+y+zs+vs)^p$ függvényt, amelyre

$$[F(s)]_{s=0}^1 = [(x+y+zs+vs)^p]_{s=0}^1 = (x+y+z+v)^p - (x+y)^p.$$

Ezzel megkaptuk a K kifejezés két tagját. Ehhez hasonlóan írhatjuk fel a többi tagot is. Az $(y+vs)^p$ segítségével $[(y+vs)^p]_{s=0}^1 = (y+v)^p - y^p$, $(x+zs)^p$ felhasználásával $[(x+zs)^p]_{s=0}^1 = (x+z)^p - x^p$. A $(z+v)^p$ tag éppen $[(zs+vs)^p]_{s=0}^1$, a z^p tag a $[(zs)^p]_{s=0}^1$, v^p tag pedig $[(vs)^p]_{s=0}^1$ értéke. A bizonyítandó egyenlőtlenség két oldalának különbsége tehát átírható a következő alakba:

$$K = [(x+y+zs+vs)^p - (x+zs)^p - (zs+vs)^p - (y+vs)^p + (zs)^p + (vs)^p]_{s=0}^1.$$

Most az x és y tagokat hasonlóan használva, mint z-t és v-t, még több tagot küszöbölhetünk ki. A $t \mapsto (xt+yt+zs+vs)^p$ függvény segítségével $[(xt+yt+zs+vs)^p]_{t=0}^1 = (x+y+zs+vs)^p - (zs+vs)^p$, míg az $(x+zs)^p - zs^p$ különbség éppen $[(xt+zs)^p]_{t=0}^1$, az $(y+vs)^p - vs^p$ pedig $[(yt+vs)^p]_{t=0}^1$ értékével egyenlő. Mindezeket összevonva

$$K = \left[[(xt+yt+zs+vs)^p - (xt+zs)^p - (yt+vs)^p]_{t=0}^1\right]_{s=0}^1.$$

Tovább alakítva az (1.8) összefüggés mintájára

$$K = \left[p \int_0^1 \left((x+y)\,(xt+yt+zs+vs)^{p-1} - x\,(xt+zs)^{p-1} - y\,(yt+vs)^{p-1} \right) dt \right]_{s=0}^{1} =$$

$$p(p-1) \int_0^1 \int_0^1 \left((x+y)(z+v)(xt+yt+zs+vs)^{p-2} - xz(xt+zs)^{p-2} - yv(yt+vs)^{p-2} \right) dtds.$$

Most a lemmát az $a = xt, b = yt, c = zs, d = vs$ számokra alkalmazva láthatjuk, hogy az integrandus (ts)-szerese mindenhol nemnegatív, így maga az integrandus is és az integrál is nemnegatív. Tehát $K \geq 0$, vagyis az (1.1) egyenlőtlenség igaz.

1.5. *Megjegyzés.* Vegyük észre, hogy ebben a megoldásban az (1.1) egyenlőtlenséget $p \geq 1$ esetén is igazoltuk. A bizonyításból és a Milne-egyenlőtlenségben az egyenlőség feltételéből könnyen látható, hogy egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $p = 1$ és x, y, z, v tetszőleges, vagy ha $p \geq 1$ tetszőleges és az x, y, v, z, x sorozatban van két egymás utáni 0 tag.

1.3. Megoldás a Jensen-egyenlőtlenséggel

A KöMaL feladat harmadik megoldásában a jól ismert Jensen-egyenlőtlenségre fogunk támaszkodni (lásd az [1] könyvet).

1.6. Tétel (Jensen-egyenlőtlenség)**.** *Az $f\colon I \to \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor konvex az I intervallumon, ha valahányszor $a_1, \ldots, a_n \in I$, továbbá $p_1, \ldots, p_n$ nemnegatív súlyok, amelyekre teljesül, hogy $p_1 + \ldots + p_n = 1$, akkor*

$$f(p_1 a_1 + \ldots + p_n a_n) \leq p_1 f(a_1) + \ldots + p_n f(a_n).$$

Ha f konkáv, akkor fordított irányú egyenlőtlenség áll fenn.

Az 1.1. Feladat megoldásában elsőként tekintsük az $x = y = z = v = 0$ esetet. Ezeket az értékeket behelyettesítve az (1.1) egyenlőtlenségbe, nyilvánvalóan egyenlőséget kapunk. Minden más esetben az egyenlet homogenitása miatt feltehetjük, hogy $x + y + z + v = 1$, hiszen $\lambda := x+y+z+v \neq 0$ esetén tekintsük az $\widetilde{x} := \frac{x}{\lambda}$, $\widetilde{y} := \frac{y}{\lambda}$, $\widetilde{z} := \frac{z}{\lambda}$, $\widetilde{v} := \frac{v}{\lambda}$ változókat, amelyekre már igaz, hogy $\widetilde{x}+\widetilde{y}+\widetilde{z}+\widetilde{v} = 1$ és az egyenlőtlenség alakja változatlan. Legyen $f(\omega) = \omega - \omega^p$, amely $p \geq 1$ esetén az $\omega \in [0,1]$ intervallumon nemnegatív, konkáv függvény, ugyanis

$$f''(\omega) = -p(p-1)\omega^{p-2} \geq 0.$$

Próbáljuk meg a feladatbeli egyenlőtlenséget az f függvény segítségével felírni. Először is az $x+y+z+v = 1$ feltevés miatt $(x+y+z+v)^p = x+y+z+v$, ezért elég azt igazolnunk, hogy

$$(x+y)^p + (z+v)^p + (x+z)^p + (y+v)^p \leq x^p + y^p + z^p + v^p + (x+y+z+v).$$

Rendezzük az egyenlőtlenséget az f függvény mintájára úgy, hogy a p-edik hatványon szereplő tagok negatív előjellel álljanak, míg az első hatványon szereplők pozitívval:

$$x + y + z + v - (x + y)^p - (z + v)^p - (x + z)^p - (y + v)^p \geq -x^p - y^p - z^p - v^p.$$

Mindkét oldalhoz $x + y + z + v$-t hozzáadva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}2(x + y + z + v) - (x + y)^p - (z + v)^p - (x + z)^p - (y + v)^p \geq \\ - x^p - y^p - z^p - v^p + x + y + z + v,\end{aligned}$$

ami kis átalakítás után a következő alakot ölti:

$$\begin{aligned}(x + y - (x + y)^p) + (z + v - (z + v)^p) + (x + z - (x + z)^p) + (y + v - (y + v)^p) \geq \\ (x - x^p) + (y - y^p) + (z - z^p) + (v - v^p).\end{aligned}$$

Ebben az alakban már az f függvényt több helyen is felismerhetjük, így a bizonyítandó egyenlőtlenség a következőképpen néz ki:

$$f(x + y) + f(z + v) + f(x + z) + f(y + v) \geq f(x) + f(y) + f(z) + f(v). \tag{1.9}$$

Ha $x + y = 0$, akkor $x = y = 0$ és $z + v = 1$, illetve ha $z + v = 0$, akkor $z = v = 0$ és $x + y = 1$, mindkét esetben az egyenlőtlenségbe való behelyettesítéssel azonnal látjuk, hogy egyenlőség áll fenn. Tegyük fel tehát, hogy $x + y \neq 0$ és $z + v \neq 0$. Vezessük be az $S := f(x) + f(y) + f(z) + f(v)$ jelölést, ekkor f definíciója alapján

$$S = x - x^p + y - y^p + z - z^p + v - v^p.$$

Az iménti egyenlőség jobb oldalát átalakítva

$$\begin{aligned}S &= x + y - (x + y)^p + (x + y)^p - x^p - y^p + z + v - (z + v)^p + (z + v)^p - z^p - v^p = \\ &= f(x + y) + f(z + v) + (x + y)^p\left(1 - \left(\frac{x}{x + y}\right)^p - \left(\frac{y}{x + y}\right)^p\right) + \\ &\quad + (z + v)^p\left(1 - \left(\frac{z}{z + v}\right)^p - \left(\frac{v}{z + v}\right)^p\right).\end{aligned}$$

Az 1-es tagokat szétbontva

$$\begin{aligned}S = f(x + y) + f(z + v) + (x + y)^p\left(\frac{x}{x + y} - \left(\frac{x}{x + y}\right)^p + \frac{y}{x + y} - \left(\frac{y}{x + y}\right)^p\right) + \\ + (z + v)^p\left(\frac{z}{z + v} - \left(\frac{z}{z + v}\right)^p + \frac{v}{z + v} - \left(\frac{v}{z + v}\right)^p\right),\end{aligned}$$

ahol a jobb oldal éppen

$$f(x+y)+f(z+v)+(x+y)^p\left(f\left(\frac{x}{x + y}\right)+f\left(\frac{y}{x + y}\right)\right)+(z+v)^p\left(f\left(\frac{z}{z + v}\right)+f\left(\frac{v}{z + v}\right)\right).$$

Mivel $x+y+z+v=1$, és x,y,z,v nemnegatívok, ezért $x+y<1$ és $z+v<1$, így $(x+y)^p<x+y$, illetve $(z+v)^p<z+v$. Ebből következően

$$(x+y)^p f\Big(\frac{x}{x+y}\Big)+(z+v)^p f\Big(\frac{z}{z+v}\Big)\le (x+y)f\Big(\frac{x}{x+y}\Big)+(z+v)f\Big(\frac{z}{z+v}\Big).$$

Alkalmazzuk az f függvényre a Jensen-egyenlőtlenséget a $p_1=x+y, p_2=z+v$ súlyokkal és $\frac{x}{x+y}, \frac{z}{z+v}\in[0,1]$ pontokkal, ekkor

$$(x+y)f\Big(\frac{x}{x+y}\Big)+(z+v)f\Big(\frac{z}{z+v}\Big)\le f\Big((x+y)\frac{x}{x+y}+(z+v)\frac{z}{z+v}\Big)=f(x+z).$$

Hasonlóan

$$(x+y)^p f\Big(\frac{y}{x+y}\Big)+(z+v)^p f\Big(\frac{v}{z+v}\Big)\le (x+y)f\Big(\frac{y}{x+y}\Big)+(z+v)f\Big(\frac{v}{z+v}\Big),$$

ahol a $p_1=x+y, p_2=z+v$ súlyokra és $\frac{y}{x+y}, \frac{v}{z+v}\in[0,1]$ pontokra alkalmazott Jensen-egyenlőtlenség alapján

$$(x+y)f\Big(\frac{y}{x+y}\Big)+(z+v)f\Big(\frac{v}{z+v}\Big)\le f\Big((x+y)\frac{y}{x+y}+(z+v)\frac{v}{z+v}\Big)=f(y+v).$$

A fentiek alapján láthatjuk, hogy

$$\begin{aligned}f(x)+f(y)+f(z)+f(v)&=(x+y)^p f\Big(\frac{x}{x+y}\Big)+(z+v)^p f\Big(\frac{z}{z+v}\Big)+\\&+(x+y)^p f\Big(\frac{y}{x+y}\Big)+(z+v)^p f\Big(\frac{v}{z+v}\Big)+\\&+f(x+y)+f(z+v)\le\\&\le f(x+y)+f(z+v)+f(x+z)+f(y+v).\end{aligned}$$

Ezzel beláttuk az (1.9) egyenlőtlenséget, amely az eredeti egyenlőtlenség ekvivalens alakja.

1.7. *Megjegyzés.* Ebben a megoldásban az (1.1) egyenlőtlenséget $p\ge 1$ esetén igazoltuk. Az előző feladatmegoldásban, az (1.5) egyenlőtlenség bizonyításánál szintén használható a Jensen-egyenlőtlenség az alábbi módon. Az

$$\frac{(a+b)(c+d)}{a+b+c+d}\ge\frac{ac}{a+c}+\frac{bd}{b+d}$$

egyenlőtlenség átírható

$$\frac{\frac{c+d}{a+b}}{1+\frac{c+d}{a+b}}\ge\frac{a}{a+b}\cdot\frac{\frac{c}{a}}{1+\frac{c}{a}}+\frac{b}{a+b}\cdot\frac{\frac{b}{d}}{1+\frac{b}{d}} \tag{1.10}$$

alakba. Legyen $f(x):=\frac{x}{1+x}=1-\frac{1}{1+x}$ $(x\ge 0)$, amely konkáv függvény. Ekkor a Jensen-egyenlőtlenséget alkalmazva az $x_1=\frac{c}{a}$ és $x_2=\frac{b}{d}$ pontokra $\frac{a}{a+b}$ és $\frac{b}{a+b}$ súlyokkal,

$$f\left(\frac{a}{a+b}\cdot\frac{c}{a}+\frac{b}{a+b}\cdot\frac{b}{d}\right)=f\left(\frac{c+d}{a+b}\right)\ge\frac{a}{a+b}\cdot f\Big(\frac{c}{a}\Big)+\frac{b}{a+b}\cdot f\left(\frac{b}{d}\right).$$

A függvényértékeket behelyettesítve éppen az (1.10) egyenlőtlenséget kapjuk, amely ekvivalens az (1.5) egyenlőtlenséggel.

2. fejezet

Diákolimpia 1984.

A következő feladat az 1984. évi Nemzetközi Matematikai Diákolimpián szerepelt.

2.1. Feladat. Legyenek x, y és z olyan nemnegatív számok, amelyekre $x + y + z = 1$ teljesül. Bizonyítsuk be, hogy

$$0 \leq xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}. \tag{2.1}$$

2.1. Megoldás ügyes helyettesítéssel

A (2.1) egyenlőtlenségláncolat bal oldalának belátásához elég némileg átrendezni az $xy + yz + zx - 2xyz$ kifejezést:

$$xy + yz + zx - 2xyz = xy(1 - z) + yz(1 - x) + zx.$$

Mivel x, y, z nemnegatívak és $x + y + z = 1$, ezért $1 - z$ és $1 - x$ is nemnegatív, így a fenti kifejezés is nemnegatív.

A jobb oldali egyenlőtlenség bizonyításához vezessük be a következő jelöléseket:

$$a := x - \frac{1}{3}, \quad b := y - \frac{1}{3}, \quad c := z - \frac{1}{3}.$$

Ekkor $x + y + z = 1$ miatt $a + b + c = 0$, továbbá $0 \leq x, y, z \leq 1$ alapján $-\frac{1}{3} \leq a, b, c, \leq \frac{2}{3}$. Az $xy + yz + zx - 2xyz$ kifejezés az a, b, c változókkal a következőképpen írhatók fel:

$$\begin{aligned} xy + yz + zx - 2xyz = ab + bc + ca + \frac{7}{27} - 2abc - 2\frac{ab + bc + ac}{3} = \\ = \frac{1}{3}(ab + bc + ca - 6abc) + \frac{7}{27}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Az $xy + yz + zx - 2xyz$ kifejezésben a, b, c szerepe szimmetrikus, ezért feltehetjük, hogy $a \leq b \leq c$. Az $a + b + c = 0$ feltétel miatt nem lehet mindhárom változó egyszerre negatív, vagy egyszerre pozitív, így két eset fordulhat elő:

1. $a \leq b \leq 0 \leq c$,

2. $-\frac{1}{3} \leq a \leq 0 \leq b \leq c$.

A (2.2) egyenlőség jobb oldalán a $b + c = -a$ behelyettesítést végrehajtva az $ab + ac$ tagokban,

$$xy + yz + xz - 2xyz = \frac{1}{3}(bc - a^2 - 6abc) + \frac{7}{27}.$$

Ahhoz, hogy a (2.1) egyenlőtlenség teljesüljön, azt kell megmutatnunk, hogy

$$bc - a^2 - 6abc \leq 0. \tag{2.3}$$

Az első esetben minden tényező nempozitív, így a (2.3) egyenlőtlenség teljesül. A második esetben

$$bc - a^2 - 6abc = bc - (b + c)^2 - 6abc = -b^2 - bc - c^2 - 6abc = -(b - c)^2 - 3bc(1 + 2a).$$

Itt $-(b-c)^2 \leq 0$, továbbá $-\frac{1}{3} \leq a$, miatt $-1 < 2a$, vagyis $0 < (1+2a)$, tehát $-3bc(1+2a)$ szintén nempozitív, vagyis a (2.3) egyenlőtlenség ismét teljesül. Ezáltal a (2.1) egyenlőtlenséget beláttuk.

2.2. Megoldás számtani és mértani közepekkel

Vegyük észre, hogy a (2.1) egyenlőtlenségben szereplő kifejezés az x, y, z változók bizonyos elemi szimmetrikus polinomjait tartalmazza, amelyek a Viète-formulákban is felbukkannak. Tekintsük ezért az

$$f(t) := (t - x)(t - y)(t - z) = t^3 - t^2(x + y + z) + t(xy + yz + zx) - xyz$$

harmadfokú függvényt. Mivel $x + y + z = 1$, így

$$f(t) = t^3 - t^2 + t(xy + yz + zx) - xyz.$$

A $t = \frac{1}{2}$ helyen

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2}(xy + yz + zx) - xyz,$$

amit átrendezve és 2-vel szorozva kapjuk, hogy

$$2f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} = (xy + yz + zx) - 2xyz.$$

Ebből következően a (2.1) egyenlőtlenség azt jelenti, hogy

$$0 \leq 2f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} \leq \frac{7}{27},$$

azaz

$$-\frac{1}{8} \leq f\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{216}. \tag{2.4}$$

Az x, y, z változók sorrendje felcserélhető, ezért feltehetjük, hogy $0 \leq z \leq y \leq x$. Mivel $x + y + z = 1$, ezért két eset lehetséges: $x \geq \frac{1}{2}$ és $y, z \leq \frac{1}{2}$, valamint $x \leq \frac{1}{2}$.

1. eset. Legyen $x \geq \frac{1}{2}$ és $y, z \leq \frac{1}{2}$. Ekkor

$$-f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - y\right)\left(\frac{1}{2} - z\right),$$

ahol mindhárom tényező nemnegatív. A számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget felhasználva az

$$x - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - y, \frac{1}{2} - z$$

számhármasra kapjuk, hogy

$$-f\left(\frac{1}{2}\right) \leq \left(\frac{x - y - z + \frac{1}{2}}{3}\right)^3,$$

ami $x = 1 - y - z$ miatt úgy írható fel, hogy

$$-f\left(\frac{1}{2}\right) \leq \left(\frac{2x - \frac{1}{2}}{3}\right)^3.$$

Mivel $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$, ezért

$$\left(\frac{2x - \frac{1}{2}}{3}\right)^3 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^3,$$

vagyis

$$-f\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{8},$$

tehát a (2.4) egyenlőtlenség bal oldalát ezzel beláttuk.

2. eset. Tegyük fel most, hogy x, y és z mindegyike legfeljebb $\frac{1}{2}$. Ekkor

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} - x\right)\left(\frac{1}{2} - y\right)\left(\frac{1}{2} - z\right),$$

ahol mindegyik tényező nemnegatív kifejezés. A számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget felhasználva az

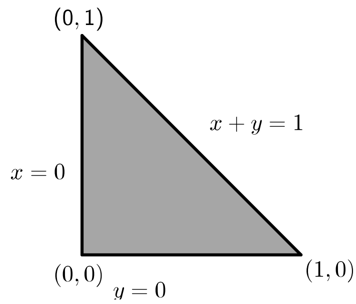
$$\frac{1}{2} - x, \frac{1}{2} - y, \frac{1}{2} - z$$

számhármasra:

$$\left(\frac{\frac{1}{2} - x + \frac{1}{2} - y + \frac{1}{2} - z}{3}\right)^3 = \left(\frac{\frac{3}{2} - (x + y + z)}{3}\right)^3 = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}.$$

Ezzel bebizonyítottuk a (2.4) egyenlőtlenség jobb oldalát is.

A (2.4) egyenlőtlenség tehát igaz, ezáltal a (2.1) egyenlőtlenség is teljesül az adott feltételek mellett.



2.1. ábra.

2.3. Megoldás többváltozós szélsőérték-kereséssel

A most következő megoldásban többváltozós függvényként kezeljük a (2.1) egyenlőtlenségben szereplő kifejezést és megkeressük a szélsőértékeit. Bár ez a megoldás nem túl elegáns, azonban célravezető, és segítséget nyújthat a tanároknak az egyenlőség feltételeinek meghatározásában, hogy aztán egy szebb megoldást találjanak.

Mivel $x + y + z = 1$, ezért z-t kifejezve az x, y változókkal a (2.1) egyenlőtlenségben szereplő kifejezés így írható:

$$xy + y(1 - x - y) + x(1 - x - y) - 2xy(1 - x - y).$$

Vezessük be az $f(x, y) = xy + y(1 - x - y) + x(1 - x - y) - 2xy(1 - x - y)$ (nyilvánvalóan folytonos) függvényt. Ekkor a (2.1) egyenlőtlenség azt jelenti, hogy a $0 \leq x + y \leq 1$, és $x, y \geq 0$ feltételek mellett $0 \leq f(x, y) \leq \frac{7}{27}$. Határozzuk meg az f folytonos függvény szélsőértékeit a $0 \leq x + y \leq 1, x, y \geq 0$ halmazon, amely egy zárt háromszöglap. Weierstrass tétele alapján tudjuk, hogy a maximum és a minimum létezik, ezért elég megtalálnunk a háromszög belsejében a lehetséges lokális szélsőértékeket, továbbá a határon a szélsőértékeket. A háromszöglap határa három szakaszból áll:

1. $x = 0, 0 \leq y \leq 1$;

2. $y = 0, 0 \leq x \leq 1$;

3. $x + y = 1, 0 \leq x, y \leq 1$.

Keressük meg tehát a három oldalszakaszon a szélsőértékeket, majd a háromszög belsejében a lehetséges lokális szélsőértékeket.

1. eset. Ha $x = 0$ és $0 \leq y \leq 1$, akkor $f(0, y) = -\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$, amelynek a $0 \leq y \leq 1$ intervallumon maximuma $\frac{1}{4}$ az $y = \frac{1}{2}$ helyen, minimuma pedig 0, az $y = 0$ és $y = 1$ helyeken.

2. eset. Ha $y = 0$ és $0 \leq x \leq 1$, akkor $f(x, 0) = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$, amelynek a $0 \leq x \leq 1$ intervallumon a maximuma $\frac{1}{4}$ az $x = \frac{1}{2}$ helyen, minimuma pedig 0, az $x = 0$ és $x = 1$ helyeken.

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0	1	0
y	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0	0	1
$f(x,y)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{27}$	0	0	0

2.1. táblázat.

3. eset. Amikor $x+y=1$ és $0 \leq x, y \leq 1$, akkor $y = 1-x$, így

$$f(x,y) = xy + y\,(1-(x+y)) + x\,(1-(x+y)) - 2xy\,(1-(x+y)) = x(1-x).$$

Ez pedig azt jelenti, hogy $f(x, 1-x) = -\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$, amelynek a $0 \leq x \leq 1$ intervallumon a maximuma $\frac{1}{4}$ az $x = \frac{1}{2}$ helyen, minimuma pedig 0, az $x=0$ és $y=1$ helyeken.

4. eset. Itt $x+y<1$ és $0 \leq x, y < 1$, ekkor az $f(x,y)$ függvény parciális deriváltjai

$$D_x f(x,y) = 1 - 2x - 3y + 4xy + 2y^2 = (1-2x-y)(1-2y),$$

$$D_y f(x,y) = 1 - 2y - 3x + 4xy + 2x^2 = (1-2y-x)(1-2x).$$

Lokális szélsőérték ott lehet, ahol mindkét parciális derivált eltűnik. A $D_x f(x,y)$ derivált-függvény akkor 0, ha $(1-2x-y)=0$, vagyis $y = 1-2x$, vagy ha $(1-2y)=0$, azaz $y=\frac{1}{2}$. Hasonlóan kapjuk a $D_y f(x,y) = 0$ egyenletből, hogy $(1-2y-x) = 0$, vagyis $x = 1-2y$, vagy $(1-2x) = 0$, azaz $x = \frac{1}{2}$. Az x, y változókra kapott két-két értéket négyféleképp párosíthatjuk, így négy alesetet kapunk.

1. Ha $x = 1-2y$ és $y = 1-2x$, akkor $y = 1-2(1-2y) = -1+4y$, vagyis $y = \frac{1}{3}$. Ekkor $x = \frac{1}{3}$ és a lehetséges lokális szélsőérték $f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{7}{27}$.

2. Abban az esetben, mikor $x = 1-2y$ és $y = \frac{1}{2}$, ezt behelyettesítve $x = 0$, tehát a lehetséges lokális szélsőérték $f\left(0, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

3. Ha $x = \frac{1}{2}$ és $y = 1-2x = 0$, akkor a lehetséges lokális szélsőérték $f\left(\frac{1}{2}, 0\right) = \frac{1}{4}$.

4. Végül, mikor $x = \frac{1}{2}$ és $y = \frac{1}{2}$, $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

Láthatjuk, hogy az utolsó három pont a háromszöglap határaira esik, a belsejében csak egy lehetséges lokális szélsőérték van, az $(x,y) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ pontban. Így tehát hét különböző (x,y) pár marad, három különböző függvényértékkel. A lehetséges szélsőértékeket és helyüket a 2.1. táblázat foglalja össze, ahonnan világosan látható, hogy az f függvény maximuma a háromszöglapon $\frac{7}{27}$, minimuma pedig 0, tehát a (2.1) egyenlőtlenség valóban érvényes. (A táblázat alapján pedig az is nyilvánvalóvá válik, honnan származott az első megoldásban szereplő ügyes helyettesítés ötlete.)

3. fejezet

Diákolimpia 1995.

Az 1995. évi Nemzetközi Matematikai Diákolimpia 2. feladata volt az alábbi.

3.1. Feladat. Legyenek a, b, c olyan pozitív valós számok, amelyekre $abc = 1$ teljesül. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}. \tag{3.1}$$

3.1. Megoldás a Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenséggel

Az első megoldásban a következő jól ismert és versenyfeladatokban gyakran alkalmazható egyenlőtlenséget fogjuk használni (lásd az [1] könyvet).

3.2. Tétel (Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség)**.** *Tetszőleges $x_1, \ldots, x_n$ és $y_1, \ldots, y_n$ valós számokra*

$$|x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n| \leq \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + \ldots + y_n^2}.$$

Bizonyítás. Tetszőleges $i, j = 1, \ldots, n$-re az

$$X_{i,j} = x_i^2 y_j^2 + x_j^2 y_i^2 - 2x_i x_j y_i y_j$$

kifejezés értéke nemnegatív, mert $X_{i,j} = (x_i y_j - x_j y_i)^2$. Ha az $X_{i,j}$ kifejezéseket összeadjuk minden $1 \leq i < j \leq n$-re, akkor éppen az

$$\left(x_1^2 + \ldots + x_n^2\right) \cdot \left(y_1^2 + \ldots + y_n^2\right) - (x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n)^2$$

különbséget kapjuk, amely tehát szintén nemnegatív. □

Jelölje S a (3.1) egyenlőtlenség bal oldalán szereplő összeget:

$$S := \frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)}.$$

A megoldás során a Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenséget fogjuk alkalmazni a következő számhármasokra:

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(\sqrt{\frac{1}{a^3(b+c)}}, \sqrt{\frac{1}{b^3(c+a)}}, \sqrt{\frac{1}{c^3(a+b)}}\right),$$
$$(y_1, y_2, y_3) = \left(\sqrt{\frac{b+c}{bc}}, \sqrt{\frac{c+a}{ca}}, \sqrt{\frac{a+b}{ab}}\right).$$

Ekkor

$$\begin{aligned}(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)^2 &= \left(\sqrt{\frac{b+c}{a^3(b+c)bc}} + \sqrt{\frac{c+a}{b^3(c+a)ca}} + \sqrt{\frac{a+b}{c^3(a+b)ab}}\right)^2 = \\ &= \left(\sqrt{\frac{1}{a^2abc}} + \sqrt{\frac{1}{b^2abc}} + \sqrt{\frac{1}{c^2abc}}\right)^2.\end{aligned}$$

A feladat feltevése szerint a, b, c nemnegatív számok, amelyekre $abc = 1$ teljesül, ezért

$$\begin{aligned}(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)^2 &= \left(\sqrt{\frac{1}{a^2}} + \sqrt{\frac{1}{b^2}} + \sqrt{\frac{1}{c^2}}\right)^2 = \\ &= \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2.\end{aligned}$$

Hasonlóan látható, hogy

$$\begin{aligned}&(x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3) = \\ &\quad = \left(\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)}\right)\left(\frac{b+c}{bc} + \frac{c+a}{ca} + \frac{a+b}{ab}\right) = \\ &\quad = S \cdot 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).\end{aligned}$$

Mindez azt jelenti, hogy az (x_1, x_2, x_3) és az (y_1, y_2, y_3) számhármasokra felírt Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség a következő alakot ölti:

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 \leq 2S\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right),$$

ami rendezés után:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \leq S. \tag{3.2}$$

Az $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ számhármasra alkalmazva a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget kapjuk, hogy

$$\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{1}{a}\frac{1}{b}\frac{1}{c}} = \sqrt[3]{\frac{1}{abc}} = 1.$$

Ezt a (3.2) egyenlőtlenséggel összevetve rögtön adódik

$$S \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = \frac{3}{2}\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}{3} \geq \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{abc}} = \frac{3}{2},$$

ami éppen az olimpiai feladatbeli egyenlőtlenség.

Ismert, hogy a számtani és mértani közepek között akkor és csak akkor áll fenn egyenlőség, ha a számok egyenlőek, így a feladatban $S = \frac{3}{2}$ csak akkor teljesülhet, ha $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$, vagyis ha $a = b = c$. Könnyen látható, hogy ekkor valóban egyenlőség áll fenn.

3.2. Megoldás súlyozott közepek egyenlőtlenségével

Ebben a megoldásban súlyozott közepek közötti egyenlőtlenségeket fogunk használni.

3.3. Tétel (Súlyozott közepek közti egyenlőtlenségek)**.** *Legyenek $x_1, \ldots, x_n$ pozitív számok rendre $w_1, \ldots, w_n$ pozitív súlyokkal ellátva. Vezesük be a $p_i = \frac{w_i}{w_1+\ldots+w_n}$ $(i = 1, \ldots, n)$ jelöléseket. Ekkor az $x_1, \ldots, x_n$ számok súlyozott számtani közepe*

$$A_s := \frac{w_1x_1 + \ldots + w_nx_n}{w_1 + \ldots + w_n} = p_1x_1 + \ldots + p_nx_n,$$

a súlyozott mértani közepük

$$G_s := (x_1^{w_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{w_n})^{\frac{1}{w_1+\ldots+w_n}} = x_1^{p_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{p_n},$$

míg a súlyozott harmonikus közepük

$$H_s := \frac{w_1 + \ldots + w_n}{\frac{w_1}{x_1} + \ldots + \frac{w_n}{x_n}} = \frac{1}{A_s\left(\frac{1}{x_1}, \ldots, \frac{1}{x_n}\right)}.$$

Ekkor a súlyozott számtani, mértani és harmonikus közép között érvényes az $A_s \geq G_s \geq H_s$ egyenlőtlenség.

Bizonyítás. A bizonyítás során először belátjuk a számtani és mértani közepek közötti, majd a mértani és harmonikus közepek közötti egyenlőtlenséget, így jutunk el a számtani és harmonikus közepek egyenlőtlenségéhez, amelyet a feladatmegoldás további részében alkalmazni fogunk. Be kell látnunk tehát, hogy

$$p_1x_1 + \ldots p_nx_n \geq x_1^{p_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{p_n}.$$

Az egyenlőtlenség mindkét oldalának tízes (vagy bármely 1-nél nagyobb) alapú logaritmusát véve, a logaritmus függvény monoton növekedése alapján elég igazolnunk, hogy

$$\lg(p_1x_1 + \ldots p_nx_n) \geq p_1 \lg x_1 + \ldots + p_n \lg x_n. \tag{3.3}$$

Mivel a logaritmus függvény konkáv, az $x_1, \ldots, x_n$ pontokra, $p_1, \ldots, p_n$ súlyokkal alkalmazva a Jensen-egyenlőtlenséget, éppen a (3.3) egyenlőtlenséget kapjuk. Az $A_s \geq G_s$ egyenlőtlenség felhasználásával

$$H_s(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{A_s\left(\frac{1}{x_1}, \ldots, \frac{1}{x_n}\right)} \leq \frac{1}{G_s\left(\frac{1}{x_1}, \ldots, \frac{1}{x_n}\right)} = G_s(x_1, \ldots, x_n),$$

ebből pedig egyértelműen következik, hogy $H_s(x_1, \ldots, x_n) \leq A_s(x_1, \ldots, x_n)$. □

A 3.1. feladatmegoldására rátérve vezessük be a következő jelöléseket: $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$, $z = \frac{1}{c}$, ahol a, b, c pozitív, valós számok, így x, y, z is mind pozitív valós, és ezekre is nyilvánvalóan teljesül, hogy $xyz = 1$. Írjuk fel x, y, z segítségével a (3.1) egyenlőtlenség bal oldalán szereplő tagokat:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} = \frac{1}{a^3}\frac{1}{b+c} = x^3\frac{1}{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} = x^3\frac{1}{xz+xy} = x^3\frac{1}{x^2}\frac{1}{y+z} = \frac{x^2}{y+z},$$

és hasonlóan $\frac{1}{b^3(c+a)} = \frac{y^2}{z+x}$, $\frac{1}{c^3(a+b)} = \frac{z^2}{x+y}$. A (3.1) egyenlőtlenség bal oldala tehát így írható:

$$S = \frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}.$$

A súlyozott számtani és harmonikus közepek közötti egyenlőtlenséget alkalmazva az $\frac{x}{y+z}$, $\frac{y}{z+x}$, $\frac{z}{x+y}$ számokra, rendre az x, y, és z súlyokkal azt kapjuk, hogy

$$\frac{x\frac{x}{y+z} + y\frac{y}{z+x} + z\frac{z}{x+y}}{x+y+z} \geq \frac{x+y+z}{x\frac{y+z}{x} + y\frac{z+x}{y} + z\frac{x+y}{z}},$$

amiből egyszerűsítés után rögtön adódik

$$S \geq \frac{x+y+z}{2}.$$

Alkalmazzuk most a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget az x, y, z számokra, amelyekre $xyz = 1$ is fennáll, így

$$S \geq \frac{3}{2}\frac{x+y+z}{3} \geq \frac{3}{2}\sqrt{xyz} = \frac{3}{2},$$

ami éppen a (3.1) egyenlőtlenség. A számtani és mértani közép között pontosan akkor áll fenn egyenlőség, ha $x = y = z$, ezért az $S = \frac{3}{2}$ csak ekkor teljesülhet, és valóban teljesül is.

3.3. Megoldás a Csebisev-egyenlőtlenséggel

Ebben a megoldásban az olimpiai feladatbeli egyenlőtlenségnek a következő általánosítását látjuk be:

$$\frac{1}{a^\beta(b+c)} + \frac{1}{b^\beta(c+a)} + \frac{1}{c^\beta(a+b)} \geq \frac{3}{2}, \tag{3.4}$$

ahol a, b, c pozitív valós számok, $abc = 1$ és $\beta \geq 2$. A bizonyítás során a Csebisev-egyenlőtlenséget is használjuk majd, amely a tananyagban általában nem szerepel, így a megoldás első részében ezt igazoljuk. A Csebisev-egyenlőtlenség bizonyításához szükségünk van véges sorozatok rendezettségének fogalmára és a rendezési egyenlőtlenségre is, ezért első lépésben ezekkel foglalkozunk (lásd a [2] könyvet).

3.4. Definíció. Legyen $a_1, \dots, a_n$ és $b_1, \dots, b_n$ két, valós számokból álló véges sorozat. A két sorozat azonosan rendezett, ha minden i-re és j-re $a_i \leq a_j$-ből következik, hogy $b_i \leq b_j$; ellentétesen rendezettek, ha minden i-re és j-re $a_i \leq a_j$-ből következik, hogy $b_i \geq b_j$.

3.5. Tétel (Rendezési tétel)**.** *Legyen $a_1, a_2, \dots, a_n$ és $b_1, b_2, \dots, b_n$ két, valós számokból álló sorozat, továbbá $p_1, p_2, \dots, p_n$ a $b_1, b_2, \dots, b_n$ sorozat egy permutációja. Ekkor, ha az $a_1, \dots, a_n$ és a $p_1, \dots, p_n$ sorozatok azonosan rendezettek, akkor az*

$$a_1 p_1 + a_2 p_2 + \ldots + a_n p_n \tag{3.5}$$

kifejezés értéke maximális, illetve ha ellentétesen rendezettek, akkor minimális.

Bizonyítás. Maximális és minimális érték is biztosan van, hiszen a (3.5) kifejezés csak véges sok, legfeljebb $n!$ különböző értéket vehet fel. Belátjuk, hogy a kifejezés értéke maximális, ha a két sorozat azonosan rendezett. A minimum esete hasonlóan igazolható. Először is tegyük fel, hogy $a_1, \dots, a_n$ monoton növekedő módon rendezett, ha nem így lenne, akkor az indexek megfelelő átdefiniálásával elérhetjük ezt. Legyen az $a_1, a_2, \dots, a_n$ és $p_1, p_2, \dots, p_n$ sorozat nem azonosan rendezett. Ekkor van olyan i, j indexpár, amelyre $a_i \leq a_j$ és $p_i > p_j$. Nevezzük az egyszerűség kedvéért az ilyen (p_i, p_j) párokat „rossz” pároknak. Mivel a két sorozat nem azonosan rendezett, így biztosan van „rossz” pár, sőt olyan is, amelyre $j = i+1$, hiszen ha bármely (p_i, p_{i+1}) jó pár, akkor a két sorozat azonosan rendezett lenne. Legyen

$$L := a_1 p_1 + a_2 p_2 + \ldots + a_i p_i + a_{i+1} p_{i+1} + \ldots + a_n p_n,$$

továbbá L' az az összeg, amelyben felcseréljük a p_i és p_{i+1} tagokat:

$$L' := a_1 p_1 + a_2 p_2 + \ldots + a_i p_{i+1} + a_{i+1} p_i + \ldots + a_n p_n.$$

A „rossz” pár sorrendjének felcserélése után $L' \geq L$, hiszen

$$L' - L = a_i p_{i+1} + a_{i+1} p_i - a_i p_i - a_{i+1} p_{i+1} = (a_i - a_{i+1})(p_{i+1} - p_i) \geq 0.$$

Ez azt jelenti, hogy a p_i, p_{i+1} tagok felcserélésével a (3.5) összeget nem csökkentettük. Az is könnyen látható, hogy a felcseréléssel csökkentettük az olyan indexpárok számát, amelyekre $a_i \leq a_j$ és $p_i > p_j$, azaz csökkent a „rossz” párok száma. Ehhez elég látnunk, hogy a felcserélésekkel nem képezünk újabb „rossz” párokat, azaz ha volt olyan „jó” pár, amelyben a felcserélt tagok valamelyike is szerepelt, az továbbra is „jó” pár maradt. Ez könnyen látható, hiszen a $p_1, \dots, p_k \dots, p_i, p_{i+1}, \dots, p_l \dots, p_n$ sorozatban a p_i, p_{i+1} tagok felcserélése után p_k továbbra is p_i és p_{i+1} előtt szerepel, míg p_l ezek után. A „rossz” párok tagjainak felcserélésével tehát véges sok lépésben eljutunk az azonos rendezésig, eközben a (3.5) összeget nem csökkentjük, tehát az azonos rendezés esetén a (3.5) összeg legalább akkora, mint bármely más esetben. □

3.6. Tétel (Csebisev-egyenlőtlenség). *Ha $a_1, a_2, \ldots, a_n$ és $b_1, b_2, \ldots, b_n$ a valós számoknak két egyformán rendezett véges sorozata, akkor*

$$\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n}{n} \geq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n}. \tag{3.6}$$

Ha a sorozatok rendezettsége ellentétes, az egyenlőtlenség fordított irányú.

Bizonyítás. Ha az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ és a $b_1, b_2, \ldots, b_n$ valós számok két egyformán rendezett véges sorozata, akkor a rendezési tétel miatt

$$\begin{aligned}
a_1b_1 + \ldots + a_nb_n &= a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_{n-1}b_{n-1} + a_nb_n,\\
a_1b_1 + \ldots + a_nb_n &\geq a_1b_2 + a_2b_3 + \ldots + a_{n-1}b_n + a_nb_1,\\
a_1b_1 + \ldots + a_nb_n &\geq a_1b_3 + a_2b_4 + \ldots + a_{n-1}b_1 + a_nb_2,\\
\vdots \qquad\quad \vdots \quad &\quad \vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots\\
a_1b_1 + \ldots + a_nb_n &\geq a_1b_n + a_2b_1 + \ldots + a_{n-1}b_{n-2} + a_nb_{n-1}.
\end{aligned}$$

Az iménti egyenlőtlenségek összegét véve kapjuk, hogy

$$n(a_1b_1 + \ldots + a_nb_n) \geq (a_1 + \ldots + a_n)(b_1 + \ldots + b_n),$$

amit n^2-tel végigosztva adódik

$$\frac{a_1b_1 + \ldots + a_nb_n}{n} \geq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + \ldots + b_n}{n}.$$

Ha a sorozatok ellentétesen rendezettek, az egyenlőtlenség iránya mindenütt fordított, tehát

$$\frac{a_1b_1 + \ldots + a_nb_n}{n} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + \ldots + b_n}{n}.$$

□

Ezek után térjünk rá a (3.4) egyenlőtlenség igazolására. Vezessük be az $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$, $z = \frac{1}{c}$ jelöléseket, ahol x, y, z is mind pozitív valós és teljesül, hogy $xyz = 1$. A (3.4) egyenlőtlenség az x, y, z változókra nézve a következő alakot ölti:

$$\frac{x^{\beta-1}}{y+z} + \frac{y^{\beta-1}}{z+x} + \frac{z^{\beta-1}}{x+y} \geq \frac{3}{2}.$$

Az egyszerűség kedvéért legyen $\alpha := \beta - 1$, ezáltal $\alpha \geq 1$, és ekkor a bizonyítandó állítás

$$S_\alpha = \frac{x^\alpha}{y+z} + \frac{y^\alpha}{z+x} + \frac{z^\alpha}{x+y} \geq \frac{3}{2}. \tag{3.7}$$

Először $\alpha = 1$-re igazoljuk az egyenlőtlenséget, majd ezt felhasználva tetszőleges $\alpha \geq 1$ esetén.

1. lépés. Legyen

$$S_1 = \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y},$$

ekkor $3 - 3 = 0$-val bővítve

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} + \underbrace{\frac{y+z}{y+z} + \frac{z+x}{z+x} + \frac{x+y}{x+y}}_{3} - 3 = \\ &= \frac{x+y+z}{y+z} + \frac{x+y+z}{z+x} + \frac{x+y+z}{x+y} - 3 \\ &= (x+y+z)\Big(\frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} + \frac{1}{x+y}\Big) - 3. \end{aligned}$$

A számtani és harmonikus közepek közötti egyenlőtlenséget alkalmazva az $\frac{1}{y+z}$, $\frac{1}{z+x}$ és $\frac{1}{x+y}$ számokra adódik, hogy

$$\frac{\frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} + \frac{1}{x+y}}{3} \geq \frac{3}{y+z+z+x+x+y}.$$

Ezt az egyenlőtlenséget felhasználva

$$S_1 \geq (x+y+z) \cdot 3\frac{3}{2(x+y+z)} - 3 = \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}.$$

Ezzel a (3.7) egyenlőtlenséget beláttuk $\alpha = 1$ esetén. A fent alkalmazott számtani és harmonikus közepek közti egyenlőtlenségben egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $\frac{1}{y+z} = \frac{1}{z+x} = \frac{1}{x+y}$, azaz $x = y = z$, vagyis $a = b = c$.

2. lépés. Mivel pozitív valós számokkal dolgozunk és a (3.7) egyenlőtlenség bal oldala szimmetrikus x, y, z-ben, ezért feltehetjük, hogy $x \geq y \geq z$. Ebből következik, hogy $x^{\alpha-1} \geq y^{\alpha-1} \geq z^{\alpha-1}$ is teljesül, ahol $\alpha \geq 1$ tetszőleges, továbbá

$$\frac{x}{y+z} \geq \frac{y}{z+x} \geq \frac{z}{x+y}.$$

Valóban, mivel $x \geq y$, ezért $z + x \geq y + z$ és $\frac{1}{x+z} \leq \frac{1}{y+z}$, tehát $\frac{y}{z+x} \leq \frac{x}{y+z}$. Hasonlóan látható az $\frac{y}{z+x} \geq \frac{z}{x+y}$ egyenlőtlenség is. A Csebisev-egyenlőtlenséget az

$$x^{\alpha-1}, y^{\alpha-1}, z^{\alpha-1} \quad \text{és} \quad \frac{x}{y+z}, \frac{y}{z+x}, \frac{z}{x+y}$$

azonosan rendezett számhármasokra alkalmazva kapjuk, hogy

$$\frac{x^{\alpha-1}\frac{x}{y+z} + y^{\alpha-1}\frac{y}{z+x} + z^{\alpha-1}\frac{z}{x+y}}{3} \geq \frac{x^{\alpha-1} + y^{\alpha-1} + z^{\alpha-1}}{3} \cdot \frac{\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y}}{3}.$$

Ebből egyszerűsítés után

$$S_\alpha \geq S_1 \frac{x^{\alpha-1} + y^{\alpha-1} + z^{\alpha-1}}{3}$$

adódik. Láttuk, hogy $S_1 \geq \frac{3}{2}$, ezért

$$S_\alpha \geq \frac{3}{2}\frac{x^{\alpha-1} + y^{\alpha-1} + z^{\alpha-1}}{3}. \tag{3.8}$$

A számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenséget alkalmazva az $x^{\alpha-1}$, $y^{\alpha-1}$, $z^{\alpha-1}$ számhármasra

$$\frac{x^{\alpha-1}+y^{\alpha-1}+z^{\alpha-1}}{3} \geq \sqrt[3]{x^{\alpha-1}y^{\alpha-1}z^{\alpha-1}} = \sqrt[3]{(xyz)^{\alpha-1}} = 1,$$

ahol felhasználtuk, hogy $xyz = 1$. Ennek alapján a (3.8) egyenlőtlenséget tovább egyszerűsítve $S_\alpha \geq \frac{3}{2}$ adódik és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $x = y = z$, mivel a számtani és mértani közepek csak ebben az esetben egyenlőek. Ez tehát azt jelenti, hogy

$$\frac{1}{a^\beta(b+c)} + \frac{1}{b^\beta(c+a)} + \frac{1}{c^\beta(a+b)} \geq \frac{3}{2},$$

és egyenlőség akkor áll fenn, ha $a = b = c$.

3.7. *Megjegyzés.* A (3.7) egyenlőtlenséget $\alpha = 1$ esetén szokás Nesbitt-egyenlőtlenségnek nevezni, melyet a rendezési tétel segítségével is könnyen beláthatunk. A szimmetria miatt feltehető, hogy $x \geq y \geq z$, ekkor $\frac{1}{y+z} \geq \frac{1}{z+x} \geq \frac{1}{x+y}$. A rendezési tétel alapján

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x} + \frac{x}{x+y},$$

valamint

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{z}{y+z} + \frac{x}{z+x} + \frac{y}{x+y}.$$

A két egyenlőtlenség összegeként kapjuk, hogy

$$2S_1 \geq \frac{y}{y+z} + \frac{z}{y+z} + \frac{z}{z+x} + \frac{x}{z+x} + \frac{x}{x+y} + \frac{y}{x+y} = 3.$$

A korábbiakban a rendezési egyenlőtlenséget a Csebisev-egyenlőtlenség bizonyítása miatt tárgyaltuk, de valójában ez utóbbi egyenlőtlenségre egy egyszerűbb bizonyítás is adható. Ahhoz, hogy belássuk a (3.6) egyenlőtlenséget, rendezzük 0-ra:

$$0 \leq \frac{a_1b_1 + \ldots + a_nb_n}{n} - \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + \ldots + b_n}{n}.$$

Ebből n^2-el való szorzás után kapjuk, hogy

$$0 \leq n(a_1b_1 + \ldots + a_nb_n) - (a_1 + \ldots + a_n)(b_1 + \ldots + b_n). \tag{3.9}$$

Az egyenlőtlenség jobb oldalát átírhatjuk úgy, hogy

$$na_1b_1 - a_1(b_1 + \ldots + b_n) + na_2b_2 - a_2(b_1 + \ldots + b_n) + \ldots + na_nb_n - a_n(b_1 + \ldots + b_n),$$

amely az a_i $(i = 1, \ldots, n)$ tényezők kiemelése után a következő alakot ölti:

$$a_1(b_1-b_1+b_1-b_2+\ldots+b_1-b_n)+\ldots+a_n(b_n-b_1+b_n-b_2+\ldots+b_n-b_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{n}(b_i-b_j).$$

A szummában az indexeket felcserélve ugyanazt az összeget kapjuk, vagyis

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{n} (b_i - b_j) = \sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{i=1}^{n} (b_j - b_i).$$

Mindezek alapján a (3.9) egyenlőtlenség jobb oldala

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{n} (b_i - b_j) + \sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{i=1}^{n} (b_j - b_i)\right),$$

ami

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{n} (b_i - b_j) - \sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{i=1}^{n} (b_i - b_j)\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i,j=1}^{n} (a_i - a_j)(b_i - b_j)\right).$$

Mivel $a_1, \dots, a_n$ és $b_1, \dots, b_n$ azonosan rendezettek, ezért $a_i - a_j$ és $b_i - b_j$ azonos előjelűek minden $i, j = 1, \dots, n$-re, tehát a páronkénti szorzataik összege nemnegatív, így a (3.6) egyenlőtlenséget igazoltuk.

4. fejezet

OKTV 2013/2014.

Az alábbi feladat a 2013/2014. tanévi Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny speciális matematika tantervű gimnáziumok kategóriája döntő fordulójának 2. feladata volt.

4.1. Feladat. A p és q pozitív számokra $p+q \leq 1$. Igazoljuk, hogy bármely m, n pozitív egészekre

$$(1-p^m)^n + (1-q^n)^m \geq 1. \tag{4.1}$$

4.1. Megoldás valószínűségekkel

Először egy valószínűségi megoldást adunk, ezzel rámutatva arra, hogy „nem minden analízis, ami annak látszik”. Tekintsünk egy m sorból és n oszlopból álló táblázatot, amelynek minden mezőjét egymástól függetlenül p valószínűséggel pirosra, q valószínűséggel kékre és $1-p-q$ valószínűséggel zöldre festjük (egy példát láthatunk a 4.1. ábrán, ahol $m=4, n=3$).

Annak a valószínűsége, hogy egy adott oszlop teljesen pirosra van színezve, azaz mind az m mezője piros, p^m. Ebből kifolyólag annak a valószínűsége, hogy egy adott oszlop nem teljesen piros, $1-p^m$, és annak a valószínűsége, hogy az n oszlop közül egyik sem teljesen piros, $(1-p^m)^n$. Ezáltal $1-(1-p^m)^n$ annak a valószínűsége, hogy létezik teljesen pirosra festett oszlop a táblázatban. Ehhez hasonló okoskodással kaphatjuk azt is, hogy $1-(1-q^n)^m$ annak a valószínűsége, hogy létezik a táblázatban teljesen kék sor (ezt foglalja

p	k	z
p	p	k
p	k	k
p	k	k

4.1. ábra.

P(adott oszlop teljesen piros)	p^m	P(adott sor teljesen kék)	q^n
P(adott oszlop nem teljesen piros)	$1-p^m$	P(adott sor nem teljesen kék)	$1-q^n$
P(nincs teljesen piros oszlop)	$(1-p^m)^n$	P(nincs teljesen kék sor)	$(1-q^n)^m$
P(létezik teljesen piros oszlop)	$1-(1-p^m)^n$	P(létezik teljesen kék sor)	$1-(1-q^n)^m$

4.1. táblázat.

össze a 4.1. táblázat). Mivel nem létezhet egyszerre teljesen piros oszlop és teljesen kék sor, ezek egymást kizáró események, vagyis valószínűségeik összege legfeljebb 1 lehet, így

$$1-(1-p^m)^n+1-(1-q^n)^m \leq 1,$$

tehát

$$1 \leq (1-p^m)^n+(1-q^n)^m.$$

Ez pedig éppen a feladat állítása. Nem nehéz meggondolni, hogy az említett egymást kizáró események pontosan akkor egymás komplementerei, ha $m=n=1$ és $p+q=1$, azaz a táblázat egy sorból, és egy oszlopból áll, és csak pirosra, vagy kékre színezhetjük a mezőt.

4.2. Megoldás teljes indukcióval

Ha $p+q<1$, akkor növeljük valamelyik tag, például q értékét addig, amíg $p+q=1$. Ekkor q növekedésével párhuzamosan az egyenlőtlenség bal oldala csökken, hiszen $(1-q^n)^m$ egyre kisebb lesz. Ennek alapján elég az egyenlőtlenséget a $p+q=1$ esetre belátni, hiszen az egyenlőtlenség csökkentett bal oldalának alsó becslése az eredeti bal oldalnak is alsó becslése lesz. Ezek után teljes indukcióval bizonyítunk: először belátjuk $m=n=1$ esetén az egyenlőtlenséget, majd megmutatjuk, hogy ha valamely m,n párra igaz az egyenlőtlenség, akkor az $m+1,n$ és az $m,n+1$ párra is igaz.

1. lépés. A teljes indukciós bizonyítás első lépéseként tekintsük az $m=n=1$ esetet. Ekkor

$$(1-p^m)^n+(1-q^n)^m=(1-p)+(1-q)=2-p-q,$$

és valóban teljesül, hogy $2-p-q \geq 1$, hiszen ez átrendezve éppen az $1 \geq p+q$ feltevés.

2. lépés. Tegyük fel, hogy az egyenlőtlenség teljesül valamilyen m és n értékpárra (amellett, hogy $p+q=1$):

$$(1-p^m)^n+(1-q^n)^m \geq 1.$$

Megmutatjuk, hogy ekkor az egyenlőtlenség az $m,n+1$ és $m+1,n$ esetekben is fennáll. Mivel m és n szerepe szimmetrikus, így elég az egyik esetet megvizsgálni, hasonlóképp látható be a másik is.

Az indukciós feltevést a nemnegatív $(1-p^m)$ kifejezéssel szorozva és p^m-t hozzáadva kapjuk, hogy

$$\big((1-p^m)^n + (1-q^n)^m\big)(1-p^m) \geq 1(1-p^m).$$

A zárójelek felbontása és az egyenlőtlenség átrendezése után

$$(1-p^m)^{n+1} + (1-q^n)^m - (1-q^n)^m p^m + p^m \geq 1,$$

vagyis

$$(1-p^m)^{n+1} + (1-q^n)^m - ((1-q^n)p)^m + p^m \geq 1.$$

Ezek alapján az

$$(1-p^m)^{n+1} + (1-q^{n+1})^m \geq 1$$

egyenlőtlenség teljesül, ha az

$$(1-p^m)^{n+1} + (1-q^{n+1})^m \geq (1-p^m)^{n+1} + (1-q^n)^m - ((1-q^n)p)^m + p^m$$

egyenlőtlenség is teljesül. Elég tehát belátni, hogy

$$(1-q^{n+1})^m + ((1-q^n)p)^m \geq (1-q^n)^m + p^m,$$

azaz

$$(1-q^{n+1})^m + ((1-q^n)(1-q))^m \geq (1-q^n)^m + (1-q)^m. \tag{4.2}$$

Ezt az egyenlőtlenséget egyszerűbb alakban is felírhatjuk a következő jelölések használatával:

$$a := 1-q^{n+1}, \quad b := 1-q^n, \quad c := 1-q, \quad d := (1-q^n)(1-q).$$

Ezeket felhasználva a (4.2) egyenlőtlenség $a^m + d^m \geq b^m + c^m$ alakú, ahol $a+d = b+c$ és $a > b \geq c > d$. Ez utóbbi összefüggések könnyen láthatóak, hiszen

$$a + d = (1-q^{n+1}) + (1-q^n)(1-q) = 1 - q^{n+1} + 1 - q - q^n + q^{n+1} = 2 - q^n - q,$$

és

$$b + c = (1-q^n) + (1-q) = 1 - q^n + 1 - q = 2 - q^n - q.$$

Ezenkívül pedig $q < 1$ folytán $q \geq q^n > q^{n+1}$, tehát

$$a = 1 - q^{n+1} > b = 1 - q^n \geq c = 1 - q > d = (1-q^n)(1-q).$$

Legyen $a+d = b+c = 2H$ és $a-d = 2x > 0, b-c = 2y > 0$. Ekkor $a = H+x, d = H-x$, ezért

$$\begin{aligned} a^m + d^m &= (H+x)^m + (H-x)^m = \\ &= \left(\binom{m}{0}H^m + \binom{m}{1}H^{m-1}x + \binom{m}{2}H^{m-2}x^2 + \dots\right) + \\ &\quad + \left(\binom{m}{0}H^m - \binom{m}{1}H^{m-1}x + \binom{m}{2}H^{m-2}x^2 - \dots\right) \end{aligned}$$

Ezt egyszerűsítve kapjuk, hogy

$$a^m + d^m = 2\left(H^m + \binom{m}{2}H^{m-2}x^2 + \binom{m}{4}H^{m-4}x^4 \ldots\right).$$

Hasonlóan adódik, hogy

$$b^m + c^m = (H+y)^m + (H-y)^m = 2\left(H^m + \binom{m}{2}H^{m-2}y^2 + \binom{m}{4}H^{m-4}y^4 \ldots\right).$$

Mivel $a > b \geq c > d$, így $x = a - d > y = b - c$, ezért

$$a^m + d^m > b^m + c^m,$$

tehát beláttuk a (4.2) egyenlőtlenséget, amivel az indukciós lépés is készen van. Az is látszik, hogy egyenlőség csakis az indukciós bizonyítás későbbi lépéseiben van, így az OKTV feladatban $p, q > 0$ esetén csak $n = m = 1$ és $p + q = 1$ esetén áll fenn egyenlőség.

4.3. Megoldás függvényvizsgálat segítségével

A megoldást az előzőhöz hasonlóan azzal kezdjük, hogy q-t addig növeljük, míg $p+q = 1$-et kapunk. Ezáltal a (4.1) egyenlőtlenség bal oldala csökkenni fog. Ha erre a csökkentett értékre is érvényes az alsó becslés, akkor az eredetire is.

Legyen $G(p) := (1-p^m)^n + (1-(1-p)^n)^m$. Ekkor a feladat ekvivalens azzal, hogy $G(p) \geq 1$, minden $0 \leq p \leq 1$ értékre. Világos, hogy G folytonos a $[0,1]$ intervallumon és $G(0) = G(1) = 1$. Ha be tudjuk bizonyítani, hogy a G függvény monoton nő egy $(0, p_0]$ intervallumon, majd monoton csökken egy $[p_0, 1)$ intervallumon, akkor ebből következően $G(p) \geq 1$ minden $0 \leq p \leq 1$ esetén. Ez persze azt is jelenti, hogy a G függvénynek maximuma van a p_0 pontban. A monotonitáshoz írjuk fel G deriváltját:

$$\begin{aligned} G'(p) &= -mn\left(1-p^m\right)^{n-1}p^{m-1} + mn\left(1-(1-p)^n\right)^{m-1}(1-p)^{n-1} = \\ &= mn \cdot p^{m-1}\left(1-p^m\right)^{n-1}\left(\left(\frac{1-(1-p)^n}{p}\right)^{m-1}\left(\frac{1-p}{1-p^m}\right)^{n-1} - 1\right). \end{aligned}$$

Ahhoz, hogy a monotonitás teljesüljön, szükségünk van arra, hogy $G'(p) \geq 0$ legyen a $(0, p_0)$ intervallumon, és $G'(p) \leq 0$ legyen a $(p_0, 1)$ intervallumon (valamely $p_0 \in (0,1)$ mellett). Legyen

$$g(p) := \left(\frac{1-(1-p)^n}{p}\right)^{m-1}\left(\frac{1-p}{1-p^m}\right)^{n-1},$$

valamint

$$g_{m,n}(p) := \left(\frac{1-p^m}{1-p}\right)^{n-1}.$$

Ekkor $g(p) = g_{n,m}(1-p) \cdot \frac{1}{g_{m,n}(p)}$. Ha belátjuk, hogy a g függvény mindkét tényezője monoton csökkenő függvény, akkor g monoton csökkenő függvény, ami a G és G' függvények további tulajdonságairól árulkodik majd. Mivel

$$g_{m,n}(p) = \left(\frac{1-p^m}{1-p}\right)^{n-1} = \left(1 + p + p^2 + \ldots + p^{m-1}\right)^{n-1},$$

ezért $g_{m,n}$ pozitív, monoton növő függvény, így $\frac{1}{g_{m,n}(p)}$ monoton csökkenő. Könnyen látható, hogy $g_{m,n}(0) = 1$ és $g_{n,m}(1-0) = g_{n,m}(1) = n^m - 1$, valamint $g_{m,n}(1) = m^{n-1}$ és $g_{n,m}(1-1) = g_{n,m}(0) = 1$. A $g(p) = g_{n,m}(1-p) \cdot \frac{1}{g_{m,n}(p)}$ egyenlőség miatt, $g(0) = n^{m-1} \geq 1$ és $g(1) = \frac{1}{m^{n-1}} \leq 1$, hiszen $m, n \geq 1$. Ezek után kimondhatjuk, hogy a $g(p) - 1$ függvény monoton csökkenő, valamint $g(0) - 1$ nemnegatív, illetve $g(1) - 1$ nempozitív, következésképpen van (legalább egy, de akár végtelen sok) olyan $p_0 \in (0, 1)$, hogy $g(p) - 1 \geq 0$, ha $p \in (0, p_0)$, és $g(p) - 1 \leq 0$, ha $p \in (p_0, 1)$. Ekkor nyilván $G' \geq 0$ is teljesül $(0, p_0)$-on, és $G' \leq 0$ a $(p_0, 1)$ intervallumon, és ezt akartuk belátni.

Irodalomjegyzék

[1] Laczkovich Miklós, T. Sós Vera: Valós Analízis I., TypoTEX Kiadó, Budapest, 2012.

[2] Ábrahám Gábor: Nevezetes egyenlőtlenségek, Mozaik Kiadó, Szeged, 1995.

[3] Reiman István, Dobos Sándor: Nemzetközi Matematikai Diákolimpiák 1959–2003., TypoTEX Kiadó, Budapest, 2003.

[4] OKTV döntő feladatsor, link: `http://www.oktatas.hu/pub_bin/dload/kozoktatas/tanulmanyi_versenyek/oktv/oktv2013_2014donto/mat3_flap_d_oktv_1314.pdf`, (utolsó letöltés: 2014.12.03.)

[5] KöMaL archívum, link: `http://db.komal.hu/KomalHU/`, (utolsó letöltés: 2014.12.03.)