Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

Koncz Karolina

# És igaz-e a végtelenben?

szakdolgozat

Témavezető:

**Juhász Péter**

**Budapest, 2015.**

# Tartalomjegyzék

# Bevezető

Végesben és végtelenben egy feladat nagyon különbözően tud viselkedni. Van, amiben hasonlít a végtelen a végeshez, van, amiben nem. Nagyon izgalmasnak tartom, hogy néha mennyire máshogy kell hozzáállni egy feladathoz végtelenben, ezért szeretném ezt szakdolgozatomban bemutatni.

A feladatok igazságértéke is már négyféle lehet aszerint, hogy külön végesben és végtelenben igaz lesz-e a feladat. Hasonlóan a feladat nehézsége is sokféle lehet. Ezekre szeretnék példákat mutatni.

A szakdolgozatom hat fejezetből áll, az első fejezet kivételével egy fejezet egy feladattal foglalkozik. Geometria, gráfelmélet, számelmélet és halmazelmélet területéről hoztam példákat.

A fejezetek elején egy rövid módszertani bevezetést szeretnék nyújtani a feladatokhoz, ugyanis ezek nagy része feladható középiskolás diákoknak is.

A módszertani részekhez nagyon nagy segítség volt, hogy a feladatok megoldását soha nem készen kaptam. Így saját példámon láthattam, hogy mi okoz nehézséget, mivel lehet segíteni.

A fejezetek végén kitekintés található a feladathoz kapcsolódó nehéz kérdésekre, gyakran a probléma nagyobb számosságokkal kapcsolatos továbbvitelére.

# 1. fejezet

# Bevezető feladatok

A végtelennel foglalkozó feladatok nem elterjedtek középiskolában, így kezdetnek két könnyebb feladat kapcsán érezhetnek rá a diákok, hogy hogyan viselkedhet máshogy egy feladat végesben, illetve végtelenben.

Az első feladat teljesen elemi módszerekkel megoldható, a hozzá szükséges eszköztár egy nyolcadik osztályos diáknak már rendelkezésére áll. A második feladathoz szükség van gráfelméleti ismeretekre: az irányított gráf és a Hamilton-út fogalmára.

**Egy számelméleti probléma**

**1.1. Kérdés.** *Milyen $k$ egész számra igaz, hogy megadható $k$ különböző pozitív egész szám úgy, hogy nincs egynél nagyobb közös osztójuk, de bárhogyan választunk ki közülük $k-1$ számot, azoknak már van?*

Bármilyen $k$-ra meg lehet adni így számokat.

Vegyünk $k$ prímszámot, ezek közül $k-1$-et kiválasztva, és ezeket összeszorozva pont $k$ darab különböző számot kapunk. Legyen $p_i (i = 1, 2, ..., k)$ a

$k$ db prím sorba állítása után vett $i$-edik prím. A $j$-edik szám legyen a $\prod\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} p_i$

Így a számoknak tényleg nincs közös osztója. Tegyük fel, hogy a számok közös osztója $p_n$, de $p_n$ nem osztója az $n$-edik számnak.

Válasszunk ki $k-1$ számot úgy, hogy az $i$-edik számot nem választjuk. Ekkor $p_i$ mind a $k-1$ számot osztja.

**1.2. Kérdés.** *Meg lehet-e adni végtelen sok pozitív egész számot úgy, hogy ne legyen egynél nagyobb közös osztójuk, de a számok bármely véges részhalmazának legyen?*

Nem.

Tegyük fel, hogy lehetséges.

Legyen a végtelen sok egész szám $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ Az $\{a_1, a_2\}$ halmaz legnagyobb közös osztója legyen $d_2$, az $\{a_1, a_2, a_3\}$-nak $d_3$ és az $\{a_1, ..., a_n\}$-nek $d_n$. Ekkor $\forall n$-re $d_n$ osztója $d_{n-1}$-nek, mivel $\{a_1, ..., a_n\}$ legnagyobb közös osztója a $d_{n-1}$ és $a_n$ legnagyobb közös osztójával egyenlő.
Ez után két eset lehetséges.

Első eset:

$\exists n_0$ pozitív egész küszöbszám hogy $\forall n > n_0$-ra $d_n$ állandó. Ekkor minden véges részhalmaz legnagyobb közös osztója osztható $d_{n_0+1}$-gyel. Illetve a végtelen sok szám legnagyobb osztója is $d_{n_0+1}$ lesz, ami ellentmondás.

Második eset:

$\nexists n_0$ pozitív egész küszöbszám hogy $\forall n > n_0$-ra $d_n$ állandó. Ez azt jelenti, hogy mivel $d_{n+1}$ mindig osztja $d_n$-t lesz olyan $m$ pozitív egész, amire $d_m = 1$, ez azonban ellentmond annak, hogy minden véges részhalmaznak van legnagyobb közös osztója.

**Egy gráfelméleti probléma**

**1.3. Definíció.** *Az irányított teljes gráfot tournamentnek nevezzük.*

**1.4. Kérdés.** *Bizonyítsd be, hogy minden tournamentben van Hamilton-út.*

Vegyük a leghosszabb irányított utat a tournamentben. Azt szeretnénk belátni, hogy ez minden pontot tartalmaz. Legyen a leghosszabb irányított út $x_1x_2\dots x_k$, ahol $\forall j \in \mathbb{N}$-re az $x_jx_{j+1}$ él $x_{j+1}$-be mutat. Tegyük fel, hogy létezik egy $y$ pont, ami nincs benne ebben a leghosszabb útban. Ha az $y$-ból $x_1$-be mutatna él, akkor ez egy hosszabb út lenne, tehát $x_1$-ből $y$-ba mutat él.

Vegyük a legnagyobb indexű pontot, amire az $x_jy$ él az $y$-ba mutat. Ilyen $j$ biztosan van, hiszen $x_1y$ él az $y$-ba mutat. Ekkor az $y$ pontot be lehet szúrni $x_j$ és $x_{j+1}$ közé, mert az $yx_{j+1}$ $x_{j+1}$-be mutat. Így pedig megint hosszabb irányított utat kapnánk.

Ha a legnagyobb index, aminél $x_jy$ $y$-ba mutat éppen az út utolsó elemének indexe, akkor az $y$-t az út végére téve kapnánk hosszabb irányított utat. Így az eredeti feltételezés, hogy létezik olyan $y$ pont, ami nem eleme ennek a leghosszabb irányított útnak ellentmondásra vezet, tehát tényleg létezik Hamilton-út a tournamentben.

**1.5. Kérdés.** *Igaz-e végtelen sok pontból álló tournamentre, hogy mindig található benne Hamilton-út?*

Nem igaz.

Erre itt két különböző ellenpéldát szeretnék mutatni.

**Első megoldás**

Feleltessük meg a tournament pontjait a pozitív egész számoknak. Az irányított él két szám között mindig a kisebb felé mutasson. Legyen Hamilton-út kezdő pontja az $n$ szám, ekkor az innen induló út nem tartalmazza az $n$-nél nagyobb számokat. Így nem lehet Hamilton-út.

**Második megoldás**

Feleltessük meg a tournament pontjait az egész számoknak. Két pozitív szám között az irányított él mutasson mindig a nagyobb szám felé, míg két nem pozitív szám között a kisebb felé. Egy pozitív és egy nem pozitív szám között pedig az él a pozitív felé mutasson.

Ekkor ha létezne Hamilton-út, akkor az egy $n$-edik elemként tartalmazza az 1-et. Így legfeljebb $n-1$ negatív szám szerepel az úton, nem lehet Hamilton-út.

# 2. fejezet

# Pontok „felezése”

A többi fejezettel ellentétben itt a kérdések nem végig lineárisan követik egymást. A végtelenben az első kérdés után ugyanis a választól függően két féle úton lehet elindulni, ezeket nézzük meg az utána következő két kérdésben, majd végül ezeknek az utaknak a találkozását vizsgáljuk meg.

**2.1. Kérdés.** *Adott 100 pont a síkban. Igaz-e, hogy mindig van olyan egyenes, ami „felezi” a pontokat, vagyis az egyenesen nincsen pont és mindkét általa meghatározott félsíkban pontosan 50 pont van?*

Igaz.

Hol van ez az egyenes?

Minden két pont között húzzunk egy egyenest. Ez után vegyünk egy olyan egyenest, amelyik nem párhuzamos az így kapott egyenesek egyikével sem és nevezzük el $e$-nek. Ilyen egyenest mindig találunk, mert a síkon végtelen sok különböző irányú egyenes van, az 50 pont között viszont legfeljebb $\binom{50}{2}$ különböző egyenest lehet húzni.

Ha ezt az $e$ egyenest tetszőlegesen elhelyezzük a síkon, két részre osztja a pontokat, de nem biztos, hogy a kívánt arányban. Az egyenest a síkon eltolva egy pillanatban legfeljebb egy pont kerülhet át az egyenes másik oldalára. Akkor kerülhetne át egyszerre több pont a másik félsíkba, ha e között a két pont közötti egyenes párhuzamos lenne a $e$-vel, ez viszont nem lehet, hiszen pont úgy választottuk ki $e$-t, hogy ne legyen párhuzamos semelyik két pontot összekötő egyenessel sem. Így az $e$ egyenest fokozatosan eltolva lesz olyan helyzete, mikor mindkét oldalán pontosan 50 pont lesz.

**2.2. Kérdés.** *Adott 100 pont a síkban. Igaz-e, hogy mindig van olyan kör, ami „felezi” a pontokat, vagyis a körvonalon nincs pont, a kör belsejében és külsejében pedig 50-50 pont van?*

Igaz.

Vegyük a pontok páronkénti szakaszfelező merőlegeseit. Egy olyan pontot keressünk a síkon, ami egyik egyenesre sem illeszkedik, ezt a pontot nevezzük el $P$-nek. Legyen $P$ a keresett kör középpontja. A kör sugarát egyre növelve minden pillanatban legfeljebb egy pont kerül át a kör belsejébe. Ha ugyanis lenne két olyan pont, ami egyszerre kerülne a kör belsejébe ez pont azt jelentené, hogy egyforma távolságra vannak a kör középpontjától, tehát $P$ rajta lenne a két pontot összekötő szakasz felezőmerőlegesén. Ez ellentmondás, mivel a kör középpontját úgy választottuk, hogy ne legyen rajta a pontok felezőmerőlegesén.

Így biztos, hogy találunk a körhöz akkora sugarat, hogy pontosan 50 pont legyen a kör belsejében, 50 pedig a külsejében.

**2.3. Kérdés.** *Adott $H$ megszámlálhatóan végtelen pontból álló ponthalmaz a síkon. Igaz-e, hogy mindig van olyan egyenes, ami „felezi” a pontokat, vagyis mindkét általa meghatározott félsíkban végtelen sok pont van az egyenesen pedig nincs pont?*

Nem igaz.

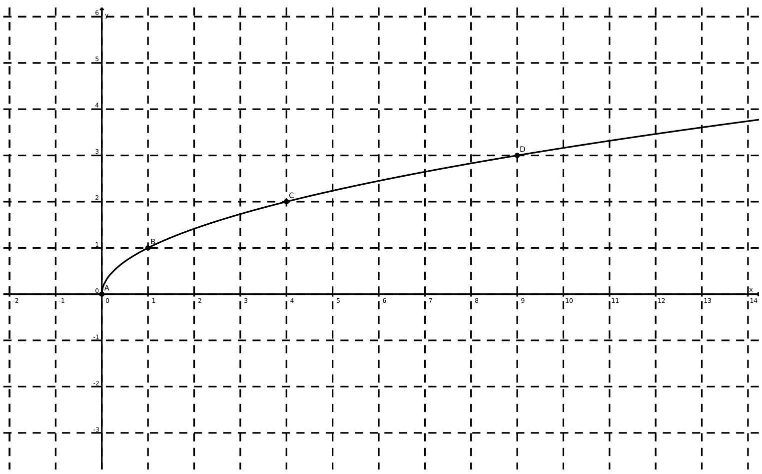
Ellenpéldának konstruáljuk a $H$ halmazt. Legyenek a koordináta-rendszerben az $(n, 0)$ alakú pontok $H$ pontjai, ahol $n \in \mathbb{N}$. Vegyünk egy olyan egyenest a síkon, ami a pontokat két részre osztja (tehát nem párhuzamos az $x$ tengellyel). Ekkor ennek az egyenesnek és az $x$ tengelynek metszéspontját feleltessük meg annak a valós számnak, ami a metszéspont $x$ koordinátája. Legyen ez a szám $a$. Az $e$ egyenes egyik oldalán így az $a$-nál kisebb, a másik oldalán pedig az $a$-nál nagyobb számok lesznek. Bármely valós számra igaz, hogy nála véges sok természetes szám kisebb. Így az egyenes egyik oldalán véges sok pont van.

**2.4. Kérdés.** *Adott megszámlálhatóan végtelen sok pont a síkban úgy, hogy semelyik három pont nincs egy egyenesen. Igaz-e, hogy mindig van olyan egyenes, ami „felezi” a pontokat, vagyis mindkét általa meghatározott félsíkban végtelen sok pont van, az egyenesen pedig nincsen pont?*

Nem igaz.

Jó ellenpélda, ha a $\sqrt{x}$ függvény egész koordinátájú pontjait nézzük:

$$H = \{(n^2; n) | n \in \mathbb{N}\}$$



Ezt a függvényt egy egyenes kétféleképpen oszthatja két részre, ha egy pontban metszik egymást, vagy ha kettőben. Ennél több metszéspontjuk nem lehet.

Ha a $\sqrt{x}$ függvénynek és az egyenesnek egy közös pontja van, a bizonyítás az előző kérdéshez hasonlóan megy. Ha két közös pontjuk van, akkor ennek a két pontnak az $x$ koordinátái legyenek $a$ és $b$. Ez a két pont meghatároz az $x$ tengelyen egy intervallumot, amiben biztos, hogy véges sok egész szám található. Így az ezeknek megfelelő pontok is legfeljebb véges sokan lehetnek, hiszen az volt a feltétel, hogy a függvény minden pontja egész koordinátájú legyen.

Itt könnyen előfordulhat, hogy már a **2.3. kérdés**re rögtön olyan válasz születik, ahol a pontok nem egy egyenesen vannak. Ez után a **2.4. kérdés**, ami pont ezt a plusz feltételt szabja, nem jó folytatása a kérdés-sornak.

Ha ilyen megoldás születik elsőre (akár rögtön ez a példa a gyökfüggvénnyel) a megszorítás lehet a következő:

**2.5. Kérdés.** *Adott egy korlátos megszámlálhatóan végtelen ponthalmaz a síkon. Igaz-e, hogy mindig található olyan egyenes, ami „felezi” a pontokat,* *és az egyenesen nincs pont?*

Nem.

Legyenek a pontok a számegyenesen egy sorozat tagjai, ahol $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$.

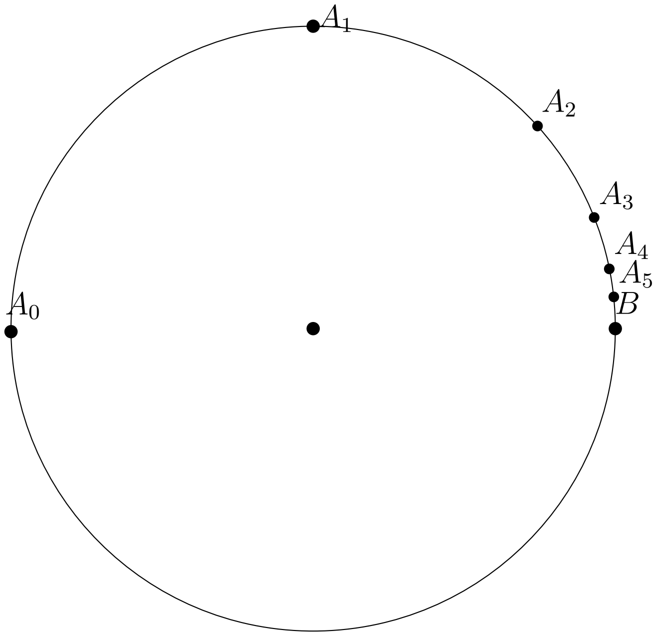
Mivel ez a sorozat konvergens, határértéke 2, $\forall \varepsilon > 0$-ra véges sok tagja van a határérték $\varepsilon$ környezetén kívül. $\forall b$-hez $\exists \varepsilon > 0$, hogy $\varepsilon < 2 - b$. Tehát az egyenesnek az egyik oldalán biztosan véges sok pont lesz.

A két különböző út közül tehát az első azt a plusz feltételt adta meg, hogy semelyik három pont ne illeszkedjen egy egyenesre, a második pedig azt, hogy legyen a ponthalmaz korlátos. Logikus kérdés a következő:

**2.6. Kérdés.** *Adott egy korlátos megszámlálhatóan végtelen ponthalmaz a síkon úgy, hogy a pontok közül semelyik három nem kollineáris. Igaz-e, hogy mindig található olyan egyenes, amin nincs pont, és „felezi” a pontokat?*

Nem igaz.

Jó ellenpélda például, ha a sík pontjait úgy határozzuk meg, hogy veszünk a síkon egy $BA_0$ félkört. Ennek a félkörnek a felezőpontját vegyük fel, legyen ez $A_1$, majd a maradék negyedkörök egyikét is felezzük meg, ezt a pontot nevezzük $A_2$-nek. Így folytatva az eljárást, megszámlálhatóan végtelen sok pontot kapunk a síkon, melyek megfelelnek a feltételeknek, de nem lehet őket két részre osztani úgy, hogy mindkét félsíkban végtelen sok pont legyen.




Tegyük fel, hogy létezik olyan $e$ egyenes, ami által meghatározott mindkét félsíkban végtelen sok pont van. Egy egyenes egy félkört legfeljebb két pontban metszhet. Tegyük fel, hogy egy metszéspontjuk van. Ekkor a metszéspont egy $A_j$ $A_{j+1}$ közé esik. Abban a félsíkban, ahol $A_j$ van pontosan $j$ pontja lesz a halmaznak. Tegyük fel, hogy két pontban metszi $e$ a félkört. Nézzük azt a metszéspontot, ami a körív mentén közelebb van $B$-hez. Erről elmondható ugyanaz, mint az előbb, ettől a metszésponttól az egyik irányba $j$ darab pont lesz, de mivel van egy másik metszéspont is, a $j$ pontnak nem is mindegyike lesz ebben a félsíkban.

**2.7. Kérdés.** *Adott $H$ megszámlálhatónál nagyobb ponthalmaz a síkon. Igaz-e, hogy mindig van olyan egyenes, ami által meghatározott mindkét félsíkban legalább megszámlálhatóan végtelen sok pontja van $H$-nak?*

Igaz.

Indirekt tegyük fel, hogy nincs ilyen egyenes.

A síkot osszuk fel a tengelyekkel párhuzamos rácsegyenesekkel egységnégyzetekre. Így megszámlálhatóan sok négyzetet kapunk. Biztos, hogy lesz ezek között olyan négyzet, amelybe megszámlálhatónál több pont került – ha minden négyzetben megszámlálható sok pont lenne, legfeljebb összesen is megszámlálható sok pontunk lenne, mivel megszámlálható sok megszámlálható halmaz uniója is megszámlálható.

Ha viszont több olyan négyzet is van a négyzetrácsban, ahol több mint megszámlálható pont van, akkor fel lehet osztani úgy a síkot egy egyenessel, hogy mindkét félsíkban legyen ilyen négyzet. Ha tekintjük két ilyen négyzet középpontját összekötő szakasz felezőmerőlegesét, az jó lenne az egyenesnek. Ebből az következik, hogy pontosan egy ilyen négyzet lehet a négyzetrácsban.

Ezt a négyzetet két egyenessel egybevágó négyzetekre osztva újra elmondhatjuk az előző gondolatmenetet – pontosan az egyik negyedben lehet megszámlálhatónál több pont. Ezt az eljárást folytatva egyre kisebb négyzeteket kapunk.

A Cantor axióma következménye, hogy egymásba skatulyázott nyílt téglák metszete a síkon nem üres. Mivel a négyzetek oldala nullához tart, ez a metszet egyetlen pontot tartalmaz. Legyen az a négyzet, amiben megszámlálhatónál több pont van az $n$-edik felosztás után $N_n$. A Cantor axióma szerint tehát $\left|\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} N_i\right| = 1$. Viszont $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} (H \cap \bar{N_i})$ megszámlálható halmaz.

$$|H| = \left|\bigcap_{i=1}^{\infty} N_i\right| + |\bigcup_{i=1}^{\infty} (H \cap \bar{N_i})| = 1 + \aleph_0 = \aleph_0$$

Ez ellentmondás, mivel $H$-nak megszámlálhatónál több pontja van.

**Kitekintés**

**2.8. Definíció.** *$P \in H$ a $G \subseteq H$ halmaz kondenzációs pontja, ha $P$ tetszőleges környezetében $G$-nek megszámlálhatónál több pontja van.*

**2.9. Tétel.** *Lindelöf tétele: Bármely síkbeli nem megszámlálható halmaznak van kondenzációs pontja.*

Ennek a tételnek a bizonyítása éppen a feladatban leírt módszerrel megy.

Bármely síkbeli nem megszámlálható halmaznak van legalább két kondenzációs pontja. Ebből következik, hogy biztosan létezik olyan egyenes, ami által meghatározott mindkét félsíkban megszámlálhatónál több pont van, jó egyenes például két kondenzációs pont felezőmerőlegese.

# 3. fejezet

# Ramsey-tétel

Ha $a, b \in \mathbb{N}$, akkor létezik egy legkisebb $R(a, b) \in \mathbb{N}$ szám, amire teljesül, hogy ha egy $R(a, b)$ pontból álló teljes gráf éleit tetszőlegesen kékkel és zölddel színezzük, akkor tartalmaz teljes $a$-s részgráfot kék színben, vagy teljes $b$-s zöld színű részgráfot.

**3.1. Tétel.** $R(a, b) \leq \binom{a+b-2}{a-1}$

Tehát egy $\binom{a+b-2}{a-1}$ pontú gráfban biztosan van teljes $a$-s kék, vagy teljes $b$-s zöld részgráf.

**Bizonyítás:**

Bizonyítsuk $a + b$-re indukcióval. $R(a, 2) = a$ és $R(2, b) = b$ lesz. Látszik, hogy egy $a$ pontú gráfban vagy lesz zöld él, és ezzel megvan egy zöld teljes 2 pontú gráf, vagy nincs egy zöld él sem, ekkor pedig megkaptuk a teljes kék $a$-s gráfot. Hasonlóan vizsgálható az $R(2, b) = b$ gráf is.

Legyen $K_n$ az $n$ pontú teljes gráf.

Színezzük a $K_{R(a-1,b)+R(a,b-1)}$ gráf éleit kékkel és zölddel. Legyen $P$ a gráf egy pontja. A $P$-ből induló kék élek és hozzá tartozó pontok halmaza legyen $A$, a zöldeké $B$. Így $|A| + |B| = R(a-1,b) + R(a,b-1) - 1$. Tehát $|A| \geq R(a-1,b)$ vagy $|B| \geq R(a,b-1)$. Ha $|A| \geq R(a-1,b)$, akkor $A$-ban van egy zöld színű $K_b$ részgráf, vagy van egy kék színű $K_{a-1}$ részgráf. Az előbbi esetben készen vagyunk. Az utóbbinál pedig az $K_{a-1}$ kék gráf $P$-vel együtt pont egy $K_a$ kék gráfot alkot, mivel $A$ a $P$-ből induló kék éleket és hozzá tartozó pontokat tartalmazza. Ha $|B| \geq R(a,b-1)$, akkor az előzőhöz hasonlóan vagy van egy kék $K_a$ részgráf, vagy egy zöld $K_{b-1}$, ami $P$-vel egy zöld $K_b$-t alkot.

Tehát $R(a,b) \leq R(a-1,b) + R(a,b-1)$, hiszen $R(a,b)$ a legkisebb pontszámú ilyen gráf.

Az indukciós feltevés miatt $R(a-1,b)$ és $R(a,b-1)$-re alkalmazhatjuk a tételt:

$$R(a-1,b)+R(a,b-1) = \binom{a+b-3}{a-2} + \binom{a+b-3}{a-1} = \binom{a+b-2}{a-1} \geqslant R(a,b)$$

**Végtelen Ramsey-tétel**

**3.2. Kérdés.** *Adott egy megszámlálhatóan végtelen pontú teljes gráf. Kékkel és zölddel színezve az éleit igaz-e, hogy található benne egy megszámlálhatóan végtelen pontú teljes kék, vagy zöld részgráf?*

Vegyünk egy $x_1$ pontot a gráfból. Ha ebből végtelen sok zöld él indul ki, akkor hagyjuk el azokat az éleket és hozzájuk kapcsolódó pontokat, amik kék éllel csatlakoznak $x_1$-hez. Így $x_1$-ből csak zöld él indul ki, ezért színezzük ki a pontot zöldre. Az így kapott részgráfot pedig nevezzük $Y_1$-nek. Ha viszont a pontból véges sok zöld él indul, azokat a pontokat hagyjuk el, amik zöld éllel csatlakoznak a ponthoz. Így $x_1$-hez csak kék élek csatlakoznak, $x_1$-et színezzük kékre, és az így keletkezett halmazt elnevezzük $Y_1$-nek.

Ezután választunk egy $x_2$ pontot $Y_1$-ből, és megismételjük az előző eljárást. Így kapjuk az $Y_2$ halmazt, illetve az $x_2$ pontot kiszínezzük kék vagy zöld színnel.

Hasonlóan folytatva az eljárást, végtelen sok pontot kapunk, mivel mindig olyan színt választottunk amelyikből végtelen sok él indult az adott pontból. Ha mindkét színből végtelen sok él indult egy pontból, ebben a példában mindig a zöldet választottuk, de tetszőlegesen lehet választani bármelyiket. Ez a végtelen sok pont zöldre vagy kékre van színezve. Ha van végtelen sok zöld pont, akkor ezek egy teljes zöld részgráfot alkotnak. Mivel ha vesszük az első pontot, amit zöldre színeztünk.Ez a pont csatlakozhat kék éllel olyan kék pontokhoz, amiket előtte színeztünk ki, de minden olyan ponthoz, amit utána színeztünk csak zöld él kötheti. A következőnek zöldre színezett pontra szintén igaz, hogy az előtte színezett kék pontokhoz kék él köti, de mivel zöld pontból előre felé csak zöld él indul, az előtte zöldre színezett pontokkal is zöld él köti össze.

Ha van végtelen sok kék pontunk, ehhez hasonlóan egy végtelen pontú teljes kék részgráfot alkot. Valamelyik színből pedig biztosan van végtelen sok pont.

Vegyük észre, hogy a feladatban annak, hogy két színnel színeztük a gráf éleit nincs jelentősége, ugyanez eljátszható több színre is!

**Kitekintés:**

Feltehető az analóg kérdés kontinuum számosságra is.

**3.3. Kérdés.** *Igaz-e, hogy egy kontinuum pontú teljes gráf éleit akárhogyan színezve két színnel, lesz benne teljes egy színű kontinuum pontú részgráf?*

Nem.

**3.4. Tétel.** *Sierpiński-tétel: Egy kontinuum pontból álló gráf éleit lehet úgy színezni két színnel, hogy ne legyen benne* $\aleph_1$ *pontú homogén részgráf.*

Konstruáljunk egy ellenpéldát. Legyen $<$ a természetes rendezés $\mathbb{R}$-en, $<^*$ pedig jólrendezés $\mathbb{R}$-en. Színezzük a gráf éleit két színnel a következő módon: $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \{0, 1\}$, azaz rendeljünk hozzá a valós számpárokhoz, amik tekinthetők a gráf éleinek egy két elemű halmaz elemeit, 0-t és 1-et, ami a két színt jelenti a színezésben.

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < y \Longleftrightarrow x <^* y \\ 1 & \text{különben} \end{cases}$$

Legyen $B \subseteq \mathbb{R}$.

Ha $f(B^2) = \{0\}$, akkor $<$ jólrendezi $B$-t. Legyen $g : B \mapsto \mathbb{Q}$ olyan leképezés, ami $\forall b \in B$-t egy $b$ és a jól rendezés szerint $b$ után következő elem közé képez. Mivel a racionális számok halmaza sűrű, mindig van ilyen racionális szám. Világos, hogy ez a leképezés injektív, így

$$|B| \leqslant |\mathbb{Q}| = \aleph_0 < \aleph_1.$$

Ha $f(B^2) = 1$, akkor $<$ inverze ugyanezt az eredményt adja.

# 4. fejezet

# Hatványszámok számtani sorozatai

**4.1. Kérdés.** *Hány szomszédos hatványszámot lehet megadni?*

**4.2. Definíció.** $a^b$ *alakú számokat nevezzük hatványszámnak, ahol* $a, b \epsilon \mathbb{Z}$, $b > 1$

**Három tag**

$a_1 = -1$; $a_2 = 0$; $a_3 = 1$

**Négy tag**

Nem lehet négy szomszédos szám mindegyike hatványszám.

A négy szomszédos számból kettő biztosan páros, ($4k$, és $4k+2$ alakúak), a $4k+2$ alakú szám nem lehet hatványszám, hiszen ezek a számok oszthatók 2-vel, de nem oszthatók 4-gyel.

**4.3. Definíció.** *Pontosítsuk a hatványszám definícióját. Hatványszámnak nevezzük az olyan* $a^b$ *alakú számokat, ahol* $a, b \in \mathbb{Z}^+$, $b > 1$.

**Három tag**

Így nincsen három egymás utáni hatványszám.

**Két tag** $a_1 = 8$; $a_2 = 9$

Van-e más?

Az 1844-ben megfogalmazott Catalan-sejtés azt mondja ki, hogy a 8 és a 9 az egyetlen példa egymás utáni hatványszámokra, ha $a^b$ és $c^d$ hatványszámok, ahol $a, b, c, d > 1$. Preda Mihăilescu 2002-ben bizonyította be a sejtést.

**4.4. Kérdés.** *Adjunk meg minél hosszabb pozitív differenciájú számtani sorozatot, aminek minden tagja hatványszám. Milyen hosszút lehet megadni?*

Bármilyen pozitív egészre létezik ilyen hosszú számtani sorozat hatványszámokból. Tegyük fel, hogy van egy $n$ tagból álló számtani sorozatunk $d$ differenciával hatványszámokból, ebből konstruáljunk $n+1$ tagút. Ha minden tagot ugyanazzal a számmal szorzunk meg továbbra is számtani sorozat marad. Vegyük hozzá a sorozathoz az $a_n + d = N$-et. Ez nem lesz feltétlenül hatványszám.

Keressük azt a $c$ számot, amivel minden tagot megszorozva hatványszámot kapunk. Írjuk fel a sorozat tagjait $a_n = b_n^{\alpha_n}$ alakban, ahol $b, \alpha \in \mathbb{Z}$, $\alpha > 1$. Legyen $c = N^{\prod_{i=1}^{n} \alpha_i}$, amivel megszorozzuk a sorozat összes tagját. Így tényleg hatványszámokat kapunk, mivel $\forall j = 1, ...n$-re

$$a_j N^{\prod_{i=1}^{n} \alpha_i} = b_j^{\alpha_j} N^{\prod_{i=1}^{n} \alpha_i} = \left( b_j N^{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \alpha_i} \right)^{\alpha_j}.$$

és $n+1$-re, azaz $N$-re:

$$N N^{\prod_{i=1}^{n} \alpha_i} = N^{1 + \prod_{i=1}^{n} \alpha_i}.$$

**4.5. Kérdés.** *Létezik pozitív differenciájú végtelen számtani sorozat, melynek minden tagja hatványszám?*

Nem.

Ennek két, teljesen különböző bizonyítását szeretném itt bemutatni. A második bizonyításhoz elemi módszerekre van szükség, középiskolás diák is megoldhatja, az első ilyen szempontból bonyolultabb.

**Első megoldás**

Ebben a megoldásban a hatványszámok reciproka segítségével szeretném megmutatni, hogy nem lehet végtelen számtani sorozatot képezni hatványszámokból.

Egy végtelen számtani sor tagjainak reciprokából képzett sorozat összege divergens. Legyenek ennek a sorozatnak a tagjai $a_n = \frac{1}{a+nd}$ alakúak, ahol $a$ az eredeti számtani sorozat első eleme, $d$ pedig a differenciája. Mivel itt hatványszámokból álló sorozatról lesz szó, feltehető, hogy $a, d > 0$ egész számok.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a+nd} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{na+nd} = \frac{1}{a+d} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Itt tehát ha a hatványszámokból képezhető végtelen hosszú számtani sorozat, akkor a reciprokösszegük divergens lesz.

Vizsgáljuk meg a hatványszámok reciprokösszegét.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{k^n} = \frac{1}{k(k-1)} = b_k$$

Ha a $b_k$ sorozatot összeadjuk, akkor előfordulnak olyan hatványszámok, amik többször is szerepelnek, tehát a kívánt értéknél nagyobb számot fogunk kapni.

$\sum\limits_{k=2}^{\infty} b_k = \sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = \sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}\frac{1}{k-1} < \sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)^2} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ tehát az összes hatványszám reciprokainak összegénél nagyobb szám. De mivel $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergens, ezért ezek közül a hatványszámok közül bármennyit elhagyva is konvergens sort kapunk. Azaz tényleg nem lehet végtelen sok hatványszámból álló számtani sorozatot képezni.

**Második megoldás**

Indirekt tegyük fel, hogy van olyan végtelen, pozitív differenciájú számtani sorozat, ami csak hatványszámokból áll. Legyen $a_n = a + nd$ ez a sorozat, ahol $a, d$ pozitív egészek (mivel a sorozat tagjai hatványszámok, tehát pozitív egészek), $a$ a sorozat első eleme, $d$ pedig a differenciája. Tehát a sorozat minden eleme megoldása a következő kongruenciának:

$$x \equiv a(d).$$

Nem hatványszámokat felírhatunk a következő alakban, ahol $p$ olyan prímszám, ami nem osztója $d$-nek. Az

$$x \equiv p(p^2)$$

maradékosztály tagjai mind nem hatványszámok, hiszen oszthatók $p$-vel, de nem oszthatók $p^2$-el.

Tehát egy szimultán kongruenciarendszert kapunk:

$$x \equiv a(d)$$

$$x \equiv p(p^2)$$

A kínai maradéktétel szerint egy ilyen kongruenciarendszernek mindig van megoldása, egy maradékosztály $dp^2$-vel vett osztás maradéka szerint. Mivel végtelen sok megoldása van, biztosan lesz köztük olyan, ami már tagja a hatványszámokból álló sorozatnak, de a második kongruencia miatt ez azt jelenti, hogy nem hatványszám a megoldás.

**Kitekintés**

Hatványszámok helyett ezeket a kérdéseket fel lehet tenni prímszámokra is, ezt szeretném bemutatni párhuzamként.

**4.6. Kérdés.** *Létezik-e prímszámokból álló végtelen hosszú számtani sorozat?*

Nem.

Adjunk meg tetszőleges $n$ pozitív egészre $n$ egymás után következő összetett számot. Ha ezt bármilyen $n$-re meg tudjuk konstruálni, akkor nincs végtelen hosszú számtani sorozat prímekből. Ha lenne a differenciája nagyobb kéne, hogy legyen $\forall n$ egésznél. Jó $n$ egymást követő összetett szám a $(n+1)!+2, (n+1)!+3, ..., (n+1)!+n+1$. Tényleg $n$ db egymást követő számot soroltunk fel. Mindegyik összetett, hiszen az első szám osztható 2-vel, a második 3-al, és így tovább, az $n$-edik $(n+1)$-gyel.

**4.7. Kérdés.** *Megadható-e tetszőleges n egész hosszúságú prímekből álló számtani sorozat?*

Míg az előző kérdésre a válasz régóta ismert, ez a kérdés nagyon sokáig megválaszolatlan volt. 2004-ben oldotta meg Ben Green és Terence Tao.

**4.8. Tétel.** *Green–Tao tétel*

*Bármilyen $n$ egészre $n$ hosszú prímszámokból álló számtani sorozat képezhető.*

# 5. fejezet

# Rabok és sapkák

**5.1. Kérdés.** *Egy szigeten 100 rab raboskodik. Egy nap felajánlanak nekik egy lehetőséget a megmenekülésre. Mindegyik rab kap egy piros, vagy egy kék sapkát a fejére, de nem tudja milyen színűt. A rabok láthatják egymás sapkáját, és mielőtt a sapkákat kiosztanák, megbeszélhetnek valamilyen taktikát, utána viszont semmilyen formában nem kommunikálhatnak. Mindegyiküknek egy cetlire fel kell írni egy színt. Amelyik rab azt a színt írta a cetlire, amilyen színű sapka a fején van megmenekül, aki nem, az meghal.*

*Milyen taktikát beszéljenek meg, hogy minél többen biztosan eltalálják a sapkájuk színét? Hány rab tud biztosan megmenekülni?*

Két rab esetén meg tudnak beszélni olyan taktikát, hogy az egyik rab biztosan megmeneküljön. (A másik pedig nem fog.) Az egyik rab hipotézise az, hogy kettejüknek egyforma sapkájuk van, tehát amilyen sapkát lát a másikon, olyat ír ő is, míg a másik rab pont az ellenkezőjénél „nyer”. Ő akkor menekülhet meg, ha különböző sapkájuk van, pont azt írja fel a cetlijére, amit nem lát a másikon. Mivel a két lehetőség közül pontosan az egyik be fog következni, így tényleg a kettőből pontosan egy rab megmenekül.

Ugyanezt a taktikát 100 rabbal is el lehet játszani, ha a rabok előzőleg párba állnak, és megbeszélik, kinek melyik lesz a szerepe. Így 50 rabot biztosan meg lehet menteni.

Hasonlóan ehhez a megoldáshoz az elején lehet 50 rab hipotézise az, hogy páratlan sokan kaptak piros sapkát, másik 50 rabé pedig az, hogy páros sokan. Így is pontosan 50-en fognak megmenekülni.

Több, mint 50 rab nem menthető meg.

**5.2. Kérdés.** *Legyen 100 helyett megszámlálhatóan végtelen sok rabunk. Mi a helyzet ekkor? Hány rabot tudunk biztosan megmenteni?*

Az előző megoldásból is nyilvánvaló, hogy megszámlálhatóan végtelen rab (de nem mindenki) megmenthető ugyanazzal a taktikával. Ez után már a jó kérdés megtalálása sem könnyű dolog a folytatáshoz. Meg tudunk-e menteni ennél több rabot? Mennyit?

Igen, véges sok kivételével minden rab megmenthető lesz.

A rabok megbeszélnek maguk közt egy sorrendet (mivel megszámlálhatóan sokan vannak ez lehetséges). A sapka színeknek a maguk közt felállított sorban egy 0,1 sorozatot feleltetnek meg. Kontinuum sok különböző ilyen sorozatot lehet létrehozni. $\aleph_0$ sokan vannak, mindegyik sapka két féle lehet, azaz $2^{\aleph_0} = c$ féle sorozat van, ahol $c$ a kontinuum számosság jele. Két 0,1-sorozat ekvivalens, ha véges sok tagban különböznek egymástól, hiszen legyenek $A, B, C$ 0,1-sorozatok, ekkor:

1. reflexív, azaz $A \sim A$, hiszen $A$ 0 (vagyis véges sok) elemben tér el önmagától.

2. szimmetrikus, azaz ha $A \sim B \Rightarrow$, akkor $B \sim A$, ha $A$ $n$ elemben tér el $B$-től, akkor $B$ is $A$-tól.

3. tranzitív, azaz ha $A \sim B$ és $B \sim C \Rightarrow$ akkor $A \sim C$ Hiszen ha $AB$-től $n$ elemben tér el, $B$ $C$-tól pedig $k$, akkor $A$ $C$-től legfeljebb $n + k$ elemben különbözik.

Így mivel ez tényleg ekvivalenciareláció ezeket a sorozatokat ekvivalencia-osztályokba képezhetjük, ahol egy ekvivalenciaosztályban azok a 0,1-sorozatok vannak, amik egymástól véges sok tagban különböznek.

A kiválasztási axióma miatt minden ekvivalencia osztályból ki tudunk választani egy elemet. Minden rab ezeket a kiválasztott elemeket figyelje csak a továbbiakban.

Minden rab a sajátján kívül az összes többi rab sapkáját látja, így látja, hogy a kiválasztott sorozatok közül melyik az az egy, ami illik rájuk véges sok eltéréssel. Így minden rab ugyanazt a sorozatot fogja választani, és aszerint tippeli meg a saját sapkáját. Ez a kiválasztott 0,1 sorozat legfeljebb véges sok helyen tér el az eredetitől, csak az a véges sok rab nem menekül meg, aki a sorban az eltéréseknél áll.

Vegyük észre, hogy a feladatban nem számít, hogy csupán két színű sapkájuk lehetett a raboknak! Bármennyi színű sapkájuk van, ugyanúgy ekvivalenciareláció marad az, ha két sorozat véges sok tagban különbözik. Sőt nem csak véges számosságokra lehet ugyanezt a gondolatot elmondani, a rabok sapkáján akár valós számok is szerepelhetnének, az sem változtatna a gondolatmeneten, vagyis ezzel a módszerrel ki tudnák találni véges sok rab kivételével, hogy milyen valós szám van a sapkájukon!

# 6. fejezet

# Zenészek vidékre utaznak

**6.1. Kérdés.** *100 zenész vidékre készül, melyhez nagy busz áll rendelkezésre. Minden zenésznek pontosan 3 haragosa van a többiek között, úgy, hogy a akkor és csak akkor haragosa b-nek, ha b is a-nak. Igaz-e, hogy szét lehet őket osztani a két buszba úgy, hogy mindenki legfeljebb 1 haragosával utazik egy buszon?*

A kérdést fogalmazzuk át gráfra is.

Van egy 100 pontú 3-reguláris gráfunk. Szét lehet-e osztani úgy két részgráfra, hogy mindkét részgráfban a pontok foka legfeljebb egy legyen?

Itt a pontok az embereknek felelnek meg, a ketté osztás a buszba ültetésnek, az élek pedig annak, hogy haragosai egymásnak a zenészek. Innentől a feladat megoldásához azt a megfogalmazást fogjuk használni, ami éppen könnyebb.

Igen, szétültethetők lesznek.

**Első megoldás**

Ültessük szét a zenészeket valahogy a buszokba, majd vegyünk egy olyan embert, aki így nem érzi jól magát (vagyis több, mint 1 haragosával van egy buszban), legyen a neve $X$ , és őt ültessük át a másik buszba. Ha az emberek egy gráf pontjai, és akik haragosai egymásnak, azok között vannak a gráf élei, akkor egy ilyen lépéssel a „buszon belüli” élek száma legalább kettővel csökken abban a buszban, ahonnan átültettük $X$-et, a másik buszon belül viszont a buszon belüli élek száma legfeljebb eggyel nőhet, mivel $X$-nek ott legfeljebb egy haragosa ül. Így ha átültetünk valakit, aki nem érezte jól magát a helyén, biztos, hogy csökken a buszon belüli élek száma, tehát minden ilyen ültetéssel javul a helyzet. Ezért biztosan lesz olyan, elég sok ember átültetésével, hogy már mindenki jól érzi magát, vagyis legfeljebb egy haragosával ül egy buszban.

**Második megoldás**

Ez a megoldás nem sokban különbözik az elsőtől, kicsit lerövidíti a megoldás menetét.

Véges sok féle képpen lehet leültetni a zenészeket két buszba, így ezek közül vegyük azt, ahol a legkevesebb él megy a buszokon belül.

Azt szeretnénk belátni, hogy ez a szétosztás jó lesz. Tegyük fel, hogy nem. Ekkor az előző megoldáshoz hasonlóan, ha átültetünk valakit, aki rosszul érzi magát csökken a buszon belüli élek száma, ez azonban nem lehet, mert ebben az ülésrendben a legkevesebb a buszon belüli élek száma.

**6.2. Kérdés.** *Igaz-e, hogy megszámlálhatóan végtelen sok zenész mindig szétültethető két megszámlálhatóan végtelen buszba úgy, hogy legfeljebb egy haragosukkal utaznak együtt? Minden zenésznek három haragosa van és a hara-*

*gosság szimmetrikus reláció.*

Igaz.

Legyenek az emberek $e_1, e_2, ...e_n, ...$ Minden $n$-re a végesben már igaznak bizonyult állítást felhasználva készítsük el az $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ emberek egy megfelelő felosztását. Az $n$-edik felosztásban az első buszban ülő emberek halmaza legyen $A_n$ a második buszban ülőké pedig $B_n$.

Konstruáljunk egy új, jó felosztását a teljes halmazon.

Először vizsgáljuk meg $e_1$-et. Valamelyik buszban biztos, hogy szerepel végtelen sokszor, mivel végtelen sok felosztásunk van. Ha végtelen sok $A_n$ halmazban szerepel, tegyük be az $A$ halmazba. Ha ez nem teljesül, akkor $B$-be. Húzzuk ki a listánkról azokat a felosztásokat, amikben $e_1$ nem a megfelelő halmazban szerepel, azaz első esetben a $B_n$-nek volt eleme, a másodikban $A_n$-nek. Tekintsük a megmaradt végtelen sok felosztásban $e_2$ helyzetét. Az előzőhöz hasonlóan ő is végtelen sokszor fog vagy $A_i$-ben, vagy $B_i$-ben szerepelni, ahol $i$ már csak a megmaradó felosztások indexe lehet. Tegyük be őt is ez alapján az $A$ vagy a $B$ halmazba. Húzzunk ki minden olyan felosztást a listáról, amin $e_2$ nem a megfelelő halmazban szerepel és folytassuk az eljárást.

Vizsgáljuk meg, hogy ez a felosztás biztosan jó lesz-e! Az egyetlen baj az lehet, ha $e_k$ két haragosával $e_p$-vel és $e_q$-val is egy buszba került. Feltehetjük, hogy ez a busz az $A$.

Tekintsük a $\{k, p, q\}$ halmaz legnagyobb elemét. Feltehetjük, hogy ez $p$. Amikor úgy döntöttünk, hogy $e_p$-t az $A$ buszba tesszük, akkor azokat a véges, megfelelő felosztásokat tekintettük, amikben $e_k$ és $e_q$ is az $A_i$ buszokba volt volt beosztva. Azért tehettük $e_p$-t is $A$-ba, mert volt végtelen sok olyan felosztás ezek között, amikben $e_p$ is $A_i$ eleme volt. De ha csak egyetlen olyan $A_i$ van, ahol a 3 ember azonos buszon ül, akkor az ellentmond annak, hogy valakinek két haragosa van, hiszen ezek a felosztások végesben megfelelők voltak.

Tehát ez a felosztás megfelelő, hiszen senki sem utazik egynél több haragosával együtt.

**6.3. Kérdés.** *Legyen megszámlálhatónál több zenész, akik vidékre utaznak, két megszámlálhatónál nagyobb busszal. Leültethetők-e mindig két buszba úgy, hogy mindenki legfeljebb egy haragosával utazzon együtt, ha minden zenésznek pontosan három haragosa van és a haragosság szimmetrikus reláció?*

Gráfokra: Legyen $G$ egy megszámlálhatónál több pontú 3-reguláris gráf. Ketté lehet-e osztani úgy a pontjait, hogy a két kapott részgráf minden pontjának foka legfeljebb egy legyen?

Igen.

Mivel a pontok fokszáma véges, a gráf szétesik megszámlálható komponensekre. Megszámlálhatóra már beláttuk, hogy le tudjuk ültetni őket a két buszba. Ezt felhasználva, az összes komponenst ketté tudjuk osztani a kívánt módon. Legyen az $\alpha$-dik kettéosztás két halmaza $A_\alpha$ és $B_\alpha$. $A = \bigcup A_\alpha$ legyen az első buszban ülő emberek halmaza, $B = \bigcup B_\alpha$ pedig a második buszban ülők halmaza.

# Köszönetnyilvánítás

A szakdolgozat megszületésében nagyon fontos szerepet játszott a témavezetőm. Köszönöm az izgalmas feladatokat, amelyeknek a megoldása során elmélyülhettem a véges és végtelen különbözőségének témájában. Mindig meg lehetett az élményem, hogy magam oldottam meg egy feladatot, de szükség esetén kaptam hozzá segítséget, ha elakadtam. Így amellett, hogy hasznos matematikai tudásokra tettem szert, módszertani tapasztalatokat is gyűjtöttem a konzultációk során, melyeket jövendő pedagógusi pályámon hasznosíthatok.

# Irodalomjegyzék


[1] Baek, Jongmin: *Introduction to infinite Ramsey theory*, 2007

[2] B. Green, T. Tao: *The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions*

[3] Laczkovich Miklós: *Valós függvénytan*, Egyetemi jegyzet, ELTE, Budapest, 1995.

[4] Mihăilescu, Preda: *Reflection, Bernoulli numbers and the proof of Catalan's conjecture*, European Congress of Mathematics, 325–340, Eur. Math. Soc., Zürich, 2005.

[5] Ramsey, Frank P.: *On a Problem of Formal Logic*, Proceedings of the London Mathematical Society (1930) s2-30 (1): 264-286