ELTE

TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

SZAKDOLGOZAT

Feladatok megoldása többféle megközelítésben

készítette: **Kovács Viola**

Matematika BSc tanári szakirány

témavezető: **Ambrus Gabriella, adjunktus**

Matematikatanítási és Módszertani Központ

Tartalom

Bevezető

Matematika tanulás és tanítás során számos problémával, feladattal találkozunk az évek alatt. Mindenki más-más hozott anyaggal kezd neki a kihívásnak, és mégis általában csak egy jó eredmény létezik, csak az odavezető út lehet más. Mint a Középiskolai Matematika Lapok (későbbiekben KöMaL) pontversenyének egyik javítója, többször láttam meglepő, akár tőlem idegen megoldásokat is a beküldőktől. Ez adta a kiindulási pontot a szakdolgozatomhoz, hogy feladatok többféle megközelítésű megoldásával foglalkozzam.

Általában, ha szembetaláljuk magunkat egy matematika feladattal, azonnal elkezdjük feleleveníteni tudástárunkat, mellyel rendelkezünk. Azonban sokszor előfordul, hogy mindezzel csupán túlbonyolítjuk a problémát és elsiklunk egy nagyon egyszerű megoldás felett. Az is előfordul, hogy egy másik fél hívja fel figyelmünket egy átláthatóbb, kisebb háttértudást igénylő megoldásra, amire természetesen nem biztos, hogy ő rájött volna, ha nem látja a bonyolult változatot. Másrészt arról is szó lehet, hogy az egyik fél úgy nevezett favágó módszerrel lát neki egy problémának, míg a másik az egyetemi illetve középiskolai tanulmányai között keresi a jó tételt, állítást, definíciót, ami segíthet. Végül ez utóbbi éppen egy egyszerűbb, rövidebb megoldáshoz jut el, míg a másik lehet, hogy a végére sem ér a megoldásnak. Ilyen helyzetek geometriában, trigonometriában, analízisben, algebrában egyaránt előfordulhatnak, például a geometriai feladatok esetében gyakran találkoztam azzal, hogy legkönnyebben algebrai úton oldható meg az adott probléma.

Nem is ritka eset, az sem, hogy elkezdünk egy szép, ötletes levezetést, de valahogy sehogy se jutunk el a feladat végére. Ezek az esetek is igen fontosak, mert egyrészt felhívják a figyelmünket arra is, hogy próbáljunk többféleképpen megközelíteni egy problémát, másrészt az is előfordulhat, hogy kicsit átfogalmazzuk a feladatot, így egyúttal kapunk egy új feladatot egy szép megoldással.

Szakdolgozatomban a fenti esetekre hozok több példát. Általában elemi matematikai problémákon mutatok be különböző megoldási módszereket, amelyeket minden esetben elemzek. Emellett több példát hozok trükkös, formabontó, meglepő megoldási módokra, KöMaL beküldők, egyetemi csoporttárs illetve oktató, érettségiző diák, és nem utolsó sorban saját magam készítette megoldások felhasználásával.

Választott témámmal az a célom, hogy rávilágítsak arra, hogyan jelenhet meg a matematika változatossága, összetettsége az oktatásban alkalmazott feladatok megoldása során. Ez okból igyekeztem minél színesebb palettával dolgozni, minél több témakörből hozni egy-egy problémát. Ennek eredményéül remélem sikerült olyan munkát összeállítanom, amely arra serkenti az olvasót, elsősorban a tanárokat és tanár szakos hallgatókat, hogy a feladatokkal és megoldásaikkal megismerkedve a matematikai tudástárukból régen elfeledett esetleg nem ismert megközelítési módokat elevenítsenek fel illetve ismerjenek meg és ezeket lehetőleg megfelelő módon beépítsék tanításukba is.

ÉRETTSÉGI FELADATOKBÓL VÁLOGATVA

Ebben a fejezetben korábbi érettségi feladatokat mutatok be. Minden feladat ismertetése után egy rövid magyarázat áll, mely megindokolja a feladatválasztást, majd a különböző megoldási módszereket egy rövid megjegyzés követi, amely a módszerek sajátosságaira világít rá.

Itt elsősorban a megoldó kulcsban szereplő megoldások kerülnek elemzésre. Egyes feladatok esetében előfordul, hogy megjegyzésként egy saját megoldást mutatok be, vagy esetleg az egyik megoldást tovább gondolva egy újabb feladatot fogalmazok meg.

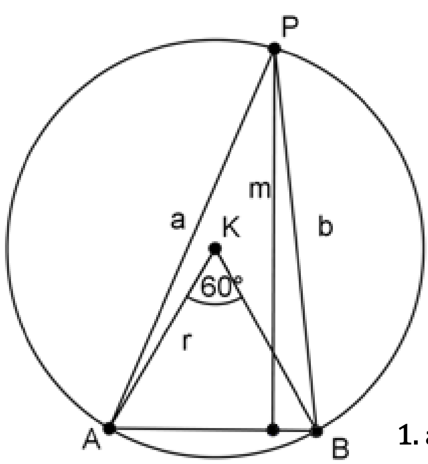
Geometriai feladatok

I. Egy 30°-os kerületi szög[1]

Egy 5 egység sugarú kör AB ívéhez tartozó 30°-os kerületi szög P csúcspontja mozog a körön. Mekkora a $PA + PB$ maximális értéke.

Ehhez a feladathoz tartozó három megoldás számomra kiválóan bemutatja, hogy egy feladatot lehet átlagosan, bonyolultan és csúnyán illetve szépen, ötletesen megoldani. Mindháromnak megvan a saját alapötlete, szikrája, mely három teljesen különböző úton indít el minket, amiken végig kell csak „sétálnunk”. S hogy melyik úton indulunk el, csupán attól függ, hogy a feladat elolvasása után éppen milyen kis ötlet jut elsőre eszünkbe.

Első megoldás



1. ábra

A középponti és a kerületi szögek tétele alapján az AB ívhez tartozó középponti szög 60°, ezért a kör K középpontja, és az A és B pontok egy egyenlő oldalú háromszög csúcspontjai. Tehát $r = AB = 5$ egység.

Az **1. ábra** $PA = a$ és $PB = b$ jelöléseit használva, az APB háromszögben a koszinusz tétel alapján

$$r^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 30° = a^2 + b^2 - \sqrt{3}ab.$$

[1] 1998. május 25. délutáni matematika érettségi feladatsor 8. feladat

Ebből teljes négyzetté alakítással kapjuk, hogy $r^2 = (a+b)^2 - \left(2+\sqrt{3}\right)ab$, amiből átrendezéssel az $(a+b)^2 = r^2 + \left(2+\sqrt{3}\right)ab$ összefüggéshez jutunk.

Tekintettel arra, hogy $a+b$ pontosan akkor maximális, ha $(a+b)^2$ maximális, a kapott összefüggés szerint $a+b$ pontosan akkor maximális, ha ab maximális.

A APB háromszög területe:

$$T_{APB} = \frac{ab\sin 30°}{2} = \frac{ab}{4}$$

így ab pontosan akkor maximális, ha T_{APB} maximális.

A APB háromszög AB oldala r hosszúságú, ezért területe akkor lesz a legnagyobb, ha AB oldalhoz tartozó magasság a lehető legnagyobb.

Tehát a P pontnak az AB szakasztól való legnagyobb távolságát kell keresni, mert ez a távolság APB háromszög AB oldalhoz tartozó magassága. Így a P pont az AB-re merőleges átmérő AB-től távolabbi végpontja.

Ekkor a APB egyenlőszárú háromszög magassága:

$$r + r\frac{\sqrt{3}}{2} = r \cdot \frac{2+\sqrt{3}}{2} = 5 \cdot \frac{2+\sqrt{3}}{2}$$

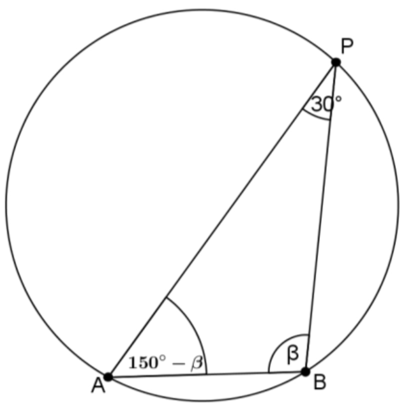
Illetve $PA = PB = \sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2\left(2+\sqrt{3}\right)^2} = \frac{5\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)}{2}$

Tehát $PA + PB = 5\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right) \approx 19{,}32$ egység.

Megjegyzés: Ez az átlagos megoldás, azaz viszonylag egyszerűen, kevés ötlettel dolgozik: kerületi és középponti szögek, koszinusz-tétel, háromszög területének szinusszal való felírása. Ezen összefüggések ismerete, gyakori használata alapkövetelmény egy matematikával foglalkozó számára, így különösebb nehézség nélkül végig lehet vinni a feladat megoldását a fent leírt módon.

Második megoldás

Az ABP háromszögben $APB\angle = 30°$, $ABP\angle = \beta$ és $BAP\angle = 150° - \beta$ (lásd a **2. ábrát**).



2. ábra

A szinusz-tétel értelmében: $\frac{PA}{AB} = \frac{\sin\beta}{\sin 30°}$ és $\frac{PB}{AB} = \frac{\sin(150°-\beta)}{\sin 30°}$

Ebből $PA + PB = 10(\sin\beta + \sin(150° - \beta))$ csak a β szög függvénye.

A $PA + PB = F(\beta)$ jelölést és a megfelelő trigonometriai azonosságot használva:

$$F(\beta) = 10(\sin\beta + \sin 150° \cos\beta - \cos 150° \sin\beta) =$$

$$= 10\left(\sin\beta + \tfrac{1}{2}\cos\beta + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\beta\right) = 10\left(\tfrac{2+\sqrt{3}}{2}\sin\beta + \tfrac{1}{2}\cos\beta\right).$$

A $\sin\beta$ és a $\cos\beta$ együtthatói négyzetösszegének négyzetgyökét kiemelve két szög összegének szinuszát kapjuk az egyik tényezőben:

$$F(\beta) = 10\sqrt{2+\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\sin\beta + \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\cos\beta\right) = 10\sqrt{2+\sqrt{3}}\,(\cos 15° \sin\beta + \sin 15° \cos\beta) =$$

$$= 10\sqrt{2+\sqrt{3}}\sin(\beta + 15°).$$

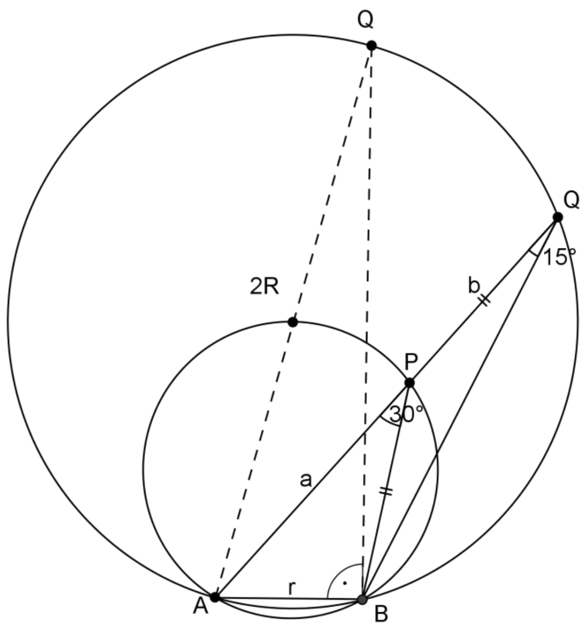
Ez a kifejezés akkor maximális, ha $\sin(\beta + 15°) = 1$, azaz $\beta + 15° = 90°$, $\beta = 75°$.

Ekkor $PA + PB = 10\sqrt{2+\sqrt{3}} = 5\sqrt{8+4\sqrt{3}} = 5\sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right)^2} = 5\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right) \approx 19{,}32$ egység.

> **Megjegyzés:** Ez a bonyolultabb trigonometriai átalakításokat felhasználó megoldás. Mindig is összetettnek, bizonyos szinten szerencsejátékszerűnek, találtam a szögfüggvényekkel való számolást, ügyeskedést. Ennek oka, hogy sokszor nehéz kiválasztanunk a megfelelő trigonometria azonosságot, mely a jó megoldási útra terelne bennünket. Míg gyakran egy-egy azonosság felhasználásával csak bonyolultabbá tesszük a kiinduló problémát.

Harmadik megoldás

A P és A pontokra illeszkedő egyenesre mérjük fel a PB szakaszt P-ből, úgy, hogy Q-val jelölve a szakasz végpontját a QA szakasz hossza $PA + PB$ legyen (lásd a **3. ábrát**).



3. ábra

Ekkor az AQB szög 15°-os, mert a QPB egyenlőszárú háromszög QB oldalára eső szögei egyenlők, és ezek összege a háromszög APB külső szöge, ami a feltételek szerint 30°-os.

Tehát, amint a P pont mozog a köríven, a hozzátartozó Q pont is egy köríven mozog, nevezetesen azon a köríven, amelynek pontjaiból az AB szakasz 15°-os szögben látszik, és a P pont minden helyzete mellett a hozzárendelt Q pontra a $PA + PB = QA$ egyenlőség teljesül.

Mivel a QA szakasz hosszának maximuma az AB szakaszhoz tartozó 15°-os látókör átmérőjének hossza, ez a $PA + PB$ maximális értéke.

Ha AQ átmérő, akkor a Thalész-tétel értelmében derékszögű AQB háromszögből (a rajzon szaggatott vonallal jelölt háromszög): $2R = \frac{AB}{\sin 15°}$.

$PA + PB$ maximális értéke: $\frac{5}{\sin 15°} = 5\sqrt{2}\left(\sqrt{3} + 1\right) \approx 19{,}32$ egység.

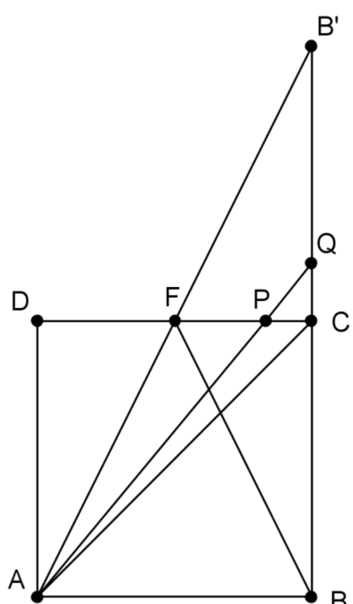
Megjegyzés: Az ötletes, gyors és legkevesebb számolással járó megoldás. Ezt találom a legszimpatikusabbnak, mivel ez a „leggeometrikusabb” megoldás. Az előző kettőben inkább az egyenletek és ismert képletek jó használatára volt szükség. Itt a látókörívek tulajdonságait kihasználva jutunk el a megoldáshoz.

II. Négyzetbe írt háromszög[1]

Írjon az egységnyi oldalú $ABCD$ négyzetbe olyan háromszögeket, amelyeknek az alapja AB, a harmadik csúcsa pedig a CD oldal egy P pontja. Határozza meg a P pont helyét, amikor az ABP háromszög kerülete minimális, illetve amikor maximális. Adja meg a minimum és a maximum értékét is!

Itt a megoldó kulcs kétféle megoldási módszert mutat be. Ezek kiválóan tükröznek két teljesen másikféle gondolkodási módot, melyek akár származhatnának ugyanattól az embertől attól függően, hogy éppen milyen matematikai témakörrel foglalkozott a feladat elolvasása előtt.

Első megoldás:



4. ábra

Annak a P pontnak a helyzetét kell meghatározni, amelyre az $AP + PB$ összegnek szélsőértéke van. Legyen B tükörképe a CD egyenesre B', mivel $PB = PB'$, elegendő $AP + PB'$ szélsőértékeit meghatározni.

Jelölje Faz AB' oldal felezőpontját, F felezi a CD szakaszt is, mivel CF az ABB' középvonala. $AP + PB'$ akkor a legkisebb, ha P megegyezik F-fel mert A és B' között a legrövidebb út az egyenes szakasz, azaz a minimális kerületű háromszög az egyenes szakasz. Tehát a minimális kerületű háromszög az ABF, és minthogy az ADF háromszögből $AF = \frac{\sqrt{5}}{2}$, a minimális háromszög kerület $1 + \sqrt{5}$ ($\approx 3{,}24$).

$AP + PB'$mindig kisebb, mint $AC + CB'$, ezt a következő módon láthatjuk be: az AP szakasz P-n túli meghosszabbítása CB'-t Q-ban metszi.

Alkalmazzuk a háromszög-egyenlőtlenséget az ACQ háromszögre, figyelembe véve, hogy $AQ{=}AP{+}PQ$, illetve C és Q nem esik egy pontba:

$$AC + CQ \ > AP + PQ$$

[1] 2000. május 22. délelőtti matematika érettségi feladatsor 8. deladat

Ugyanígy most a PQB' háromszögre igaz:

$$PQ + QB' > PB'$$

Az utóbbi két egyenlőtlenség megfelelő oldalait adjuk össze:

$$AC + CQ + QB' + PQ > AP + PB' + PQ,$$

vonjuk ki mindkét oldalból a PQ-t és végezzük el a $CQ + QB' = CB'$ helyettesítését:

$$AC + CB' > AP + PB'$$

Ez azt jelenti, hogy az ABP háromszög kerülete a mondott feltételek mellett akkor a legnagyobb, ha P a CD szakasz valamelyik végpontjában van, s mivel $AC = \sqrt{2}$, a maximális háromszögkerület $2 + \sqrt{2}$.

Megjegyzés: Az érettségi példa két kérdésből áll: mi a háromszög kerületének minimuma illetve maximuma. Az első kérdés tulajdonképpen egy ismert probléma, ha a következő módon tesszük fel:

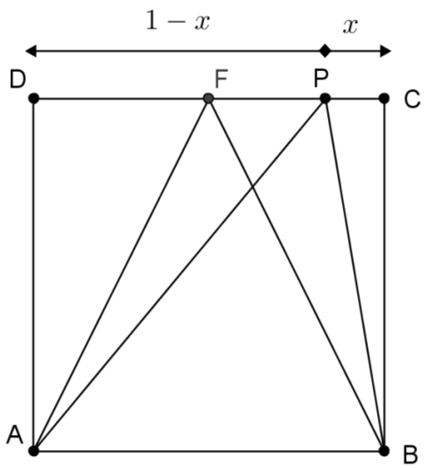
Egy egyenes országút ugyanazon oldalán helyezkedik el két község. Mindkét községbe bevezetik a villanyt, és a két község számára közvetlenül az országút mellett közös transzformátorállomást létesítenek. Hol kell az állomást elhelyezni, hogy a lehető legrövidebb vezetékre legyen szükség?[1]

Ez a kérdés az egyik alapvető példája a tengelyes tükrözés alkalmazásának. Így szinte mindenki találkozik ezzel a példával, és eszébe jut az igen kézenfekvő megoldás: tükrözzük az egyik „községet” az országútra, majd kössük össze a másik községgel. Ekkor megkapjuk, hogy hol kell az állomást elhelyezni, ahhoz, hogy a legkevesebb vezetékre legyen szükség.

Összességében láthatjuk, hogy az érettségi feladat első része valójában nagyon könnyű, ha teljesen geometriai úton közelítünk a példához. Ellenben, ha algebrával illetve analízissel „felszerelkezve” kezdünk bele a feladat megoldásába, akkor egy teljesen másfajta gondolatmenetet kapunk. Ezt a második megoldás mutatja be:

[1] „Geometriai feladatok gyűjteménye I." Tankönyvkiadó, Budapest, 1975, 344-es feladat

Második megoldás:



5. ábra

Legyen $PC = x$ és $PD = 1 - x$, ahol $0 \leq x \leq 1$. Az APD, BPC és az ABC derékszögű háromszögekből $AP = \sqrt{1+(1-x)^2}$; $BP = \sqrt{1+x^2}$ és $AC = \sqrt{2}$

Azt állítjuk, hogy az ABP háromszög kerülete akkor lesz a legkisebb, ha a P pont a négyzet CD oldalágának F felező pontjával esik egybe.

Bizonyítás: legyen P a CD oldal tetszőleges pontja. Mivel $AB = 1$, és $AF = BF = \frac{\sqrt{5}}{2}$, ezért elegendő az $AP + BP$ összeg minimumát megadni. Azt kell tehát bizonyítani, hogy $AP + BP \geq AF + BF$, azaz $\sqrt{1+(1-x)^2} + \sqrt{1+x^2} \geq \sqrt{5}$. Ebből $\sqrt{2-2x+x^2} \geq \sqrt{5} - \sqrt{1+x^2}$.

Mivel $\sqrt{5} - \sqrt{1+x^2} > 0$, lévén hogy $\sqrt{2} \geq \sqrt{1+x^2}$ ezért négyzetre emeléssel, rendezéssel az $x + 2 \leq \sqrt{5}\sqrt{1+x^2}$, majd újabb négyzetre emeléssel ($x + 2 > 0$) a következőt kapjuk:

$$(2x-1)^2 \geq 0$$

Az egyenlőség akkor áll fenn, ha $x = \frac{1}{2}$, azaz a P pont a CD oldal felezőpontja. Az így kapott ABP háromszög egyenlő szárú, $AP = BP = \frac{\sqrt{5}}{2}$. A kerület legkisebb értéke: $AB + AP + BP = 1 + \sqrt{5}$ (≈ 3.24).

Azt állítjuk, hogy az ABP háromszög kerülete akkor lesz a legnagyobb, ha a P pont a C vagy D csúcsával esik egybe.

Bizonyítás: Mivel $AB = AD = BD = 1$ és $BD = AC = \sqrt{2}$ ezért elegendő az $AP + BP$ összeg maximumát megadni. Azt kell tehát bebizonyítani, hogy $AP + BP \leq AD + DB = AC + BC$ azaz $\sqrt{1+(1-x)^2} + \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2} + 1$.

Emeljük négyzetre ezt az egyenlőtlenséget, mindkét oldal pozitív. Rendezés után a $\sqrt{2-2x+x^2}\sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2} - x^2 + x$ egyenlőtlenséget újra négyzetre emelve, (ugyanis $\sqrt{2} - x^2 + x > 0$, mivel $0 \leq x \leq 1$) a következőt kapjuk:

$$x^2 - x \leq 0$$

$$x(x-1) \leq 0$$

Az egyenlőség akkor áll fenn, ha $x = 0$ vagy $x = 1$, azaz P egybeesik C-vel vagy D-vel

Megjegyzés: Számomra ez a megoldás alapvetően sokkal bonyolultabb és kevésbé ötletesebb, mint az első. Bár meg kell jegyeznem, hogy a feladat elolvasása után én is hasonló módon oldottam meg a feladatot. Ennek oka, hogy egyetemi tanulmányaim során hozzászoktam, hogy ha egy geometriai érték minimumát vagy maximumát keressük, akkor algebrai úton általában hamarabb megkapjuk a kívánt eredményeket, mint geometriai eszközök segítségével.

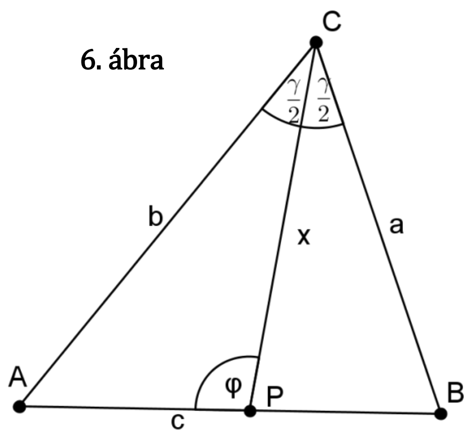
III. A szögfelező hossza egy háromszögben[1]

Egy háromszög oldalainak hossza a, b és c. *Mutassa meg, hogy az* a és b *oldalak által közbezárt szögfelező hossza* $\frac{\sqrt{ab((a+b)^2-c^2)}}{a+b}$!

A feladathoz kapcsolódó három megoldási módszerből kettőhöz trigonometriai azonosságokat kell ismerni és okosan alkalmazni. Míg a harmadik módszer vektorokkal dolgozik. Valójában ez utóbbi hívta fel a figyelmemet a feladatra és megoldásaira.

Első megoldás:

6. ábra



Legyen a C-nél levő γ és a szögfelező AB-vel közös pontja P.

Az ACP háromszög területe $\frac{bx}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$. A PCB háromszögé $\frac{\alpha x}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$

Ezek összege ABC háromszög területével egyenlő:

[1] 2001. május 21. délutáni matematika érettségi feladatsor 8. feladat

$$\frac{bx}{2}\sin\frac{\gamma}{2}+\frac{\alpha x}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{ab}{2}\sin\ \gamma$$

Mivel $\sin\gamma = 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\ \frac{\gamma}{2}$, ezért $\sin\frac{\gamma}{2}$-vel osztva mindkét oldalt ($\sin\frac{\gamma}{2}\neq 0$):

$$(a+b)x = 2ab\cos\frac{\gamma}{2}$$

Továbbá $ab\neq 0$ így

$$\cos\frac{\gamma}{2}=\frac{a+b}{2ab}x$$

Írjuk fel az eredeti háromszögre a koszinusztételt: $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\ \gamma$ Amelyből

$$\cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

Helyettesítsük ezt és a $\cos\frac{\gamma}{2}$ –re kapott kifejezést a $2\ (\cos\frac{\gamma}{2})^2=1+\cos\gamma$ azonosságba:

$$2\left(\frac{a+b}{2ab}x\right)^2=1+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

Az egyenletet átrendezve megkapjuk, hogy

$$\frac{(a+b)^2}{ab}\cdot x^2=2ab+a^2+b^2-c^2$$

$$x^2=\frac{ab((a+b)^2-c^2)}{(a+b)^2}$$

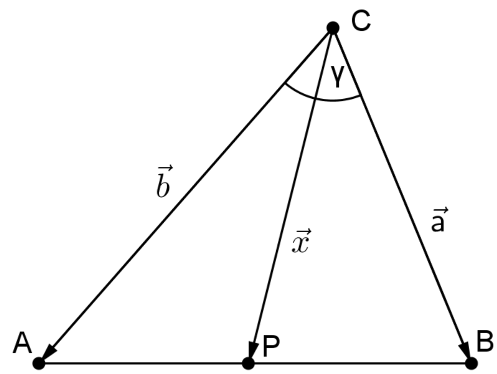
Mivel x pozitív,

$$x=\frac{\sqrt{ab((a+b)^2-c^2)}}{a+b}$$

Megjegyzés: A megoldás trigonometrikus oldalról közelíti meg a feladatot. A szögfüggvényekkel kapcsolatban ismert összefüggéseket felhasználva, átalakítva jut el a megoldáshoz. Véleményem szerint a megoldás legfontosabb eleme a $2\ (\cos\frac{\gamma}{2})^2=1+\cos\gamma$ összefüggés ismerete. Természetesen nem lehetetlen, hogy eszünkbe jusson ez az azonosság, viszont nem is tartozik a leggyakrabban használt képletek közé. Így előfordulhat, hogy a megoldó félúton elakad, és egy új oldalról kell megközelítenie a problémát.

Második megoldás:

A megoldás során használjuk az **7. ábra** jelöléseit! A C csúcsból P-be mutató szögfelezővektor $\underline{\mathbf{x}}$, a C-ből B-be mutató vektor $\underline{\mathbf{a}}$ és a C-ből A-ba mutató vektor $\underline{\mathbf{b}}$, $|\underline{\mathbf{a}}| = a$, $|\underline{\mathbf{b}}| = b$ és $|\underline{\mathbf{x}}| = x$.



7. ábra

Mivel a szögfelező a szemközti oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja, ezért $\underline{\mathbf{x}} = \frac{a\underline{\mathbf{b}}+b\underline{\mathbf{a}}}{a+b}$.

Mivel $x^2 = \underline{\mathbf{x}} \cdot \underline{\mathbf{x}}$, és $\underline{\mathbf{a}} \cdot \underline{\mathbf{b}} = ab\cos\gamma$, ezért x^2–re a következő egyenlőséget kapjuk:

$$x^2 = \frac{2a^2b^2 + 2a^2b^2\cos\gamma}{(a+b)^2}$$

Az ABC háromszögre felírt koszinusztételből $2ab\cos\gamma = a^2 + b^2 - c^2$ adódik. Ezt behelyettesítjük az ezt megelőző egyenletbe:

$$x^2 = \frac{2a^2b^2 + ab(a^2+b^2-c^2)}{(a+b)^2}$$

A számlálóban kiemelve ab-t: $x^2 = \frac{ab\left(2ab+a^2+b^2-c^2\right)}{(a+b)^2}$. Mivel x pozitív, $x = \frac{\sqrt{ab((a+b)^2-c^2)}}{a+b}$.

Megjegyzés: Ez a megoldás az *a* és *b* oldalakat illetve a C-ből induló szögfelezőt „vektorként kezelve” gyorsabban és egyszerűbben jut el a kért összefüggéshez, mint az első megoldás. Számomra ez egy igen szimpatikus megoldás, hiszen egy egyszerű alapötlettel gyorsan eljut a kért összefüggéshez. Az alkalmas vektorok bevezetése nem csak itt, de több geometriai bizonyításnál is könnyít a folyamaton. Ez egy gyakran alkalmazott módszer, ami sokszor segítségünkre lehet egy-egy geometriai problémánál, akárcsak ennél, - ettől érzem hozzám közel álló megoldásnak a fentit.

Harmadik megoldás:

Használjuk az **6. ábra** jelöléseit!

A szögfelező a szemközti oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja: $AP = \frac{b}{a+b}c$, $PB = \frac{a}{a+b}c$.

Írjuk fel a koszinusztételt az APC és a PBC háromszögekre kihasználva, hogy $\cos(180° - \varphi) = -\cos\varphi$:

$$b^2 = x^2 + \frac{b^2c^2}{(a+b)^2} - 2\frac{bcx}{a+b}\cos\varphi \qquad \text{és} \qquad a^2 = x^2 + \frac{a^2c^2}{(a+b)^2} + 2\frac{acx}{a+b}\cos\varphi$$

Adjuk az első egyenletet a-szorosához a második b-szeresét, ekkor a következőt kapjuk:

$$ab^2 + a^2b = ax^2 + bx^2 + \frac{ab^2c^2 + ba^2c^2}{(a+b)^2}$$

Ebből $ab(a+b) = x^2(a+b) + \frac{abc^2(a+b)}{(a+b)^2}$ adódik.

Az egyenlet mindkét oldalát $(a+b)$-vel osztjuk $(a+b \neq 0)$ és rendezzük:

$$x^2 = ab - \frac{abc^2}{(a+b)^2}$$

Közös nevezőre hozva:

$$x^2 = \frac{ab(a+b)^2 - abc^2}{(a+b)^2} = \frac{ab((a+b)^2 - c^2)}{(a+b)^2}$$

Mivel x pozitív, $x = \frac{\sqrt{ab((a+b)^2-c^2)}}{a+b}$.

Megjegyzés: Ez a megoldás a háromszög szögfelezőjének egyik fontos tulajdonságán (metszett oldal felosztásának aránya) alapszik. Ezt az összefüggést és a koszinusz-tételt alkalmazva egyszerű átalakítások útján jut el az állítás bebizonyításához. A legfontosabb ötlet, azonosság már a megoldás elején felírásra kerül, így nehezebben fordulhat elő, hogy a megoldó a bizonyítás során elakadna, ezért nekem, hasonlóan a második megoldáshoz, ez is egy kézenfekvőbb módszer, mint az első.

Függvényelemzéses feladatok

I. Tört függvény minimuma és maximuma[1]

A $0 \leq x \leq 5$ *valós számokra értelmezzük a következő függvényt:* $f(x) = \frac{2x^2-9x-11}{x^2-5x-6}$

Határozza meg az f legnagyobb és legkisebb értékét!

A feladat megoldásai azt mutatják be, hogy a függvényvizsgálat egyes részei elemi úton is elvégezhetőek. Illetve harmadik, saját megoldásként, a feladatot újrafogalmazásával bemutatom, hogy milyen nagymértékben hathat a gondolkodásunkra egy feladat megszövegezése.

Első megoldás:

A tört számlálóját alakítsuk át úgy, hogy a nevező kétszerese szerepeljen benne összeadandóként, majd tagonként végezzük el az osztást, illetve a második tagot egyszerűsítsük:

$$f(x) = \frac{2x^2-9x-11}{x^2-5x-6} = 2 + \frac{x+1}{(x+1)(x-6)} = 2 + \frac{1}{x-6}$$

Az f függvény a [0;5] zárt intervallumon szigorú monoton csökken. Maximumát ezért az intervallum kezdőpontjánál, $x = 0$-nál veszi fel, s értéke

$$f(0) = 2 + \frac{1}{-6} = \frac{11}{6}$$

Minimumát az intervallum jobboldali végpontjánál, $x = 5$-nél veszi fel, ennek értéke

$$f(5) = 2 + \frac{1}{-1} = 1$$

Megjegyzés: Ez a megoldás a függvényt, az egész rész „leválasztásával", frappáns módon átalakítja. Így egy könnyebben, elemi úton is vizsgálható függvény keletkezik.

[1] 2000. május 22. délutáni matematika érettségi feladatsor 5. feladat

Második megoldás:

Az f, deriválható függvény monotonitására első deriváltjának előjeléből következtethetünk. Ebben az esetben a derivált:

$$f'(x) = \frac{(4x-9)(x^2-5x-6)-(2x^2-9x-11)(2x-5)}{(x^2-5x-6)^2} = -\frac{x^2+1}{(x^2-5x-6)^2}$$

Mivel a nevező zérus helyei -1 és 6, a derivált is mindenütt értelmezve van a [0;5] zárt intervallumon.

f' negatív minden megengedett x-re, azaz f szigorúan monoton csökken a [0;5] intervallumon. Maximumát ezért az intervallum kezdőpontjánál $x = 0$-nál veszi fel, és értéke $\frac{11}{6}$. Míg minimumát az intervallum jobboldali végpontjánál, $x = 5$-nél veszi fel, értéke 1.

Megjegyzés: Ez a megoldás egy egyetemistához közel állóbb módszerrel, deriválással végzi el a feladatot, melynek segítségével meghatározható egy alkalmas függvény monotonitása és esetleges szélsőértékei egy adott intervallumon. Fontos megemlíteni, hogy ez talán a legkézenfekvőbb, de nem mindig a legegyszerűbb megközelítése (lásd „Négyzetbe írt háromszög” feladat) a szélsőérték példáknak.

Harmadik, saját megoldás:

Érdemes meggondolni, hogy vajon eszünkbe jutna-e a deriválás, ha a feladat kicsit másképpen lenne fogalmazva:

Milyen $a \in [0;5]$ *esetén a legnagyobb illetve a legkisebb az* $\frac{2a^2-9a-11}{a^2-5a-6}$ *algebrai tört értéke?*

Ebben a megfogalmazásban az a fontos, hogy nem feltétlenül juttatjuk eszébe a megoldónak, hogy függvényként vizsgálja a törtet, ezért sem x-szel jelöltem az ismeretlent. Így egy szabadabb környezetbe helyeztük a feladatot, és könnyen lehet, hogy szembetaláljuk magunkat érdekesebbnél érdekesebb megoldási módokkal.

Ekkor az én megoldásom a következőképpen alakulna:

Az első megoldáshoz hasonló úton hozzuk a törtet egyszerűbb alakra: $2-\frac{1}{6-a}$. Ekkor már csak azt kell megvizsgálnunk, hogy a 2-ből milyen $a \in [0;5]$ esetén vonjuk ki legnagyobb illetve a legkisebb számot, így megkapva a kért értékeket. Az $\frac{1}{6-a}$ akkor a legnagyobb, ha a nevező a legkisebb értéket veszi fel, tehát $a = 5$ esetén.

Az $\frac{1}{6-a}$ akkor a legkisebb, ha a nevező a legnagyobb értéket veszi fel, tehát $a = 0$.

II. Paraméteres törtfüggvény monotonitása[1]

Legyen $f(x) = \frac{3x-6}{x-p}, x \in \boldsymbol{R} \setminus \{p\}$. A p paraméter mely értékénél lesz az f függvény a $]3;\infty[$ intervallumon szigorúan monoton növekvő?

Ehhez három különböző megoldás van, melyek egyenként, mint ahogy ez lenni szokott, más-mást hangsúlyoznak ki a feladatból. Illetve, sajnos, a harmadik módszer nem teljesen helytálló, erre kitérek a megoldás után.

Első megoldás:

Alakítsuk át $f(x)$-et a következő alakra:

$$f(x) = 3 + \frac{3(p-2)}{x-p}$$

Ha $p > 2$ rögzített, akkor a $\frac{3(p-2)}{x-p}$ tört számlálója pozitív, mivel ekkor a feladat alapján $x > p$ $x \in]3;\infty[$ és $x > p$ együttes teljesülése esetén a nevező növekvő x-re pozitív és növekvő lesz, tehát (a pozitív számláló miatt) a tört értéke csökken. Ez azt jelenti, hogy $p > 2$ esetén az f függvény a $]3;\infty[$-on nem lehet szigorúan monoton növő.

Ha $p = 2$, akkor minden $x \in]3;\infty[$ esetén $f(x) = 3$. Az f tehát nem szigorúan monoton növő.

Ha $p < 2$ rögzített, akkor a $\frac{3(p-2)}{x-p}$ tört számlálója negatív, a nevező pozitív, ekkor $x \in]3;\infty[$ és $x > p$ együttes teljesülése esetén a nevező növekvő x-re pozitív és növekvő, tehát

[1] 2002. május 22. délelőtti matematika érettségi feladatsor 7. feladat

(a negatív számláló miatt) a tört értéke növekvő. Ez azt jelenti, hogy az f függvény szigorúan monoton növekvő a $]3;\infty[$-on.

Összefoglalva: f pontosan akkor szigorúan monoton növekvő a $]3;\infty[$ intervallumon, ha $p < 2$.

> **Megjegyzés:** Ez a módszer mondható a legelegánsabbnak, az $f(x)$ függvény egy egyszerűbb átalakításával átláthatóbbá teszi a problémát, majd az új formával dolgozik tovább. Az ilyen átalakítás, már az előző feladatnál is hasznos volt függvény szélsőértékének meghatározásánál. Esetünkben a tört előjele egyértelműen meghatározza a monotonitást, emiatt a megoldás igen leegyszerűsödik. Így hamar befejezhető a feladat.

Második megoldás:

Az f pontosan akkor szigorúan monoton növő a $]3;\infty[$-on, ha tetszőleges $x_1, x_2 \in]3;\infty[$ választással az $x_2 > x_1$ fennállása esetén

$$f(x_2) = \frac{3(x_2-2)}{x_2-p} > \frac{3(x_1-2)}{x_1-p} = f(x_1) \qquad (1) \qquad \text{is igaz } (x_1, x_2 \neq p).$$

A (1) egyenlőtlenséget ekvivalens átalakításokkal előbb az $\frac{(x_2-2)(x_1-p)-(x_1-2)(x_2-p)}{(x_1-p)(x_2-p)} > 0$ alakra hozva, majd tovább alakítva az $\frac{x_1x_2-2x_1-px_2+2p-x_1x_2+2x_2+px_1-2p}{(x_1-p)(x_2-p)} > 0$, végül a

$$\frac{(2-p)(x_2-x_1)}{(x_1-p)(x_2-p)} > 0 \qquad (2)$$

egyenlőtlenséghez jutunk.

Ha $p < 2$, akkor a bal oldali tört számlálója nyilvánvalóan pozitív ($x_2 > x_1$ miatt); másrészt $x_1, x_2 \in]3;\infty[$ miatt a nevező mindkét tényezője is pozitív, tehát az (1) egyenlőtlenség igaz. Ez azt jelenti, hogy $p < 2$ esetén az f szigorúan növő a $]3;\infty[$ intervallumon.

Ha $p = 2$, akkor a (2) egyenlőtlenség minden $x_1, x_2 \in]3;\infty[$ esetén hamis, tehát f nem szigorúan monoton növő a $]3;\infty[$ intervallumon.

Ha $p > 2$, akkor $(2-p)(x_2 - x_1) < 0$, ezért a (2) egyenlőtlenség csak akkor lehet igaz, ha $x_1 < p < x_2$ teljesül tetszőlegesen választott $x_2 > x_1 > 3$ esetén. Ez azonban lehetetlen tetszőleges p-re az intervallumból. A $p > 2$ választás esetén tehát az f nem szigorúan növő a $]3; \infty[$ intervallumon.

Összefoglalva: f pontosan akor szigorúan monoton növekvő a $]3; \infty[$ intervallumon, ha $p < 2$.

> **Megjegyzés:** Ez a megoldás a szigorú monotonitás definíciója felől közelíti meg a feladatot. Láthatóan valamivel hosszabb a megoldás menete, mint az elsőé, de ez is egy alkalmazható módszer, mely különösebb nagy ötletet nem igényel.

Harmadik, saját megoldás:

Ha a p paraméter értékét 3-nál nagyobbnak választjuk, akkor a $]3; \infty[$ intervallumon nem lehet szigorúan monoton növekvő az f függvény, mivel p a feladat feltételei szerint ($x \in \boldsymbol{R} \setminus \{p\}$) nem eleme az értelmezési tartománynak.

Ennek az állításnak a bizonyítása a következő:

Mivel p nem eleme az értelmezési tartománynak, ezért az $x = p$ egyenes lesz a hiperbola függőleges aszimptotája. Ismert, hogy ahogy a hiperbola grafikonja megközelíti a függőleges aszimptotát úgy az egyik oldalról közelítve $f(x) \to +\infty$, míg a másik oldalról $f(x) \to -\infty$. Ha a hiperbolánk két ága eleve szigorú monoton csökkenők, akkor nyilvánvaló, hogy az f függvény nem lehet szigorú monoton növő.

Ellenkező esetben az aszimptotánál törik meg a növekedés, mivel $\lim_{x \to -p} f(x) = +\infty$ és $\lim_{x \to +p} f(x) = -\infty$, tehát lesz olyan $\varepsilon > 0$, melyre $f(x - \varepsilon) > f(x + \varepsilon)$, vagyis a függvény nem szigorú monoton növő.

Ezzel bizonyítottuk az állítást, és a megoldás a továbbiakban a következőképpen alakul:

Ha $p \leq 3$, akkor $]3; \infty[\subset D_f$ és ezen az intervallumon f deriválható.

$$f'(x) = \frac{3(2-p)}{(x-p)^2}, x \in]3; \infty[.$$

Ha $2 < p \leq 3$, akkor $(x-p)^2 > 0$ miatt $f'(x) < 0$ teljesül minden $x \in]3; \infty[$ esetén, tehát az f szigorúan monoton csökkenő a megadott intervallumon.

Ha $p = 2$, akkor $f'(x) = 0$ minden $x \in]3; \infty[$ esetén, tehát az f ezen az intervallumon állandó, így nem szigorúan monoton.

Ha $p < 2$, akkor minden $x \in]3; \infty[$ esetén teljesül, hogy $f'(x) > 0$, az f szigorúan monoton növekvő a megadott intervallumon.

> **Megjegyzés:** Ez a megoldás valójában félig a megoldó kulcsban szereplő harmadik megoldásból áll. Azonban abból hiányzott az első kijelentés bizonyítása „Ha a p paraméter értékét 3-nál nagyobbnak választjuk, akkor a $]3; \infty[$ intervallumon nem lehet szigorúan monoton növekvő az f függvény, mivel p nem eleme az értelmezési tartománynak.” Míg ez az állítás speciálisan csak erre a függvényre igaz. Ha vesszük $g(x) = x - p$, $x \in]3; \infty[/p$ függvényt, azonnal látható, hogy hamis az imént idézett állítás.

TOVÁBBI FELADATOK ÉRDEKES MEGOLDÁSOKKAL

Ebben a fejezetben igen vegyes forrásokból válogattam össze a feladatokat és megoldásaikat. Több feladat különböző egyetemi illetve középiskolai órán hangzott el és a különböző megoldásaik az oktatók, hallgatók illetve saját munkám gyümölcse. Ezek mellett módszertani könyvek, cikkek is forrásul szolgáltak. Fontos kiemelnem, hogy néhány feladatot és megoldást a Középiskolai Matematikai Lapokból kölcsönöztem. A bevezetőben meg is említettem, hogy a javítás során találkozom érdekes diákmegoldásokkal, ezekre névtelenül utalok majd.

Szakdolgozatom ezen részében már csak néhány feladathoz fűzök megjegyzést. Ennek oka, hogy a feladatokat aszerint válogattam, hogy a megoldásaik már magukba foglalják a módszer alapötletét, különlegességét, így a külön elemzéstől több esetben eltekintettem.

Valószínűség számítás egyszerűen és bonyolultan

I. Keressük a cipő párját![1]

Egy nagy dobozban négy különböző pár cipő van. Véletlenszerűen kiválasztunk két darab cipőt. Mennyi a valószínűsége annak, hogy ez a két darab cipő éppen egy pár lesz?

Első megoldás: szokásos módon

A 8 cipőből 2-t $\frac{8 \cdot 7}{2}$- féleképpen választhatunk ki. Tehát az összes eset száma: 28

A 8 cipőből egy párat 4-féleképpen választhatunk ki. Tehát a kedvező esetek száma: 4

A pár kiválasztásának valószínűsége így $\frac{4}{28} = \frac{1}{7}$.

Második, diákmegoldás:

Képzeljük el, hogy egymásután vesszük ki a két darab cipőt. Először kiveszünk egy darab cipőt. Mekkora valószínűséggel húzzuk ki éppen a párját?

A dobozban az első cipő kihúzása után 7 darab cipő van. Ezek közül csak egy lesz a párja a már kihúzott cipőnknek. Így a kérdezett valószínűség $\frac{1}{7}$

---

[1] Komáromi Annamária matematika- és fizikatanár óráján elhangzott példa

Megjegyzés: Ismét egy frappáns gondolkodási módot láthattunk, melyet egy gimnazista diák vetett fel. Ez is mutatja számunkra, hogy sokszor elemi gondolkodással is eljuthatunk a jó megoldáshoz. Ezen felül az is előfordulhat, hogy az elemibb az egyúttal a gyorsabb megoldás is. Érdemes meggondolni, hogy ennél a feladatnál a $\frac{4}{28}$-ad felírása mögött mennyire más gondolat rejlik, mint amikor az iménti megoldó rögtön az $\frac{1}{7}$-et írja fel.

II. Az előkóstoló esélyei[1]

Egy király előkóstoló szolgája, aki a mérgezett ételeket hivatott kiszűrni, 0,001 valószínűséggel nem veszi észre a mérget, míg 0,97 valószínűséggel a jó ételre is azt mondja, hogy mérgezett. Az ételek 5%-a valóban mérgezett. Mennyi a valószínűsége, hogy az étel valóban mérgezett volt, feltéve, hogy az előkóstoló azt mondta, hogy mérgezett?

Első, saját megoldás: Bayes tételével:

A: az előkóstoló azt mondja, hogy mérgezett az étel

$P(B_1)$: 0,05 az étel mérgezett , $P(B_2)$: 0,95 az étel nem mérgezett

Így a következőket tudjuk kiszámolni:

$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2)$$

$$P(A|B_1) = 1 - P(\bar{A}|B_1) = 1 - 0{,}001 = 0{,}999$$

illetve $P(A|B_2) = 0{,}97$ a feladat alapján.

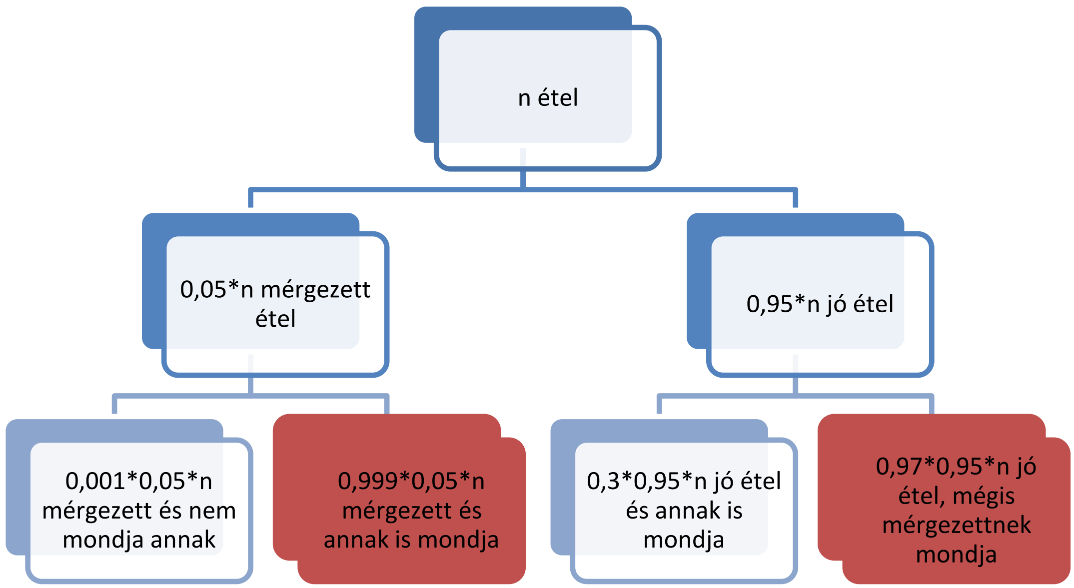
Így: $P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) = 0{,}999 \cdot 0{,}05 + 0{,}97 \cdot 0{,}95 = 0{,}9145$ Így már a Bayes-tétellel kiszámolható a kérdezett valószínűség:

$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1) \cdot P(B_1)}{P(A)} = \frac{P(A|B_1) \cdot P(B_1)}{P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2)} \approx 0{,}05$$

[1] Vancsó Ödön, adjunktus Valószínűségszámítás gyakorlatán elhangzott feladat

Második megoldás:

n étel esetén:



Ekkor a válasz a $\frac{\text{„mérgezett és annak is mondja" cella}}{\text{bordóval jelölt cellák összege}} \approx 0{,}05$.

> **Megjegyzés:** Valószínűségszámítás gyakorlaton találkoztam először ezzel a megoldási módszerrel Vancsó Ödön tanár úr levezetésében. Ez a fajta megoldás, a „kettős diagram" módszere egy középiskolás számára is érthetőbbé, jobban átláthatóbbá teszi a feladatot.

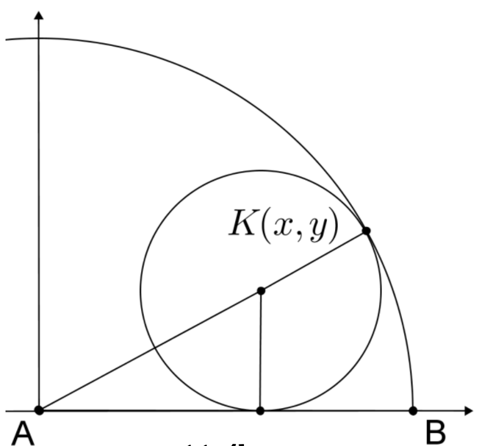
Két feladat eltérő megoldásokkal

I. Gótikus ablakba írt kör középpontja[1]

Az AB szakasz és két körív, AC és BC háromszögletű idomot zár be. Az egyik kör középpontja A, a másiké B, és mindkét kör átmegy a másik középpontján. Írjunk a háromszögletű idomba mind a három határvonalat érintő kört. Ezt az alakzatot néha gótikus ablakdíszítésben láthatjuk.

A feladat valójában visszavezethető egy pontnak, a keresett kör középpontjának megszerkesztésére. Az egyik mértani hely nyilvánvaló: az AB szakasz felezőmerőlegese, az adott háromszögletű idom szimmetriatengelye. Még egy mértani helyet kell találnunk.

Első megoldás



11. ábra

Figyeljük azt a kört, ami nem három, hanem csak két határvonalat érint: az AB szakaszt és az A középpontú körívet (lásd a **11. ábra**). E kör középpontjának mértani helyét határozzuk meg koordináta geometria segítségével.

Derékszögű koordinátarendszerünk origója essen egybe A ponttal, és x tengely menjen át a B ponton. Jelöljük a változó kör középpontjának koordinátáit x-szel és y-nal. Kössük össze ezt a középpontot a két érintési ponttal. Így a kör egy-egy sugarát kaptuk meg, melyek hossza megegyezik, ezért kétféleképpen fejezhetjük ki sugár hosszát (legyen $AB = a$):

$$y = a - \sqrt{x^2 + y^2}$$

Ezt átalakítva a következő egyenletet kapjuk:

$$x^2 = a^2 - 2ay$$

Ebből kiderül, hogy a változó kör középpontjának mértani helye egy parabola, amelyet szerkesztéseknél közvetlenül nem használhatunk.

[1] Pólya György: A problémamegoldás iskolája, Tankönyvkiadó, Budapest 1998

Vegyük a másik mértani hely (AB szakasz felezőmerőlegese) egyenletét: $x = \frac{a}{2}$ Mivel a kör középpontja a két mértani hely metszeténél van, így a parabola egyenletébe $x = \frac{a}{2}$-t helyettesítve megkapjuk a keresett kör középpontjának y koordinátáját is:

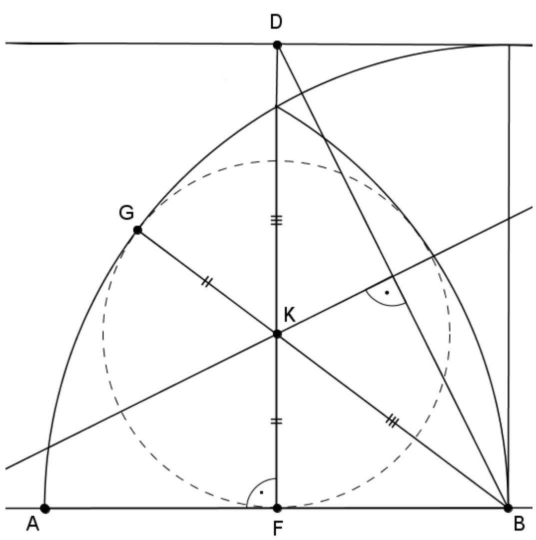
$$\frac{a^2}{4} = a^2 - 2ay$$

$$8ay = 4a^2$$

$$y = \frac{3a}{8}$$

Ezt figyelembe véve az adott $AB = a$ hosszúság felhasználásával könnyen megszerkeszthetjük a keresett kört.

Második, saját megoldás



12. ábra

Tegyük fel, hogy megszerkesztettük a keresett középpontot (lásd **12. ábra**). Vizsgáljuk a kész ábrát!

Húzzuk be a B köré írt körív azon érintőjét, mely párhuzamos AB-vel. Ezen érintő metssze az AB szakasz felezőmerőlegesét D pontban. Ekkor $DF = AB = GB$, ahol G a beírt kör érintési pontja a B fölé írt körívvel.

A beírt kör középpontja, K ugyanolyan távol van az érintési pontoktól, emiatt $KG = KF$.

Felírható, hogy $DK = DF - KF = GB - KG = KB$. Tehát BKD egy egyenlőszárú háromszög, emiatt K illeszkedik a BD szakasz felezőmerőlegesére. Így megkaptuk K egy másik mértani helyét, ezért a keresett pont Az AB és DB szakaszok felezőmerőlegeseinek metszéspontjaként megszerkeszthető.

II. Teljes indukció és a komplex számok[1]

Bizonyítsuk be, hogy bármely $n \geq 1$ *esetén:*

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \ \dots = \ 2^{\frac{n}{2}} \cdot \cos\frac{n\cdot\pi}{4} \qquad (1)$$

$$\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \binom{n}{7} + \ \dots = \ 2^{\frac{n}{2}} \cdot \sin\frac{n\cdot\pi}{4} \qquad (2)$$

A két megoldás rávilágít, hogy bár a teljes indukció egy jó és sokszor alkalmazható bizonyítási módszer, de előfordulhat, hogy más úton hamarabb célba érünk.

Első megoldás:

Az $(1+i)^n$ kifejezést trigonometrikus alakba írva, majd alkalmazva a Moivre-képletet kapjuk, hogy $(1+i)^n = \left[\sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)^n\right] = 2^{\frac{n}{2}}\cdot\left(\cos\frac{n\cdot\pi}{4} + i\cdot\sin\frac{n\cdot\pi}{4}\right)$

Ugyanakkor a binomiális tétel alkalmazásával és a tagok megfelelő csoportosításával adódik:

$$(1+i)^n = 1 - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \ \dots + i\cdot\left[\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \binom{n}{7} + \ \dots\right].$$

A fenti összefüggések bármely $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ esetén érvényesek. A valós és az imaginárius részeket egyenlővé téve adódik az (1) és (2) összefüggés.

Második megoldás:

Teljes indukció módszerével igazoljuk a fenti összefüggéseket.

$n = 1$ esetén mindkét összefüggés igaz, mivel $\binom{1}{0} = 1 = 2^{\frac{1}{2}}\cdot\cos\frac{\pi}{4}$ és $\binom{1}{1} = 1 = 2^{\frac{1}{2}}\cdot\sin\frac{\pi}{4}$.

Tegyük fel, hogy n számra igazak az állítások. Állítjuk, hogy $(n+1)$-re is igaz marad mindkét összefüggés. Tekintsük bizonyítandó állításként (1) összefüggést $(n+1)$-re :

$$\binom{n+1}{0} - \binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{4} - \binom{n+1}{6} + \ \dots = \ 2^{\frac{n+1}{2}}\cdot\cos\frac{(n+1)\cdot\pi}{4}$$

[1] Fülöp Zsolt: "A tanár előnye a matematikai indukció tanítása során", A matematika tanítása c. módszertani folyóirat 2013/3, Mozaik kiadó, Budapest, 2013, 11-13. oldal

Alakítsuk a bal oldalt felhasználva az $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$ illetve az $\binom{n+1}{0} = \binom{n}{0}$ azonosságokat:

$$\binom{n+1}{0} - \binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{4} - \binom{n+1}{6} + \ \dots = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} - \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots =$$
$$= \left[\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \cdots\right] - \left[\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \ \dots\right] =$$
$$= 2^{\frac{n}{2}} \cdot \cos\frac{n \cdot \pi}{4} - \ 2^{\frac{n}{2}} \cdot \sin\frac{n \cdot \pi}{4} = 2^{\frac{n}{2}} \cdot \left(\cos\frac{n \cdot \pi}{4} - \sin\frac{n \cdot \pi}{4}\right)$$

Írjuk át a $\cos\frac{n\cdot\pi}{4} - \sin\frac{n\cdot\pi}{4}$ kifejezést az $a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\cos\left(x - \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)\right)$ képletet behelyettesítve, így igazolódik az indukciós feltevés:

$$2^{\frac{n+1}{2}} \cdot \cos\frac{(n+1)\cdot\pi}{4}$$

A fenti levezetésben felhasználtuk, az indukciós feltevést, vagyis azt, hogy egy n számra igazak az (1) és (2) állítások.

A (2) összefüggés az előbbiekhez hasonlóan igazolható:

$$\binom{n+1}{1} - \binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{5} - \binom{n+1}{7} + \ \dots = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} - \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \cdots =$$
$$= \left[\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \cdots\right] + \left[\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \ \dots\right] =$$
$$= 2^{\frac{n}{2}} \cdot \cos\frac{n \cdot \pi}{4} + \ 2^{\frac{n}{2}} \cdot \sin\frac{n \cdot \pi}{4} = 2^{\frac{n}{2}} \cdot \left(\cos\frac{n \cdot \pi}{4} + \sin\frac{n \cdot \pi}{4}\right)$$

Ismét a képlet segítségével a kifejezésünk $2^{\frac{n+1}{2}} \cdot \cos\frac{(n-1)\cdot\pi}{4}$-vel egyenlő.

A $\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ összefüggést beírva megkapjuk az indukciós feltevést.

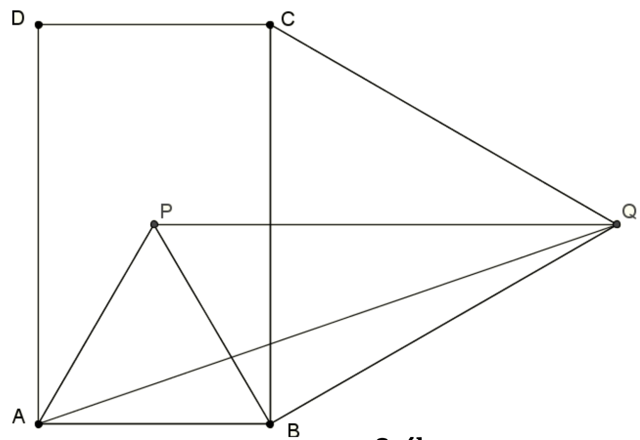
Néhány geometria feladat a KöMaL-ból

I. Téglalap és két szabályos háromszög[1]

Az $ABCD$ téglalapban $AB = 1$, $BC = \sqrt{3}$. Az AB oldalra befelé, a BC oldalra kifelé szabályos háromszöget rajzolunk, így kapjuk a P, illetve a Q pontokat. Mekkora az APQ háromszög területe?

A megoldó kulcs megoldása:

Mivel az APB szabályos háromszög oldala 1, ezért a magassága $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ez azt jelenti, hogy PQ párhuzamos az AB oldallal, vagyis az APQ háromszögben a PQ oldalhoz tartozó magasság hossza $\frac{\sqrt{3}}{2}$. A PQ hossza AB felének és a CBQ háromszög magasságának összegével egyenlő, azaz $\frac{1}{2} + \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2$. Vagyis a keresett terület: $T_{APQ} = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



8. ábra

Megjegyzés: Sok beküldő evidensnek vette, hogy $PQ \parallel AB$-vel, mivel „látszik az ábrán". Így a megoldásuk hiányos volt, ezért emelnék ki egy olyan módot, amellyel ezt lényegében fel se kell használnunk.

Egyik beküldő megoldása:

$PBQ\angle = 30° + 60° = 90°$, azaz PBQ háromszög derékszögű, melynek PQ átfogója Pitagorasz tételével: $1^2 + \sqrt{3}^2 = 4 = PQ^2$, azaz $PQ = 2$

Így PBQ olyan derékszögű háromszög, ahol az egyik befogó (PB) fele az átfogónak (PQ), ekkor PB-vel szemközti szög, $PQB\angle = 30°$ kell legyen, így $QPB\angle = 60°$

Ekkor APQ háromszögben ismerjük $APQ\angle$ -et és az őt közrefogó két oldal hosszát, tehát kiszámítható a területe: $T_{APQ} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \sin(60° + 60°)}{2} = \frac{2 \cdot \sin 120°}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

[1] Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok 2013/9, K.401-es számú feladat

Megjegyzés: Ennek a megoldási módszernek az a nagy előnye, hogy nem használja fel, hogy $PQ \,||\, AB$. Ez a feladat egy tipikus példája annak a hibás gondolkodásnak, amit geometriában gyakran elkövetünk: az ábra alapján elfogadunk valamit, ami valójában bizonyításra szorulna, esetünkben, hogy $PQ \,||\, AB$.

II. Egy pontban metsző egyenesek problémája[1]

Az ABC nem egyenlő szárú háromszög AC oldalán felvettük a P és Q belső pontokat úgy, hogy $ABP\measuredangle = QBC\measuredangle < \frac{1}{2} \cdot ABC\measuredangle$. Az A-ból és a C-ből induló belső szögfelezők a BP szakaszt a K, illetve L, a BQ szakaszt pedig az M, illetve N pontokban metszik. Mutassuk meg, hogy az AC, KN és LM egyenesek egy pontban metszik egymást.

Egy beküldő megoldása:

A szokásos jelölések mellett legyen $APB\measuredangle = \vartheta$. Mivel $\alpha \neq \gamma$ és $\alpha + \beta + 2\vartheta < \pi$, a szögfelező-tétel és a szinusz-tétel szerint:

$$\frac{QN}{NB} = \frac{QC}{BC} = \frac{\sin\vartheta}{\sin(\gamma+\vartheta)} \neq \frac{\sin\vartheta}{\sin(\alpha+\vartheta)} = \frac{PA}{BA} = \frac{PK}{KB}$$

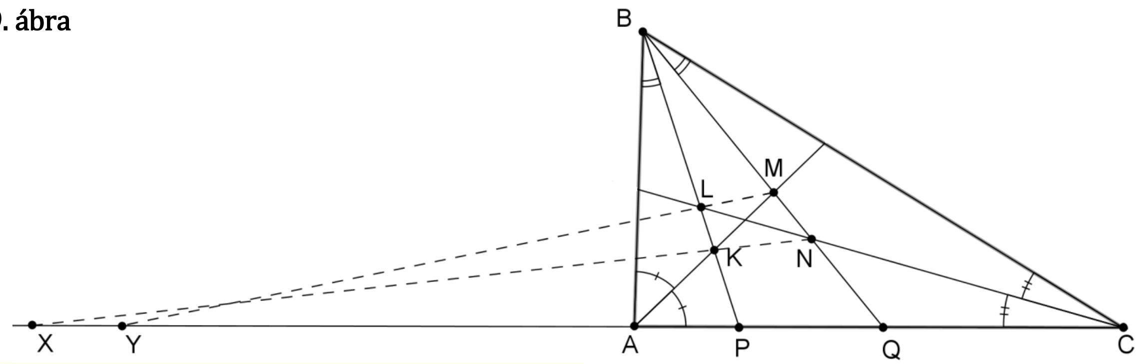
Ezért a KN egyenes nem párhuzamos az AC egyenessel, így azt egy X pontban metszi. Hasonlóképpen:

$$\frac{QM}{MB} = \frac{QA}{BA} = \frac{\sin(\beta-\vartheta)}{\sin(\gamma+\vartheta)} \neq \frac{\sin(\beta-\vartheta)}{\sin(\alpha+\vartheta)} = \frac{PC}{BC} = \frac{PL}{LB}$$

Így az LM egyenes az AC egyenest egy Y pontban metszi (lásd **9. ábra**).

[1] Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok 2012/10, B.4490-es számú feladat

9. ábra



A Menelaosz-tétel a BPQ háromszögre alkalmazva:

$$\frac{PX}{XQ} \cdot \frac{QN}{NB} \cdot \frac{BK}{KP} = -1 = \frac{PY}{YQ} \cdot \frac{QM}{MB} \cdot \frac{BL}{LP}$$

ahol a PX, XQ és ugyanúgy a PY, YQ irányított szakaszok közül is az egyik hossza negatív. Mivel a fentiek szerint (itt mindegyik irányított szakasz hossza pozitív)

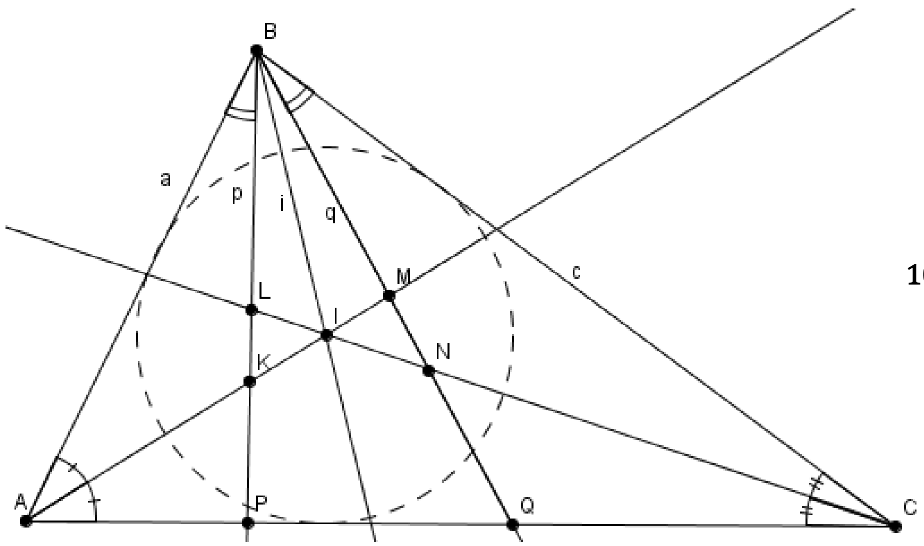
$$\frac{QN}{NB} \cdot \frac{BK}{KP} = \frac{\sin(\alpha + \vartheta)}{\sin(\gamma + \vartheta)} = \frac{QM}{MB} \cdot \frac{BL}{LP} \neq 1$$

Kapjuk, hogy $PX : XQ = 1 = PY : YQ \neq -1$. Azon Z pontok mértani helye a síkon, melyekre a $PZ : ZQ$ arány 1-től különböző állandó, egy olyan Apollóniusz-kör, mely elválasztja a P és Q pontokat. Ez a PQ egyenest két pontban metszi. Az irányításokat is figyelembe véve tehát $X = Y$, amint azt igazolni kellett.

> **Megjegyzés:** Ez a megoldás egy igen összetett levezetése az állítás bizonyításának. Mindemellett kitűnő példát ad arra, hogy egy bizonyos nehézségi szint után az elemi geometriai feladatok nagy tudástárat és jó tételhasználatot is követelhetnek a megoldóktól. Míg az egyetemen tanult geometriai eszközökkel hamar megkaphatjuk a kívánt eredményt, ahogy erre a következő megoldás is példa.

Második, saját megoldás:

Közelítsük meg a feladatot, mint egy projektív geometriai probléma. Ekkor az egyenesek egy ponton való metszése miatt azonnal tudjuk, hogy perspektív pontnégyesekkel illetve azok kettősviszonyaival kell dolgozni. Ekkor a jó egyenesek és pontok megtalálása után eljutunk a megoldáshoz.



10. ábra

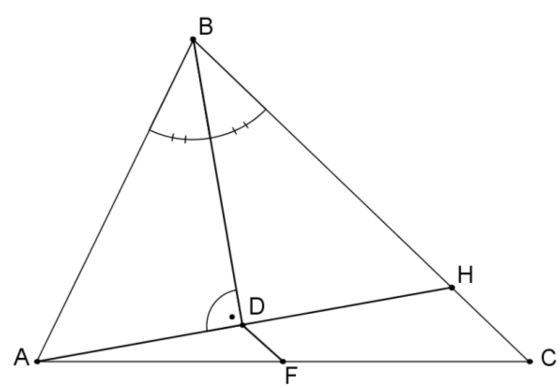
Legyen a beírt kör középpontja I, és a BA, BP, BI, BQ, BC egyeneseket rendre a, p, i, q, c-vel jelöljük (**10. ábra**), akkor $(I, A, K, M) = (i, a, p, q) = (i, c, q, p) = (I, C, N, L)$, ahol a zárójelek a megfelelő kettősviszonyokat jelölik. Az I, A, K, M és az I, C, N, L pontnégyes tehát perspektívek, és ezért az AC, KN, és ML egyenesek egy ponton mennek át.

III. Egy háromszögbe írt szakasz hossza, avagy mi is a kérdés?[1]

Az ABC háromszögben AB=28 cm, BC=38 cm. A B-ből induló belső szögfelezőre A-ból merőlegest állítunk, ennek metszéspontja a szögfelezővel D. Az AC oldal felezőpontja F. Hány cm hosszú a DF szakasz?

A megoldó kulcs megoldása:

A háromszög BC oldalán vegyük fel a H pontot úgy, hogy $BH = 28\,cm$ legyen. Ekkor az AHB háromszög egyenlő szárú, melynek a BD szögfelező egyben oldalfelező merőlegese is, így D az AH szakasz felezőpontja. Mivel F az AC szakasz felezőpontja, ezért DF az AHC háromszög középvonala, így feleakkora, mint a HC oldal. Tehát DF=5 cm.



11. ábra

[1] Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok 2013/3, K.374-es számú feladat

Egyik beküldő megoldása:

Mivel a feladat nem tér ki a B-nél levő β szögre, ezért azt bármekkorának vehetjük. Tegyük fel, hogy β közelít 0°-hoz. Ekkor BC oldal közelít, AB oldalhoz, egy egyenesbe esnek. Így a β szögfelezőjére A-ból állított AD merőleges egyenes közelít a 0-hoz, azaz $\beta = 0°$-nál $A = D$ lesz. Emellett AC oldal hossza $= BC - AB = 38 - 28 = 10$, így $AF = FC = 5$ lesz.

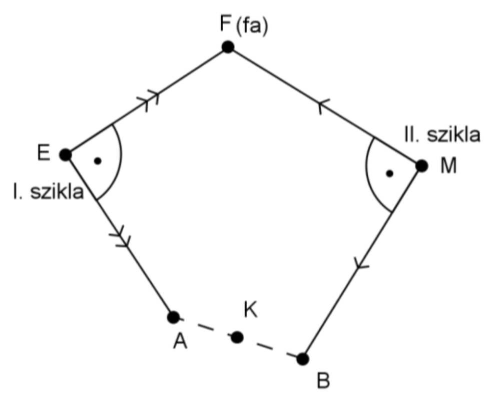
Mivel $A = D$, ezért $DF = AF = 5$. Tehát a kérdéses szakasz 5 cm hosszú.

Személyes megjegyzés:

Ezt a megoldást első elolvasásra talán hibásnak gondolnánk, hiszen bár a feladat nem tér ki $\boldsymbol{\beta}$ szögre, mégse lehetnénk benne biztosak, hogy a hossz nem függ tőle. Ellenben a kérdést „Hány centiméter a DF szakasz?" jól válaszolta meg. Mivel értelmezhette úgy a feladatot, hogy az adatok ismeretében megadható a DF szakasz hossza, így tehát nem függ a β szögtől a nagysága. Ebben az esetben tetszőlegesen (nekünk alkalmasan) is megválaszthatjuk a β szög nagyságát; itt a $\beta = 0°$ szélső helyzetet választotta a beküldő.

Ez tipikus példája annak, amikor a nyelv sajátosságai miatt egy rossznak tűnő megoldás, valójában elfogadható. Magam is és édesanyám is (középiskolai matematika- és fizikatanárnő) többször találkozunk javítás során olyannal, hogy a diák másképp értelmezi a feladat szövegét, mint ahogy a többség, és aszerint oldja meg a problémát. Ezek az esetek sokszor egy új feladat megszületését is eredményezik.

Ehhez hasonló esettel, a következő népszerű és ismert feladat során lehet például találkozni, melynek egy változata a következő:[1] *Kalózok egy lakatlan szigeten elássák kincsüket egy pálmafa és két szikla geometriai elhelyezkedésének segítségével (**12. ábra**). Később a fát kidöntötte egy vihar, így nem tudni hol van. Hogyan találják meg a kincset?*



12. ábra

[1] Ambrus Gabriella: "Rejtett kincsek, avagy tűnődés egy szokatlan feladattípuson", A matematika tanítása c. módszertani folyóirat 1997/2, Mozaik kiadó, Budapest, 2013, 3-6. oldal

Itt a kérdés megfogalmazási módja miatt érthetjük úgy, hogy biztosan megtalálható a kincs, tehát a pálmafától független annak elhelyezkedése. Akár tekinthetjük úgy, hogy a fa az egyik sziklánál van/volt közvetlenül ($E \equiv F$). Ekképpen a megoldás igen leegyszerűsödik: EM szakaszt 90°–kal elforgatjuk M körül, megkapjuk B-t. Így a kincs az EB szakasz felezőpontjánál lesz. De érthetjük úgy is, hogy egyáltalán nem biztos, hogy megtalálják a kincset, így ennek bizonyítása is szükségessé válik.

Azonban, ha úgy tesszük fel a kérdést, hogy *„megtalálják-e a kincset?”* Akkor a megoldás során biztos, hogy be kellene látnunk: K helye független F megválasztásától. Míg ha a kérdés: *„hogyan találják meg a kincset?”* akkor, ez nem követeli ezt meg a megoldótól, tehát el kell fogadnunk az $E \equiv F$ választással kapott megoldást. Ez utóbbi esetben, aki az említett függetlenséget is bizonyítja a megoldás során az nem követ el hibát, csak éppen feleslegesen „túlbizonyít”. Esetünkben a KöMaL feladatnál tehát a szövegezés alapján el kell fogadnunk a beküldő megoldását, azaz a speciálisan $\beta = 0°$ helyzettel választott levezetést.

Végül fontosnak érzem kiemelni, hogy a beküldő megoldása azért is kapott ekkora hangsúlyt a dolgozatomban, mert teljesen elszakad a megszokottól és igen érdekes úton közelíti meg a példát. Illetve azt is szeretném megjegyezni, hogy a megoldás számomra annyira különleges volt, hogy ezt javítva fogalmazódott meg bennem gyakorlatilag a szakdolgozatom témája.

Összefoglalás

Befejezésül a dolgozatban bemutatott problémák és változatos megoldásaikból levont tanulságot emelném ki. Ahogy a bevezetésben is írtam, tanári pályára készülve, fontosnak tartom napi renden tartani, hogy a matematika sok szabadságot ad nekünk. Ez okból a mai napig is sokszor felidézem egyik régi tanárom összefoglaló gondolatát a matematikáról: „A matematikát azért találták ki, hogy gondolkodjanak benne”. Azaz, folyton törekedjünk az újító és szokatlan megközelítésekre.

Nem csak a feladat megoldásakor indulhatunk el különböző utakon, hanem már a feladat értelmezésekor is több „megoldás” adódhat. Ezek a nyelvi sajátosságokból adódó félreértelmezések gyakran új feladatok megszületéséhez, új gondolkodásmód megismeréséhez vezetnek. Ezen okokból mindig nyitottnak kell lennünk egy számunkra szokatlanabb megoldással való találkozáskor, és erre ösztönözzük diákjainkat is.

Dolgozatom fő célja, hogy a sok feladat, melyeket leírtam, elemeztem, és többek között megoldottam, valóban megmutassák számunkra a matematika változatosságát, szépségét, és összetettségét. A megoldások során láthattuk, hogy gyakran az elemibb gondolkodás hamarabb vezet megoldásra, mint az egyetemi, magasabb ismeretek használata, és viszont. Tehát összegezve a matematika problémákat érdemes több oldalról megközelíteni, esetleg „áthelyezni” másik területre és úgy megoldani. Így a sikeres megoldás mellett folyamatosan forgatjuk, felhasználjuk a középiskolában és az egyetemen tanultakat.

Úgy gondolom, valóban sikerült teljesítenem a bevezetésben kitűzött célokat. Számomra igen tanulságos volt, mivel a készítés során megtapasztalhattam, hogy akár egy nagyon jónak és egyszerűnek tűnő alapötlet is vezethet egy sokkal bonyolultabb megoldáshoz, mint azt eredetileg gondoltam és természetesen sok egyéb fontos dolgot is, amelyről a dolgozatban több helyen említést is tettem. Ezen kívül, mivel több témakört próbáltam érinteni, újra elmélyedtem egyetemi illetve középiskolai ismereteimben. Tehát szakdolgozatom célját, hogy felserkentse az olvasója tudástárát, tágítsa gondolkodását, saját magamon tapasztalhattam meg.

Felhasznált irodalom

- 1999. május 25. délutáni érettségi feladatsor
  http://matek.fazekas.hu/portal/feladatbank/egyeb/Felveteli/fel99/fel99.pdf
  (utoljára látogatva: 2014.04.28.)

- 2000. május 22. délelőtti és délutáni érettségi feladatsor
  http://matek.fazekas.hu/portal/feladatbank/egyeb/Felveteli/fel00/fel00.pdf
  (utoljára látogatva: 2014.04.28.)

- 2001. május 21. délutáni érettségi feladatsor
  http://matek.fazekas.hu/portal/feladatbank/egyeb/Felveteli/fel01/fel01.pdf
  (utoljára látogatva: 2014.04.28.)

- 2002. május 22. délelőtti érettségi feladatsor
  http://www.felvi.hu/bin/content/tetel2004/2002/matematika/OFI_matematika_2002-05-21_00-00_OFI_A_J.pdf
  (utoljára látogatva: 2014.04.28.)

- Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok 2013/3, K.374-es számú feladat

- Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok 2013/9, K.401-es számú feladat

- Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok 2012/10, B.4490-es számú feladat
  http://www.komal.hu/verseny/feladat.cgi?a=feladat&f=B4490&l=hu
  (utoljára látogatva: 2014.04.28.)

- "Geometriai feladatok gyűjteménye I." , Tankönyvkiadó, Budapest, 1975, 344-es feladat

- Ambrus Gabriella: "Rejtett kincsek, avagy tűnődés egy szokatlan feladattípuson", A matematika tanítása c. módszertani folyóirat 1997/2, Mozaik kiadó, Budapest, 2013, 3-6. oldal

- Fülöp Zsolt: "A tanár előnye a matematikai indukció tanítása során", A matematika tanítása c. módszertani folyóirat 2013/3, Mozaik kiadó, Budapest, 2013, 10-16. oldal

- Pólya György: "A problémamegoldás iskolája" , Tankönyvkiadó, Budapest, 1985